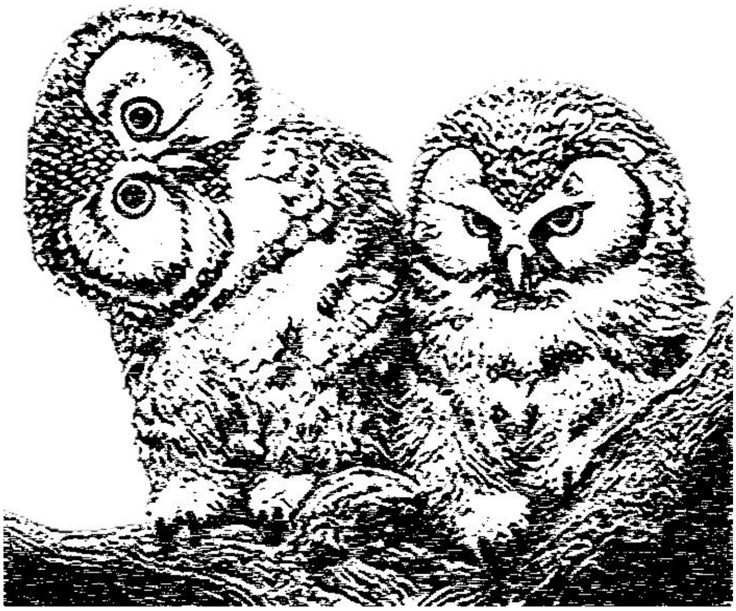
***А.Б. ВЕРЁВКИН***

# *ИСТОРИЯ И ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ*

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ АСПИРАНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ
01.00.00 – Физико-математические науки



Ульяновск-2013

ББК 22.1
УДК 519.51

**Рецензент:**
доктор философских наук, профессор В.А. Бажанов
(Ульяновский государственный университет)

**Верёвкин А.Б. История и философия математики** (учебно-методическое пособие для аспирантов). – Ульяновск: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2013. – 82 с.

В пособии представлены основные темы программы Государственного стандарта высшего профессионального образования по дисциплине «История и философия математики». Предложен список литературы для подготовки к экзамену.

© Верёвкин А.Б., 2013

*«Лучший метод предвидения будущего развития математических наук заключается в изучении истории и нынешнего состояния этих наук».*
*А. Пуанкаре*

В предложенных записках схематично разобраны основные вопросы аспирантского экзамена по истории и философии математики, указана литература, уточняющая и восполняющая пропущенные подробности. Поскольку затронутые темы по содержанию не всегда могут быть последовательно упорядочены, в них встречаются повторы, подчас дополняющие друг друга.

Упоминаемые материалы для самостоятельного изучения доступны в Интернете (или в университетской библиотеке) и могут быть найдены по своему названию, поэтому их переменные электронные адреса не даны. Необходимые сведения есть в энциклопедических и биографических словарях и справочниках,– будущий учёный должен пользоваться ими и в повседневной работе.

Каждый из рассмотренных вопросов заслуживает отдельного обширного исследования и не может быть исчерпан в краткой форме, но для хорошего ответа достаточно показа понимания заявленных тем. При достижении необходимого уровня понимания ответ может отличаться от предложенной схемы, и, таким образом, пособие предлагает скорее алгоритм изучения вопроса, чем ответ на него.

## Тема 1. Математика, её предмет, цели и место в науке

Изучение любого предмета должно начинаться с его работающего определения и установления его места в существующей системе знаний. Для этого важно прояснить его связи с другими предметами родственных областей. Данное правило применимо и к математике, как разделу научного знания.

Наиболее полное прояснение термина *«наука»* возникает при рассмотрении её в качестве рациональной деятельности, направленной на обнаружение, хранение, передачу и применение знаний, специализированных в конкретной предметной области[1]. *Знание вообще* означает обоснованное и достоверное убеждение, то есть мнение, возникшее в результате рассуждений и проверок. *Научное знание* – продукт специфического *научного метода* получения знаний. Научные методы имеют свою историю. Сейчас к ним относят: наблюдение, аналогию, сравнение, измерение, эксперимент, моделирование, анализ, синтез, дедукцию, индукцию, классификацию, абстрагирование, идеализацию, формализацию[2]. Современная математика располагает и собственными методами, характерными исключительно для неё.

***Математика и её место в науке. Эволюция математических дисциплин и определений математики***. Понятие «математика» происходит от греческого слова *μάθημα* (знание, познание, наука) и первоначально означало теоретическую деятельность, связанную с расчётами, измерениями и предсказаниями. Вплоть до начала 17 в. математики зарабатывали астрологией, и в связи с этим, будто бы в конце 4 в. византийский император Феодосий Великий выпустил особый эдикт против математиков, приравнявший их к отравителям.

В нашей стране распространено определение математики, данное академиком А.Н. Колмогоровым – *«наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира»*[3]. Колмогоров там же упорядочил историю математики, перечислив математические дисциплины, в том числе не соответствующие данному определению, например,– математическую логику. Поэто-

---

[1] См. также *Соловьёв Вл.С.* «Наука»/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. XXa (40),– СПб, 1897.

[2] *Баранец Н.Г.* «Философия науки (учебное пособие для аспирантов)», – Ульяновск: ИП Качалин А.В., 2011, с. 100-114; *Радлов Э.Л.* «Метод»/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. XIX (37),– СПб, 1896.

[3] *Колмогоров А.Н.* «Математика»/ Большая Советская Энциклопедия, 1-е издание. Т. 38, 1938; была расширена для БСЭ, 2-е изд., т. 26, 1954; повторена в Математической Энциклопедии, т. 3, 1982, в Математическом энциклопедическом словаре (1988), и в сжатом виде изложена в Новом Энциклопедическом Словаре (2002).

му автор дополнил определение пояснением: *«В неразрывной связи с запросами техники и естествознания запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется, так что данное выше общее определение математики наполняется всё более богатым содержанием».* Колмогоров должен был воспроизвести устаревшее определение Энгельса[4] 1877 г., соответствующее состоянию математики предыдущего столетия. Разделяемая Колмогоровым и многими советскими учёными идея Энгельса была в том, что математика является продуктом и инструментом исследования реального мира, а не плодом чистого воображения, как полагал немецкий экономист, математик и философ Е.К. Дюринг, отождествлявший мышление с бытием, но принимавший некоторые положения позитивизма.

Позитивистский взгляд на сущность математики передал историк науки В.В. Бобынин[5]: *«Математика … есть наука о величинах, предмет которой состоит в измерении величин, или, согласно с поправкой, внесённой Огюстом Контом, в непрямом измерении величин. Такое определение если и может считаться удовлетворительным, то только для отдаленного прошлого, … По определению Вильгельма Вундта, вполне выражающему современное состояние Математики, её предмет состоит в задаче «подвергнуть исчерпывающему свой предмет исследованию мыслимые формы чистого усматривания, так же как и выполнимые, на основании чистого усматривания, формальные построения понятий, в отношении всех их свойств и взаимных отношений»»*[6].

Эти идеи были модернизированы Н. Бурбаки (коллективный псевдоним трёх поколений преимущественно французских математиков). По их мнению, предмет математики – это структуры на множествах неопределённой

---

[4] *Энгельс Ф.* «Анти-Дюринг»/ *Маркс К., Энгельс Ф.* Сочинения, 2-е изд., т. 20, 1961, с. 37.

[5] *Баранец Н.Г., Верёвкин А.Б.* «Российские математики о науке и философии»,– Ульяновск: издатель Качалин А.В., 2012, с. 8-94.

[6] *Бобынин В.В.* «Математика»/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. XVIIIa (36),– СПб, 1896.

природы, связанные с реальностью лишь исторически, но не по своей сути: *«В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм – математических структур, и оказывается (хотя по существу и неизвестно почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм».* При этом Бурбаки указали три основных типа структур, определяемых композицией, порядком и топологией[7].

Один из участников группы Бурбаки среднего поколения, А. Гротендик, придал своим размышлениям о сути математики художественную форму: *«Традиционно различают три рода «свойств» или «аспектов» тех или иных явлений во Вселенной, составляющих предмет математических рассуждений. Это суть* число, размер *и* форма*. О них можно так же говорить как об «арифметическом», «метрическом» (или «аналитическом») и «геометрическом» аспектах. В большинстве ситуаций, исследуемых в математике, эти три аспекта присутствуют одновременно, находясь в тесном взаимодействии. При этом, однако, чаще всего имеет место заметное преобладание одного из них над двумя другими»*[8].

Схема исторического развития математики изложена в вышеупомянутой статье Колмогорова, который выделял четыре этапа – зарождения математики (Древность и Античность), элементарной математики (Средние Века и Возрождение), математики переменных величин или высшей математики (до 19 в.) и современной математики (с 19 в.). Его периодизацию пытались исправлять и уточнять (А.П. Юшкевич, Б.А. Розенфельд, Г.Е. Шилов и др.), но безусловный научный авторитет Колмогорова препятствовал успеху этого мероприятия.

Математическая деятельность подчиняется общим идеалам научного творчества: *достоверности, полезности*

---

[7] *Бурбаки Н.* «Архитектура математики»/ *Бурбаки Н.* «Очерки по истории математики»,– М.: КомКнига, 2007, сс. 258-259, 252.

[8] *Гротендик А.* «Урожаи и посевы. Размышление о прошлом математика»,– Ижевск: ИД «Удмуртский университет», 1999, с. 46.

и *новизны*. В математике эти идеалы приобретают специфическое наполнение, что в первую очередь касается достоверности, которая рассматривается как логическая обоснованность. Вместе с тем с древнейших времён свидетельством достоверности мнения остаётся авторитет высказавшего его лица. Научный вес и статус в значительной мере определяется пользой, принесённой дисциплинарному сообществу. Сообщество учёных и математиков, в частности, внутри себя негласно управляется на принципах *меритократии*[9].

С современной номенклатурой математических дисциплин, содержащей около сотни крупных единиц, в свою очередь состоящих из десятков подразделов, можно ознакомиться по российской Универсальной Десятичной Классификации (51 Математика) или американской Mathematics Subject Classification 2010.

**Фундаментальная и прикладная математика.** Долговременная трансляция научного знания невозможна без его объективной полезности, имеющей либо внутридисциплинарный характер, либо служащей поддержанию внешнего статуса дисциплины и, тем самым, стимулированию её обществом. Поэтому в любой науке можно условно выделить фундаментальную (внутреннюю) и прикладную (внешнюю) компоненты. Фундаментальная часть, как и следует из названия, служит углублению теоретических основ науки, способствует укреплению и росту её познавательного потенциала. Прикладные исследования приносят материальную пользу, расширяют междисциплинарные связи и открывают для изучения новые горизонты. Явное различие между ними в историческом измерении имеет кратковременный характер, они потенциально глубоко связаны друг с другом. Но различие методов исследования условно расщепляет дисциплинарное сообщество на два направления деятельности, в согласии с принципом наибольшей успешности.

Фундаментальную математику называют также «чистой»,– в ней преобладают теоретические методы исследо-

---

[9] *Young M.* «The Rise of the Meritocracy, 1870-2033: An Essay on Education and Equality»,– London, 1961.

вания. Путь *математической теории* – это последовательное абстрагирование, формализация, аксиоматизация и логически строгая дедукция. Интересно мнение на эту тему крупного специалиста по математической физике, часто относимой к прикладной математике: *«Взаимосвязь общего с частным, дедукции с конструктивным подходом, логики с воображением – именно они и составляют самую сущность живой математики»*[10].

Современной математике присуща высокая степень абстракции предмета и формальности методов исследования. Поэтому возникает иллюзия, что математика *«по сути, не имеет отношения к действительности и не оповещает нас ни о каких её свойствах, но говорит исключительно «сама о себе»»*[11]. Но такой взгляд родился недавно, и математики прошлого вряд ли бы согласились с ним. Ведь такое мнение может возникнуть лишь в ограниченном внутренними задачами интеллектуальном круге, относительное благополучие которого, обеспеченное избыточными продуктами общественного труда, позволяет сохранять своё демонстративное неведение реальности. Нарушение стабильности такого круга под внешними обстоятельствами позволяет раскрыть свои прикладные способности самым рафинированным теоретикам. Так, А. Тьюринг, Дж. фон Нейман, Л.С. Понтрягин с увлечением решали задачи военного назначения, Л.В. Канторович создал математическую экономику, Ю.И. Манин получил серьёзные результаты в математической физике.

В современной прикладной математике существенны эмпирические методы исследования: эксперимент и компьютерное моделирование. Прикладная математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и социально-гуманитарных исследованиях. Она служит орудием количественного расчёта в прикладных задачах и средством для чёткой формализации теорий. Поэтому математика стала не только универсальным языком науки, но также элементом общей культуры.

---

[10] *Курант Р.* «Математика в современном мире»,– М.: Мир, 1967, 206 с.

[11] *Лем С.* «Философия случая»,– М.: АСТ, 2007, с. 249.

С изобретением и совершенствованием вычислительных машин в фундаментальную математику проникли эмпирические методы исследования. Компьютерный эксперимент и симуляция позволяют отсеивать ошибочные гипотезы, обнаруживать новые закономерности изучаемых явлений и алгоритмически генерировать сложные логические выводы. В прикладной области вычислительные способности машин уже превосходят возможности людей. С появлением искусственного интеллекта следует ожидать усиления теоретических возможностей автоматов. Несмотря на то, что проверка результатов компьютерных расчётов зачастую возможна лишь с помощью другого компьютера, работающего по иному алгоритму, можно надеяться, что искусственный интеллект в науке не сможет вполне заменить человека. Этому, вроде бы, препятствуют *ограничительные теоремы математики* (К. Гёделя, А. Чёрча, А. Тарского, А.А. Маркова и др.), указывающие на эпистемическую слабость формально логических и алгоритмических методов. Следовательно, творческая способность человеческого разума не поддаётся полной формализации.

***Место математики в философских системах Платона, Аристотеля, Декарта, Лейбница и Канта.*** Самые ранние сохранившиеся обоснования философской значимости математики принадлежат *Платону* (диалоги «Тимей», «О государстве»). Он рассматривал числа и геометрические фигуры как эйдосы и парадейгмы, т.е. принципы и начала вещей, благодаря которым последние обретают смысл и бытие. Изучающая эйдосы математика переориентирует ум с рассмотрения преходящего и становящегося бытия на подлинно сущее, устойчивое и определённое в себе. Математика опирается на чувства и является подготовительной ступенью для философского знания и истинной диалектики (непосредственного знания идеи Блага – высшей реальности, причастность которой даёт бытие математическим объектам). Идеи Платона сохраняются в математическом сообществе, особенно для попыток объяснения статуса математических объектов.

*Аристотель* считал числа и геометрические фигуры результатом абстрагирования от определённых свойств чувственно воспринимаемых вещей. Математика, как и другие науки, изучает сущность объектов не всесторонне, а выделяя интересующий её количественный аспект. Числа и величины и есть тот аспект существования вещи, на который обращает внимание математика. В сочинениях Аристотеля собственно математике отводится немного места, но ему принадлежат пять книг по логике, под общим названием «Органон», где изложено учение о понятиях, суждениях и доказательствах. До 19 в. логику не относили к математике, а математическая логика построена на принципах, серьёзно отличающихся от Аристотелевых.

В философии Нового времени выделяются два подхода к математике, развивавшихся в рамках рационализма и эмпиризма. В рационализме математика рассматривалась как наиболее достоверное основание всякого знания, тогда как эмпиризм пытался вывести её из опыта.

*Р. Декарт* исходил из того, что всякое знание должно базироваться на фундаменте ясного и непосредственного интеллектуального созерцания (интуиции), дающего возможность прямого усмотрения истины. Но такое усмотрение возможно лишь для наиболее простых и фундаментальных понятий, недоступных никакому анализу и редукции. В качестве такого фундаментального и непосредственно ясного понятия Декарт указывал протяжённость. Поэтому геометрия, изучающая протяжённые конфигурации, есть основание остальных наук. Сведением к протяженности должна быть обоснована истинность всех наук. Геометрическая интуиция (созерцание протяжённости) служит основанием и для самой математики. Посредством отношений величин Декарт определял числа и их отношения, а фигуры задавал функциональными уравнениями. Возможности геометризации в познании природы Декарт считал безграничными. На её основе он выстроил основные естественнонаучные дисциплины. Его позиция доминировала в естествознании долгое время,– так, знаменитая книга И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» изложена геометрически. Попытки возрождения этих идей предпринимал российский математик В.И. Арнольд. Противоположных воззрений придерживались Бурбаки, сводившие геометрию к алгебре.

*Г. Лейбниц*, в отличие от Декарта, противопоставившего новую науку традиционной схоластической философии, пытался примирить платонизм и аристотелизм в их средневековой интерпретации с физикой и астрономией Галилея и Кеплера, геометрией Кавальери, анализом Валлиса и Гюйгенса, а также с биологией Левенгука, Мальпиги и Сваммердама. Лейбниц отвергал главный декартовый критерий истины – принцип непосредственной достоверности, считая его психологическим, а потому субъективным[12]. Не субъективная очевидность, а логичное доказательство гарантирует, по Лейбницу, объективность и истинность знания: *«Критериями истинности суждений... являются правила обычной логики, какими пользуются и геометры: напр., предписание принимать за достоверное лишь то, что подтверждено надёжным опытом или строгим доказательством»*. Признавая за критерием очевидности некоторое значение, Лейбниц стремился к объективной достоверности. Идея создания «всеобщей науки» (универсальной характеристики) не покидала Лейбница на протяжении всей жизни. Как и Декарт, Лейбниц видел образец достоверного знания в математике и считал, что «всеобщая наука» должна быть априорной, опираясь на метод, состоящий из комбинаторики (искусства открытия) и аналитики (теории доказательства). Исходные начала всеобщей науки, достаточные для получения всех выводимых истин, должны быть получены путём умозрения, а не рассуждения. И тогда всё человеческое знание предстанет в виде универсального символического языка, наподобие алгебры, где вычисление заменит рассуждения и споры. Выразив сложные понятия через простые, можно получить их точное значение. В отличие от Декарта, Лейбниц не считал математические аксиомы неразложимыми: в математике он видел особый случай применения логики и стремился свести математические истины к логическим.

[12] *Гайденко П.П.* «Г. Лейбниц»/ Новая философская энциклопедия в 4-х томах, т. 2,– М.: Мысль, 2010.

Высшим принципом логики он считал закон тождества. Сами тождества недоказуемы и поэтому называются аксиомами. Он считал, что все истины виртуально эквивалентны, не всегда очевидным образом. Недостаток математических аксиом Лейбниц вослед за Платоном видел в том, что они опираются не только на разум, но и на воображение, а потому не являются чисто аналитическими и не обладают высшей достоверностью. К аналитическим понятиям, сводимым к тождествам, Лейбниц прежде всего ставил число; а протяжение, по Декарту неразложимое, согласно Лейбницу, является понятием производным. Поэтому содержательность геометрического понятия доказывается не аналитически, а конструктивно, порождением предмета, соответствующего этому понятию. Лейбниц предвосхитил создание математической логики, не принесшее разрешения всех научных проблем, но давшее важный инструмент современной науки. Его философские идеи просматривается в *гёделевой нумерации*, сводящей логику к арифметике, но полученный Гёделем результат опроверг мнение Лейбница о тождественности всех истин.

*И. Кант* поставил две проблемы математического знания: обосновать применимость математики в естествознании и определить границы, как математики, так и естествознания в целом[13]. Он относил число и величину к априорным формам знания, помимо которых рассудок не может мыслить ни одного явления. Знание природы состоит в рассудочном конструировании природных объектов. Число и величина задают правила для этого, и любой объект оказывается математическим. Всё в природе измеримо, но математика всегда остаётся в сфере чувственности. Её понятия применимы лишь к тому, что доступно непосредственному созерцанию, которое может быть только чувственным. Такой подход к математике не вызывал трудностей пока речь шла о геометрии, алгебре и арифметике 18 в. Исчисления бесконечно малых Кант почти не касался. Важным примером априорной истины он считал постулат о параллельности из евклидовых «Начал».

---

[13] *Гутнер Г.Б.* «Философия математики»/ Новая философская энциклопедия в 4-х томах, т. 4,– М.: Мысль, 2010.

Обоснование неевклидовой геометрии и изучение психофизиологии мозга вскоре обесценило его систему. Тем не менее, бесплодные обсуждения кантовских мнений на тему синтетичности или аналитичности математических утверждений традиционно занимали место в континентальной философии науки 19 в. В 20 в. произошла ревизия его теории в виде неокантианства, и *априоризм* сохраняет влияние на философию математики[14].

***Становление гелиоцентризма и его влияние на математику и естествознание.*** Религия отчасти способствовала развитию и распространению наук в Европе в период Средневековья и Возрождения. Образование находилось под влиянием католичества, православия или протестантизма, а университетские корпорации устраивались по образцу монастырских общин. Многие учёные XVI–XVII вв. свою научную работу рассматривали, как достойное продолжение религиозного служения. Вместе с тем устаревшие научные доктрины встроились в религиозное учение и приобрели статус непогрешимости. Так, средневековая христианская география учила, что Земля имеет форму диска с центром в Иерусалиме, что согласовывалось с научными представлениями того времени и опытом преимущественно каботажного плавания. Это мнение было опровергнуто Великими географическими открытиями, доказавшими шарообразную форму Земли. Из-за важного экономического значения они не могли быть проигнорированы. Падение Константинополя и перенос христианского центра в Рим убрало последнюю догматическую опору каморальной модели Козьмы Индикоплова, хотя на Руси она продержалась до начала 17 в. Буддийские учёные Дальнего Востока придерживались каморальной теории до начала 20 в.

Приближение конца 7-го тысячелетия, ожидавшегося в Европе в 1492 г. н.э., увеличило интерес к предсказаниям и к астрологии, в частности. Дальние плавания также стимулировали развитие наблюдательной астрономии. В это время бесспорным было мнение Иоанна Сакробоско и

---

[14] *Перминов В.Я.* «Развитие представлений о надёжности математического доказательства»,– М.: Едиториал УРСС, 2004, 240 с.

Клавдия Птолемея о центральном положении Земли во Вселенной. Католическая теология на этом основании даже возвела учение о Чистилище, создавшее финансовую опору Римской церкви. Геоцентризм сочетался с космологией Аристотеля, объяснявшей совершенство небес особым характером элементов надлунного мира. Падение тел вниз объяснялось стремлением вещей к центру Мира, то есть – Земли. Но геоцентрическая астрономия часто показывала свою несостоятельность,– наблюдения свидетельствовали, что Венера и Меркурий обращаются скорее не около Земли, а вокруг Солнца. Этот вывод противоречил теории о хрустальных сферах, удерживающих светила в небесах. А она объясняла многое,– вплоть до падения метеоритов, как осколков этих сфер. Поэтому, в частности, когда астрономия отказалась от теории сфер, учёные стали отвергать возможность падения камней с неба, пока Лаплас не предположил, что они падают с Луны. Отказ от геоцентризма поднимал проблему движения светил,– наличие многих центров обращения заставило искать причину такого движения, впоследствии названную силой всемирного тяготения. Наблюдение не было методом схоластики, поэтому проблематичные выводы астрономов отвергались официальной наукой, а приводящая к сомнениям астрология была осуждена как противная христианской вере. На таком идейном фоне возник гелиоцентризм. Сочинение *«Об обращении небесных сфер»* вышло под именем *Николая Коперника*, умершего во время публикации. Книгу подготовил математик и астролог Иоахим фон Лаухен (*Ретик*), её редактировали астроном и географ *Иоганн Шёнер* и лютеранский теолог Андрей Гоземан (*Осиандер*). Ранее Ретик выпустил объёмное письмо к Шёнеру «Narratio Prima», где излагал теорию Коперника.

Астрономические расчёты требовали развития плоской и сферической тригонометрии. До своей смерти в 1576 г. Ретик составлял таблицы значений синусов, косинусов и тангенсов. Его работа усложнялась тем, что в то время не были известны десятичные дроби и правила действий с ними. Первую книгу о десятичных дробях написал голландский математик и инженер Симон Стевин в 1585 г. Тригонометрические таблицы Ретика были опубликованы его учеником Валентином Отто в 1596 г.,– приведённые к десятичному виду значения содержали десять знаков после запятой. Пятнадцатизначные таблицы Ретика были опубликованы Бартоломеем Питиском в 1613 г. Тригонометрические вычисления были очень трудны, много сил отнимали умножение и деление. Для облегчения работы шотландский теолог, астролог и математик барон Мерчистон Джон Непер изобрёл логарифмы. В 1614 г. он выпустил книгу о теории логарифмов с таблицами и приложениями логарифмов к тригонометрии.

Теория Коперника получала известность, но об авторе знали немного. Критики зачастую писали его имя с ошибками. Первую биографию Коперника написал французский священник и философ *Пьер Гассенди* через столетие после смерти астронома. Первый процесс Галилея 1613 г. привлёк внимание папской курии к гелиоцентризму. С предметом ознакомились ведущие католические учёные, богословы и инквизиторы, высказав отрицательное заключение. В 1616 г. труд Коперника попал в *«Индекс запрещённых книг»*. Авторы приговора даже не подозревали, что осудили иерарха католической церкви, учителя астрономии Александра VI, по теории которого Григорий XIII реформировал католический церковный календарь,– такие сведения содержат современные биографии Коперника, и они также называют Коперника изобретателем бутерброда. В 1651 г. ведущий римский астроном, иезуит Дж.-Б. Риччиоли опубликовал «Новый Альмагест», где доказывал несомненные преимущества Птолемея над Коперником. В католических университетах в это время астрономию преподавали по средневековому трактату Сакробоско. Книга Коперника была запрещена Римской церковью до 1835 г. В России и в протестантских странах Европы гелиоцентризм победил в середине 18 в.

*Иоганн Кеплер* развивал идеи гелиоцентризма в Праге. Он уточнил модель Коперника, выяснив, что орбиты планет близки к эллипсам, в одном из фокусов которых располагается Солнце, а площади, заметаемые радиус-векторами, пропорциональны времени движения. Для

Кеплера астрономические законы имели метафизическое значение. Эта традиция восходила к запрещённым пифагорейцам. Кеплер практиковал астрологию и переписывался с *Галилео Галилеем*, верным католиком, не разделявшим его мистицизма. Галилей обнаружил несовершенство формы Луны, пятна на Солнце, четыре спутника у Юпитера, фазы Венеры. Эти открытия подрывали аристотелевскую физику. За пропаганду гелиоцентризма Галилея осудила римская инквизиция. Он также открыл закон гидростатики, принцип инерции и закон падения тяжёлых тел. Открытия Коперника, Кеплера и Галилея легли в основу механики *Исаака Ньютона*. Построение теории Ньютона потребовало развития дифференциального и интегрального исчисления.

Становление гелиоцентризма привело к философскому и методологическому перевороту в науке. Выяснилось, что ограниченный здравый смысл может противоречить научной достоверности. Авторитет древности потерял аргументирующее значение, а новизна стала идеалом научности. Молодые учёные перестали прикрываться древними псевдонимами для придания большего веса своим сочинениям. Церковь лишилась статуса покровительницы науки, а теология – былого научного престижа. Произошло методологическое размежевание,– богословие и гуманитарные науки задержались в своём развитии, а естествознание стало развиваться в ускоренном темпе. Математика воцарилась над всеми науками.

### *Тема 2. Природа математического знания*

Любому очевидна специфичность математики. Посторонний наблюдатель не всегда догадается о предмете конкретного математического исследования, даже если к нему приложены красивые иллюстрации. Некоторые алгебраические монографии не содержат уравнений и формул, а числа в них используются только для нумерации страниц. Геометрические книги могут не содержать чертежей. Работы по логике похожи на инопланетные тексты из фантастического фильма. Что же изучает такая наука, зачем она нужна, как учёный убеждается в правильности своих действий и доказывает это другим?

Существуют взаимосвязанные проблемы статуса математических объектов, истинности и доказательности математического знания, а также его эффективности[15].

Не секрет, что нет общепризнанных ответов на эти вопросы, которые кажутся нематематическими. Ведь в математических вопросах учёные способны прийти к общему мнению. Об этом свидетельствует история науки.

Математика своей кажущейся отвлечённостью напоминает философию, но между ними больше различий, чем подобия. Так, математика при всём своём многообразии обладает несомненным единством, которого в философии быть не может. Философские теории могут быть несоизмеримы, а математические, даже преднамеренно противореча друг другу, опираются на общий фундамент и обозримы с общей позиции. Кроме того, математическое творчество происходит в строгих логических границах, иногда расширяемых интуитивными озарениями, а философия, скорее, следует магическому девизу Кроули: *«Делай что хочешь, вот и весь закон».* Математические открытия, совершенствуясь и распространяясь, становятся «фольклорными», теряют со временем авторские характеристики. Академик В.А. Арнольд в связи с этим высказал эвристическое правило: *«Никакой математический закон не несёт имени своего первооткрывателя, за исключением закона Арнольда».* Философские системы, напротив, навсегда связаны с именами своих создателей, даже если существенно изменяются в череде систематизаций. В философии важна этическая компонента, которая в математике отражается опосредованным образом.

Большинство математиков не уделяют внимания философским проблемам. Ведь не похоже, чтобы их понимание способствовало решению интересных дисциплинарных задач,– скорее наоборот. Симметрия нарушается и в том, что математика необходима философу науки, хотя бы

---

[15] *Вигнер Е.* «Непостижимая эффективность математики в естественных науках (физика наших дней)»// Успехи физических наук, 1968, т. 94, вып. 3, с. 535-546.

для сохранения своего статуса. А математик может обойтись без философии математики, заменив общепознавательный импульс локальными стимулами. Он способен справляться с привычными задачами с той же легкостью, с которой мольеровский Журден говорил прозой. Отрицание важности философии науки для самой науки обосновано разными философскими направлениями. Из наиболее значительных течений этого толка можно указать относящийся к постпозитивизму *методологический анархизм* П. Фейерабенда. Существуют также несколько форм *натурализма* (Дж. Бургесс, П. Мэдди), переносящего отрицающие позитивистские аргументы О. Конта с метафизики на философию математики и науки вообще[16].

Среди философствующих математиков распространён *платонизм*. В приложении к математике он утверждает[17], что математика отражает мир идей, а теория истинна и эффективна в той мере, в которой соответствует этому совершенному миру. Название этому учению, по-видимому, дал ученик Э. Ландау И.П. Бернайс в 1935 г.

Поздние философы истолковали неясные фрагменты платоновских диалогов в том смысле, что Платон приписывал идеям объективное существование и даже считал их вещами особого мира. Поэтому его позицию называют *реализмом*[18] (лат. *res* – вещь). Термин «реализм» не употреблялся в древности, и, вероятно, было запущен геттингенским профессором И.Ф. Гербартом для обозначения своего идеалистического направления[19]. Гербарт считал,

---

[16] *Бажанов В.А.* «Стандартные и нестандартные подходы в философии математики»/ Философия математики. Актуальные проблемы,– М.: Изд-во Московского ун-та, 2007, с. 7-9.

[17] *Харди Г.Х.* «Апология математика»,– Иж.: НИЦ РХД, 2000, с. 77; *Бурбаки Н.* «Очерки по истории математики»,– М.: КомКнига, 2007, с. 29; *Манин Ю.И.* «Математика как метафора»,– М.: МЦНМО, 2008, с. 16, 128; *Подниекс К.М.* «Вокруг теоремы Гёделя»,– Рига: Зинатне, 1992, с. 7-12; *Канке В.А.* «Философия математики, физики, химии, биологии: учебное пособие»,– М.: КНОРУС, 2011, с. 52-55.

[18] *Радлов Э.Л.* «Реализм, в философии»/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. XXVII (53),– СПб, 1899.

[19] *Колубовский Я. Н.* «Гербарт»/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. VIII (15),– СПб, 1892.

что развивает учение Канта, но назначил своим идейным предшественником Платона. Он так же отнёс к этому течению блаженного Августина, Ансельма Кентерберийского, Иоанна Скота Эригену, Фому Аквинского и Джона Дунса Скотта.

Платонизм притязает объяснить эффективность теоретической науки, явно не справляясь с этим, и не отвечая современному уровню математики. Ведь сейчас созданы альтернативные математические теории и даже логики, в которых отсутствует принцип непротиворечивости. Если у них есть прообраз в мире идей, какова собственная логика этого мира? Доступен ли он научному изучению? Если любая идея туда вложена, можно ли её опровергнуть? Похоже, что платонизм не выдерживает попперовского теста на фальсификацию, и, тем самым, выпадает из области даже потенциально научного знания. В итоге, платонизм возвращается к своему истоку – религиозно-мифологическому иррационализму.

В гносеологии реализм противопоставляется[20] *номинализму*, или *концептуализму*, представители которого (киник Антисфен, М.Ф. Капелла, схоласты – И. Росцеллин, Р. Бэкон, В. Оккам и Ж. Буридан) отрицали реальность общих понятий – универсалий, считая их либо бессодержательными обобщениями, либо удобными средствами познания. Такова современная реконструкция их мнений, а прежде это было понятно с такой ясностью. Русский мыслитель середины 18 в. чистосердечно заметил по этому поводу: *«Сии два толка разделили надвоеж весь ученый мир имена сторон страшныя тогда, а ныне столькож неведомыя, сколько и вещи их прения»*[21].

В философии математики номинализм близок заявляющему о системности объектов *структурализму* неокантианца П. Бенацеррафа и *фикционализму* Х. Филда, относящему математику к чистой фантазии.

---

[20] *Френкель А.А., Бар-Хиллел И.* «Основания теории множеств»,– М.: Мир, 1966, с. 399-416.

[21] *Сложеникина Ю.В., Растягаев А.В.* «Житие канцлера Франциска Бакона: Биография Ф. Бэкона в уникальном переводе Василия Тредиаковского (1760)»,– М.: Либроком, 2012, с. 63.

Отрицая объективность понятий, номинализм тяготеет к эмпирическому методу. В рамках *эмпиризма* находятся сводящий математику к общественному продукту *социальный конструктивизм* (Т. Тимошко, Р. Херша и П. Эрнеста), этнографический *контекстуализм* и *квазиэмпиризм* (И. Лакатоса и Х. Патнема)[22] – здесь очевидно влияние марксистского деятельностного подхода.

Поппер подправил платоновское учение, предложив концепцию *трёх миров*: реальности, ментальности и общечеловеческих идей. Свою позицию он назвал *критическим рационализмом*.

Разноголосица систем косвенно указывает на недостаточность разработки в них общезначимых философских проблем. Предпочтение здесь обусловлено субъективными причинами – персональной историей, наклонностями, авторитетом или модой. Выбор конкретного мировоззрения мало влияет на исследовательскую практику, определяемую иными дисциплинарными механизмами. Но способность к выбору есть фактор интеллектуальной зрелости учёного и широты его взглядов.

**Происхождение математических знаний**. Источником базовых математических понятий является организованный чувственный опыт[23]. Развитый ребёнок обладает достаточным опытом и разумом для интуитивного понимания небольших натуральных чисел, простых пространственных отношений и несложных рассуждений. Но свойства интуитивно постигаемых понятий могут выходить за пределы ощущений. Непрерывность, неограниченность, бесконечность, зависимость или индукция дают примеры концепций без непосредственного опытного обоснования. Экспериментально не проверяемы полнота вещественных чисел или Евклидовый постулат о параллельных. Современная математика вышла за пределы классического понимания числа и пространства, изучая

---

[22] *Бажанов В.А.* «Стандартные и нестандартные подходы в философии математики»/ Философия математики. Актуальные проблемы,– М.: Изд-во Московского ун-та, 2007, с. 7-9.

[23] *Стеклов В.А.* «Математика и её значение для человечества»,– М.: Либроком, 2010, с. 129.

объекты, не имеющие чувственного эквивалента. Иногда её аксиомы возникают из-за произвола, удобства или эстетических соображений. Субъективное чувство математической красоты отражает интуитивное знание правильности и полезности утверждения или теории. Математики вырабатывают себе индивидуальные умственные механизмы познания. Это роднит математическое творчество с искусством и придаёт особую ценность новизне, как идеалу научной работы.

Распространение оригинального научного знания может сдерживаться личными познавательными барьерами, иногда принимающими глобальные масштабы. Такие истории регулярны[24]. Широкое неприятие вызывали «воображаемая геометрия» Н.И. Лобачевского, теория множеств Г. Кантора, «воображаемая логика» Н.А. Васильева, «абстрактная чепуха» А. Картана и С. Эйленберга, Новая Хронология А.Т. Фоменко и Г.В. Носовского.

Теория, претендующая на методологический переворот или предлагающая новую область исследования, рискует столкнуться с обструкцией. Противостояние «новаторов» и «консерваторов» имеет много причин и поводов.

Новизна зачастую конфликтует с научной достоверностью и полезностью. Принципиально новое знание угрожает стабильности дисциплинарной матрицы, что может беспокоить научное сообщество или его элиту. Адаптация новых идей требует силы и времени, служащих в качестве научного капитала. Перспективы отдачи затрат могут казаться сомнительными, в особенности для распорядителей научных ресурсов, уже обладающих надёжным статусом. Облагораживающий любое сообщество альтруизм затухает перед лицом смутных перемен. Для безусловного принятия новой теории необходимо, чтобы её субъективная полезность превосходила индивидуальные затраты на освоение. Поэтому начинающим исследователям без тяготеющего багажа идей старой парадигмы легче сделать новый выбор. Новые идеи также могут подрывать неосознанные дисциплинарные представления,

---

[24] *Саббаг К.* «Странный случай Луи де Бранжа»// Философия науки, 2004, № 4(23), с. 147-154.

принимающие обличье нравственных ограничений[25]. Фундаментальные заблуждения, стоящие на пути нового научного знания, могут происходить из апперцепций, подхваченных на этапе начального обучения или иметь доктринальный, мировоззренческий характер.

**Природа математических абстракций и её истолкования.** Определение математики Н. Бурбаки уточняется указанием, что в ней изучаются реальные отношения, в своей иерархии образующие разнообразные структуры, в общем, не сводящиеся к указанным Бурбаки основным трём типам. Такому определению, видимо, уже отвечают все настоящие и бывшие объекты математического изучения, но оно охватывает и многое иное, пока не входящее в сферу математики,– например, отношения социологические или грамматические. Чрезмерная генерализация, возможно, не является недостатком, поскольку указывает на пока ещё не достигнутые горизонты науки.

Традиционно, в истории математики принято выделять три этапа развития абстракции, в результате которых последовательно произошло возникновение геометрии и арифметики, изобретение буквенной символики и переход к алгебре, развитие алгебры и теории групп.

Математические понятия возникают в результате отвлечения от свойств объекта, не участвующих в рассуждении. Абстрагирование проводит обобщение, расширяющее объём понятий. При этом каждое осмысленное понятие соответствует некой реальности, если мы примем, что действительные объекты существуют наряду со всеми отношениями, в которых они участвуют и которые, в конечном счёте, определяют сами объекты. Так, материальные тела не существуют вне гравитационного поля, отвечающего за их притяжение. Идея о том, что реальные объекты могут существовать сами по себе, без определяющих их отношений, представляется тупиковой абстракцией.

---

[25] *«Сама мораль заинтересована в доказательстве евклидова постулата, так как если достоверность покидает даже математиков, то, увы, что станется с моральными ценностями!»* (заявление некого французского математика в 1900 г., переданное Жюлем Андраде)

Обычно указываемые проблемы математической онтологии неразрешимы лишь на средневековом схоластическом уровне, когда бытийность приписывалась только вещественным предметам,– ведь математические объекты, бесспорно, вещами не являются. Но восприятие вещи как существующей невозможно вне её отношений с другими вещами, в частности, с наблюдателем. Что отчасти перекликается с идеей Копенгагенской программы интерпретации квантовой механики: *«Наблюдение формирует реальность».* Признание отношений фундаментальными феноменами реальности подчиняет их отношениям следующего уровня и т.д. В итоге, система отношений организована как дерево или даже лес возможных разделённых теорий. Например, актуальная бесконечность возникает как отношение на неограниченном поле финитных объектов предыдущего уровня,– и, по сути, тем же способом у Кантора и Фреге определялись первые бесконечные числа. При таком иерархическом подходе, похожем на теорию типов Рассела, разводящем отношения разного уровня, многие онтологические проблемы математики или снимаются, или теряют метафизический характер.

Высказанные соображения заимствованы из математической *теории категорий*[26], изучающей предельные абстракции предметных областей математики: множеств, логики, алгебраических и аналитических структур.

**Обоснование математики и её методов.** Математика ставит перед философией онтологическую проблему статуса своих объектов и гносеологические проблемы соответствия математических теорий реальности и адекватности методов исследования. Проблема обоснования математики возникла при зарождении науки. Так, скептические труды Секста Эмпирика[27], «восстановленные» Ферма, содержат отдельные книги против логиков, геометров и арифметиков. Текст доносит критику целей, методов и предмета математических дисциплин, вполне отражая дискуссии о сути чисел и фигур, свойственные 17 в.

---

[26] *Маклейн С.* «Категории для работающего математика»,– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, 351 с.

[27] *Секст Эмпирик* «Сочинения, в 2 т.»,– М.: Мысль, 1976, 399+421 с.

Вплоть до конца 18 в. велись научные дискуссии о том,– являются ли числами 0, 1 и даже 2? Эти проблемы были отброшены как бесплодные, прежде чем были решены алгеброй и арифметикой.

Острые споры вызывали методы создаваемого в 17 в. дифференциального и интегрального исчисления. Обоснование дифференцирования посредством пределов было получено Вейерштрассом, его также обосновали алгебраически на пути, заложенном Лейбницем. Сегодня созданы теории дифференцирования, опирающиеся на операционное (интегральное) исчисление, позволяющие вычислять производные дробных порядков[28].

Изобретение интегрирования приписывают Евдоксу, Архимеду и Кавальери. Развитие этих идей в настоящее время не закончено,– но уже построены теории интеграла Римана, Стилтьеса, Лебега, Ито и др.

Идея Лейбница об универсальном языке научного рассуждения в 19 в. воплотилась в математической или символической логике, начатой Больцано, продолженной Булем, де Морганом, Джевонсом, Пирсом, Грассманом и окончательно оформленной Шрёдером в «Лекциях по алгебре логики». Математическая логика сменила логику силлогизмов Аристотеля, не подходящую задачам естествознания. В полной мере задачу Лейбница решил Фрегё, создавший математический язык (пазиграфию), из которого сейчас в математике используются лишь некоторые удачные фрагменты, модифицированные Расселом. Пазиграфия не оправдала ожиданий[29], когда выяснилось, что она не снимает математических парадоксов несинтаксической природы – логических: Бурали-Форти, Кантора, Рассела и семантических: Ришара, Берри, Греллинга. Устранение математических парадоксов искали на пути аксиоматизации предметных областей,– сначала геометрии, затем логики, анализа, арифметики, теории множеств, алгебры.

---

[28] *Учайкин В.В.* «Метод дробных производных»,– Ульяновск: Артишок, 2008, 512 с.

[29] *Пуанкаре А., Кутюра Л.* «Математика и логика»,– М.: Изд-во ЛКИ, 2007, 152 с.

Аристотелевский смысл слова *αξιομα* – «авторитетная, самоочевидная истина». Современный смысл его,– *«исходное положение дедуктивной теории»*[30],– заложил М. Паш в «Лекциях о новой геометрии» 1882 г. Его геометрические идеи продолжили Дж. Пеано (1889) и Дж. Веронезе (1890). Ученик Пеано А. Падоа изобрёл метод проверки независимости аксиом и успешно доложил о своих исследованиях на Парижском конгрессе 1900 г. Создателем *формализма*, абсолютизирующего аксиоматический метод, был Д. Гильберт, ученик К.Л.Ф. Линдемана и автор «Оснований геометрии» (1899). Гильберт предположил, что все математические доказательства после необходимой формализации сводимы к дедуктивным выводам. Для устранения парадоксов он предложил применять к множествам любой мощности лишь конечные рассуждения, не использующие аксиому бесконечности,– такие доказательства называются финитными. На этом пути Гильберт аксиоматизировал все геометрии и доказал их непротиворечивость в предположении непротиворечивости вещественной арифметики. Сам Гильберт, затем ученик Пеано М. Пиери, а также ученик А.А. Маркова и К.А. Поссе, впоследствии первый заведующий кафедрой Дифференциальной геометрии МГУ В.Ф. Каган доказали полноту аксиом геометрии. В 1922 г. Гильберт приступил к созданию полных логических оснований математики, а также попытался аксиоматизировать механику и физику. При формализации арифметики венский математик Курт Гёдель доказал неисполнимость поставленной программы Гильберта. Полная формализация арифметики (тем более всей математики в целом) оказалось невозможной, как и доказательство непротиворечивости достаточно богатых теорий. Выяснилось, что математика не может быть финитно формализована и не исчерпывается логическими методами. Дальнейшие исследования показали, что достаточно сложные математические дисциплины неалгоритмизуются. Например, в некоторых конечноопределённых полугруппах, группах и кольцах может быть неразрешима проблема равенства элементов. Из этого, в частности, следует, что математи-

---

[30] «Логический словарь: ДЕФОРТ»,– М.: Мысль. 1994, с. 10.

ческая деятельность не сводится к заранее фиксированному набору финитных процедур. Для своего развития математическое знание требует усовершенствования и расширения методов. Что и происходит, в результате чего математическое знание растёт в ускоренном темпе, и это вызывает беспокойство учёных, не видящих средства сохранения человеческого контроля научных достижений. Математика, как и вся наука, стоит перед очередным информационным кризисом, первый из которых последовал вскоре за изобретением книгопечатания. Пока не найдено технических средств его разрешения предлагаются экзотические выходы из сложившейся ситуации,– например, отказ от сложных математических доказательств или редукция математики к пифагорейству[31].

Аксиоматический метод в России развивали В.Ф. Каган, С.Н. Бернштейн, А.Н. Колмогоров, С.С. Банах.

Формализация математических теорий признаётся актуальной и полезной не всеми. Так, против этого выступал французский математик Анри Пуанкаре. Имея серьёзные достижения во многих научных дисциплинах, он считал, что аксиомы являются скрытыми определениями, заимствованными из опыта, а плодотворное математическое творчество не формально дедуктивно, а интуитивно[32]. При этом достоверность рассуждения не является характеристикой раз и навсегда заданной, а определяется коллективным дисциплинарным мнением.

Философскую позицию Пуанкаре называют *интуитивизмом*, его считают также основателем *конвенционализма.* Позицию Пуанкаре пропагандировал ученик Колмогорова академик В.И. Арнольд, выступавший против абстрактной алгебры и «бурбакизма» в математике. Успехи формально-аксиоматического метода он списывал на *«преимущества воровства перед честным трудом».* Заметим,

---

[31] *Шафаревич И.Р.* «О некоторых тенденциях развития математики»//в сб. «Есть ли у России будущее?»,– М.: Советский писатель, 1991, 558 с.

[32] *Пуанкарэ А.* «Почему пространство имеет три измерения?»/ Новые идеи в математике. Пространство и время II. Сб. 3,– СПб: Образование, 1913, с. 1-32.

что ограничительные теоремы математики делают позицию Пуанкаре обоснованной в критической части. Но кроме отдельных парадоксальных замечаний интуитивизм не принёс в философию математики ничего интересного.

**Отношение математики к действительности на примере понятия числа.** Иллюстрацией к вышесказанному служат понятия чисел, опирающиеся на представление о числах натуральных, предназначенных для счёта совокупностей предметов. Этнографические наблюдения свидетельствуют, что способность к счёту выработалась у людей в результате взаимного обмена наборов продуктов своего труда, то есть в результате первобытной экономической деятельности[33]. О том же свидетельствует средневековое название науки о числах – *aridmetrica*, переводимое как *«измерение наличности»*. Сейчас распространён греческий аналог – арифметика, происходящий от слова *αριθμεω* – платить. Интуитивное понятие натурального числа, как универсальной количественной характеристики набора предметов, произошло в допечатную эпоху тем же способом, как позднее было формализовано Георгом Кантором: на множествах задано *отношение эквивалентности* (биекция), и классы этих эквивалентностей называются порядковыми или кардинальными числами. Метод Кантора распространяется на бесконечные множества (эквивалентные своей собственной части), что не было общепризнано при его жизни. Некоторые современные математики конструктивного направления не принимают актуальную бесконечность и отрицают научно-теоретический статус открытий Кантора[34].

Целые числа и положительные дроби являются следующим уровнем абстракции, использующей пары чисел натуральных и аддитивную или мультипликативную эквивалентность на них. Эти эквивалентности также имеет экономическую историю,– например, в паре, определяю-

---

[33] *Депман И.Я.* «История арифметики»,– М.: КомКнига, 2006, с. 19.

[34] *Нагорный Н.М.* «Абстракция актуальной бесконечности»/Математическая Энциклопедия, т. 1,– М.: Советская Энциклопедия, 1982, с. 43, и Энциклопедия эпистемологии и философии науки,– М.: Канон+, 2009, с. 15.

щей целое число, явно просматриваются следы бухгалтерского учёта: дебета, кредита и баланса. Эта формальная конструкция задаёт отношение на отношениях, затрудняющее их понимание. Отрицательные целые числа наука освоила только к середине 17 в., но и столетие позднее плохо осознавался их смысл,– двойной уровень абстракции выводил отрицательные числа и ноль из сферы непосредственного практического опыта. Числа вещественные были формализованы Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором, и могут быть поняты как классы эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел (различающихся на бесконечно-малые). Интуитивная идея такого представления была заложена ещё «Десятиной» Симона Стевина и была вызвана геометрическими задачами, в первую очередь – необходимостью работы с иррациональностями. На этом третьем этапе абстрагирования предмет теряет легко наблюдаемую связь с миром вещей. Совершенный отрыв от опытных ощущений производит понятие числа комплексного, представимого парой вещественных чисел. Но ещё Фреге в последнем разделе «Оснований арифметики» 1884 г. заметил, что мнимая единица нереальна в общепринятом смысле также как и 0, −1, π или даже 1. С практической точки зрения, различие в сложности их восприятия обусловлено лишь опытом использования. Всё это – абстракции разного уровня, отражающие отношения реального мира.

Понимание сути чисел привело к рождению высшей алгебры. Вопреки распространённому мнению, понятие функции в своей абстрактности не превосходит абстрактность чисел. Функция – особое отношение на множествах, хорошо осознаваемое через её график. Сложности возникают при рассмотрении функции, как операции на числах, задаваемой формулой элементарной математики.

**Парадоксы бесконечности от древности до наших дней.** Средневековые схоласты считали бесконечность исключительно божественным атрибутом, и не могли сообщить о ней ничего содержательного. Они не различали понятий бесчисленности, бесконечности, неограниченности и беспредельности, передаваемых одним греческим словом *απειρος* или латинским *infinitus*. Схоласты выводили из своей путаницы следствия, будто бы подтверждающие самопротиворечивость этих понятий[35]. Их ошибки порой повторяют и современные авторы[36], очевидно, обманутые бытовым смыслом слова «бесконечность».

Прорыв в этой области совершил пражский профессор теологии Бернард Больцано. Исследование множеств он изложил в посмертно изданных «Парадоксах бесконечного». Больцано определил бесконечные множества, как эквивалентные собственной части. Это свойство актуальной бесконечности, замеченное Галилеем в 1638 г., считалось парадоксальным, противоречащим Аристотелеву догмату *«Целое больше своей части»*, и считалось доказательством несуществования бесконечностей, которые рассматривались только в потенциальном смысле. Так, любое конечное множество натуральных чисел дополняемо до большего, и в этом смысле натуральные числа потенциально бесконечны. Такое мнение разделяли все классические философы и большинство математиков.

Теорию бесконечных множеств основал профессор университета в Галле Георг Кантор[37]. При жизни он не почитался выдающимся учёным, оппоненты обзывали Кантора *«развратителем молодёжи»*. Пуанкаре называл его теорию опасной болезнью. Кантор лишь мимоходом упомянут в Энциклопедическом словаре Брокгауза и Эфрона, где ошибочно назван *«гейдельбергским профессором»*[38]. Он не был удостоен отдельной статьи, хотя тома на буквы «Ка» опубликованы в 1895 и 1905 гг.. Большая Еврейская Энциклопедия 1908-1913 гг. уже сообщает, что Георг Кантор *«является одним из творцов учения о многообразиях»* и *«развил строго математическую теорию иррационально-*

---

[35] *Николай Кузанский* «Об учёном незнании»/ *Николай Кузанский* «Сочинения в 2-х томах. Т. 1»,– М.: Мысль, 1979, с. 98-99, 150 и др.

[36] *Светлов В.А.* «Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия»,– М.: КомКнига, 2006, с. 83.

[37] *Даубен Дж.У.* «Георг Кантор и рождение теории трансфинитных множеств»// В мире науки, №8, 1983, с. 76-86.

[38] *Граве Д.А.* «Иррациональное число»/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. XIII (25),– СПб, 1894.

*го числа и дал доказательство существования трансцендентных чисел».*

Правомерность диагонального процесса, посредством которого Кантор доказал несчётность вещественного отрезка, не была сразу общепризнана. На Парижском математическом конгрессе 1900 г. было предложено доказательство счётности отрезка, опровергнутое через несколько лет. Но на том же конгрессе Гильберт предложил список 23 интересных проблем, решение которых, по его мнению, определит развитие математики 20 в. Первой из них стала континуум-гипотеза Кантора. Теорию множеств Гильберт называл *«Канторовым раем»*, хотя сам Кантор обнаружил в ней парадоксы, количество которых впоследствии росло[39], а причина была неясна.

Вскоре было осознано, что известные противоречия возникали при произвольном собирании множеств из элементов определённой природы. Для множеств, созданных таким образом (например, для множества всех множеств) могут быть неопределимы их элементы. Другой источник парадоксов, впервые указанный Пуанкаре, – самоотнесение понятий (непредикативность) при описании процедуры построения множеств. Парадоксы такого типа снимаются принятием аксиомы вырезания множеств, их фундированием или запрещением самоотнесений понятий. Но при этом происходит обеднение классической математики, использующей непредикативные определения[40]. Иного рационального решения проблемы, чем логическая формализация теории множеств, не было видно. Изобретённое Кантором понятие множества уже легло в фундамент математики, возродив её единство. Но теоретико-множественные противоречия делали логически несодержательной всю математику, поскольку из самопротиворечивого утверждения математическая логика допускает произвольные выводы.

Первая попытка аксиоматизации теории множеств была предпринята Э.Г. Муром (1905). Различные аксиоматизированные теории множеств, избегающие начальных

---

[39] *Клини С.К.* «Введение в метаматематику»,–М.: ИЛ, 1957, с. 39-41.
[40] Там же, с. 45.

парадоксов, были построены Цермело, Расселом, Френкелем, Сколемом, Нейманом, Бернайсом, Гёделем, Куайном. Они называются «стандартными». Указанные парадоксы не возникают также в логике без закона исключённого третьего (в интуиционизме или паранепротиворечивых логиках). Гёдель доказал, что непротиворечивость стандартных теорий множеств недоказуема. А Колмогоров доказал, что интуиционизм не может избежать возможных парадоксов стандартной теории множеств. Начальную теорию множеств Кантора называют «наивной» или считают «учением», без теоретического статуса. Тем не менее, она успешно используется, например, в алгебре и анализе, при ограничении фиксированным универсумом и использовании аксиомы вырезания.

Первым в России теорию множеств изучал профессор Московского университета Б.К. Млодзеевский.

В полной мере аксиоматические теории множеств используются в общей топологии, дисциплине, синтезированной советскими учёными Урысоном и Александровым из теоретико-множественной топологии Вейерштрасса-Кантора и абстрактной топологии Хаусдорфа-Брауэра.

**Теория множеств и её значение для оснований математики.** Кантор пришёл к исследованию множеств, решая задачи анализа. В своей теории он доказал сравнимость множеств по мощности и построил бесконечную шкалу мощностей. Натуральные числа $N$ являются примером наименьшего бесконечного множества. Множества, равномощные им называются *счётными*,– к ним относятся целые, рациональные, алгебраические числа. Сначала Кантор пытался доказать счётность вещественных чисел, пока не придумал процедуру (Канторовый диагональный процесс), доказывающую несчётность вещественного отрезка. Это дало пример следующей известной мощности – *континуума*. Обобщив неравенство $2^n > n$, Кантор доказал, что множество $P(M)$ всех подмножеств $M$ мощнее самого $M$, что и позволило указать счётную шкалу мощностей – $|N|$, $|P(N)|$, $|P(P(N))|$ и т.д. Кантор задался вопросом о существовании мощностей, промежуточных между $|M|$ и $|P(M)|$, в частности – между счётностью и континуумом. Поначалу он считал, что может доказать их отсутствие, но потом признал недостаточность своих рассуждений. Его предположение стало называться *«континуум-гипотезой Кантора»*. Она дала первый содержательный пример утверждения, независимого от стандартных теоретико-множественных аксиом. Неопровержимость её в стандартной теории множеств доказал Гёдель, а недоказуемость[41] – Коэн. Есть и другие подобные утверждения. Таковы – аксиома выбора Цермело и аксиома Мартина.

Столкновение с парадоксами теории множеств нанесло философии математики глубокую интеллектуальную травму. В итоге, не вполне справедливо, задачу обоснования этой науки стали связывать исключительно с историческими способами разрешения парадоксов бесконечности (интуиционизмом, конструктивизмом, логицизмом, формализмом)[42], пренебрегая иными проблемами. Но на пути развития математики встречались замечательные философские сюжеты, далёкие от бесконечностей. Такова история открытия пустоты.

Средневековые схоласты держались мнения, что *«природа не терпит пустоты»*,– оно было обосновано Аристотелем[43] и соответствовало наблюдениям,– на этом принципе работали простые насосы. О наличии в мире пустоты заявляли пифагорейцы и каббалисты, чьи идеи объявлялись еретическими. Понятие пустоты лежало в основе их оккультной метафизики.

При Галилее во Флоренции попытались построить большой насос, но вода в нём не поднималась выше уровня, приблизительно равного 32 футам. Объяснение феномену дал ученик Галилея Э. Торричелли в 1643 г. Заодно он изобрёл ртутный барометр, а безвоздушное пространство в трубке над ртутью стало называться *«Торричеллиевой пустотой»*.

---

[41] *Манин Ю.И.* «Доказуемое и недоказуемое»,– М.: Радио и связь, 1979, гл. III.

[42] *Светлов В.А.* «Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия»,– М.: КомКнига, 2006, 208 с.

[43] *Аристотель* «Физика, кн. 4, гл. 7-9»/ *Аристотель* «Сочинения в 4-х томах. Т. 3»,– М.: Мысль, 1981, с. 136-145.

Открытие пустоты дало дополнительные аргументы атомизму Демокрита и Эпикура, осуждённого Отцами Церкви (например, Дионисием Великим). Атомизм стал популярен среди учёных в 17 в.: Иоганн-Хризостом Магнен восстановил труды Демокрита в 1646 г., Пьер Гассенди – идеи Эпикура в 1647. Во времена могущества инквизиции «восстановление» древних учений означало легальную возможность высказаться по научным вопросам, закрытым от обсуждения. Так же французский математик и философ Жиль Персонн Роберваль в 1644 г. опубликовал изложение запрещённой гелиоцентрической системы, приписав её Аристарху Самосскому.

Оправдание наукой пустоты привело к признанию нуля, как величины, эту пустоту измеряющую. В географии начальные меридианы стали называться *«нулевыми»*, но в хронологии ноль в качестве пункта отсчёта не привился. Французский богослов Дионисий Петавиус в 1627 г. предложил отсчитывать историческое время от года рождения Христа, называя его первым. Предыдущий год считался тоже первым, но уже до рождества Христова. Назвать год рождения Христа нулевым было рискованно. Теологи связывали ноль с ничтожностью, и увидели бы в таком новшестве еретическое унижение Божественного достоинства. Современность унаследовала изобретение схоластики,– не существует нулевого года Новой Эры, также как и нулевого века. Для нуля нет и соответствующего римского обозначения.

Пустота оказала влияние и на развитие логики естествознания, когда пропозициональная логика оказалась связанной с Булевой алгеброй множеств, соответствующих объёмам понятий. В алгебре Буля невозможно отказаться от пустого множества, – оно возникает как пересечение всякого множества со своим дополнением в каком-то универсуме. И тем самым пустое множество вложено в любое другое, в том числе и в себя. С логической точки зрения это значит, что из самопротиворечивого утверждения следует любое другое. Такое свойство символической логики отличает её от логики Аристотеля, в трудах которого, впрочем, находят аналогичную мысль, как и противоположную к ней.

Логический закон – *«Изо лжи следует что угодно»* – соответствует математической выводимости: утверждение $1=0$ несомненно влечёт $2=0$ и $0=0$. Но в гуманитарных науках зачастую продолжают пользоваться устаревшей логикой Аристотеля[44], тем самым подменяя импликацию эквивалентностью, что создаёт эпистемический барьер между гуманитарным и естественнонаучным знанием.

Признание пустого множества в математике приводит к явлениям, кажущимся мистическими. Так, его множество подмножеств состоит из одного элемента: ничто рождает нечто. Таким приёмом Пеано определил ряд натуральных чисел. С этим не соглашался Пуанкаре, поскольку думал, что множество из одного элемента совпадает с этим элементом. Различение этих понятий он считал пазиграфической чушью.

Но с категорной точки зрения, указанное чудо является «кашей из топора». Построение множества подмножеств нуждается в *«классификаторе подобъектов»*, которым может служить двухэлементное множество, а сам фокус иллюстрируется арифметическим равенством $2^0=1$.

**Математика в теоретико-множественном и категорном подходах.** Теория множеств возникла для формализации математического анализа. По начальной идее Гильберта, геометрия формализуется сведением к арифметике. Арифметика же, методом Пеано, формализуется через теорию множеств. Ранее Буль свёл к теории множеств математическую логику. Возникает эвристическая уверенность, что любая математическая теория сводится к теории множеств и изучает множества с определённой на них структурой. Остаётся лишь определить аксиомы рассматриваемых структур. В этом заключается идея Бурбаки о сущности математики. В полной мере она реа-

---

44 Так, один академик, написал об источниковедении: *«Неправильная фактическая посылка неизбежно ведёт к неправильным выводам.»/ Поляков Ю.А.* «Историзмы. Мысли и суждения историка»,– М.: Собрание, 2007, с. 34-35 (цит. по «Вестник РАН», 2008, т. 78, №1, с. 83).

лизована быть не может, но в некотором ограниченном и свёрнутом смысле является эффективной. На финитном уровне рассуждений, без прямого обращения к бесконечности, натолкнуться на теоретико-множественные парадоксы нелегко. Этого ещё никому не удавалось, и поэтому утверждение считается интуитивно ясным.

Интересный способ описания математики предлагает теория категорий[45], которая в некотором смысле предлагает социологический подход ко всей совокупности объектов математической теории (например, групп, алгебр, векторных пространств, топологических пространств, операд, топосов и т.д.). Математические объекты при этом не рассматриваются как множества со структурой, вместо этого рассматривается структура на множествах отображений (морфизмов) объектов. Лемма Ионеды утверждает, что объект категории определяется морфизмами, в которых участвует, с точностью до изоморфизма. Некоторые категории обладают интегральными объектами, морфизмы из которых позволяют рассматривать все объекты, как множества со структурой. Некоторые другие категории также допускают вложение в категорию множеств. Такие категории называются *конкретными*,– потенциально они описывают теорию на том же теоретико-множественном языке. Но существуют и неконкретные категории, которые в целом не допускают теоретико-множественного описания (но такое описание может быть локальным, например, для небольшого количества выбранных объектов). Не для всех математических теорий придумано адекватное категорное описание (например, не разработано такое описание алгебр Хопфа). Но это представляется возможным. Наоборот, существуют категории, с непрозрачным теоретическим смыслом (например, $Set^{op}$).

В некотором смысле, теория категорий вскрывает более глубокое содержание теорий, чем теория структурированных множеств. Но, поскольку теория категорий опирается на теорию множеств (её морфизмы – обычные мно-

---

[45] *Маклейн С.* «Категории для работающего математика»,– М.: Физматлит, 2004, 352 с.; *Букур И., Деляну А.* «Введение в теорию категорий и функторов»,– М.: Мир, 1972, 259 с.

жества), категории не спасают математику от возможных теоретико-множественных проблем, но они дают новый взгляд и методы уже известным теориям.

Теория категорий показала свою безусловную эффективность в дифференциальной топологии и алгебре (отсюда она и вышла), а также – в логике. Теория топосов, созданная Гротендиком и развитая его учениками, выявила внутреннее логическое устройство математических теорий, оказавшееся весьма разнообразным.

**Открытие неевклидовых геометрий и его влияние на пути развития математики.** Сложность пути к признанию геометрии Лобачевского, по некоторому размышлению, кажется удивительной. Ведь в математике давно были известны примеры неевклидовых геометрий,– сферическая (с 16 в.) и проективная (с 17 в.),– аксиомы которых отчасти совпадали с евклидовыми, а отчасти им противоречили. Так,– в обеих нет несовпадающих параллельных, а в сферической геометрии через некоторые пары точек проходит бесконечное множество прямых. Научная благосклонность к этим теориям обуславливалась их важными приложениями: сферической – в астрономии, географии; проективной – в изобразительном искусстве, архитектуре, геодезии. Геометрия Лобачевского получила такое приложение только после рождения геометрии Римана, когда на все возможные геометрии стало возможно посмотреть с общей для всех них точки зрения.

Необходимость обоснования математических методов стала решительно осознаваться лишь после признания неевклидовой геометрии Лобачевского. Непротиворечивость её была доказана конструктивным методом, указанным в «Началах» Евклида. Неожиданным было лишь применение евклидова метода не к отдельному объекту, а к теории. Правомерность такого перенесения была признана не всеми и не сразу. Э. Бельтрами в 1863 г. построил локальную евклидову модель геометрии Лобачевского, а Ф. Клейн в 1872 г. и А. Пуанкаре в 1882 г. окончательно свели геометрию Лобачевского к планиметрии Евклида. Тогда лишь возник вопрос о непротиворечивости геометрии Евклида, которым ранее никто не задавался. Его решил Д. Гильберт в 1899 г., сведя геометрию к вещественной арифметике. Он поставил задачу доказательства непротиворечивости арифметики. Работа венского математика Гёделя дала неожиданный результат – искомое доказательство в рамках самой арифметики не существует. Ученик Бернайса и ассистент Гильберта Г. Генцен в 1936 г. доказал непротиворечивость арифметики, погрузив её в более мощную теорию и обобщив понятие доказательства. Но из результата Гёделя следовало, что непротиворечивость системы Генцена недоказуема в её собственных границах.

Иногда считают, что неевклидовые геометрии способствовали развенчанию эмпиризма в математике[46]. Это мнение противоречит тому, что создатели неевклидовой геометрии,– Лобачевский и Гаусс,– были бесспорными эмпириками (философская позиция Больяи неизвестна), а рассуждавший о математике априорист Кант заявлял о неоспоримости аксиомы параллельных. Аксиоматико-дедуктивная природа «Начал» Евклида имеет несомненное эмпирическое происхождение, но абсолютизация её – продукт априоризма. Основные понятия и правила рассуждений в «Началах» не обсуждаются и рассматриваются, как некоторая данность. Известно также, что неевклидовая геометрия возникла в тщетной попытке проверить или доказать основы «Начал».

Возникновение вышеуказанного мнения можно приписать первым критикам Лобачевского, например, Остроградскому, высказывавшему пренебрежение к метафизическим проблемам и, в частности, к германской идеалистической философии своего времени. В отличие от Лобачевского, Остроградский в гимназии учился неважно, но свой педагогический опыт в элементарной геометрии не вполне обоснованно считал чрезвычайно ценным[47]. Пренебрегая новыми идеями из-за преданности неосознанной гимназической привычке, он отнёс теорию Лобачевского в раздел беспредметной фантазии. Аналогично воспринима-

---

[46] *Канке В.А.* «Философия математики, физики, химии, биологии: учебное пособие»,– М.: Кнорус, 2011, с. 25.

[47] *Бобынин В.В.* «Остроградский»/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. XXII (43),– СПб, 1897.

ли идеи Лобачевского и некоторые поклонники[48] его теории. Поэтому заслугу Лобачевского зачастую видели исключительно в зарубежном интересе к его фигуре[49].

**Ограничительные теоремы метаматематики.** Современный *аксиоматический метод* вырос из сочинения Фреге *«Исчисление понятий. Язык формул чистого мышления, построенный по примеру арифметического»*, опубликованного в Галле в 1879 г. Вероятно, работа была напечатана при содействии Кантора, профессора галльского университета. Благодаря этой публикации Фреге стал экстраординарным профессором Йенского университета. Книга Фреге развивает идеи Лейбница и создаёт основы современной символической логики. Фреге изобрёл кванторы и функциональное представление предикатов. Он также заметил, что для исключения неявных предположений теории её аксиомы и правила выводов должны быть определены без обращения к конкретным интерпретациям. Такие конструкции стали называться формальными системами. Они изучаются в теории доказательств, созданной Д. Гильбертом для реализации его программы обоснования математики, – *формализма*[50], объявленной в 1904 г. на Третьем Международном математическом конгрессе в Гейдельберге. Последовательное развитие формализма Гильберт начал в 1917 г., а результаты своей работы представил в «Основаниях математики» 1930 г. Он предложил аксиоматически перестроить всю математику, доказав непротиворечивость получившейся формальной системы, её полноту и категоричность. Полнота значит доказуемость любого истинного утверждения, в частности,– для каждого содержательного высказывания либо оно само, либо его отрицание должно быть выводимо из аксиом. Категоричность означает изоморфность всех моделей, удовлетворяющих заданным аксиомам.

План Гильберта был грандиозен, но казался необходимым для очищения математики от противоречий. Ведь другие программы – *логицизма*, редуцирующего матема-

---

[48] *Бобынин В.В.* «Лобачевский»/ Там же, т. XVIIа (34), 1896.
[49] *Бобынин В.В.* «Математика»/ Там же, т. XVIIIа (36), 1896.
[50] *Клини С.К.* «Введение в метаматематику»,–М.: ИЛ, 1957, с. 53-58.

тику к логике, и *интуиционизма*, ограничивающего математику конструктивными методами, не были удовлетворительными, теряя многие математические достижения 19 в. Гильберт нашёл средний путь между ними. Новая дисциплина должна была изучать математические теории, оказавшись за пределами классической математики. Поэтому Гильберт назвал её *«метаматематикой»* (греческое слово *μετα* означает «за, между, после»).

Чтобы осознать особенность Гильбертовой программы, надо учесть, что большая часть существующей математики возникла генетически, конструктивно и зачастую – на интуитивном уровне. В этом же смысле понималась истинность математических утверждений. До появления парадоксов теории множеств никто не подозревал, что правильные математические высказывания могут быть противоречивыми. Для решения возникшей проблемы Гильберт заменил истинность утверждения его совместимостью с аксиомами теории, то есть,– непротиворечивостью их объединённой системы. Прежде важный урок геометрии Лобачевского состоял в доказательстве её непротиворечивости погружением в теорию Евклида, интуитивно более достоверную. Непротиворечивость геометрии Евклида была доказана Гильбертом в 1899 г., сведением к вещественной арифметике. Но в отношении арифметики и теории множеств такого сведения ожидать не приходилось. Ведь неизвестны более простые и фундаментальные теории, кроме их собственных конечных интерпретаций и логики. Гильберт создал прямой дедуктивный метод доказательства непротиворечивости.

Гильберт собирался обосновывать всё естествознание, всю классическую математику, в том числе и анализ, существенно опирающийся на экзистенциальные бесконечности. Одновременно он признавал конструктивистское замечание об отсутствии интуитивной ясности такой бесконечности и необоснованности логических операций с ней, выработанных на практике конечных совокупностей.

Гильберт предложил рассматривать предложения об актуальных бесконечностях, как идеальные, возможно не имеющие содержательного смысла, но подчиняющиеся той же логике, что и содержательные, непосредственно проверяемые суждения. Все теоремы Гильбертовой метаматематики доказываются финитными и конструктивными методами, без прямого упоминания актуальной бесконечности. В такой теории содержательные предложения могут иметь простые доказательства с использованием идеальных предложений за счёт непротиворечивости системы, как это получается в проективной геометрии после присоединения бесконечно удалённых точек, или в комплексном анализе после добавления мнимой единицы[51]. Гильберт также интересовался критерием простоты доказательства, позднее осуществлённом в Колмогоровской и Марковской сложности. Логическая программа Гильберта оказалась невыполнимой в полном объёме.

Первыми «ограничительными» результатами было доказательство в 1930 г. К. Гёделем неполноты непротиворечивой системы, содержащей арифметику, и отсутствия финитного доказательства её непротиворечивости. Это утверждение применимо к самой арифметике и аксиоматической теории множеств. Теорему Гёделя в 1936 г. усилил Дж.Б. Россер, в 1939 г. – А. Тарский, в 1952 г. – А. Мостовский. Наглядной иллюстрацией неполноты аксиоматической теории множеств стало доказательство независимости континуум-гипотезы Кантора от аксиом ZFC, выполненное К. Гёделем и П. Коэном (1938, 1963).

В 1936 г. А. Чёрч доказал неразрешимость относительно доказуемости арифметики первого порядка. Тогда же Россер доказал неразрешимость любого непротиворечивого расширения этой системы. Неразрешимыми оказались теории групп, колец, полей, структур, колец и др. В 1956 г. Тарский доказал неопределимость истинности в достаточно большой непротиворечивой системе. Его доказательство в 1957 г. упростил Р.М. Шмульян[52].

**Основные течения философии математики.** В предыдущем разделе изложены некоторые идеи, методы и

---

[51] *Гильберт Д.* «Логические основания математики»/ *Гильберт Д.* «Избранные труды. Т. I»,– М.: Факториал, 1998, с. 426.

[52] *Френкель А.А., Бар-Хиллел И.* «Основания теории множеств»,– М.: Мир, 1966, с. 364-378.

результаты Гильбертова *формализма*. Упомянем и о других легендарных течениях философии математики.

Исторически первым возник *логицизм*, сводящий математические дисциплины к логике посредством дифинициарных расширений. Некоторые философы назначают И. Канта в основоположники логицизма[53], будто бы вытекающего из кантовского представления об априорном характере логики и математики. Такое мнение кажется анахроничным и неточным, поскольку создание этой системы, хотя и произошло под влиянием кантовских идей, но в полемике с ними.

Достоверное рождение логицизма можно связать с сочинением Г. Фреге *«Основания арифметики»*[54] 1884 г. В 85-86 параграфах книги автор соглашается с Канторовой теорией множеств, признавая аксиоматическую обоснованность актуальной бесконечности, но указывая на неразработанность метода полного упорядочения. Интуиция Фреге в этом вопросе оказалась глубокой,– позднее выяснилось, что для полного упорядочения необходима аксиома выбора Цермело, независимая от других аксиом.

Теории Кантора и Фреге помимо признания актуальной бесконечности методологически объединялись прямой связью множеств с понятиями. По Фреге, понятия полностью характеризовались своими объёмами, а по Кантору, всякое множество могло быть собрано из элементов с некоторыми свойствами правильной логической природы. Рассел сообщил Кантору и Фреге о противоречивости этого принципа. Его примеры парадоксального предиката и множества были построены по образцу «диагональной процедуры» Кантора. Наступил период математических парадоксов. В замешательстве Фреге и Кантор отказались от дальнейшего развития своих теорий. Последовательный противник логицизма А. Пуанкаре предположил, что источником парадоксов является самоотнесение использу-

---

[53] *Непейвода Н.Н.* «Логицизм»/ Энциклопедия эпистемологии и философии науки,– М.: Канон+, 2009, с. 447.

[54] *Фреге Г.* «Основоположения арифметики. Логико-математическое исследование о понятии числа»/ *Фреге Г.* «Логико-философские труды»,– Нсб.: Сиб. унив. изд-во, 2008, с. 125-288.

мых понятий, которые поэтому не являются правильными предикатами и не определяются своими объёмами. Выход из кризиса был указан Б. Расселом и его учителем А.Н. Уайтхедом. В трёхтомной кембриджской монографии *«Principia Mathematica»* 1910-1913 гг., общим объёмом около 2000 страниц, они создали *теорию типов*, согласно которой множество относится к более высокому типу, чем его элементы. При усовершенствовании этого принципа,– в разветвлённой иерархии типов,– исключаются автореференции при собирании (свёртке) множеств. В четвёртом ненаписанном томе книги планировалось построить логические основания геометрии.

Сочинение Рассела и Уайтхеда значительно повлияло на развитие современной логики, теории множеств и теории доказательств, хотя полное сведение классической математики к логике или теории множеств не состоялось. Вскоре после выхода книги Рассел отказался от последовательного логицизма, признав, что геометрия и даже сама логика не сводимы к логике, а зависят от эмпирического фундамента. В классической математике продолжается использование непредикативных определений. Так, Г. Вейль указал несводимость к теории типов *sup* и *inf* вещественных чисел[55].

К логицистским исследованиям относят аксиоматизацию арифметики Р. Дедекинда (1888) и Дж. Пеано (1891), алгебру логики Л. Кутюра (1904), логику высших порядков Л. Хвистека (1921), кумулятивную теорию типов Ф.П. Рамсея (1926), нестандартную аксиоматическую теорию множеств У. Куайна *NF* (1951), абстрактную теорию множеств А.А. Френкеля (1953), $\lambda$-исчисление Х.Б. Карри (1963) и др.

Следующими разработанными течениями философии математики стали *формализм* и *интуиционизм*, возникшие примерно в одно время и под взаимным влиянием. Между декларациями этих программ, их признанием и разработкой лежат немалые временные разрывы, поэтому сложно разобраться в приоритете какой-то из них.

---

[55] *Вейль Г.* «О философии математики. Сборник работ»,– М.-Л.: ГТТИ, 1934, с. 20.

Рождение интуиционизма связывают с докторской диссертацией голландского математика Л.Э.Я. Брауэра *«Об основаниях знания»* 1907 г., выполненной в Амстердамском университете под руководством механика Д.И. Кортевега. Но ей предшествовало несколько работ Брауэра на близкую тему, вышедших со времени защиты им магистерской диссертации в 1904 г., в частности,– книги 1905 г. *«Жизнь, искусство и мистика»*. На оригинальные убеждения Брауэра повлиял математик-самоучка Г. Маннури[56], из бухгалтера ставший приват-доцентом и профессором Амстердамского университета. Он принёс в Голландию идеи топологии и символической логики, увлекался психоанализом и политикой. В философии математики он держался редкого экзистенциального голландского направления – *сигнифики*[57].

В 1908 г. Брауэр опубликовал статью *«Недостоверность логических принципов»*, где отвергал закон исключённого третьего. На Четвёртом Международном конгрессе математиков в Риме он сообщил о своей позиции, но в свои 27 лет Брауэр ещё не получил научного признания и не мог рассчитывать на серьёзное отношение к своей радикальной теории, отбрасывающей большую часть достижений математики 19 века.

Брауэр занялся классической математикой и за короткое время получил важные результаты в топологии, доказав существование неподвижной точки при непрерывном отображении трёхмерного шара в себя (1909), топологическую инвариантность размерности (1911) и др.

Заслужив бесспорный авторитет в науке, став Нидерландским академиком и членом многих научных обществ, Брауэр приступил к созданию неклассического направления в математике, от которого впоследствии не отступал. Термины «формализм» и «интуиционизм» впервые обозначены им в 1911 г. в обзоре книги Маннури *«Методологические и философские замечания об элементарной мате-*

---

[56] *van Atten, M.* «Luitzen Egbertus Jan Brouwer»/ The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2011 Edition).

[57] *Френкель А.А., Бар-Хиллел И.* «Основания теории множеств»,– М.: Мир, 1966, с. 248.

*матике»* 1909 г. Открытая профессорская лекция Брауэра 1912 г. называлась *«Intuitionisme en Formalisme».* В 1913 г. она была перепечатана в Бюллетене AMS, и стала первой интуиционистской публикацией на английском языке. До 1951 г. Брауэр преподавал в Амстердамском университете, отклоняя иные приглашения. Он разработал ряд интуиционистских математических курсов, отказываясь от научного сотрудничества в классических направлениях.

Брауэр основал голландскую интуиционистскую школу, к которой принадлежали около 400 математиков многих дисциплин,– от топологии и логики, до программирования и философии науки. Среди них: М.И. Белифанте, А. Гейтинг, Д. ван Дален, Д. ван Данциг, Ф. Лёнстра, Б. де Лоор, А.С. Трулстра, Г. Фрейденталь и др.

Философские взгляды Брауэра, иногда бесцеремонное их продвижение, с конца 20-х гг. рассорили его с Гильбертом и другими ведущими математиками Европы. После 1945 г. под необоснованным предлогом денацификации его скомпрометировали и в голландской науке.

Брауэр считал, что математика априорна и несводима к опыту, логике или языку,– это не теория, а существенная часть человеческой деятельности, связанной с выделением отдельных восприятий. Он придерживался когерентной теории истины, считая, что правильность математических рассуждений определяется интуитивно ощущаемой согласованностью всего теоретического построения. В венском докладе 1929 г. Брауэр обозначил свою философскую позицию в более определённой форме,– он не признавал объективность пространственно-временного мира и его причинно-следственных связей, считая их продуктом совокупной воли человечества.

Своими идейными предшественниками Брауэр называл Л. Кронекера, А. Пуанкаре и Э. Бореля, представлявших интуитивное направление в математике. Интуитивисты не создали собственной философской системы, ограничиваясь остроумной критикой новых математических методов, к созданию которых имели непосредственное отношение. Будучи выдающимися учёными, они привлекли внимание к своим идеям за пределами своей дисциплинарной области. Пуанкаре даже удостоился ленинской критики за *«субъективистские выверты»* конвенционализма, будучи назван *«сбивчивым и непоследовательным писателем», «мелким философом», «мыслящим только бессмыслицу»* идеалистом и релятивистом[58].

По другой классификации[59] интуитивистов именуют интуиционистами, а последователей Брауэра называют *неоинтуиционистами*.

Интуитивистов объединяло мнение о бесполезности и бессмысленности теорем о существовании объектов, не дающих способов их построения. А таких теорем накопилось в математике 19 в. немало, например,– в вещественном анализе Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора. Неэффективные теоремы ещё ранее прописались в алгебре,– таким является утверждение о существовании комплексного корня числового многочлена. Беспокойство математиков этим обстоятельством выражалось во множестве попыток передоказательства, в активных исследованиях на тему нахождения или локализации корней и в игнорировании комплексных чисел (например, в окружении Чебышева). Потрясение алгебраического сообщества вызвала теорема Гильберта о конечности инвариантов. Проблема инвариантов в 1868 г. была эффективно решена эрлангенским математиком П.А. Горданом в частном случае. В теме не было значительного продвижения до 1888 г., когда Гильберт решил её для всех рассматриваемых тогда случаев (самая общая постановка задачи представляет четырнадцатую проблему Гильберта, отрицательно решённую в 1958 г. учеником Т. Накаямы М. Нагатой). Предварительно Гильберт доказал свои знаменитые теоремы о конечности базиса и о нулях. Он сообщил о решении проблемы алгебраическому патриарху А. Кэли, поначалу принявшему результат за план ещё не сделанной работы[60]. Против метода Гильберта резко высказались Гордан, Лин-

---

58 *Ленин В.И.* «Материализм и эмпириокритицизм»/ *Ленин В.И.* ПСС, изд. 5, т. 18,– М.: ИПЛ, 1968, с. 48, 171, 279, 311, 328 и др.

59 *Френкель А.А., Бар-Хиллел И.* «Основания теории множеств»,– М.: Мир, 1966, с. 243-244.

60 *Рид К.* «Гильберт»,– М.: Наука, 1977, с. 48-49.

деман и Кронекер. Рассуждение Гильберта при том не были чистой теоремой существования,– для каждого конкретного случая на его пути можно построить конечный базис идеала кольца многочленов и базис системы инвариантов.

По-настоящему неэффективные теоремы существования вытекают из принципа исключённого третьего, ставшего главным объектом критики интуитивистов. Другими предметами их нападок были актуальные бесконечности и аксиома выбора. Избавление математики от этого триединого зла, по мнению интуитивистов, снимает все противоречия и парадоксальные конструкции, делая доказательства интуитивно ясными. Интуиции они придают объективное, априорное, интуитивно понятное значение. То, что при последовательном применении такого подхода пропадёт значительная часть полезных математических достижений, не считается важным.

Брауэр мало интересовался логикой, как таковой, но под влиянием критики обратился к логическому оформлению своей теории. Первую кодификацию интуиционистской логики построил в 1930 г. ученик Брауэра Гейтинг. Её язык совпадает с языком классической математической логики, а различие проявляется в законах и интерпретациях операций[61]. Эта система не рассматривается как исчерпывающая и окончательная,– интуиционисты уверены, что таковой вообще не может быть.

Интуиционисты не интересуются проблемой парадоксов,– антиномии для них являются бессмысленными сочетаниями слов, не заслуживающими раздумий. В интуиционистской логике не любое высказывание имеет истинностное значение,– суждения, заявляющие о неконкретной возможности чего-то, считаются слишком абстрактными для этого. Принцип исключённого третьего применим без дополнительного исследования лишь к объектам конечной природы. Это следует из интуиционистского понимания логических операций: истинность конъюнкции требует конструктивного доказательства всех входящих операндов, а дизъюнкции – хотя бы одного из них, но

---

[61] *Гейтинг А.* «Интуиционизм»,– М.: Мир, 1965, с. 122-142.

вполне определённого. Эти операции особенно проблематичны по отношению к бесконечным множествам, не допускающим законченного исчерпывающего исследования. Поэтому к ним не всегда применимы экзистенциальные и всеобщие утверждения, сводимые к дизъюнкциям и конъюнкциям соответственно. Это суждение ранее высказывал Аристотель: *«Если бесконечное, поскольку оно бесконечно, непознаваемо, то бесконечное по количеству или величине непознаваемо, сколь оно велико, а бесконечное по виду непознаваемо, каково оно по качеству»*[62].

В интуиционистской логике также отсутствует снятие двойного отрицания, все связки и кванторы оказываются независимыми и не сводятся друг к другу посредством законов де Моргана, как в логике классической.

Интуиционистскую логику можно неформально мыслить как логику принципиальной вычислимости. А.Н. Колмогоров в 1931 году интерпретировал интуиционистскую логику как исчисление задач. Логические переменные здесь считаются задачами, связки – преобразованиями задач, а доказательства – сведением новых задач к задачам, решённым ранее или принятым за таковые. А. Тарский в 1938 г. предложил многозначную интерпретацию интуиционистской логики. Истинностная функция на формуле $A$ принимает значение в открытом множестве $U$ фиксированного топологического пространства $X$, а на отрицании этой формулы – во внутренности дополнения $U$. Остальные логические связки интерпретируются булевым образом. С.К. Клини в 1945 г. построил интерпретацию интуиционистской логики в логике классической.

Ученик Н.Н. Лузина В.И. Гливенко в 1929 г. доказал, что двойное отрицание истинного предложения классической логики доказуемо в логике интуиционистской, и поэтому интуиционистская логика является расширением классической.

Отрицая актуальные бесконечности, интуиционисты признают бесконечные множества в потенциальном смысле, как *«свободно становящиеся последовательности»*, ге-

---

[62] *Аристотель* «Физика, кн. 1, гл. 4»/ *Аристотель* «Сочинения в 4-х томах. Т. 3»,– М.: Мысль, 1981, с. 69.

нерируемые какой-то процедурой,– например, алгоритмом или физическим датчиком. Континуум они рассматривают как *«среду свободного становления»*. Первым теорию интуиционистского континуума построил ученик Д. Гильберта Г. Вейль[63] в 1918 г., брауэрова версия изложена А. Гейтингом[64] в 1956 г., другую предложил ученик С.К. Клини Р.Ю. Весли[65] в 1962 г. Указывают, что некоторые конструкции Брауэра используют актуальную бесконечность неявным образом. Интуиционисты допускают целостное исследование бесконечных совокупностей методом полной индукции или мысленным экспериментом. Неперечислимых бесконечностей у них не встречается.

Выводы интуиционистской математики весьма отличаются от классических. Так, интуитивистски определённые функции не имеют разрывов и, будучи заданы на вещественном отрезке, являются равномерно непрерывными, достигают верхней и нижней грани, но могут не принимать промежуточных значений. Существуют несравнимые вещественные числа. Монотонная ограниченная последовательность не обязательно сходится.

К достоинствам интуиционизма относят позитивное использование и логическую формализацию незнания. Несомненно, что интуиционизм Брауэра стимулировал логические и алгоритмические исследования, породив множество логических теорий с нетрадиционными законами и операциями. Среди таких систем упоминаются *слабая интерпретация* Д. ван Данцига, *минимальное исчисление* И. Иоганссона и *безотрицательная математика* Г.Ф.К. Грисса и П.К. Гилмора.

Российский логик, ученик П.С. Новикова, А.С. Есенин-Вольпин в конце 1960-х гг. начал строить теорию, называемую *ультраинтуиционизмом*. Ранее его знали как пострадавшего от политических репрессий правоза-

---

[63] *Вейль Г.* «О философии математики. Сборник работ»,– М.-Л.: ГТТИ, 1934, с. 100-128.

[64] *Гейтинг А.* «Интуиционизм»,– М.: Мир, 1965, с. 49.

[65] *Клини С., Весли Р.* «Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций»,– М.: Наука, 1978, с. 184-238.

щитника, поэта, философа, талантливого автора статей в «Философской Энциклопедии» 1967 г. и переводчика книг по математической логике. Его научное мировоззрение можно обозначить как скептицизм и антиэмпиризм.

Есенин-Вольпин сомневается в единственности натурального ряда, в его существовании и в применимости к нему принципа индукции. С интуиционизмом его теорию роднит отказ от некоторых традиционных законов, использующих отрицание. Он считает необходимым привлечение в логику дополнительных модальностей.

Его система имеет отличие от интуиционизма. Так, интуиционисты мало озабочены строгостью рассуждений, считая, что понятие доказательства не может быть формализовано. Есенин-Вольпин, напротив, уделяет доказательству много внимания, сводя его с неоспоримости в рамках недостроенной теории диспутов. Своей ближайшей математической целью он поставил обоснование непротиворечивости аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля, но пока не достиг этого. Кроме того, он надеется, что его идеи пригодны для создания строгих логических оснований всех наук, в том числе и гуманитарных. Поэтому он относит своё направление к *фундаментализму*[66]. Некоторые философы, отмечая метадисциплинарные цели теории Есенина-Вольпина и отличия от классического интуиционизма, относят её к *неологицизму*.

Главный парадокс интуиционизма в том, что идея интуитивной ясности не является интуитивно ясной. Поэтому из интуиционизма выделился *конструктивизм*, сводящий интуитивную эффективность к алгоритмической разрешимости.

Тезис об ограниченности человека и его способности к познанию во всяком конструктивном течении считается самоочевидным, отличаясь в этом от интуиционизма. Конструкции Брауэра вещественного континуума пытались передать интуицию непрерывного, а конструктивная математика принципиально дискретна. Тем не менее, неко-

---

[66] *Есенин-Вольпин А.С.* «Об антитрадиционной (ультраинтуиционистской) программе оснований математики и естественнонаучном мышлении»// Вопросы философии, 1996, №8, с. 100-136.

торые конструктивисты не отделяют своего направления от интуиционизма[67]. Но даже без такого отождествления внутри конструктивизма есть несколько течений.

В СССР первым последовательным конструктивистом был *А.А. Марков-младший* (1903-1979), сын петербургского академика А.А. Маркова-старшего (1856-1922). За рубежом его течение называлось *«советским конструктивизмом»*, а у нас – *«конструктивизмом Маркова»*.

Марков окончил физическое отделение физмата Ленинградского университета в 1924 г., проучившись один курс на химическом отделении. Его первая научная работа (1924) относилась к экспериментальной химии. В 1928 г. Марков закончил аспирантуру Ленинградского астрономического института. В это время он написал несколько статей по физике – о проблеме 3-х тел и квантовой механике. Затем он занялся динамическими системами, а с 1933 г. работал в топологии. Его результаты в этой области высоко ценил П.С. Александров.

В 1935 г. Маркову без защиты диссертации присвоили степень д.ф.-м.н., в 1936 г. он стал заведующим кафедрой геометрии матмеха Ленинградского университета. В 1934-55 гг. он работал в Ленинградском отделении математического института, и в 1942-1953 был его директором. В 1953 г. Маркова избрали членом-корреспондентом АН СССР. В 1955 г. он переехал в Москву и работал в МИАН. С 1959 г. Марков заведовал созданной по его инициативе кафедрой математической логики мехмата МГУ, и с 1972 г. возглавлял лабораторию логики и структуры машин ВЦ АН СССР. С 1976 г. Марков был вице-президентом Московского Математического Общества.

Как математик Марков (младший) сложился без официального научного руководителя. Но он называл своим учителем отца, отмечая также, что интерес к логике у него пробудился на университетском семинаре А.В. Васильева.

---

[67] *Непейвода Н.Н.* «Интуиционизм»/ Энциклопедия эпистемологии и философии науки,– М.: Канон+, 2009, с. 302-305; «Конструктивная математика: обзор достижений, недостатков и уроков. Часть I»/ Логические исследования. Вып. 17,– М.-СПб: Центр гуманитарных инициатив, 2011, с. 191-239.

Под влиянием публикации С.К. Клини 1945 г. Марков занялся теорией алгоритмов. Уже в 1947 г. он дал отрицательное решение проблемы 1914 г., поставленной норвежским математиком А. Туэ, доказав алгоритмическую неразрешимость равенства в ассоциативных системах (в современной терминологии,– в полугруппах). Независимо от Маркова тогда же проблема Туэ была решена Э.Л. Постом.

Начиная с этого времени и до последних дней Марков в основном занимался алгоритмами, которые называл *«алгорифмами»*,– сегодня этот архаический термин определяет причастность к Марковскому направлению. В 1948-1950 гг. он прочёл лекции по основаниям математики на матмехе Ленинградского университета. В 1950 г. Марков объявил о создании собственного понятия *«нормального алгорифма»*, а подробное описание этой конструкции он дал в следующем году[68]. Ранее Марков использовал определения Чёрча, Тьюринга, Клини и Поста. Обстоятельное изложение результатов и методов своего направления Марков дал в монографии 1954 г.[69]

Марков основал научную школу, к двум ветвям которой, ленинградской и московской, принадлежат примерно 160 учёных (О. Демут, А.Г. Драгалин, И.Д. Заславский, М.И. Канович, Б.А. Кушнер, С.Ю. Маслов, Ю.В. Матиясевич, Г.Е. Минц, Н.М. Нагорный, Н.Н. Непейвода, В.П. Оревков, Н.В. Петри, Г.С. Цейтин, Н.А. Шанин, В.А. Янков и многие другие). Московская ветвь этой школы частично пересекается с логическими школами П.С. Новикова и А.Н. Колмогорова.

Конструктивизм Маркова вырос из естественнонаучного стремления к осязаемости. Он считал, что цель математики исчерпывается конструктивной функцией, а саму математику относил к техническим наукам вроде машиноведения. Марков отвергал актуальную бесконечность,

---

[68] *Марков А.А.* «Конструктивная логика»// УМН, 1950, т. 5, №3, с. 187-188; «Теория алгорифмов»// Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1951, т. 38, с. 176-189.

[69] *Марков А.А.* «Теория алгорифмов»// Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1954, т. 42, с. 3-375; переиздана в соавторстве с Н.М. Нагорным в 1984 и 1996 гг.

но признавал абстракции отождествления и потенциальной осуществимости. В логике Маркова (ступенчатой семантической системе) нет закона исключённого третьего, но выполнен закон непротиворечия. Логические операции применяются к операндам с конструктивно прояснённым смыслом, импликация понимается как алгорифмическая выводимость.

Марков применял *«ленинградский принцип»*, *«принцип Маркова»* или *«принцип конструктивного подбора»*, из которого следует возможность снятия двойного отрицания с некоторых экзистенциальных формул и признание, тем самым, некоторых следствий закона исключённого третьего. Принцип утверждает о завершаемости алгорифма, если нелепо предположение о его неограниченной продолжаемости[70]. С этим решительно не соглашаются интуиционисты и конструктивисты иных течений. Из принципа Маркова следуют почти гёделевы результаты о неполноте: конструктивная реализуемость не влечёт выводимость.

Математические результаты Марковского конструктивизма близки интуиционистским, но глубже по части доказательства неразрешимости проблем. В марковской теории классическая конечность расщепляется на четыре неэквивалентных понятия: финитности, субфинитности, квазифинитности и неинфинитности. В анализе неразрешимы проблемы равенства вещественных чисел, отсутствуют разрывные функции. В теории полугрупп неразрешимы проблемы тождества и делимости элементов, изоморфии, единичности, группового свойства и вложимости в группу. В топологии неразрешима проблема гомеоморфии и гомотопической эквивалентности. При этом возникают неясные выходы в классическую математику[71].

Марков объяснил причину неразрешимости массовых задач неограниченным ростом сложности алгорифмов, разрешающих частные случаи.

---

[70] *Марков А.А.* «О конструктивной математике»// Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1962, т. 67, с. 8-14.

[71] *Сосинский А.Б.* «А не может ли гипотеза Пуанкаре быть неверной?»// Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 2004, т. 247, с. 247-251.

Современных последователей Маркова интересует не полнота теорий, а интуитивно понимаемая адекватность. Главной целью конструктивизма они считают анализ методов построений. Из научных идеалов они предпочитают полезность, с подозрением относятся к новизне и декларируют ограниченность познания[72]. Всё это указывает на кризис направления, возможно, из-за распада российских научных институтов. Положение стабилизирует рост востребованности конструктивных идей в информатике, кибернетике и вычислительной математике.

К зарубежному направлению конструктивизма относится программа американского математика *Эрретта Альберта Бишопа* (1928-1983). В биографиях Бишопа и Маркова (младшего) есть некоторые параллели. Отец Эрретта Альберта Альберт Т. Бишоп окончил военную академию в Вест-Пойнте, и после I Мировой войны работал профессором математики в разных университетах. Он умер, когда Эррету Альберту было 5 лет. Эррет Бишоп учил математику по книгам, оставшимся от отца. Его считали вундеркиндом, математические способности были и у его младшей сестры Мэри. В 1944 г. он поступил в Чикагский университет и окончил его в 1947 г. Затем Бишоп отслужил два года в армии и работал в Национальном Бюро Стандартов. В 1952-1954 гг. он поступил в аспирантуру Чикагского университета, и в 1955 г. написал замечательную докторскую диссертацию под руководством П.Р. Халмоша о спектральной теории операторов в банаховых пространствах. Бишоп постоянно жил в Калифорнии. В 1955-1964 гг. он работал в университете Беркли, а в 1965-1982 гг. – в университете Сан-Диего.

Интерес Бишопа к конструктивной математике появился в 1964 г. во время годичной стажировки в Миллеровском институте фундаментальных исследований в Беркли, но до этого он успел написать ряд интересных работ в области комплексного анализа. Коллеги вспоминают, что обращение в конструктивизм у него произошло под влиянием идей Г. Вейля, а с работами Брауэра Бишоп не

---

[72] *Непейвода Н.Н., Бельтюков А.П.* «Манифест прикладного конструктивизма»// Логические исследования, 2010, №16, с. 199-204.

желал знакомиться чересчур глубоко, чтобы не потерять своих оригинальных мыслей. В 1966 г. он приехал в Москву на математический Конгресс и прочитал пленарный доклад о конструктивизации математического анализа. Его идеи были встречены аудиторией без восторгов,– многие переживали потерю прекрасного математика классического направления. А.А. Марков и Н.А. Шанин предложили Бишопу продолжить обсуждение на кафедре логики, но после краткой беседы общего языка не нашлось. Бишоп отрицал значимость алгоритмов для математики и шёл своим путём. В 1967 г. он написал книгу *«Foundations of Constructive Analysis»*, которая открывалась *«Конструктивистским Манифестом»*. Такие идеи тогда не считались респектабельными. Бишопу не удалось договориться и с американскими специалистами по рекурсивным функциям. В 1972 г. в соавторстве с учеником Г. Ченгом он опубликовал книгу *«Constructive measure theory»*. В 1985 г. посмертно опубликована последняя книга Бишопа *«Constructive Analysis»*, написанная в соавторстве с Букингемским профессором школы Чёрча-Тьюринга Д.С. Бриджесом.

В 1973 г. Бишоп прочитал для AMS и опубликовал лекцию с критикой классической математики *«Шизофрения в современной математике»*. В это время он перестал набирать учеников, потому что им было сложно защититься по неклассическому направлению. Последнюю диссертацию под его руководством защитил в Сан-Диего Дж. Д. Бром в 1974 г. по теме *«Конструктивная теория компактных операторов»*. Известно только 5 диссертаций явно конструктивного направления под руководством Бишопа. К его школе сегодня относят себя 10 математиков.

В основе Бишоповского конструктивизма лежит идея восстановления нумерического смысла математики. Его позицию в анализе называют «атомистической». Бишоп отрицал свободно становящиеся последовательности Брауэра, а также жёсткую привязку эффективности к рекурсивности, допуская использование случайных датчиков. Возможность окончательной формализации доказательства Бишоп не признавал, связывая доказательность с убедительностью и здравым смыслом, отводя собственно логике в обосновании математики неглавную роль. Более ёмкую теорию он построить не успел.

История науки 20 в. показала, что вопрос об основаниях математики и знания вообще на современном уровне не может быть разрешён в окончательном виде и остаётся открытым.

**Теория алгоритмов, вычислимость и доказуемость.** В 1935-36 гг. были даны уточнения Лейбницева понятия алгоритма, впоследствии оказавшиеся эквивалентными. Они формализовали понимание того как решаются математические задачи, и позволили исследовать возможность такого решения. Теория алгоритмов была создана Чёрчем, Тьюрингом, Постом, Клини, Марковым[73] под влиянием идей Гильберта, изложенных при постановке его проблем (в особенности 10-й) в 1900 г.[74] и его работ по основаниям математики. Сам Гильберт ранее различал принципиальную разрешимость математической задачи и её разрешимость за конечное число операций[75]. В настоящее время под эффективной разрешимостью понимают алгоритмическую разрешимость, что отражает суть «тезиса Чёрча», имеющего много косвенных подтверждений.

Алгоритмические средства бедны,– многие математические задачи неразрешимы. Даже по соображениям мощности алгоритмами нельзя охватить все подмножества натуральных чисел или все действительные числа. Поэтому существуют неперечислимые множества натуральных чисел и множества с нераспознаваемостью вхождения элементов. Более того, существуют бесконечные множества без перечислимых счётных подмножеств. Счётными являются алгоритмически порождаемые, диофантовы вещественные числа. Они содержат алгебраические числа и счётный набор чисел трансцендентных, а для прочих даже не хватает конечных имён.

---

[73] *Колмогоров А.Н., Успенский В.А.* «К определению алгоритма»// УМН, 1958, т. 13, вып. 4(82), с. 3-28.

[74] «Проблемы Гильберта. Сборник под общей редакцией П.С. Александрова»,– М.: Наука, 1969, 240 с.

[75] *Гильберт Д.* «Аксиоматическое мышление»/ *Гильберт Д.* «Избранные труды. Т. I»,– М.: Факториал, 1998, с. 415.

В теории алгоритмов почти сразу обнаружилось существование алгоритмически невычислимых арифметических функций, из чего в 1936 г. Чёрч вывел алгоритмическую неразрешимость формальной арифметики и элементарного исчисления предикатов.

В 1970 г. Ю.В. Матиясевич окончательно опроверг гипотезу Гильберта (его десятую проблему), доказав алгоритмическую неразрешимость проблемы существования целочисленного решения нелинейного диофантова уравнения. Для контраста отметим, что сходная проблема для системы линейных уравнений очевидным образом разрешима, как разрешима и проблема существования целого корня диофантова полинома от одной переменной.

Разрешимой, непротиворечивой и полной является теория исчисления высказываний, поскольку здесь истинное высказывание является тавтологией, что может быть проверено с помощью истинностной таблицы. Тарский доказал разрешимость элементарной алгебры и элементарной геометрии. Элементарное исчисление предикатов является непротиворечивым и может быть расширено до полной непротиворечивой системы, но, возможно, не будет эффективно аксиоматизированным и разрешимым. Гёдель доказал полноту элементарного исчисления предикатов, а Чёрч – неразрешимость этой теории.

Непротиворечивыми, полными и разрешимыми оказались элементарные теории алгебры и абелевых групп. В теориях полугрупп, групп и колец неразрешима проблема равенства элементов, что следует из неразрешимости проблемы остановки алгоритмов. До сих пор открыта проблема Бокутя о разрешимости проблемы равенства в ассоциативной алгебре с одним определяющим соотношением.

Как и подозревал Гильберт, наиболее сложными оказались теория множеств и арифметика. 17 ноября 1930 г. австрийский математик Гёдель представил в Monatshefte fur Mathematik und Physik статью, где доказал полноту исчисления предикатов, неполноту арифметики и отсутствие финитного доказательства непротиворечивости системы, формализующей все финитные рассуждения.

Курту Гёделю было в это время 25 лет, в 1929 г. под руководством Ганса Хана он защитил в Венском университете диссертацию *«О полноте логического исчисления»*. Иногда сообщают, что научным руководителем Гёделя был Филипп Фуртвенглер, ученик Феликса Клейна и специалист в области алгебры и теории чисел. Вопреки тяжёлой инвалидности Фуртвенглер был продуктивным математиком, основавшим сильную алгебраическую школу в Венском университете, к которой причисляют себя примерно 2700 человек. В 1923 г. под его руководством защитился О. Шрейер, в 1930 г. – О. Таусски-Тодд, а в 1932 г. – основоположник компьютерной алгебры В. Грёбнер.

Гёдель в 1938 г. читал лекции в Гёттингене, но никогда не общался с Гильбертом напрямую[76].

Из результата Гёделя сразу следовало отсутствие доказательства непротиворечивости арифметики. В 1933 г. он показал, что из непротиворечивости интуиционистской арифметики без закона исключённого третьего следует непротиворечивость классической, и тем самым, интуиционизм Брауэра и Гейтинга в этом отношении не имеет преимуществ перед формализмом Гильберта. В 1936 г. Генцен получил непротиворечивость классической арифметики нефинитными средствами, без использования закона исключённого третьего. Тарский выяснил, что в непротиворечивом расширении арифметики неразрешима проблема истинности, а множество истинных высказываний этой теории неперечислимо.

В настоящее время не установлена непротиворечивость аксиоматической теории множеств, но доказана независимость от неё аксиомы выбора, континуум-гипотезы и многих других утверждений. В аксиоматической теории множеств есть неожиданные результаты, похожие на парадоксы. Так, из теоремы Левенгейма и Сколема (1915, 1920) следует, что она имеет счётную модель, хотя в ней существуют несчётные множества в том смысле, что не осуществима их биекция с натуральным рядом. Много удивительных, интуитивно неприемлемых результатов влечёт аксиома выбора.

---

[76] *Рид К.* «Гильберт»,– М.: Наука, 1977, с. 318, 258-261, 281.

Таким образом, аксиоматический метод в его современном понимании неспособен обосновать всю математику, а теория алгоритмов, возможно, недостаточна для описания всех эффективных способов решения задач.

### *Тема 3. Эволюция математических методов*

Подобно всякой науке, математика совершенствуется развитием методов решения проблем. Исторически, проблемы приходили из практической области. Но теоретическое развитие дисциплины открывает новые горизонты исследований. При этом глубокое осознание проблемы или даже её постановка немыслимы на недостаточном уровне развития науки. Так, изучение иррациональности невозможно вне полноценной позиционной системы исчисления, арифметическое понятие трансцендентности не может возникнуть ранее создания алгебраической теории. Интегрально-дифференциальное исчисление неосуществимо без исчерпывающих познаний в элементарной геометрии. Изучение геометрии нереально без освоения багажа соответствующих понятий.

Развитое дисциплинарное знание не образует линейно упорядоченный ряд сведений, и скорее похоже на сеть освоенных понятий, наброшенную на изучаемую предметную область. Научное знание в целом – это система ассоциированных представлений, созданных в процессе осознанной практической и интеллектуальной работы.

Общепринятая, но ошибочная история науки построена по средневековому канону, подчиняясь идее цикличности. Развитие древней науки описывается в ней чередой материально не подкрепляемых взлётов мысли, многовековых забвений и чудесных возрождений. Например, считают, что геометрический свод Евклида тысячелетиями находился без развития и переписывался без понимания основных геометрических понятий, пока не был опубликован Ратдольтом в 1482 г. Лишь после этого началось его активное изучение. Франкон из Люттиха около 1050 г. первым из европейских математиков *«постиг суть поня-*

*тия о внутреннем угле»*[77], заблуждаясь о смысле угла внешнего, а епископ Фуа[78] в переизданиях «Начал» 1566, 1578 и 1602 гг. уже прибавлял к 15 каноническим книгам Евклида по одной новой, написанной самостоятельно.

Цикличность истории науки оканчивается с изобретением книгопечатания, и с тех пор она развивается ускоренными темпами, демонстрируя преемственность и кумулятивность знаний. Этот рубеж отделяет мифы от достоверного начала научного знания. Правильное понимание хода развития науки неотделимо от рациональной истории её задач, понятий и методов.

**Развитие систем исчисления и математической символики.** Математическая работа требует удобного именования и записи чисел. Исторически первыми были непозиционные системы исчисления. В непозиционной римской системе отражается её дописьменное происхождение,– для счёта она использует палочки (*I, II, …*), сокращения именованных величин (*C, D, M*) и производные от них (*X, V, L*). Непозиционные греческая и церковнославянская системы изначально привязаны к алфавиту,– все именованные величины, кратные 10, здесь обозначаются отдельными буквами. Непозиционные системы предназначены скорее для записи, чем для арифметических действий. В начале 16 в. составление таблицы умножения до сотни в римской нумерации оценивалась как работа докторского уровня.

При работе в непозиционных системах возникает принципиально неразрешимая проблема записи больших чисел, поскольку исчерпывается общепринятый список названий и символов для них. Так, в римской нумерации нет стандартных способов записи чисел больше 5000. В вавилонской 60-ричной системе можно записать произвольно большие числа, но без однозначного их прочтения. Она не является вполне позиционной, не обладая нулём или каким-то знаком для пустого разряда, и поэтому все степени 60-ти записываются так же, как и 1.

---

77 *Кымпан Ф.* «История числа π»,– М.: Наука, 1971, с. 180.

78 *Бобынин В.В.* «Фуа, Франсуа»/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. XXXVIa (72),– СПб, 1902.

Проблеме записи больших чисел посвящён *«Псаммит»* Архимеда, опубликованный Ф. Коммандино в Венеции в 1558 г., видимо, незадолго до изобретения десятичной позиционной системы. Первая известная книга о десятичных дробях, *«La Disme»*, была опубликована в Лейдене С. Стевином в 1585 г.

В книге Архимеда для обозначения больших чисел определены специальные счётные единицы: мириада – $10^8$, октада – $10^{16}$ и т.д., не получившие дальнейшего применения. Современная индийская легенда сообщает, что 13-летний Будда сочинил названия для 53-х последовательных десятичных разрядов. Но его изобретение не получило распространения ни в буддийской традиции, ни в индийской науке. Считают, что к тому времени индийские математики уже располагали полноценной десятичной системой, использующей 0, а европейские учёные достигли этого лишь через 2 тысячи лет. С таким преимуществом индийская математика не совершила никаких научно-технических прорывов,– с её незначительными достижениями человечество ознакомилось в середине 19 в.

Современные позиционные системы тесно связаны с европейским способом письма,– разряды в них считываются слева направо, от бо́льших – к меньшим. Поэтому возникает сомнение в том, что такие системы могли возникнуть у древних народов, записывающих речь другим способом. Например, древние греки и скандинавы писали «ходом быка», составляя змеевидные последовательности символов, арабы – справа налево, китайцы – сверху вниз. В современном иврите речь пишется справа налево, а числа, например номера телефонов, – слева направо.

Современные десятичные знаки называются иногда индийскими, а иногда арабскими, поскольку историки находят соответствующие десятичные надписи, считающиеся очень древними (они встречаются даже в египетских папирусах). Точное их происхождение неизвестно, но значение самих символов не было окончательно закреплено даже в Европе 16 в., а значение записанных ими чисел не определяется без контекста. Вплоть до 18 в. цифрой считался только 0, остальные десятичные знаки,– 1, …, 9,–

назывались «фигурами». Считают, что слово «цифра» арабского происхождения и родственно слову «шифр», обозначавшему что-то скрытое от понимания обычного человека.

После ознакомления с сообщённой из Китая проповедниками «Книгой перемен» Лейбниц изобрёл двоичную систему исчисления, изложив соответствующие алгоритмы арифметических действий[79]. Двоичная система неявно заложена в ныне позабытом народном «пальцевом» счёте. При дефиците писчего материала операции удвоения и деления на 2 даются с наименьшими затратами ума и ресурсов. По тем же причинам двоичное исчисление заложено в цифровые вычислительные машины.

Изобретателем алгебраической символики считают парижского рекетмейстера (товарища прокурора по апелляциям) Франсуа Виета, до него уравнения записывались в словесной форме. Несмотря на славу великого математика, о жизни Виета не сохранилось достоверных сведений. Решение задачи о касаниях окружностей он опубликовал под псевдонимом «Галльский Аполлоний». Собрание всех математических сочинений Виета напечатал в 1646 г.[80] лейденский математик Франциск Шоотен[81] через много лет после кончины автора. Кроме сочинений Виета, Шоотен в 1657 г. «восстановил» утраченное геометрическое сочинение Аполлония Пергского «Плоские места». В алгебраических книгах Шоотен использовал символику Декарта, довольно близкую современной. Формулы самого Виета более походили на магические диаграммы его английского современника Джона Ди. Алгебраические записи обрели знакомые очертания усилиями многих математиков. Обозначения арифметических операций прошли долгую эволюцию, в основном завершившуюся в 19 в.[82]

---

[79] *Лейбниц Г.В.* «Объяснение двоичного исчисления (Мемуар Академии Наук, 1703)»/ Письма и эссе о китайской философии и двоичной системе исчисления,– М.: ИФРАН, 2005, с. 203–212.

[80] *Бобылёв Д.К.* «Виет Франсуа»/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. VI (11),– СПб, 1892.

[81] *Бобынин В.В.* «Шоотен»/ Энциклопедический словарь Брокгауза и Эфрона, т. XXXIXa (78),– СПб, 1903.

[82] *Депман И.Я.* «История арифметики»,– М.: КомКнига, 2006, с. 208-212.

В «Арифметике» Диофанта для обозначения чисел, переменных величин и некоторых операций использовались греческие буквы, соответствующие греческому названию. Такой символический метод называется «синкопированием». Книга Диофанта была издана на латыни Вильгельмом Гольцманом (Ксиландром) в 1575 г., на греческий язык её перевёл Баше де Мезириак в 1621 г.,– и этим изданием пользовался Пьер Ферма. В 1670 г. книга Диофанта была издана с примечаниями Ферма, значительно повлиявшими на дальнейшее развитие математики. Так, в ней была сформулирована «Великая теорема Ферма», решение которой стимулировало создание общей алгебры и аналитической теории чисел.

Вместе с тем, геометрическая символика мало изменилась со времени первых публикаций Евклида, Аполлония и Архимеда. Сочинение Архимеда «Об измерении окружности» написано на том же математическом языке, что и «Принципы» Ньютона, доступном пониманию современного читателя.

**Групповая классификация геометрических теорий. Эрлангенская программа Ф. Клейна.** Признание неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевского потребовало найти ей место в математике. Единую точку зрения на различные геометрии впервые высказал Ф. Клейн во вступительной профессорской лекции в университете Эрлангена 1872 г. Лекция была опубликована отдельной брошюрой в том же году под названием *«Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований»* и перепечатана журналом Mathematische Annalen в 1893 г.

Сущность Эрлангенской программы Клейна состоит в рассмотрении конкретной геометрии, как системы инвариантов заданной группы преобразований пространства. Например, геометрия Евклида изучает свойства фигур, сохраняющихся при движениях,– фигуры считаются равными (конгруэнтными), если они совмещаются при некотором движении. Инвариантами движений являются углы и расстояния. Так, при выборе различных групп преобразований, могут получаться разные геометрии. Выбирая аффинные или проективные преобразования, мы придём к аффинной и, соответственно, проективной геометрии. Развивая идею А. Кэли, Клейн показал, что выбор группы дробно-линейных преобразований, сохраняющих единичный круг комплексной плоскости, приводит к неевклидовой геометрии Лобачевского. Клейн рассмотрел подобным образом широкий круг других геометрий. Впоследствии Я. Схоутен и Э. Картан объединили в геометрии групповой и дифференциальный методы.

Эрлангенская программа, вослед за созданием аналитической геометрии и векторной алгебры, обозначила новый синтез геометрии и алгебры. Следующим достижением на этом пути было создание алгебраической геометрии.

### *Тема 4. Математические проблемы и их современное состояние*

Предсказание пути развития науки – занятие изначально парадоксальное. Ведь оно требует от прогнозирующего постановки ещё неосознанных проблем и предугадывания решений задач уже стоящих. Но в правильной формулировке проблемных ситуаций заложена значительная информация для их разрешения. Дело усугубляется, если специалист пытается угадать ход событий в важной области, где исследования зашли в тупик, где ощущается недостаток новых идей и мощных методов. Эксперт в таком случае порою ошибается чаще дилетанта, не знакомого со всеми затруднениями в данной области. В прошлом теория Коперника и Кеплера вызывала наибольшие возражения у профессоров астрономии, а теория Лобачевского – у геометров. Основатель позитивизма Огюст Конт незадолго до открытия спектрального анализа Г. Кирхгофом и Р. Бунзеном предрекал, что человечество никогда не узнает химический состав Солнца. В 1868 г. в составе Солнца был обнаружен гелий.

Вспомним современные примеры экспертных провалов. Признанный специалист по теории чисел, автор основательной монографии о Большой Теореме Ферма[83], в

[83] *Эдвардс Г.* «Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел»,– М.: Мир, 1980, с. 11.

1977 г. написал, что нет никаких оснований считать последнюю теорему Ферма верной. Но уже в 1983 г. Герд Фалтингс доказал гипотезу Морделла, из которой следует конечность приведённых решений уравнения Ферма степени выше второй, а в 1995 г. Эндрю Уайлз представил окончательное доказательство этой теоремы. Другой знаменитый математик и популяризатор науки[84] в 2001 г. предположил, что проблема Пуанкаре продержится до 2050 г. В это время она уже была решена Г.Я. Перельманом. Прогнозирование прогресса – занятие также и неблагодарное: история науки легче запоминает несбывшиеся прогнозы, чем удачные догадки. Но и здесь случаются замечательные исключения.

**Проблемы Гильберта и их влияние на современную математику.** Доклад Гильберта *«Математические проблемы»*, был прочитан на объединённой историко-методологической секции II-го Математического конгресса в Париже 8 августа 1900 г.[85] Гильберт заметил, что каждый век имеет собственные математические задачи, впоследствии либо разрешаемые, либо отставляемые как бесплодные, и заменяемые новыми. Всякая область научного исследования жизнеспособна, пока изобилует нерешёнными проблемами, и прекращает развитие при их недостатке. Наличие проблем имеет стимулирующее значение для науки. Хорошая математическая проблема должна быть ясной и достаточно трудной, чтобы привлекать внимание сильных учёных, но не должна быть совершенно недоступной для решения, чтобы не сделать все усилия бесполезными. Гильберт был убеждён в методологической целостности математики и осмелился указать задачи, которые, по его мнению, зададут развитие математики 20-го в. В докладе он обозначил десять проблем, но в последующей публикации их стало уже 23.

Гильберт высказался о способе решения математических задач. Он заметил, что многие из них не могут быть

---

[84] *Стюарт Я.* «Математика 2050 года»/ Будущее науки в XXI веке. Следующие пятьдесят лет,– М.: АСТ, 2011, с. 41.

[85] *Демидов С.С.* «К истории проблем Гильберта»/ Историко-математические исследования. Вып. XVII,– М.: Наука, 1966, с. 91-121.

решены, пока не станут ясны более простые частные случаи и не будет выработана достаточно общая точка зрения на проблему, ставящая её звеном в цепи родственных проблем. Решение проблемы должно следовать из конечного числа точно сформулированных предпосылок. Гильберт предполагал, что любая определённая математическая проблема должна иметь строгое положительное или отрицательное решение[86]. Его слова можно понять так[87], что он надеялся на полноту всякой непротиворечивой формальной теории. Тем более, что в статьях *«О бесконечном»* (1926) и *«Проблемы обоснования математики»* (1930) Гильберт высказался об этом гораздо определённее[88]. Поздней осенью 1930 г. его мечту развеял К. Гёдель.

К большей части поставленных проблем Гильберт имел непосредственное отношение, предлагая программу исследования. Некоторые из них имели конкретный или частный характер, другие,– напротив, были поставлены очень широко. Например, Гильберт предлагал построить теорию непрерывных групп (5), аксиоматизировать физику и теорию вероятностей (6), построить теорию квадратичных форм над любым алгебраическим полем (11), развивать методы вариационного исчисления (23). Но многие проблемы Гильберта определили лицо математики 20 в. Их решение было невозможно на уровне знаний 1900 г. К таким можно отнести: континуум-гипотезу Кантора (1), непротиворечивость арифметики (2), неравносоставленность тетраэдров с одинаковыми высотами и равными площадями оснований (3), нахождение метода разрешения диофантовых уравнений (10), возможность выражения решения алгебраического уравнения 7-ой степени композицией непрерывных функций двух аргументов (13), конечность инвариантов действий линейных групп (14).

---

[86] *Гильберт Д.* «Математические проблемы»/ «Избранные труды. Т. II»,– М.: Факториал, 1998, с. 407; «Проблемы Гильберта. Сборник под общей редакцией П.С. Александрова»,– М.: Наука, 1969, с. 21.
[87] *Подниекс К.М.* «Теорема Гёделя о неполноте»/ «Математика XX века. Взгляд из Петербурга»,– М.: МЦНМО, 2010, с. 171.
[88] *Гильберт Д.* «Математические проблемы»/ *Гильберт Д.* «Избранные труды. Т. I»,– М.: Факториал, 1998, с. 448, 453.

Остальные проблемы задали импульс к развитию своих дисциплин. Часть проблем Гильберта открыты до сегодняшнего дня, например, – гипотезы Римана и Гольдбаха (8), о вещественной топологии алгебраических кривых и числе предельных циклов дифференциального уравнения первого порядка с рациональным полем направлений (16), о плотнейшей упаковке шаров (18).

**Программы 20-го века.** Проблемы Гильберта направили развитие математики 20 в., но не определили его в полной мере. Следуя традиции, возникли и другие списки актуальных задач, составленные либо в одиночку, либо коллективно. Польско-американский математик Улам в 1960 г. перечислил интересные задачи разных математических дисциплин[89]. Известны проблемы проективной алгебраической геометрии, составленные в 1979 г. американским математиком Хартсхорном[90]. Российский математик В.И. Арнольд предложил обширный список проблем из своей области интересов[91]. Ранее советские математики многократно публиковали «Коуровские тетради»[92], – их первый выпуск был составлен на Дне проблем Первого всесоюзного симпозиума по теории групп в посёлке Коуровка под Свердловском 16 февраля 1965 г. В 1969 г. появились «Днестровские тетради» и «Свердловские тетради» [93].

В эти обширные списки наряду с задачами заурядными, случайными или чисто техническими, попадали замечательные проблемы, изменявшие направление развития соответствующих областей. Например, «проблема В.

---

[89] *Улам С.* «Нерешённые математические задачи»,– М.: Наука, 1964, 168 с.

[90] *Hartshorne R.* «Algebraic vector bundles on projective spaces: A problem list»// Topology, 1979, vol. 18, no. 2, pp. 117-128.

[91] *Арнольд В.И.* «Задачи Арнольда»,– М.: Фазис, 2000, 454 с.

[92] Коуровская тетрадь (нерешённые вопросы теории групп), изд. 8, доп.,– Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982, 116 с.

[93] «Днестровская тетрадь (нерешённые вопросы теории колец и модулей), изд. 4, доп.»,– Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1993, 73 с.; «Свердловская тетрадь. Нерешённые задачи по теории полугрупп, изд. 2, доп.»,– Свердловск: Изд-во Уральского гос. ун-та, 1979, 41 с.

Шпехта» (ДТ, 1.164), решённая А.Р. Кемером[94], математиком Новосибирской алгебраической школы, перенаправила усилия по изучению алгебраических тождеств из ассоциативной области в область иных сигнатур, или в алгебры над полями конечной характеристики. Несмотря на многолетние попытки и появляющиеся анонсы об успехах, до сих пор не решены: проблема простого ассоциативного ниль-кольца (ДТ, 1.172) и «проблема В.Н. Латышева» (ДТ, 1.92) о существовании ненильпотентной ассоциативной конечноопределённой ниль-алгебры.

Влияние новых проблемных списков оказалось не столь значительным, как у Гильбертова, кроме одного широко известного случая. Недавно, в связи с решением Г.Я. Перельманом проблемы Пуанкаре и его последующим отказом от всех наград, стали популярны «Проблемы тысячелетия», поставленные частным математическим институтом американского мецената Л.Т. Клэя в 2000 г. Научно-консультативный совет института Клэя обозначил семь задач, за решение которых обещаны миллионные призы. Помимо упомянутой и уже решённой проблемы Пуанкаре, к «проблемам тысячелетия» были отнесены гипотезы Римана[95], Ходжа, Берча-Свиннертон-Дайера, о равенстве классов P и NP, исследование уравнений Навье-Стокса и уточнение теории Янга-Миллса. Продвижение в отмеченных областях стимулируется организацией семинаров собранных со всего мира специалистов.

Нет однозначного ответа на вопрос: приносит ли коммерческая шумиха вокруг проблем математики больше вреда или пользы? Руководители Американского Математического Сообщества надеются привлечь призами в математику способную молодёжь, иначе выбирающую более респектабельную и доходную деятельность – юриспруденцию, IT, экономику. Другие считают, что дух наживы не совместим с идеалами науки и стоит на пути научно-

---

[94] *Кемер А.Р.* «Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр»// Алгебра и логика, 1987, т. 26, №5, с. 597-641.

[95] *Дербишир Дж.* «Простая одержимость: Бернхард Риман и величайшая нерешённая проблема в математике»,– М.: Астрель, Corpus, 2010, 463 с.

технического прогресса, поскольку разрушает здоровую коммуникацию и традиционные научные институты, а взамен стимулирует плагиат, имитаторство и халтуру.

По-видимому, математика ввязалась в маркетинговые игры позднее других дисциплин. Задержке способствовал социальный эксперимент, поставленный дармштадтским врачом и математиком-любителем П. Вольфскелем. В 1907 г. он завещал 100 тысяч марок первому, кто докажет Большую Теорему Ферма (но не за её опровержение). Несмотря на девальвацию марки и самой премии, научные академии, институты и математические кафедры в 20 в. испытали напор творческой усилий малоподготовленных энтузиастов. Образец поучительного неправильного решения даже появился в замечательной книге[96],– в её 36-й главе с названием «Крик петуха» автор назвал предложенное им доказательство «хулиганским». Ошибочные решения поступали и после 1995 г., когда проблема была окончательно решена английским математиком А. Уайлзом, вскоре получившим за своё достижение почти все возможные научные почести и награды.

Некоторые современные математики, например, П. Эрдёш, Д. Кнут, Р. Хартсхорн, по примеру учёных Средневековья предлагали за решение интересующих проблем индивидуальные призы, величиной от нескольких центов до нескольких тысяч долларов. Эффективность такой инициативы неизвестна, но ясно, что к решению задач других математиков привлекала не денежная награда, а желание сопричастности к славе её автора, заслуженного учёного.

## *Тема 5. Организация научного сообщества*

Научное творчество малопродуктивно вне развитой сети дисциплинарной коммуникации, определяющей проблемные области и приёмы исследования, сохраняющей и транслирующей полученные результаты. Протонаучные общества устраивались по образцу средневековых цехов,– замкнутых профессиональных союзов, определявших ква-

[96] *Анчаров М.* «Самшитовый лес»,– М.: Сов. писатель, 1981, 320 с.

лификацию своих членов, представлявших общие интересы и передававших умения по наследству. Разрушение этой системы началось в 15 в., сопутствуя началу первой научно-технической революции. Распаду цеховой организации науки способствовало две причины, первая из которых была связана с развитием самой науки, усложнением корпуса её сведений. Записи на бумаге и последующая публикация делали знания доступными для внешнего сообщества, привлекая посторонних. Вместе с тем, их изучение требовало особых наклонностей, не всегда передаваемых по наследству. Трагедия того периода,– отказ сына великого флорентийского архитектора Филиппа Брунеллески от семейной профессии,– отразилась в «античной» легенде о Дедале и Икаре. Вторая причина была сугубо европейской. Университетские корпорации не могли передавать профессию по наследству, поскольку в колледжах был принят монастырский целибат. Этим уставом объяснялось безбрачие многих учёных вплоть до 18 в., например, Исаака Ньютона, бывшего профессором Троицкого колледжа Кембриджского университета.

Набор студентов со стороны, иногда из других стран, способствовал выработке универсального языка науки, которым поначалу стала латынь, синтезированная из народных языков Европы[97]. В это время османское завоевание Константинополя привело к массовой эмиграции греческих учёных. Греческая наука, в силу политического и технического отставания Азии от Европы, имела преимущественно гуманитарный характер. Для решения своих естественнонаучных и технических задач греки и османы приглашали западных европейцев. Поэтому греческий язык стал языком преимущественно гуманитарных наук. Первые публикации книг «древнегреческих» учёных,– Евклида, Птолемея, Диофанта, – производились на латыни, и лишь позднее гуманисты переводили их на греческий язык.

---

[97] *Морозов Н.А.* «Христос, т. III. Бог и слово, ч. 1»,– М.: Крафт+Леан, 1998, с. 141-292; *Носовский Г.В., Фоменко А.Т., Фоменко Т.Н.* «Русские корни «Древней Латыни». Языки и письменность Великой Империи»,– М.: Астрель, 2012, 608 с.

Новой открытой формой научной организации стали академии,– элитные сообщества учёных, преодолевающие цеховые, корпоративные и национальные преграды. Первой достоверной широко известной академией стала «Платоновская», организованная греком Гемистом Плетоном под покровительством флорентийского тирана Козимо Медичи. Она просуществовала около века. Позже академии возникли во всех европейских странах, и организация их считалось достоинством государства.

Научные сообщества на закате Средневековья не могли действовать свободно,– этому мешали цеховые, политические и сословные преграды, а позднее – католическая инквизиция. Поучительная история произошла с римской академией рысьеглазих, основанной в 1603 г. герцогом Акваспарта, Сан-Поло и Сант-Анджело Федерико Анджело Чези. В ней состояли выдающиеся европейские учёные, например, с 1611 г. – Галилео Галилей. Главной задачей Академии было составление полного свода знаний по естественной истории, подобного 37-и томной *«Plinii Secundi Naturalis Historiae».* В 1632 г. академию запретили, а все её участники подверглись гонениям. В 1847 г. Академию деи Линчеи восстановил папа Пий IX. С тех пор она называется Папской и носит имя нереабилитированного Католической Церковью Галилея.

Для свободных научных исследований учёные организовывали полутайные кружки, «невидимые колледжи». Сведений о них сохранилось мало. Можно предполагать, что они не имели постоянного состава, не собирались общим составом, а общение в них проводилось по переписке или на частных встречах. Известно, что коммуникатором одного такого общества был французский математик Мерсенн, общавшийся со многими европейскими математиками первой половины 17 в. Состав других «невидимых колледжей» восстанавливается лишь предположительно по решаемым задачам. Свои коллективные труды они, скорее всего, писали под античными псевдонимами, выдавая их за новонайденные переводы. Впоследствии эти труды стали принимать за очень древние. Но об их происхождении свидетельствует слишком позднее появление и отсутствие значительных работ у многих прославленных учёных того периода. Похожим образом уже в 1935 г. в Нанси возникло общество французских математиков, публиковавшее книги под псевдонимом Никола Бурбаки.

С развитием университетской системы уже в Новое время возникли такие локальные формы организации математиков, как школа и научный семинар. С другой стороны с расширением международного характера науки появились международные ассоциации математиков – IMU, EMS, AMS, SIAM, взявшие на себя организацию международных математических конгрессов и конференций.

Первый международный конгресс математиков прошёл в Цюрихе 9-11 августа 1897 г. Его организовал Г. Кантор, в Оргкомитет входили Ф. Клейн, А.А. Марков и А. Пуанкаре. Второй конгресс был в Париже (1900), третий – в Гейдельберге (1904), четвёртый – в Риме (1908). Конгрессы проводятся раз в четыре года, но отменяются из-за мировых войн, и поэтому после Пятого конгресса в Кембридже 1912 г. они не имеют номеров. Начиная с 1936 г. на Конгрессах вручают 2 или 4 золотые медали математикам до 40 лет за успехи последних 4-х лет. На них изображён Архимед и его изречение.[98] Медаль названа в честь канадского алгебраиста и администратора Дж.Ч. Филдса, предложившего идею такой награды на Конгрессе в Торонто 1924 г. Ей сопутствует небольшая премия. С недавнего времени на Конгрессах стали вручать премии им. Р. Неванлинны, К.Ф. Гаусса и медаль им. Ш. Чженя.

**Академическая и университетская математика в России.** Российская Академия наук была создана в Санкт-Петербурге в 1725 г. как учебно-просветительское и научно-исследовательское заведение. В 19 в. Императорская академия наук отдала свои учебные функции учреждённым университетам Санкт-Петербурга, Москвы, Казани, Харькова, Вильны, Дерпта, Киева, Одессы и Томска. Доклады Академии печатались тогда на французском языке. Вскоре университеты стали соперничать с Академией и в научной работе. Академики не преподавали свои родные

[98] *Арнольд В.И.* «Международный математический конгресс в Берлине»// Вестник РАН, 1999, т. 69, №2, с. 163-174.

дисциплины, но подрабатывали по случаю в сторонних учебных заведениях. Воспроизводство академических кадров было затруднено, академия пополнялась из университетских кругов. Многие академики-математики (например, Л. Эйлер, С.Е. Гурьев, С.К. Котельников, М.В. Остроградский, В.Я. Буняковский) при большой занятости не имели учеников и не передали свою научную программу. Исключением был академик П.Л. Чебышев, создавший оригинальную научную школу[99]. В настоящее время у Чебышева насчитывают более 9 тысяч научных потомков.

Важную организующую роль в математике Академия наук приобрела лишь в советское время. Это заслуга многих математиков, но в первую очередь – В.А. Стеклова[100]. В 1919 г. он организовал и возглавил Физико-математический институт Академии наук, ставший научно-исследовательским центром по физике и математике. С 1926 г. институт стал носить его имя. В 1932 г. институт разделили на два отдела. 28 апреля 1934 г. из математического отдела был образован Математический институт АН имени В.А. Стеклова, имевший отделения в Москве, Ленинграде, Свердловске и Новосибирске.

С распадом Советского Союза Академия наук потеряла былое организующее значение, выступая второстепенным консультативным органом при Министерстве образования и науки.

**Возникновение научных школ в математике, их эволюция и современные перспективы.** Наиболее распространенной локальной формой организации учёных в России является научная школа. Возможно, в этом проявилось влияние Вейерштрасса, у которого учились многие российские математики.

Школа, как элементарная ячейка научного сообщества возникает в окружении продуктивного, идейно вдохновляющего лидера, направляющего исследования не-

[99] *Баранец Н.Г., Верёвкин А.Б.* «Методологическое сознание российских учёных в XIX – начале XX века»,– Ульяновск: Издатель Качалин А.В., 2011, с. 318-325.

[100] *Баранец Н.Г., Верёвкин А.Б.* «Российские математики о науке и философии»,– Ульяновск: Издатель Качалин А.В., 2012, с. 127-156.

скольких поколений учеников. Для её создания лидеру нужны особые харизматические качества и время,– его присутствие должно помочь ученикам подняться в своих исследованиях выше их естественного уровня. Многие крупные математики,– Буняковский, Гаусс, Кронекер, Кантор, Лобачевский, Остроградский,– даже располагая необходимыми административными средствами, научных школ не создали. В Гёттингенском университете почти 30 лет просуществовала замечательная школа Гильберта, разогнанная нацистами.

Особенности функционирования научной школы определяются отношениями учителя с учениками и последователей с оппонентами, задающими две линии коммуникации: внутреннюю иерархическую и внешнюю, проводимую на конференциях, при защитах диссертаций. Представители одной школы едины в концептуальной позиции, и предметом внутренней коммуникации обычно являются технические или организационные вопросы развития общей исследовательской программы. Это не исключает жёстких споров и личной конфронтации, непринципиальных с точки зрения внешних оппонентов. Жизнеспособные и продуктивные научные школы редко формируются без научного семинара, являясь вторичными по отношению к нему.

Основными центрами математической жизни дореволюционной России были: петербургская школа П.Л. Чебышева и московская школа Н.В. Бугаева, исторически связанные друг с другом общим учителем Н.Д. Брашманом. Идейно-методологическое расхождение этих школ оформилось к концу 19 в. и проявилось в ряде концептуальных споров их представителей,– например, в спорах А.А. Маркова (старшего) и А.М. Ляпунова с П.А. Некрасовым. К петербургской школе на начальном этапе принадлежали П.Л. Чебышев, Г.Ф. Вороной, Е.И. Золотарёв, А.Н. Коркин, А.А. Марков (старший), А.М. Ляпунов и В.А. Стеклов. Для неё была характерна прикладная ориентированность, стремление к строгому и эффективному решению математических задач, к построению алгоритмов, доводящих решение задачи либо до точного числового ответа, либо для пригодного приближённого решения, а также стремление к простоте используемых средств. Петербуржцы не доверяли новым абстрактным математическим направлениям, а философское осмысление математики осуществляли в позитивистском духе. Петербуржцы долгое время игнорировали идеи Н.И. Лобачевского. Так, во время всемирного празднования столетнего юбилея казанского математика в 1893 г., в Санкт-Петербурге это мероприятие не заинтересовало математиков из Академии наук. Торжество ограничилось выступлением астронома А.Н. Савича в Математическом обществе, и речью профессора, генерал–майора П.А. Шиффа на Высших женских курсах.

Представители московской школы,– Н.В. Бугаев, Д.Ф. Егоров, Н.Е. Жуковский, Н.Н. Лузин, П.А. Некрасов, К.М. Паттерсон,– склонялись к формально аксиоматическим построениям и философии антипозитивистской направленности. Они целенаправленно искали новые темы и методы на малоисследованных рубежах, поэтому их привлекла теория функций действительного и комплексного переменного, а также Канторова теория множеств. Именно в журнале Московского Математического Общества в 1868 г. было опубликовано первое в России осторожное одобрение работ Н.И. Лобачевского.

В дореволюционный период основным типом научной школы был научно-образовательный,– сплочённые вокруг известного учёного небольшие коллективы студентов, аспирантов, приват-доцентов и молодых профессоров совмещали обучение с научными исследованиями. Именно в таком смысле можно говорить о петербургской, московской и киевской школах, возглавляемых П.Л. Чебышевым, Н.В. Бугаевым и Д.А. Граве, соответственно. Надо учитывать при этом определённую проблемно-методологическую и идентификационную несамостоятельность отечественного математического сообщества того периода, и его ориентированность на французскую и немецкую математику. Причиной такой ситуации была практика завершения образования и подготовки к защите диссертации за рубежом. Она позволяла приобщиться к новейшим достижениям европейской математики, но и порождала предмет-но-методологическую зависимость и несамостоятельность, ощущение статуса «подмастерья» у истинных, зарубежных мастеров, чьё одобрение является самым важным показателем успешности полученного результата. Оригинальные исследовательские школы возникли в результате реально функционирующих научных семинаров и научных обществ, при втором поколении учеников, усвоивших методы и практику университетской работы, если и выезжавших за границу, то лишь для расширения кругозора, а не для постановки метода. Зависимость от европейского математического сообщества была насильственно разорвана в советский период – в 30-е гг., и симптомом этого было «дело Лузина»[101].

Научная школа может прекратить существование после потери лидера, если его ученики не обладают необходимыми организационными и интеллектуальными способностями. Возможны иные ситуация, когда способные ученики перерастают рамки воспитавшей школы, или вынуждены работать в отрыве от неё. Здесь есть замечательные примеры.

Школа Лузина ещё при жизни учителя прекратила существование и распалась на два направления: топологическое, возглавляемое П.С. Александровым, и функционально-вероятностное А.Н. Колмогорова. Из функциональной школы Колмогорова выросла школа И.М. Гельфанда, тесно связанная с его трёхчасовым семинаром по понедельникам на мех-мате МГУ, и прекратившая существование с его отъездом в США в 1989 г. Теоретико-вероятностное направление Колмогорова продолжает А.Н. Ширяев. Из вероятностной школы Ширяева вышел профессор УлГУ А.А. Бутов, имеющий много учеников и оригинальное направление исследований. Московскую топологическую школу после смерти академика П.С. Александрова в 1982 г. до 2000 г. возглавлял профессор А.В. Архангельский.

---

[101] *Баранец Н.Г., Веревкин А.Б.* Доктрины и идеология в математике// Философия и методология науки: Материалы третьей Всероссийской научной конференции (Ульяновск, 15–17 июня 2011),– Ульяновск: Издатель Качалин А.В., 2011, с. 46-80.

Из киевской школы Д.А. Граве происходят две алгебраические школы: московская академика О.Ю. Шмидта и казанская члена-корреспондента АН СССР Н.Г. Чеботарёва. Школу Чеботарёва, умершего в 1947 г., до 1975 г. возглавлял профессор В.В. Морозов. Школу Шмидта после него до 1971 г. возглавлял профессор А.Г. Курош. Его талантливый ученик А.И. Ширшов позднее работал в Сибирском Отделении РАН, принадлежа уже новосибирской алгебраической школе, основанной учеником Колмогорова академиком А.Н. Мальцевым. Между московской и новосибирской алгебраическими школами сохранились тесные связи и общая тема исследований. Они существуют в лице последних своих участников, несмотря на распад математического сообщества бывшего Советского Союза.

Современная тенденция организации математического сообщества, в том числе и российского, определяется финансовым влиянием США. Американская научная политика сложилась во время II мировой войны, и она жёстко стимулирует мобильность учёных, прививая научному сообществу индивидуализм и конкуренцию. Так корпорации и государство получают разобщённые высококвалифицированные кадры для решения сиюминутных военных и промышленных вопросов. Познавательные потребности самого научного сообщества при этом уходят на последний план, а научные школы не могут существовать и даже не возникают. Оборотной стороной этого процесса является отсутствие качественного воспроизводства научных кадров, которые пополняются покупкой учёных из стран третьего мира – Индии, Китая и России, разрушающей их научную инфраструктуру, не создавая своей. Сложившаяся ситуация может рассматриваться как кризисная, тормозящая развитие науки[102].

**Организующая роль математических организаций и институтов.** Низшей производительной формой организации учёных можно считать научный семинар, связанный, в основном, с университетской жизнью.

---

[102] *Паршин А.Н.* «Математика в Москве: у нас была великая эпоха» / Историко-математические исследования. Вторая серия, вып. 14 (49),– М.: Янус-К, 2011, с. 11-25.

Научные семинары можно подразделить по составу членов на два типа – учебные и исследовательские, причём характер коммуникации в них достаточно разный. Учебные семинары, ранее именовавшиеся просеминариями, организуются научными руководителями для студентов и аспирантов для совершенствования у них навыков исследовательской работы. Если личность руководителя семинара и его методологическая программа оригинальны – из выпускников семинара возникает теоретическая группа, формирующая присущий ей не только стиль работы, но и круг тем, обсуждаемый в связи с развитием и трансформацией исходной методологической программы. Второй тип семинара – это регулярные собрания сложившихся исследователей, необязательно возглавляемые одним лидером, для которых важна возможность общения, обмена мнениями и идеями, что может происходить при их теоретической и тематической общности. Характер коммуникации во втором типе семинаров неформален, а предмет не утверждён руководителем, как в семинарах первого типа, но определяется интересами участников.

По-видимому, первооткрывателем этой формы научной организации был Н.В. Бугаев, организовавший научный семинар для студентов старших курсов и выпускников Московского университета в 1892 г. Он устраивал особые внеплановые заседания для студентов, окончивших курс и оставленных при университете. На них студенты делали научные доклады. Впоследствии этими заседаниями руководил Н.Е. Жуковский. Возможно, что инициатива Бугаева, продолженная Жуковским, натолкнула Д.Ф. Егорова и Б.К. Млодзеевского на мысль создать специальные семинары для студентов, на которых они приобщались бы к творческой научной жизни[103].

Организация научных семинаров была необходимой потребностью творчески работавших преподавателей, так как на практические занятия в университете не выделялось достаточного времени, но иногда эта инициатива

---

[103] По примечаниям *Ф.Я. Шевелева* к «Краткому обозрению учёных трудов профессора Н.В. Бугаева»/ Историко-математические исследования. Вып. XII,– М.: ГИФМЛ, 1959, с. 553.

наталкивалось на сопротивление администрации. Так, только приехавший в Харьковский университет Д.А. Граве в 1900 г. попытался возродить при кафедре чистой математики математический кабинет и организовать семинар по теории алгебраических поверхностей. В 1902 г. он переехал в Киевский университет и организовал семинары там. Темой его семинаров и специальных курсов были: арифметическая теория квадратичных форм, теория идеалов, теория групп, полей, теория Галуа, числа Бернулли, теория эллиптических функций и проблем теории чисел и др. Студенты участвовали в работе семинара с самых первых курсов. Участники семинара читали и реферировали работы современных авторов и классиков математики. Проводилась коллективная вычислительная работа. Эту форму занятий со студентами другие киевские профессора,– В.П. Ермаков, Б.Я. Букреев,– использовали ещё до приезда Граве, нашедшего в Киеве поддержку в среде преподавателей и студентов. За 4-5 лет традиция семинаров закрепилась, и к 1908 г. стала возникать киевская алгебраическая школа Граве. Алгебра и ранее занимала киевских профессоров М.Е. Ващенко-Захарченко, В.П. Ермакова, Б.Я. Букреева, Г.В. Пфейфера. Но их интересы не касались новых алгебраических теорий, привлекавших Граве и определивших лицо алгебры 20-го в. Он увлёк учеников общей идеей, направил их по общему направлению и помог добиться успеха. Прямыми учениками Граве являются О.Ю. Шмидт, Е.И. Жилинский, Б.Н. Делоне, Н.Г. Чеботарёв, В.П. Вельмин, К.Ф. Абрамович, А.М. Островский, Н.И. Ахиезер и другие математики[104].

## Список дополнительной литературы

В основном тексте не упомянуты некоторые полезные и доступные работы по затронутым вопросам. Здесь прилагается их отдельный список.

---

[104] *Добровольский В.А.* Научно-педагогическая деятельность Д.А. Граве (к столетию со дня рождения)/ Историко-математические исследования. Вып. XV,– М.: ГИФМЛ, 1963, с. 341-342.

1.Александров А.Д. «Общий взгляд на математику»/ «Математика, её содержание, методы и значение. Т. I»,– М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 5–78.
2.Александрова Н.В. «История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник»,– М.: Изд-во ЛКИ, 2007, 248 с.
3.Арнольд В.И. «Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук»,– М.: Наука, 1989, 96 с.
4.Арнольд В.И. «"Жесткие" и "мягкие" математические модели»// Природа, 1998, №4, с. 3–15.
5.Бажанов В.А. «Очерки социальной истории логики в России»,– Ульяновск: Издательство Средневолжского научного центра, 2002, 124 с.
6.Бажанов В.А. «Наука как самопознающая система»,– К.: Изд-во КГУ, 1991, 181 с.
7.Барабашев А.Г. «Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования»,–М.: Изд-во МГУ, 1991, 160 с.
8.«Бесконечность в математике: философские и методологические аспекты»/ Под ред. Барабашева А.Г.,–М.: Янус–К, 1997, 399 с.
9.Бирюков Б.В., Гутчин И.Б. «Машина и творчество. Результаты, проблемы, перспективы»,–М.: Радио и связь, 1982, 152 с.
10. Бородин А.И., Бугай А.С. «Биографический словарь деятелей в области математики»,– Киев: Радяньска школа, 1979, 608 с.
11. Вейль Г. «Математическое мышление»,– М.: Наука, 1989, 400 с.
12. Вейль Г. «Давид Гильберт и его математические труды»/ Рид К. «Гильберт»,– М.: Наука, 1977, с. 308-360.
13. Вилейтнер Г. «Хрестоматия по истории математики»,– М.: Либроком, 2010, 336 с.
14. «Воспоминания о Ф.А. Березине – основоположнике суперматематики»,– М.: МЦНМО, 2009, 384 с.
15. Гиндикин С.Г. «Рассказы о физиках и математиках»,– М.: МЦНМО, 2006, 464 с.
16. Гнеденко Б.В. «Беседы о математике, математиках и механико-математическом факультете МГУ»,– М.: Либроком, 2010, 168 с.

17. Гнеденко Б.В. «М.В. Остроградский. Очерки жизни, научного творчества и педагогической деятельности»,– М.: ГТТЛ, 1952, 331 с.
18. Гротендик А. «Урожаи и посевы»,– Ижевск: Удмуртский ун-т, 1999, 288 с.
19. Гудков Д.А. «Н.И. Лобачевский. Загадки биографии»,– Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992, 242 с.
20. Диоген Лаэртский «О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов»,– М.: Мысль, 1979, 620 с.
21. Земляков А.Н. «Введение в алгебру и анализ: культурно–исторический дискурс»,– М.: БИНОМ, 2007, 320 с.
22. Клайн М. «Математика. Утрата определенности»,– М.: Римис, 2007, 640 с.
23. Клайн М. «Математика. Поиск истины»,– М.: Римис, 2007, 400 с.
24. «Колмогоров в воспоминаниях учеников»,– М.: МЦНМО, 2006, 472 с.
25. Манин Ю.И. «Вычислимое и невычислимое»,– М.: Советское радио, 1980, 128 с.
26. «Математика и опыт»/Под ред. Барабашева А.Г.,– М.: Изд-во МГУ, 2003, 624 с.
27. Нейгебауэр О. «Точные науки в древности»,– М.: Едиториал УРСС, 2003, 240 с.
28. «Очерки по истории математики»/ Под ред. Б.В. Гнеденко,– М.: Изд-во МГУ, 1997, 496 с.
29. Панов В.Ф. «Современная математика и её творцы»,– М.: Изд-во МГТУ, 2011, 648 с.
30. Паршин А.И. «Путь. Математика и другие миры»,– М.: Добросвет, 2002, 240 с.
31. Понтрягин Л.С. «Жизнеописание Л.С. Понтрягина, математика, составленное им самим»,– М.: Прима В, 1998, 320 с.
32. Пуанкаре А. «О науке»,– М.: Наука, 1990, 736 с.
33. Пуанкаре А., Кутюра Л. «Математика и логика»,– М.: Изд-во ЛКИ, 2007, 152 с.
34. Ракитов А.И. «Философия компьютерной революции»,– М.: Политиздат, 1991, 287 с.
35. Рыбников К.А. «История математики»,– М.: Изд-во МГУ, 1994, 495 с.

36. Рыбников К.А. «Комбинаторный анализ. Очерки истории»,– М.: Изд-во мехмата МГУ, 1996, 126 с.
37. Рузавин Г.И. «Философские проблемы оснований математики»,– М.: Наука, 1983, 302 с.
38. Сингх С. «Великая теорема Ферма»,– М.: МЦНМО, 2000, 288 с.
39. Сойфер А.Ю. «Ван дер Варден: размышления о жизни и судьбе»,– М.: МЦНМО, 2008, 160 с.
40. Стиллвелл Дж. «Математика и её история»,– Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004, 530 с.
41. Стройк Д.Я. «Краткий очерк истории математики»,– М.: Наука, 1990, 256 с.
42. «Стили в математике. Социокультурная философия математики»/ Под ред. Барабашева А.Г.,– СПб: РХГИ, 1999, 552 с.
43. Успенский В.А. «Терема Гёделя о неполноте»,– М.: Наука, 1982, 110 с.
44. Успенский В.А. «Труды по нематематике, в 2-х томах»,– М.: ОГИ, 2002, 1409 с.
45. Харди Г. «Апология математика»,– Ижевск: НИЦ РХД, 2000, 104 с.
46. Целищев В.В. «Философия математики»,– Новосибирск: Наука, 2002, 212 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ДЛЯ АСПИРАНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

01.00.00 − Физико-математические науки

**ВЕРЁВКИН АНДРЕЙ БОРИСОВИЧ**

# *ИСТОРИЯ И ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ*

Издатель

Качалин Александр Васильевич

432042, Ульяновск, ул. Доватора, 16

Подписано в печать 2.02.2013.

Формат 60х84/16. Бумага офсетная.

Гарнитура Bookman Old Style.

Усл. печ. л.  3 п.л.

Отпечатано в издательско-полиграфическом

центре «Гарт» ИП Качалин А.В.

432042, Ульяновск, ул. Доватора, 16