Дедуктивистский versus эвристический подход

Перевод В.А. Бажанова главы из кн. И. Лакатоса

"Доказательства и опровержения"

// Эпистемология и философия науки, 2009, №2. С.210 - 225.

И. Лакатос

1. *Дедуктивистский подход*

Евклидова методология выработала определенный обязательный стиль выражения. Я буду говорить о нем как о "дедуктивистском подходе (дедуктивизме)". Этот стиль отличается сначала тщательным описанием некоторого набора *аксиом, лемм* и/или *определений*. Аксиомы и определения часто воспринимаются как искусственные и таинственно (mystifyingly) сложные. Никто никогда не разъяснял, как возникали эти сложности. После набора аксиом и определений следуют на особом языке сформулированные *теоремы*. Последние сопровождаются перечнем трудно выполнимых условий; кажется абсолютно невозможным представить себе, что их кто-то мог бы угадать. Теоремы сопровождаются *доказательствами*.

Любой студент-математик в соответствие с Евклидовым ритуалом должен научиться этим фокусам без лишних вопросов о том, каковы их основания и какие ловкие манипуляции к ним приводят. Если каким-то образом студент обнаружит, что некоторые из неуместных определений на самом деле в принципе доказуемы, леммы и теоремы могут предшествовать доказательству, то фокусник подвергнет его в буквальном смысле остракизму за недоверие к математическому совершенству[1].

Согласно дедуктивистскому стилю все высказывания (в теории) истинны, а все выводы обоснованы. Математика таким образом предстает как постоянно увеличивающееся множество вечных, непогрешимых истин. Эта авторитарная атмосфера в математике сохраняется путем тщательной маскировки возможных монстров и в реальности доказуемых теорем, а также подавлением элементарных догадок, относящихся к доказательствам, их критике и даже опровержениям. Дедуктивистский стиль скрывает борьбу, прячет приключение. Исчезает история получения конкретного результата, последовательность все более эффективных формулировок теорем в процессах поиска доказательств обречена на забвение, тогда как конечный результат возводиться в ранг священной непогрешимости[2].

---

[1] Некоторые учебники содержат указание на то, что усвоение материала не требует от читателя никаких предварительных знаний, а лишь умение совершать некоторые простые математические операции. Это часто означает, что авторы ожидают от читателя данного самой природой способности воспринимать аргументы в Евклидовом духе без неестественного интереса к фундаментальным проблемам и к эвристическим приемам получения этих аргументов.

[2] До сих пор не вполне осознается, что сегодняшнее математическое и в целом научное образование – это колыбель авторитаризма и самый злой враг независимого и критического мышления. Если в математике авторитаризм порождается *дедуктивистской* методологией, которая вкратце нами только что описана, то в науке – *индуктивистской* методологией.

В науке существует давняя традиция, относящаяся к *индуктивистскому* стилю мышления. Образцовая статья, написанная в этом стиле, начинается с тщательного описания условий и процедуры постановки эксперимента, которая сопровождается описанием самого эксперимента и его результатов. Некоторое "обобщение" обычно является итогом статьи. Проблемная ситуация, предположение, которое выступило мотивом постановки эксперимента, скрываются. Автор горд девственностью его сознания. В действительности статья понятна лишь тем, кто знаком с проблемной ситуацией, находится "внутри" неё. Индуктивистский стиль предполагает, что ученый начинает исследование в состоянии "чистого" сознания, когда в реальности его сознание переполнено идеями. Этот спектакль играется – но не всегда успешно – только членами или для членов избранного сообщества экспертов. Индуктивистский стиль, точно также как и его дедуктивистский близнец (но не двойник!), апеллируя к объективности, по существу порождает некоторый узкий диалект, арго, который, "атомизирует" науку, дробит её на мелкие ареалы, подавляет критицизм, делает науку авторитарной. В такого рода спектаклях речь о контрапримерах никогда не идет:

Те, кто защищает дедуктивистский стиль утверждают, что дедукция и является эвристическим приёмом в математике[3]. Те, кто понимает, что это неверно, в свою очередь заключают, что математическое открытие – всецело иррациональное предприятие. Таким образом они полагают, что хотя математическая деятельность и не сводится к дедукции, но если мы хотим её осмысливать в рациональных терминах, то это должно быть сделано в духе дедуктивистского подхода[4].

Итак, у нас два аргумента в пользу дедуктивистского стиля. Один основывается на идее, что эвристика рациональна и дедуктивна по своей природе. Другой же аргумент состоит в том, что эвристика не дедуктивна по своей природе, а также и нерациональна.

Есть, однако, и третий аргумент. Некоторые работающие математики, недолюбливающие логиков, философов и других чудаков, вмешивающихся в их деятельность, обычно утверждают, что признание эвристического стиля потребует переписывания всех учебников и сделают их настолько объёмными, что никто не сможет их дочитать до конца. Аналогично и статьи значительно увеличатся в размерах[5]. Мой ответ этому аргументу от обывателя таков: давайте попробуем.

2. *Эвристический подход. Понятия, порожденные доказательствами*

Этот раздел содержит краткий эвристический анализ некоторых важных математических понятий, порожденных доказательствами. Хотелось бы надеяться, что этот анализ покажет преимущества введения эвристических элементов в ткань математического рассуждения.

Как уже упоминалось, дедуктивистский стиль лишает понятия, порожденные доказательствами, их предшествующей истории, трактует их как рожденные из "вакуума", искусственным и авторитарным образом. Он замалчивает глобальные контрпримеры, которые ведут к их открытию. Эвристический стиль, напротив, подчеркивает именно

всегда начинают с наблюдений (не теории) и понятно, что без определенного рода предварительной теории контрпримеры наблюдать просто нельзя.

[3] Эти люди утверждают, что математики начинают с чистого сознания, предлагают аксиомы и определения исключительно из праздного удовольствия, в силу тяги к свободному творчеству, и лишь на поздней стадии они выводят из них теоремы. Математический конвейер порождения истинных предложений не может давать сбои. После нашего конкретного исследования процедур доказательства (в самой книге "Доказательства и опровержения" – В.Б.) этот аргумент в пользу защиты дедуктивизма можно было бы не принимать во внимание, но только в том случае, если мы не ограничиваем математику операциями только с формальными системами.

Сейчас, когда Поппер показал, что индукция не может отождествляться с логикой научного открытия, то данный текст имеет своей целью показать, что дедукция не может являться логикой математической открытия. Если Поппер критиковал индуктивизм, то этот текст посвящен критике дедуктивизма.

[4] Данная доктрина – важная часть большинства формалистских вариантов философии математики. Когда формалисты рассуждают об открытии, то явно принижают и *контекст открытия* и *контекст обоснования*. "Контекст открытия отдается на откуп психологии, тогда как логика занята контекстом обоснования" [Reichenbach, 1947, p. 2]. Аналогичное мнение можно найти в [Braithwaite, 1953, p. 27] и даже в [Popper, 1959, p. 31-32] и его ранней работе [Popper, 1935]. Когда Поппер еще в 1934 году разделял аспекты открытия между психологией и логикой таким образом, что там не осталось места для эвристики как независимой области для исследования, очевидно не осознавал, что его "логика открытия" не является лишь сугубо логическим предприятием в рамках прогресса науки. Это источник парадоксальности названия его книги, основная идея которой "двулика": (а) не существует логики научного открытия – Бэкон и Декарт оба ошибались; (б) логика научного открытия – это логика предположений и опровержений. Решение этого парадокса таково: (а) не существует *нефаллибилистской* (безошибочной) логики научного открытия, такой логики, которая без сучков и погрешностей ведет к правильным результатам; (б) существует фаллибилистская логика открытия (соответствующая методу проб и ошибок – В.Б.), которая есть логика научного прогресса. Однако Поппер, который обрисовал *эту* логику открытия, не интересовался данным метавопросом, который относился к природе его исследования и не понимал, что это ни психология, ни логика, а независимая дисциплина, -- логика открытия, эвристика.

[5] Надо допустить, что их станет меньше, поскольку требование описания проблемных ситуаций безусловно покажет бессмысленность значительного их числа.

указанные факторы. Он делает акцент на проблемной ситуации: он рельефно представляет "логику", благодаря которой родилось новое понятие.

Сначала посмотрим как можно ввести эвристический стиль в случае понятия, порожденного доказательством, - понятия равномерной сходимости… Здесь и в других примерах мы, разумеется, предполагаем знакомство с технической стороной метода доказательств и опровержений. Но оно вовсе не требует знакомства с техническими терминами Евклидовой программы, такими как аксиомы, основные понятия и т.п.

(а) Равномерная сходимость

Тезис. Это специфическая версия принципа непрерывности Лейбница, который гласит, что предельная функция для любой сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывной (*основное предположение*).

Антитезис. Определение непрерывности по Коши возводит данный тезис на новый уровень. Это *дефиниционное решение* придает законность контрапримерам Фурье. В то же самое время эта дефиниция исключает возможный компромисс, состоящий в том, что непрерывность можно восстановить перпендикулярными линиями и делает актуальным – вместе с примерами из области тригонометрических рядов – "отрицательный полюс" антитезиса. "Положительный полюс" усиливается доказательством Коши, которое является предшественником понятия равномерной сходимости. "Отрицательный полюс" в свою очередь усиливается всё более и более *глобальными контрапримерами* к основному предположению.

Синтез. Сомнительная лемма, согласно которой глобальные контрапримеры одновременно являются *локальными*, отвергается, доказательство и само предположение улучшаются. Здесь проявляются характерные компоненты синтеза: *теорема* и соответствующее *понятие* равномерной сходимости, *порожденное доказательством*[6].

Гегелевский язык, который я использую, по-моему способен в общем случае воспроизвести различные механизмы развития математики (он, однако, имеет как достоинства, так и недостатки). Гегелевское понимание эвристики, которое лежит в фундаменте этого языка, в общих чертах следующее. Математическая деятельность это человеческая деятельность. Определенные аспекты этой активности – как любой человеческой активности – могут изучаться психологией, другие историей. Эвристика не

---

[6] В некоторых учебниках по тем или иным причинам равномерная сходимость выделяется как исключительный (квази-эвристический) случай. Например, У. Рудин [Rudin, 1953, p. 115] сначала вводит раздел "Обсуждение основанной проблемы", в котором он предлагает некоторую основную гипотезу и её опровержение, и только затем определяет понятие равномерной сходимости. Такой подход имеет два недостатка: (а) Рудин не столько предлагает некоторую основную гипотезу и её опровержение, сколько пытается выяснить истинна или ложна эта гипотеза и показывает её ложность известными примерами. Поступая так, он строго следует инфаллибилистской стратегии; в его интерпретации проблемная ситуация не подразумевает предположения, а ставит острый и запутанный вопрос, который сопровождается примером (а не контрапримером), и дается однозначный ответ. (б) Рудин не демонстрирует, что понятие равномерной сходимости вытекает из самого доказательства; в его изложении дефиниция предшествует доказательству. Дедуктивистский стиль и не предполагает иного: если бы поначалу давалось оригинальное доказательство, а лишь потом опровержение, после которого следовало бы усовершенствованное доказательство и дефиниция, порожденная им, то дедуктивист отчетливо показал движение "вечно статичной" математики, погрешимость "непогрешимой" математики, что несовместимо с Евклидовой традицией. (Стоит заметить, что я цитирую учебник Рудина потому, что это один из лучших учебников в рамках этой традиции). В предисловии, например, Рудин пишет: "Представляется важным видеть, особенно для начинающего, что предположения теоремы весьма нужны для того, чтобы показать общезначимость заключений. Для этой цели в книгу включено довольно много контрапримеров." К сожалению, это контрапримеры в духе пародии на них, поскольку призваны продемонстрировать мудрость математиков, которые включают все предположения, сопутствующие формулировке теоремы. Он не говорит, откуда появляются эти предположения, что в реальности они возникают из идей, связанных с доказательством, что теоремы не выпрыгивают из головы математика подобно Афине во всеоружии из головы Зевса. Его употребление термина "контрапример" не должно вводить нас в заблуждение насчет того, что Рудин рассуждает в фаллибилистском ключе (Примечение редакторов английского издания: Все замечания Лакатоса о работе Рудина касаются *первого издания учебника*. Не все соответствующие пассажи из учебника перекочевали во второе издание 1964 года).

особо интересуется этими аспектами. Но математическая деятельность порождает математику. Математика, это продукт человеческой деятельности, "отчуждает себя" от человеческой деятельности, её порождающей. Она становится самостоятельно существующим, развивающимся организмом, что предполагает определенную автономию от породившей её деятельности; она развивается по своим внутренним законам, по своей диалектике. Творчески работающий математик – это не более чем персонификация, воплощения, инкарнация этих законов, которые проявляют себя через человеческую деятельность. Однако эта инкарнация редко бывает совершенной. Деятельность математиков, как учит история, является только неуклюжей реализацией замечательной диалектики математических идей. Любой математик, если он талантлив, обладает творческой искрой, творческим гением, общается с миром математических идей и чувствует, когда ему надо следовать этой диалектике, а когда отказаться от неё[7].

Сейчас эвристика сопряжена с автономным статусом диалектики математики, а не с её историей, хотя она может изучать свой предмет только через анализ истории и посредством рациональной реконструкции истории[8].

(б) Ограниченные вариации

Способ, которым обычно в учебниках вводится понятие ограниченной (конечной) вариации представляет собой прекрасный пример авторитарного дедуктивистского стиля. В качестве примера снова обратимся к учебнику Рудина. Где-то в середине главы об интеграле Римана-Стилтьеса он внезапно вводит определение функций ограниченной (конечной) вариации.

6.20. Определение. Пусть *f* определена на [a, b]. Мы полагаем

$$V(f) = \mathrm{lub}\sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) |,$$

(Где lub означает "наименьшая верхняя грань", обозначаемая в русскоязычной литературе как sup(remum) – В. Б.). Она соответствует всем возможным разбиениям на [a, b]. Если *V(f)* конечна, то говорят, что *f* имеет ограниченную вариацию V(f)) на [a, b][9].

Чем вызван наш интерес к именно этому множеству функций? Ответ дедуктивиста прост: "Ждите и увидите". Хорошо, давайте подождем и постараемся увидеть. После данного определения приводится ряд примеров, которые сопровождаются примерами, которые призваны дать читателю некоторые представления об области применения этого понятия (этот пример, и аналогичные ему примеры, делают книгу Рудина прекрасным

---

[7] Эта Гегелевская идея, связанная с автономным существованием отчужденной человеческой деятельности способна подсказать как найти новые подходы в методологии социальных наук, особенно в экономике. Мое понятие о математике как несовершенной персонификации Математики сходно Марксову понятию капиталиста как персонификации Капитала. К сожалению, Маркс не ввел в свою концепцию представления о несовершенном характере процесса персонификации; нет никаких жёстких условий для реализации этого процесса. Напротив. Человеческая деятельность может подавлять или искажать картину автономности отчужденных процессов и может рождать новые их ростки. Пренебрежение этим фактором (взаимодействием) относится к принципиальной слабости диалектики Маркса.

[8] (Примечение редакторов английского издания: Мы полагаем, что Лакатос впоследствии изменил бы этот пассаж, т.к. его приверженность Гегелевскому методу ослабевала по мере его творчества. Тем не менее, он сохранял веру в непререкаемую важность идеи частичной автономии духовной человеческой деятельности. В этом мире объективно-содержательных высказываний (Поппер называл их "третьем миром, см. [Popper, 1972]) имеются проблемы (порожденные, скажем, логическими противоречиями между высказываниями) независимо от того признаем мы их или нет, познаны они или нет; следовательно, мы может *обнаружить, открыть* эти проблемы (а непросто изобрести их). Между тем Лакатос пришел к убеждению, что эти проблемы не обязательно требуют решения или вынуждают принять определенное решение; скорее, без человеческой изобретательности (которая может иметь, а может и не иметь место) это решение не найти. Этот взгляд в неявном виде присутствует в критике Маркса, которую можно найти в предшествующем замечании, подстрочнике №7).

[9] [Rudin, 1953, p. 99-100].

пособием в рамках дедуктивистской традиции). Затем приводится ряд теорем (6.22, 6.24, 6.25), а затем неожиданно следует высказывание:

Следствие 2. Если f ограниченной вариации и g непрерывно на [a, b], то $f \in \mathcal{R}^*(g)$ [10]. ($\mathcal{R}^*(g)$ есть класс функций Римана-Стилтьеса, которые интегрируются по g.

Мы можем очень сильно заинтересоваться этим высказыванием в том случае, если поняли, почему функции Римана-Стилтьеса, которые можно интегрировать, являются столь важными. Однако Рудин даже не упоминает интуитивно прозрачное понятие интегрируемости, а именно понятие интегрируемости по Коши, критика которого и привела к формулировке интегрируемости по Риману. Итак, мы имеем теорему, в которой фигурируют два мистических понятия - ограниченная вариация и интегрируемость по Риману. Наличие этих двух мистических понятий никоим образом не способствует нашему пониманию. Или они предназначены для тех, кто обладает "способностью и желанием следовать исключительно в русле абстрактного мышления"?[11]

Эвристический подход показал бы, что оба понятия – интегрируемость по Риману-Стилтьесу и ограниченность вариации, - оба этих понятия появляются в результате доказательства, причем при доказательстве одной и той же теоремы Дирихле, относящегося к предположению Фурье (оно сформулировано ниже). Это доказательство обнажает ту проблему, которая являлась базовой для возникновения этих понятий[12].

Сейчас это предположение[13] уже не содержит каких-либо мистических понятий. Являясь предпосылкой понятия ограниченной вариации, оно гласит, что произвольная функция может быть разложена в ряд Фурье[14], что нельзя оценить иначе, чем простую по способу выражения и захватывающую догадку, доказанную Дирихле[15]. Дирихле тщательно проанализировал доказательство Фурье, усовершенствовал его предположение путем инкорпорации в него некоторых лемм как необходимых условий, которые стали широко известными. Окончательная теорема формулируется так: функция разложима в ряд Фурье, который сходится и его значения совпадают со значениями функции там, где фукнция непрерывна если 1) величина её изменения в каждой точке (разрыва) не превышает ½ [f(x+0) + f(x-0)]; 2) число точек разрыва функции на заданном интервале конечно; 3) если она на заданном интервале имеет лишь конечное число максимумов и минимумов[16].

Все эти условия вытекали из самого доказательства. Рассуждения Дирихле имели изъян только относительно третьего условия: в действительности доказательство касалось только ограниченных изменений функции. Оно было раскритиковано и исправлено К. Жорданом только в 1881 году, который, собственно, и открыл понятие ограниченной вариации. Но он не изобрел это понятие, он его не "ввел,"[17] – скорее он *открыл* его в

---

[10] [Rudin, 1953, p. 106].

[11] [Rudin, 1953, Предисловие].

[12] Это доказательство и заключительная теорема упоминаются в книге Рудина, но они скрыты в примере 17 главы 8 (с. 164), причем обстоятельства их упоминания совершенно не связаны с упомянутыми понятиями, которые введены в авторитарном стиле.

[13] [Fourier, 1808, p.112].

[14] Тригонометрических функций со специальными коэффициентами.

[15] [Dirichlet, 1829; 1837]. С этим доказательством связано довольно много интересных предпосылок и аспектов, которые здесь не место упоминать; например, речь может идти о ценности первоначального "доказательства" самого Фурье, его сравнении с двумя последующими доказательствами Дирихле и его уничтожающей критикой более раннего доказательства Коши [Cauchy, 1826].

[16] Необходимо отметить, что доказательство Дирихле не стимулировалось контрапримерами и они не предшествовали первоначальному доказательству самого Фурье. Никто не предлагал никаких контрапримеров; Коши "доказал" первоначальное предположение (на области в виде пустого множества). Первые контрапримеры появлись только как следствия лемм, предложенных Дирихле, особенно первой из лемм. Независимо от этого первый контрапример был представлен лишь в 1876 году Дюбуа-Реймоном, который нашел функцию, не разложимую в ряд Фурье [du Bois-Reimond, 1987].

[17] "Ввести" понятие из небытия – это магическая операция, к которой часто прибегали в истории дедуктивизма.

доказательстве Дирихле в результате критической переоценки[18]. Другим слабым местом в доказательстве Дирихле было использование такой разновидности интеграла, предложенного Коши, который годился только для непрерывных функций. Согласно Коши функции с разрывами вообще не интегрируемы, и, значит, не разложимы в ряды Фурье. Дирихле обошел эту сложность посредством того, что начал рассматривать интеграл по разрывным функциям как сумму интегралов по интервалам, в которых функции непрерывны. Это легко выполнимо, если число разрывов конечно, но создает много сложностей в том случае, если оно бесконечно. Именно по этой причине Риман раскритиковал данное понятие интеграла и ввел новое.

Таким образом, два мистических определения ограниченной вариации и интеграла по Риману лишаются своей авторитарной магической силы; их происхождение может быть прослежено вплоть до самых истоков проблемной ситуации и деталей критической переоценки и решений возникавших в ходе её преодоления. Первое определение в качестве имплицитной "рабочей гипотезы" появилось в процессе доказательства Дирихле, затем было открыто К. Жорданом, критиком последнего. Второе определение вытекает из критики предыдущего определения интеграла, которое оказалось неприменимым к более сложным ситуациям (проблемам).

В этом втором примере эвристического подхода мы следовали попперовской мысли, связанной с механизмом предположений и опровержений. Эта мысль более адекватна реальной истории, нежели гегелевская идея, которая не допускает процедуры "проб и ошибок" в качестве будто бы абсолютно неуклюжей реализации через грешного человека необходимого по своей природе развития объективных идей. Но даже рациональная эвристика в духе Поппера не помогает различать проблемы, которые обозначаются как цель научного поиска и проблемы, которые в действительности решаются; нужно четко различать с одной стороны "случайные" ошибки, которые впоследствии исправимы и без каких-либо последствий исчезают, и "существенные" ошибки, которые сохраняются в процессе опровержения и критика которых является движущей силой дальнейшего развития – с другой. В эвристическом подходе случайные ошибки вполне могут быть опущены без ущерба для реконструкции реальной истории, которая со временем всё расставит на свои места (в том числе, и последовательность исправления ошибок).

Мы рассмотрели только первые четыре стадии процесса доказательства, которое привело к понятию ограниченной вариации. Пятая стадия[19], которая заключается в охоте за соответствующим понятием в различных доказательствах, немедленно привела к открытию ограниченной вариации при доказательстве первоначального предположения о том, что "все кривые являются спрямляемыми"[20]. Седьмая стадия привела к формулировке интеграла Лебега и к современной теории пространств с мерой.

---

[18] См.: [Jordan, 1881, 1893, p. 241]. Жордан подчеркивает, что он не модифицирует *доказательство* Дирихле как таковое, а только его *теорему* ("… Доказательство Дирихле применимо без каких-либо модификаций к любой функции изменения которой конечны"). Зигмунд, однако, ошибается, заявляя, что теорема Жордана "только внешне более общая", чем у Дирихле [Zygmund, 1935, p. 25]. Это справедливо по отношению к его доказательству, но не теореме. В то же время было бы заблуждением утверждение, что Жордан "расширил" теорему Дирихле на более общую область функций с ограниченными вариациями (См. например, [Szökefalvy-Nagy, 1954, p. 272]). Карслау [Carslaw, 1930] также показывает недостаток понимания процесса доказательства в той части работы, которая посвящена *историческому введению*. Он не заметил, что доказательство Дирихле является своего рода предтечей доказательства, которое породило понятие ограниченной вариации.

[19] Список стандартных стадий в применении метода доказательств и опровержений описан в основном тексте книги (Он приводится в приложении 1 к изданию 1976 года, которое пока не переведено на русский язык).

[20] Предшественником всего этого был Дюбуа-Реймон [du Bois-Reimond, 1879, 1885], но истинным первооткрывателем явился пунктуальный и острый на ум К. Жордан [Jordan, 1887, p. 594-598; 1893, p. 100-108].

Историческая справка. Можно добавить некоторые эвристически интересные детали к только что рассказанной истории. Дирихле был убежден, что локальные контрапримеры в его второй и третьей лемме *не являются глобальными*; он был убежден, что все непрерывные функции, независимо от количества в них максимумом и минимумов, разложимы в ряды Фурье. Он также надеялся, что этот более общий результат может быть получен путем простых *локальных* добавлений в его доказательство. Идея о том, что 1) доказательство Дирихле являются неполным и 2) окончательное доказательство можно получить посредством незначительных добавлений, - эта идея была широко распространена с 1829 по 1876 годы когда Дюбуа-Реймон представил *первый* общий контрапример давнему предположению Фурье и, таким образом, лишил надежды на возможность такого добавления. Похоже, что открытие К. Жордана ограниченной вариации было простимулировано именно этим контрапримером.

Интересно, что Гаусс также вдохновлял Дирихле на улучшение его доказательства так, чтобы оно было применимо к функциям с любом числом максимумов и минимумов. Некоторая загадка заключается в том почему Дирихле не решал эту проблему ни в 1829, ни в 1837 году. В 1853 году он думал, что решение её самоочевидно, а в письме к Гауссу, отвечая на его желание, он даже попытался сымпровизировать на этот счет [Dirichlet, 1853]. Суть его решения в следующем. Условие, согласно которому множество максимумов и минимумов не должно сходиться ни в какой точке рассматриваемого интервала, в действительности является достаточным условием для этого доказательства. Второе условие, касающееся конечности точек разрыва, может быть к нему добавлено, что указывалось Дирихле еще в работе 1829 года. Он утверждал, что его доказательство фактически приложимо только к множеству разрывов, когда то нигде не является плотным. Эти обстоятельства наводят на мысль, что на самом деле Дирихле был весьма озабочен анализом его доказательства, и он был убежден, что оно применимо к более широким классам функций, чем к тем, к которым относятся довольно "осторожные" по своему характеру условия, получившие название "условий Дирихле". Знаменательно, что в работе 1837 года Дирихле [Dirichlet, 1837] вообще не говорит о теореме. Он всегда был уверен (о чем можно судить по его письму Гауссу), что его теорема охватывает все непрерывные функции и как он сам заявлял предположительно скептически настроенному Вейерштрассу [Ostwald's…1913, p. 125].

Итак, как Дирихле объявил в статье 1829 года, его теорема приложима ко всем разновидностям функций, которые "встречаются в природе". Более того, еще более скрупулезное рассмотрение уже привело нас в сферу совсем "чистого" анализа. Я утверждаю, что анализ доказательства Дирихле, который впервые предпринял Риман, явился отправной точкой современного абстрактного анализа, а весьма распространенное мнение, восходящее к П. Джордейну о решающей роли Фурье в этом процессе, представляется явно преувеличенным. Фурье совсем не интересовался теми математическими аргументами, которые выходили за рамки непосредственной применимости аппарата анализа. Мышление Дирихле было в действительности иного рода. Он предчувствовал, что анализ его доказательства требует нового по своей природе концептуального инструментария. Последнее предложение его работы 1829 года – своего рода пророчество, которое оказалось подтвержденным: "Для того, чтобы достичь желаемой ясности в решении нашей проблемы нужно связать некоторые её детали с фундаментальными принципами анализа бесконечно малых, что будет сделано в другой работе…" [Dirichlet, 1829]. Однако обещанная работа так и не появилась. Только Риман, критикуя понятие интеграла по Коши, прояснил эти "детали", связанные с фундаментальными принципами анализа бесконечно малых, и кто, следуя неясным предчувствиям Дирихле, путем введения революционной техники, выстрадал математический анализ и в сущности поднял рациональность до уровня функций, которые не встречаются в природе и которые ранее трактовались как "монстры" или, в лучшем случае, любопытные исключения или "сингулярности" (именно о таком отношении Дирихле можно судить по его статье 1829 года и его письму Гауссу 1853 года).

Некоторые отрицающие фаллибилизм историки математики используют в буквальном смысле антиисторический подход в своей работе. Он заключается в том, что продолжительные периоды борьбы мнений, критики и усовершенствований представляются как одномоментное озарение, которое в принципе не способно на ошибки. Эти историки незаслуженно приписывают Дирихле зрелость тем, кто лишь следовал за ним. Эти так называемые историки наделяют Дирихле знаниями на уровне современной теории функций действительной переменной и даже пытаются некоторые функции назвать его именем. Так, Э. Белл в своей книге [Bell, 1945, p. 293] полагает, что " определение П. Дирихле функции действительной переменной, имеющей числовое значение, как таблицы, или соответствия, или корреляции между двумя множествами чисел подвело к теории эквивалентности (точечных) множеств". Белл отсылает к конкретной странице из работы Дирихле. Но там ничего подобного нет и в помине. Бурбаки пишет: "Известно, что Дирихле, развивая идеи Фурье, дал определение общего понятия функции, - такое определение, которое используется и поныне" [Bourbaki, 1960, p. 247]. "Известно", заявляет Бурбаки, но пренебрегает ссылкой. В большинстве классических учебников мы находим замечания, что понятие действительной функции введено Дирихле [Pierpoint, 1905, p. 120]. Однако такого определения в трудах Дирихле нет вовсе. Там есть достаточно убедительные свидетельства, что у него не имелось даже соответствующей идеи и он не владел таким определением. В работе 1837 года Дирихле, где обсуждаются кусочно-определенные непрерывные функции он, например, говорит, что в точках разрыва функции имеют *два значения*: "Пусть кривая, координаты x и y которой обозначены через β и $\Phi(\beta)$ соответственно, состоят из несколько интервалов. В точках, в которых x соответствует определенным значениям β, последовательные части кривой разрывны; а для x в реальности соответствует две координаты y, одна из которых соответствует началу интервала, а другая начинается после точки разрыва. Отсюда вытекает, что необходимо различать два значения $\Phi(\beta)$, которые надо обозначать $\Phi(\beta\text{-}0)$ и $\Phi(\beta+0)$".

Приведенные выдержки из трудов Дирихле без всякого сомнения говорят в пользу того, что Дирихле был весьма далек от так называемого понятия "функции Дирихле".

Те, кто связывает Дирихле с "определением Дирихле" обычно имеют в виду функцию Дирихле, которая приводится на последней странице его работы 1829 года: функция, принимающая значение 0, когда x рационально и 1, когда x иррационально. Беда в том, что Дирихле полагал, что все общие (универсальные) функции разложимы по Фурье – он прямо конструировал их как "монстров". Согласно Дирихле, его "функция" – это пример не просто "обычной" функции, а функции, которая не заслуживает называться его именем.

Любопытно, что те, кто сумел разглядеть определение Дирихле там, где оно отсутствует, не заметили даже заголовков его двух работ, которые касаются разложения "абсолютно произвольной" функции в ряды Фурье. Это означает, что – по Дирихле – функция Дирихле находилась вне семейства "абсолютно произвольных функций", что он истолковывал её как монстра по той причине, что "обычная" функция должна быть интегрируема, а эта не была интегрируемой. Риман критиковал Дирихле за его узкое понимание интеграла одновременно с критикой интерпретации интеграла Коши вместе с дополнением ad hoc, которое внёс сам Дирихле. Риман показал, что если расширить понятие интеграла, то монстры типа функции, которая разрывна в случае любого рационального числа $p/2n$, где p - нечетное число, взаимно простое с n, являются интегрируемыми даже несмотря на то, что они остаются разрывными на всюду плотном множестве. Следовательно, эта функция, похожая на монстра Дирихле, остается обычной. (В расширении Риманом понятия интеграла нет ничего "произвольного"; революционный шаг, который он предпринял, заключался в анализе того, какие классы функций в принципе можно представить тригонометрическими рядами вместо анализа вопроса о том, какие функции разложимы в ряды Фурье. Цель этой операции – расширить понятие интеграла настолько и таким образом, чтобы все функции, представимые суммами тригонометрических рядов были интегрируемы и, значит, разложимы в ряды Фурье. Это – наиболее красивый пример применения концептуального инструментализма).

Пожалуй, следует назвать автора сказки о том, что Дирихле сам сформулировал соответствующее "определение функции". Это Г. Ганкель, который в ходе анализа развития понятия функции [Hankel, 1882, pp. 63-112] объяснял как результаты Фурье разрушили старое понятие функции. Он написал: "Оставалось только во-первых отказаться от условия аналитичности функции, поскольку это условие несущественно и, во-вторых, разрубая данный узел, сделать следующее уточнение. Функция называется функцией *y* от *x* если любому значению переменной *x* на определенном интервале соответствует определенное значение *y*, и это соотношение выполняется независимо от того, зависит ли *y* от *x* на целом интервале и эта же эта зависимость может быть выражена посредством математических операций. Это чисто номинальное определение надо приписать Дирихле, поскольку именно оно положено в фундамент его работ по рядам Фурье, что продемонстрировало несостоятельность старого понятия…".

(с) Определение Каратеодори измеримого множества

Переход от дедуктивистского к эвристическому стилю мышления безусловно является непростым, но некоторые творцы современной математики уже осознавали его необходимость. Разберем пример. В современных учебниках по теории меры или теории вероятностей мы часто наталкиваемся на определение Каратеодори измеримого множества:

Пусть μ^* - внешняя мера на σ-кольце H. Множество *E* в H является **μ^*-измеримым** если для любого *A* в H

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$$ [21].

Данное определение связано с одним затруднением. Есть, разумеется, простой способ его обойти: придумать определение, какое нам больше понравится. Но серьезные математики не прибегают к такого рода трюкам. Они не оценят такое определение измеримости как корректное, истинное; сомнительно, что зрелое математическое мышление должно воспринять это определение как таковое. Обычно они туманно намекают, что надо бы посмотреть на следствия, которые из него выводимы: "Определения – догмы; только следствия, полученные из них, позволяют родиться новым идеям"[22]. Итак, надо просто поверить в определение и посмотреть, что получится. Хотя здесь есть оттенок авторитарного подхода, но, по меньшей мере, при этом осознается, что проблема не надумана. В этом слышится извинение, хотя и в авторитарном стиле. Вот каким образом Халмош просит его простить за использование определения Каратеодори: "Довольно сложно интуитивно понять что значит μ^*-измеримость если не быть знакомыми с соответствующими следствиями, которые мы ниже собираемся продемонстрировать"[23]. Затем он продолжает: "Может оказаться полезным следующий комментарий. Внешняя мера не обязательна счетна, и даже не обязательно является конечным, аддитивной. Для выполнения необходимого условия аддитивности мы отбираем те множества, которые позволяют разбить другие множества на аддитивные – определение μ^*-измеримости есть точная формулировка этого достаточно неопределенного описания. Лучшее обоснование данного весьма запутанного (сложного)

---

[21] [Halmos, 1950, p. 44]
[22] [Menger K., 1928, p. 76]. Это высказывание с одобрением цитируется и Поппером [Popper, 1959, p. 55]
[23] [Halmos, 1950, p. 44]

понятия видится в том, что оно представляет собой на удивление эффективный инструмент при доказательстве важных и полезных теорем расширения в §13"[24].

Первая, "интуитивная" часть этого обоснования явно вводит в заблуждение, поскольку мы узнаем из второй части, что это понятие участвует в доказательстве теоремы Каратеодори о расширении мер (которую Халмош формулирует только в следующей главе). Итак, интуитивно понятно всё это или нет – абсолютно неинтересно: её рациональность заключается не в её интуитивной прозрачности, а в возможности с помощью её что-то доказать. Нельзя отделять определение, помогающее доказывать, от самого процесса доказательства и представлять его как части или даже в виде глав до того самого доказательства, по отношению к которому оно в эвристическом смысле вторично.

М. Лёв [Loeve, 1955, p. 87] тщательно вводит это определение в той части своей работы, которая посвящена расширению мер, в качестве необходимого для получения теоремы о расширении: "Мы нуждаемся в различных понятиях, которые будем собирать в этом разделе". Однако каким образом ему уже известно, какие конкретно из сложных инструментов потребуются в ходе операции? Разумеется, у него уже есть некоторая идея, что нужно найти и как действовать. Зачем тогда эти мистические приготовления, связанные с формулировкой определения прежде, чем будет получено само доказательство?

Можно достаточно легко привести другие примеры, когда начальные предположения, участвующие в доказательстве, контрапримеры, и их последующая эвристическая организация могут опрокинуть авторитарный мистицизм абстрактной математики и могут служить тормозом дальнейшей деградации математического мышления. Пара таких примеров могут сделать много полезного для математики. К сожалению, дедуктивистский подход и атомизация (узкая специализация) математического знания в значительной степени защищают разного рода работы, которые относятся к примерам очевидной деградации.

Литература

Bell, E.T. [1945] *The Development of Mathematics*. 2nd edition. New York: Mcgraw-Hill.

Bourbaki, N. [1960] *Elements d'Histoire des Mathematiques*. Paris; Hermann.

Braithwaite, R.B. [1953] *Scientific Explanation*. Cambridge; Cambridge University Press.

Carslaw, H.S. [1930] *Introduction to the Theory of Fourier Series and Integrals*. Third edition. New York: Dover, 1950.

Cauchy, A.L. [1826] *'Memoire sur les Developpements des Functions en Series Periodiques*'. Memoirs de l'Academie des Sciences, **6**, pp.603-612.

Dirichlet, P.L. [1829] *'Sur la Convergence des Series Trigonometriques que servent a representer une Fonction Arbitraire entre des Limites Donnes'*, Journal fur die Reine and Angewandte Mathematik, **4,** pp.157-169.

Dirichlet, P.L. [1837] *'Uber die Darstellung Ganz Willkürlicker Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen*', in H.W. Dove and L. Moser (eds.); Repertorium der Physik, **1,** pp. 152 – 174.

Dirichlet, P.L. [1853] *Werke*, vol. 2, pp.385 – 387. Berlin: Reiner, 1897.

Du Bois-Reimond, P.D.G. [1876] *'Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen darstellungsformeln*', Abhandlungen der Königlich-Bayetischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalischen Clase, **12**, 2, pp. i-xxiv and 1-102.

Du Bois-Reimond, P.D.G. [1879] *'Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationrechnung*', Mathematische Annalen, **15**, pp. 282 – 315, 564 – 576.

Du Bois-Reimond, P.D.G. [1885] *'Über den Begriff der Länge einer Curve'*, Acta Mathematica, **6**, pp. 167 -168.

[24] Там же.

Fourier, J. [1808] *'Memoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corpe Solides (Extrait)'*, Nouveau Bulletin des Sciences, par la Societe Philomatique de Paris, **1**, pp. 112 – 116.

Halmos, P. [1950] *Measure Theory*. New York and London: van Nostrand Reinhold.

Hankel, H. [1882] *'Untersuchengen über die Unendlich oft Oscillierenden und Unstetigen Functionen*', Mathematische Annalen, **20**, pp. 63-112.

Jordan, C. [1881] *'Sur la Serie de Fourier'*, Comptes Rendus des Seances de l'Academie des Sciences, **92**, pp. 228-233.

Jordan, C. [1887] *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, vol. 3, first edition. Paris: Gauthier-Villars.

Jordan, C. [1893] *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, vol.1, second edition. Paris: Gauthier-Villars.

Loeve, M. [1955] *Probability Theory*. New York: Van Nostrand.

Menger, K. [1928] *Dimensionstheorie*. Berlin: Teubner.

Pierpont, J. [1905] *The Theory of Functions of Real Variables*, vol. 1, New York: Dover, 1959.

Popper, K.L. [1935] *'Letter to the Editor'*, Erkenntnis, 3, pp. 426-429. Republished in Appendix *i to [Popper,1959, pp. 311-314].

Popper, K.L. [1959] *The Logic of Scientific Discovery*. London: Hurchinson.

Popper, K.L. [1972] *Objective Knowledge*. Oxford University Press.

Reichenbach, H. [1947] *Elements of Symbolic Logic*. New York; Macmillan.

Rudin, W. [1953] *Principles of Mathematical Analysis*. First Edition. New York: McGraw-Hill.

Szökefalvi-Nagy, B. [1954] Valos Függvenyek es Függvenysorok. Budapest: Tankönyvkiado.

Zygmund, A. [1935] *Trigonometric Series*. New York: Chelsea, 1952.

Перевод В.А. Бажанова