Н.Г. Баранец, А.Б. Верёвкин

КОНЦЕПЦИЯ МАТЕМАТИКИ А.Н. КОЛМОГОРОВА

Ключевые слова: философия математики, интуиционизм, диалектико-материалистическая концепция математики, строение математической теории.

Аннотация: Статья посвящена истории формирования диалектико-материалистического образа математики. Проанализирована концепция математики А.Н. Колмогорова. Описана эволюция определения математики, данного им в БСЭ. Осмыслены философские основания и особенности колмогоровского представления о строении математической теории.

В идеологизированной атмосфере 1930-х гг. А.Н. Колмогоров[1] взялся написать словарную статью «Математика» для Большой советской энцикло-

[1] Колмогоров Андрей Николаевич (1903–1987) – выдающийся советский математик, академик, один из лидеров Московской математической школы. В 1922 построил ряд Фурье, расходящийся почти всюду. Эта работа принесла ему мировую известность. Первые публикации Колмогорова были посвящены проблемам дескриптивной и метрической теории функций. Не принадлежа ни одному из направлений, участвовал в дискуссиях между формально-аксиоматическим течением Гильберта и интуиционистским Брауэра и Вейля. В 1925 доказал, что классическая логика погружается в интуиционистскую, и поэтому интуиционизм наследует все возможные противоречия формализма и в этом отношении не имеет никаких преимуществ. Внёс существенный вклад в теорию функций, теорию вероятностей, теорию стационарных случайных процессов, теорию гамильтоновых систем и другие области математики. Построил свою версию аксиоматического обоснования теории вероятностей (1933). В 1930 стал профессором МГУ, в 1933–39 был ректором Института математики и механики МГУ, многие годы руководил кафедрой теории вероятностей и лабораторией статистических методов. В 1935 получил

педии. Она была опубликована в 1938 г. В ней Колмогоров дал определение математики, базовое для советской науки на несколько десятилетий. До и после Колмогорова, соединившего энгельсовское определение с изложением новых математических тенденций в их развитии, советские математики пытались давать определения своей дисциплины. Но авторитет Колмогорова сделал его версию преобладающей и приемлемой для всех.

А.Н. Колмогоров о природе математического знания. Ещё в 1929 г. Колмогоров написал статью [1], в которой проанализировал основные позиции в философии математики, симпатизируя интуиционизму [2]. С начала XX в. возрастал интерес к изучению оснований математики. Авторы концепций иногда выходили за пределы собственно математических рассуждений и опирались на ту или иную философскую теорию познания. Формализм и интуиционизм обещали разрешить все затруднения исключительно в рамках своей науки. Возглавляемые Гильбертом формалисты превращали математику в символическую игру, в которой позволено всё кроме противоречий. Интуиционисты под руководством Брауэра изгоняли из математики понятия и методы, не имеющие оснований в общей для всех интуиции. Колмогоров писал о трудности оценки формалистского проекта в силу его незаконченности. Его восхищало искусство Гильберта восстанавливать вроде бы уже забракованные математические теории. Но главная проблема подхода Гильберта в том, что он не даёт «*никакого объяснения, чем же держалась математика до настоящего времени, почему, высказывая о бесконечности суждения, не имеющие никакого смысла, математики понимали друг друга, – продиктован только неумением найти выход более удовлетворительный*» [3]. Поэтому Колмогоров обратился к концепции Брауэра. Прежде всего – ради надеж-

---

степень доктора физико-математических наук, в 1939 был избран членом АН СССР. В 1941 году Колмогорову и Хинчину за работы по теории вероятностей была присуждена Государственная (Сталинская) премия. Был президентом Московского математического общества.

ды выяснить природу бесконечного. Колмогоров не отрицал наличия в интуиционизме потенциальной слабости: «*позволительно сомневаться, что интуиция и конструкция новых образов, исходя из натурального ряда, окажутся при этом надёжными руководителями. В частности, Броуэр изучает континуум в форме бесконечных последовательностей натуральных чисел, так как только в такой форме его естественно получать чисто логическими средствами. Исторически же идея континуума создалась посредством идеализации действительно наблюдаемых непрерывных сред; пока трудно представить себе, как отсюда извлечь опору для развития математической теории, но только это было бы прямым путём к пониманию природы математического континуума*» [4].

Колмогоров развил свою концепцию математического знания в ряде статей [5]. Логично, что именно ему было предложено написать статью «Математика» для Большой советской энциклопедии.

Эволюция статьи «Математика» в БСЭ. Первая энциклопедия СССР нуждалась в описании математики, удовлетворяющем идеологическим требованиям научных комиссаров, но вместе с тем отражающем сущность предмета. Было необходимо учитывать новейшие открытия советских историков, пропагандировавших *«Диалектику природы»* Энгельса и *«Математические рукописи»* Маркса. Поэтому в первой версии статьи в 1938 г. Колмогоров определил математику как «*науку о количественных и пространственных формах и отношениях реального мира*». А во второй версии 1954 г. и в последующих – уже как *«науку о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира»* [6]. Возможно, под влиянием идеологической критики Колмогоров дублировал определение Энгельса [7] 1877 г., соответствующее состоянию математики на начало XIX столетия: «*Чистая математика имеет своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, т.е. весьма реальное содержание. Тот факт, что это содержание проявляется в крайне абстрактной форме, может лишь слабо затушевать происхождение из внеш-*

него мира. Чтобы изучить эти формы и отношения в чистом виде, следует их оторвать от их содержания, устранить его как нечто безразличное для дела. Так получаются точки без протяжения, линии без толщины и ширины, ***а*** *и* ***б****,* ***х*** *и* ***у****, постоянные переменные»* [8].

Первое определение Колмогорова можно истолковать более широко, чем последующие – он отдавал в распоряжение своей науки любые *«отношения реального мира»*. Сюда можно отнести отношения причинно-следственные, логические, структурные, биологические, социальные, экономические, а не только количественные, по Энгельсу. Как мы уже видели ранее, претензии математиков на универсальность своей дисциплины никогда не нравились идеологическим работникам и номенклатурным волюнтаристам[2]. Тем не менее, Колмогоров не отказался от своих начальных слов: *«Принципиально область применения математического метода не ограничена: все формы движения материи могут изучаться математически»* [9]. Но разворот его мыслей на эту тему в поздних публикациях был сокращён.

Колмогоров вместе со многими своими коллегами искренне принимал идею Энгельса о том, что математика является продуктом реального мира, а не плодом чистого воображения, как предполагал немецкий экономист, математик и философ Е.К. Дюринг. Но сразу же после цитаты Энгельса Колмогоров пояснил: *«Действительный объём этого общего определения проще всего понять, рассмотрев основные понятия и разделы М. в порядке их возникновения. Мы увидим, что само это определение таит в себе возможности развития, приобретая новый, более широкий смысл с ростом науки. При этом мы отметим и более узкие определения, которые математика уже переросла»* [10]. В последующих переизданиях эта фраза была сглажена: *«В неразрывной связи с запросами техники и естествознания запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой,*

[2] Несколько позже преследование кибернетики в СССР (как и в США) было обусловлено нежеланием безответственных управленцев сдать свои выгодные позиции в экономике учёным и их компьютерам.

непрерывно расширяется, так что данное выше общее определение математики наполняется всё более богатым содержанием» [11]. Чтобы сделать статью более адекватной, Колмогоров для второго издания БСЭ добавил в неё раздел о современной математике, заметив: *«Таким образом, как в результате внутренних потребностей М., так и новых запросов естествознания круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., чрезвычайно расширяется: в него входят отношения, существующие между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, всё разнообразие форм пространств любого числа измерений и т.п. При таком широком понимании терминов «количественные отношения» и «пространственные формы» приведённое в начале статьи определение М. применимо и на новом современном этапе её развития»* [12].

Колмогоров упорядочил описание структуры математического знания, указав математические дисциплины, в том числе не соответствующие определению Энгельса, например, – математическую логику.

Периодизация истории математики по А.Н. Колмогорову. Для второго издания БСЭ 1949–60 гг. Колмогоров систематизировал сложившиеся к его времени представления об истории математики, выделив в ней четыре периода.

Зарождение математики он отнёс к древним цивилизациям Египта и Вавилона. В Древнем Египте были изобретены некоторые приёмы арифметических расчётов, записаны рецепты вычислений площадей и объёмов. В Вавилоне изобрели десятично-шестидесятеричную систему исчисления, использовали шестидесятеричные дроби, умели начислять ростовщические проценты. В эмпирических табличках вавилонян Колмогоров разглядел зарождение понятия функции.

Этап *элементарной математики* (с VI–V вв. до н.э. до конца XVI в. н.э.) начинается созданием эллинами элементарной геометрии и арифметики. Постепенно развивались алгебра и тригонометрия, востребованные решением практических задач астрономии и геодезии. Греческая геометрия стала образцом математической теории. Ещё дольше развивалась элементарная арифметика. Понятия иррациональных и отрицательных чисел были сложными математическими абстракциями, не имеющими наглядной опоры в опыте[3]. Алгебра как буквенное исчисление была заложена в III в. н.э. Диофантом[4], но оформлена только в XVI в. Виетом[5].

Колмогоров излагает историю древней математики в марксистском духе, указывая влияние на математику общественно-экономических факторов. Так, пифагорейские изыскания в арифметике связаны у него не только с мистикой и магией, но и с конкретными задачами строительства, навигации и землемерия. Внутренняя логика развития науки привела к тому, что греческие геометры перестали довольствоваться приближёнными, эмпирически найденными решениями и стали искать исчерпывающие решения проблем. Так было получено доказательство несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. На пути развития греческой математики стояли социально обусловленные препятствия: «*В 4 в. до н.э. в обстановке политич. реакции и*

---

[3] В отличие от более привычных натуральных чисел, дробей и геометрических фигур, востребованных в повседневной жизни.

[4] Диофант Александрийский – считается греческим учёным III в. н.э. из Египта. Автор *«Арифметики»* в 13 т., из которых известно 6. Обнаружение сочинения Диофанта приписывают астроному Региомонтану в 1463, когда тот был в Венеции в свите кардинала Виссариона. Но примерное содержание *«Арифметики»* стало известно гораздо позднее – в 1572 итальянский математик и инженер Рафаэль Бомбелли в своей трёхтомной *«Алгебре»* привёл 143 диофантовы задачи, якобы обнаруженные в Ватиканской библиотеке. В 1575 латинский текст шести глав *«Арифметики»* был опубликован Ксиландером, а в 1621 греческий текст был издан Баше де Мезириаком. В сохранившихся частях трактата изложены начала алгебры, указаны методы решения неопределённых уравнений различных степеней в рациональных положительных числах. Диофант первым для обозначения неизвестных и их степеней, обратных чисел, равенства и вычитания употреблял специальные символы – сокращения греческих слов.

[5] Виет Франсуа (1540–1603) – французский математик, создатель символической алгебры. Обозначал буквами не только неизвестные, но и коэффициенты уравнений. Это позволило выражать их корни формулами и производить арифметические действия над алгебраическими выражениями.

упадка могущества Афин наступает эпоха известного подчинения М. ограничениям, выдвинутым идеалистич. философией. Наука о числах строго отделяется здесь от «искусства счисления», а геометрия – от «искусства измерения». Опираясь на существование несоизмеримых отрезков, площадей и объёмов, Аристотель налагает общий запрет на применение арифметики к геометрии» [13]. Достижением математики того периода стало логическое оформление основ геометрии Евдоксом, автором теории пропорций и первого доказательства теоремы об объёме пирамиды. Расцвет античной математики поощрялся некоторыми государствами. Математики решали практические задачи: Архимед – в области гидротехники и военного дела, Эратосфен – в геодезии и картографии. Применение приближенных вычислений в прикладных задачах сочеталось с развитием математической строгости – Евклид систематизировал достижения в области геометрии и теории чисел. Теоретики позднего периода в основном комментировали древних авторов.

Вслед за наукой Античного Средиземноморья Колмогоров упоминает математику Китая. К её успехам он относит нахождение правил решения небольших систем линейных уравнений и биквадратных уравнений, разбор практических примеров т.н. *«Китайской теоремы об остатках»*, развитие приближённых методов вычислений, в частности, – нахождение значения константы π с точностью до 6 десятичного знака после запятой. Колмогоров замечает не прояснённую исторической наукой связь китайской науки со средневековой европейской.

Колмогоров указал достижения индийских математиков V–XII вв.: употребление десятичной системы исчисления и нуля для обозначения отсутствующего разряда; работа не только с дробями, но и с иррациональными и отрицательными числами. Индусы решали в целых числах неопределённые уравнения двух неизвестных первой и второй степени.

Достижения арабских математиков Колмогоров видел не только в сохранении античной и индийской традиции, но и в открытии новых методов. В алгебре арабы нашли правила решения уравнений второй степени и приближённых решений уравнений высших степеней, в геометрии – изобрели тригонометрические функции, в арифметике – стали применять десятичные дроби и открыли бином Ньютона.

Историю западноевропейской математики XII–XV вв. Колмогоров традиционно преподносит периодом усвоения наследия античной и арабской математики. Историю математики Колмогоров излагает с позиции презентизма. Например, без каких-либо оговорок относительно написания математических символов, он сообщил: *«Уже Леонардо Пизанский в сочинении «Цветок» (ок. 1225), в к-ром собраны предложенные ему и блестяще решённые им задачи, доказал неразрешимость уравнения:* $x^3+2x^2+10x=20$ *не только в рациональных числах, но и при помощи простейших квадратич. иррациональностей (вида* $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ *и т.п.)»* [14].

Колмогоров называл XVI в. первым веком превосходства Западной Европы над Древним миром и Востоком в астрономии и механике, а XVII в. – и в математике. Новая эра началась в Италии: Ферро (1515) и Тарталья (1530) нашли алгоритмы решения уравнений третьей степени, и вскоре Феррари (1545) – четвёртой. Виет (1591) основал алгебраическое исчисление, применив его к геометрическим задачам. Штифель (1544) открыл биномиальный закон, Стевин (1585) разработал арифметические правила для десятичных дробей. Колмогоров отметил важность XVII в. как времени создания математики переменных величин. Он отдал дань марксизму, процитировав Энгельса[6], но пояснив: «*Круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых теперь М., уже не исчерпывается числами, величинами и геометрическими фигурами. В основном это было обусловлено явным введением в М. идей движения и изменения. Уже в алгебре в скрытом виде содержится идея зависимости между величинами (значение суммы зависит от значений слагаемых и т.д.). Однако, чтобы охватить количественные*

[6] «*Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика, и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*» (*«Диалектика природы»*, 1952, с. 206).

отношения в процессе их изменения, надо было самые зависимости между величинами сделать самостоятельным предметом изучения. На первый план выдвигается понятие функции, играющее в дальнейшем такую же роль основного и самостоятельного предмета изучения, как ранее понятие величины и числа» [15]. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей открыло путь понятиям математического анализа, «*вводящим в М. в явном виде идею бесконечного к понятиям предела, производной, дифференциала и интеграла. Создаётся анализ бесконечно малых, в первую очередь в виде дифференциального исчисления и интегрального исчисления, позволяющий связывать конечные изменения переменных величин с их поведением в непосредственной близости отдельных принимаемых ими значений. Основные законы механики и физики записываются в форме дифференциальных уравнений, и задачи интегрирования этих уравнений выдвигается в качестве одной из важнейших задач М.*» [16].

В геометрию пришли идеи движения и преобразования. Была создана аналитическая геометрия и обнаружен способ переведения вопросов геометрии на язык алгебры и анализа. Выяснился геометрический смысл алгебраических и аналитических фактов.

В алгебре XVII–XVIII вв. преимущественно изучались вопросы о действительных корнях уравнений, разрабатывались методы их отделения и приближённого вычисления. Даламбер не вполне строго доказал *«основную теорему алгебры»* – о наличии комплексного корня у непостоянного алгебраического уравнения.

Развитие новой математики, по Колмогорову, было связано с созданием в XVII в. математического естествознания, нацеленного на объяснение отдельных природных явлений действием общих, математически сформулированных законов природы. Эволюция понятий математики соотносилась с осмыслением соотношений действительного мира, например, понятие производной вытекало из реальности понятия скорости в механике.

Колмогоров дал краткий очерк математических открытий в их взаимной обусловленности. Так, важной вехой дифференциального и интегрального исчисления стало открытие логарифмов Непером. Он обосновывал свои логарифмические таблицы непрерывным течением логарифма при изменении его аргумента. Так Непер ввёл представление о непрерывной функции, не заданной алгебраическим выражением или геометрическим построением. Создав координатный метод в геометрии, Декарт предложил классификацию кривых с подразделением их на алгебраические и трансцендентные. Исследования Ферма о максимумах и минимумах, разыскание касательных к кривым – содержат ещё не осознанные приёмы дифференциального исчисления. Астрономические исследования Кеплера и провозглашение «метода неделимых» Кавальери при определении объёмов тел вращения – стали ещё одним источником исследования бесконечно малых. В работах Ферма, Паскаля, Валлиса по нахождению площадей победило свободное употребление бесконечно малых. Одновременно Валлис, Меркатор, Ньютон, Лейбниц, Я. Бернулли развивали учение о бесконечных рядах.

Колмогоров высказался об авторстве открытия дифференциального и интегрального исчисления и о сути методов Ньютона и Лейбница: «*В отношении публикации приоритет этого открытия принадлежит Г. Лейбницу, давшему развёрнутое изложение основных идей нового исчисления статьях опубликованных в 1682–1686 гг. Наоборот, в отношении времени фактического получения основных результатов имеются все основания считать приоритет принадлежащим И. Ньютону, который к основным идеям дифференциального и интегрального исчисления пришёл в течение 1665–1666 гг. «Анализ с помощью уравнений» Ньютона в 1669 г. был передан им в рукописи английским математикам И. Барроу и Дж. Коллинзу и получил известность среди английских математиков…. Подход к делу у Ньютона и Лейбница, однако, различен. Для Ньютона исходными понятиями являются понятия «флюенты» (переменной величины) и её «флюксии» (скорости её изменения). Прямой задаче нахождения флюксий и соотношения между флюксиями по* *заданным флюентам (дифференцирование и составление дифференциальных уравнений) Ньютон противопоставлял обратную задачу нахождения флюент по заданным соотношениям между флюксиями, т.е. сразу общую задачу интегрирования дифференциальных уравнений…. Такая точка зрения была естественна для Ньютона как создателя математического естествознания: его исчисление флюксий являлось просто отражением той идеи, что элементарные законы природы выражаются дифференциальными уравнениями, а предсказание хода описываемых этими уравнениями процессов требует их интегрирования. Для Лейбница в центре внимания находился вопрос о переходе от алгебры конечного к алгебре бесконечно малых; интеграл воспринимался прежде всего как сумма бесконечно большого числа бесконечно малых, а основным понятием дифференциального исчисления являлись дифференциалы – бесконечно малые приращения переменных величин»* [17].

Колмогоров указывал социальные аспекты развития математического сообщества. Он отметил, что в XVII в. ещё не произошло строгой специализации научного сообщества, и математики были одновременно физиками-экспериментаторами и философами. А в XVIII в. и особенно в XIX в. математики уже идентифицируют своё профессиональное сообщество, хотя математическое естествознание и технические приложения остаются важной сферой деятельности: Эйлер занимался вопросами кораблестроения, Лагранж создал основы аналитической механики, а Лаплас внёс существенный вклад в астрономию и физику.

Период *современной математики* (XIX–XX вв.) знаменуется расширением предмета математики, изучением возможных типов количественных отношений и пространственных форм: сюда относятся отношения между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, разнообразие форм многомерных пространств.

Колмогоров показал, как накопление материала в предыдущие периоды привело к его логическому анализу и объединению с новых позиций. Новые тенденции проявились в открытии и исследовании комплексных чисел и функций комплексного переменного, в создании неевклидовой геометрии. Более сложной и менее очевидной становится взаимосвязь математики и естествознания. Новые теории стали возникать из внутренних нужд математики, как например – теория функций комплексного переменного Коши и *«воображаемая геометрия»* Лобачевского. Ранее найденные математические факты получили новый запрос естествознания. Так, теория групп, идущая от Лагранжа, изучавшего подстановки для разрешения в радикалах алгебраических уравнений, после результатов Абеля и Галуа, определений Кэли и Ли была применена Фёдоровым и Шенфлисом к описанию строения кристаллов, подчинённого групповым законам. В 1920–30-е гг. теория групп стала применяться в квантовой физике. В зависимости от запросов механики и физики возник и развивался векторный и тензорный анализ. Стало ясно, что с точки зрения механики и физики «скалярные» величины, отражаемые в понятии действительного числа, являются частным случаем величин многокомпонентных. Суть векторного и тензорного исчисления – в рассмотрении функциональных зависимостей между ними. Функциональный анализ перенёс векторные и тензорные методы в бесконечномерную ситуацию и оказался востребованным квантовой физикой.

Новизна современного этапа математики, по Колмогорову, заключается в сознательном и активном расширении изучаемых форм. «*Если прежде, напр., введение в употребление отрицательных и комплексных чисел и точная формулировка правил действий с ними требовали длительной работы, то теперь развитие М. потребовало выработки приёмов сознательного и планомерного создания новых геометрических систем, новых «алгебр» с «некоммутативным» или даже «неассоциативным» умножением и т.д. по мере возникновения в них потребности*» [18].

В течение XIX в. произошла перестройка всего склада математического мышления – была подорвана вера в незыблемость освещённых традицией аксиом, осознана возможность создания принципиально новых математических теорий, признано, что кажущиеся абстрактными математические теории могут находить конкретное практическое применение.

По Колмогорову, особенность предмета математики – в изучении количественных отношений, сохраняющих от конкретной действительности, от которой они отвлечены, только то, что предусмотрено в их определении. Преимущественно дедуктивный характер математики предопределяется тем, что все свойства чистых отношений должны содержаться в их определении. Применимость математических теорий в различных конкретных областях естествознания и техники обусловлена тем, что математика изучает такие связи, которые безразличны к конкретной природе объектов. Принципиальная новизна современной математики – в создании методов изучения общих и разнообразных отношений.

На понимание предмета и особенностей современной математики влияли интенсивные дискуссии об её обосновании в первой четверти XX в. Произошёл критический пересмотр исходных положений математики, была построена строгая система определений и доказательств. Необходимость такой работы проистекала из изменившихся взаимоотношений между развитием математических теорий и возможностями их практической проверки на материале естествознания и техники. Отложенная на десятилетия проблема проверки абстрактных теорий поставила вопросы об оценке строгости математических доказательств.

Концепция строения математической теории в понимании Колмогорова такова. К концу XIX в. оформился стандарт логической строгости, которому должна соответствовать математическая теория. Источником стандарта стала теория множеств. Математическая теория имеет дело с одним или несколькими множествами объектов, связанных некоторыми отношениями. Аксиомами задаются формальные свойства этих объектов и отношений, необходимые для развития теории. «*В соответствии с этим теория может считаться логически строго построенной только в том случае, если при её развитии не используется никаких конкретных, не упомянутых в аксиомах* *свойств изучаемых объектов и отношений между ними, а все новые объекты или отношения, вводимые по мере развития теории сверх упомянутых в аксиомах, формально определяются через эти последние*» [19]. Отсюда вытекает, что математическая теория, применимая к какой-либо системе объектов, автоматически применима и к любой изоморфной[7] системе.

Колмогоров считал, что теоретико-множественная концепция позволяет систематизировать разные математические теории. *«Так, чистая алгебра определяется как наука о системах объектов, в которых задано конечное число операций, применимых (каждая) к определённому конечному числу объектов системы и производящих из них новый объект системы»* [20]. Этим она отличается от анализа и геометрии, где необходимо введение предельных отношений, связывающих бесконечное число объектов.

Колмогоров указывал преемственность развития математических теорий. В изложении более специальных теорий используются ранее построенные теории. Например, в теории вероятностей применяются понятия натурального и действительного числа. Последовательное аксиоматическое изложение математических теорий облегчает понимание и позволяет избегать ошибок при продвижении к всё более сложным и общим образованиям. Благодаря привлечению идей теории множеств в конкретные математические исследования почти исчезли длительные неясности и разногласия по вопросу корректности определений и убедительности доказательств отдельных теорем.

Колмогоров замечает, что изложенная в теоретико-множественном понимании система аксиом ограничивает область применения данной матема-

---

[7] *«Изоморфизм»* – важное понятие современной математики, буквально означает *«однообразие»*. Отношения изоморфных объектов с любыми иными, но того же рода, неразличимы (Лемма Ионеды). Колмогоров пояснял, что употребляет термин изоморфизм как математическую идею *«моделирования»* явлений из какой-либо одной области явлениями иной природы. В этом же контексте системы объектов можно представлять особыми структурированными объектами (или объектами некоторой категории в математическом смысле).

тической теории, определяет свойства изучаемых объектов, но не даёт указаний относительно средств развития этой теории. Строение математической теории освещает математическая логика. Она рассматривает теории как дедуктивные и ищет способы решения математических проблем. Логическая дедукция разворачивается из конечного числа аксиом построением сколь угодно длинных цепей рассуждений, состоящих из звеньев, принадлежащих к конечному числу фиксированных для данной теории элементарных способов логического вывода. Математический алгоритм позволяет решать некоторый класс проблем строго определённым способом. В математической логике созидается общая теория алгоритмов. Колмогоров видел большие перспективы применения теории алгоритмов в вычислительной технике.

Колмогоров указал различие теории теоретико-множественного вида и теории дедуктивной. *«Было обнаружено, что понятие математической теории в смысле теории, охватываемой единой системой аксиом теоретико-множественного типа, существенно шире, чем логическое понятие дедуктивной теории: даже при развитии арифметики натуральных чисел неизбежно неограниченное обращение к существенно новым способам логического рассуждения, выходящим за пределы любого конечного набора стандартизированных приёмов»* [21].

Марксистский подход к истории математики проявляется у Колмогорова при описании взаимного влияния математики, естественных и технических дисциплин друг на друга. Колмогоров отмечает связь математики с практическими запросами общества. Изначально потребности общества в математике сводились к подсчёту предметов, измерению площадей земельных участков, счёту времени, планированию архитектурных сооружений и т.п. Математические исследования проводились с весьма ограниченным запасом основных понятий. И даже исследования в механике и физике удовлетворялись теми же основными понятиями. Только астрономия, задолго до развития математического естествознания в XVII–XVIII вв., предъявляла математике особенные требования, вызвав развитие тригонометрии. В XVII в. математики по запросу естествознания и техники начали изучать процессы движения, изменения и преобразования. С XIX в. связь между математикой и другими науками становится всё запутаннее, поскольку новые теории стали возникать из внутренних потребностей математики.

***

Диалектико-материалистическая концепция математики давала внятный ответ на вопрос о возникновении математического знания и статусе математических объектов. Математики, её развивавшие, со всей очевидностью понимали, что по мере эволюции математических дисциплин связь математических образов с материальным миром становится всё более сложной, и для появления новых математических теорий всё большее значение приобретают факторы, обусловленные внутренней логикой развития математических идей. Эта философия математики была создана выдающимися отечественными учёными, внесшими существенный вклад во многие области математического знания. Их глубокое понимание сущности современной науки и определённая просвещенность в отношении её истории, позволили сделать эту концепцию жизнеспособной и плодотворной. Например, её можно было эффективно использовать в качестве теоретического фундамента в историко-математических исследованиях. И к тому же она удовлетворяла потребность в историко-методологической рефлексии работающих математиков, не приходя в противоречие с официальной, государственно поддерживаемой идеологией.

Работа поддержана грантом РФФИ № 13-06-00005.

Литература:

1. Колмогоров А.Н. *«Современные споры о природе математики»*// Научное слово, 1929, №6, с. 41–54.

2. Колмогоров начал с описания трудностей на *«окраинах современной математики»* в абстрактных теориях, не мешающих классической математике, но требующих разрешения для развития новых областей математического знания. Противоречия имеют эпистемические корни: «*Когда часть*

математиков формулирует достаточно простой принцип теории множеств, кажущийся им очевидным, а другая её часть находит этот принцип лишённым какой бы то ни было убедительности, неизбежным становится теоретико-познавательный анализ смысла основных терминов, ими употребляемых. Дело идёт собственно о понятиях множества, его элемента и, особенно, о понятии существования. Довольно ясно, что формальное математическое определение этих понятий было бы пустой тавтологией» (с. 42).

3. Там же, с. 53.

4. Там же, с. 54.

5. Колмогоров А.Н. *«Современная математика»*// Фронт науки и техники. – М., 1934, №5/6, с. 25–28; *«Современная математика»*/ Сборник статей по философии математики. – М., 1936, с. 7–13; *«Теория и практика в математике»*// Фронт науки и техники. – М., 1936, №5, с. 39–42.

6. Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ Большая Советская Энциклопедия, 1-е издание. Т. 38, 1938, с. 359–405; была переработана для БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 464–483; повторена в Математической Энциклопедии. Т. 3, 1982; в Математическом энциклопедическом словаре, 1988, и коротко изложена в Новом Энциклопедическом Словаре, 2002.

7. Энгельс Ф. *«Анти-Дюринг»*/ Маркс К., Энгельс Ф. *«Сочинения»*, 2-е изд., т. 20, 1961, с. 37.

8. Энгельс Ф. *«Анти-Дюринг»*/ Маркс К. и Энгельс Ф. *«Сочинения»*, т. 14. – М.-Л., 1931. с. 39.

9. Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 1-е изд., т. 38, 1938, с. 380.

10. Там же, с. 360.

11. Колмогоров А.Н. *«Математика»*/ БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954, с. 464.

12. Там же, с. 476.

13. Там же, с. 467.

14. Там же, с. 470.

15. Там же, с. 471.

16. Там же, с. 471.
17. Там же, с. 473.
18. Там же, с. 476.
19. Там же, с. 477.
20. Там же, с. 477.
21. Там же, с. 478.