Процедуры доказательства в современном математическом анализе[1]
Опубликовано в журнале: Вопросы философии, 2009, №8, с. 97-100.
Перевод и публикация В.А. Бажанова

И. Лакатос

В начале приведу характеристику некоторых важных аспектов современной математики, данную Дж. фон Нейманом: "…Я считаю, что достаточно хорошее приближение к истине (которая слишком сложна, чтобы допускать что-нибудь, кроме аппроксимации) состоит в следующем. Математические идеи рождаются в сфере эмпирики, но генеалогия их иногда длинна и запутанна. Однако коль скоро эти идеи возникли, они обретают независимое, самостоятельное существование и их лучше сравнивать с художественными произведениями, которые всецело подчиняются эстетическим оценкам, чем с чем-либо другим и, в частности, с эмпирическими науками. Тем не менее, здесь имеется одно обстоятельство, на которое, я полагаю, следует обратить особое внимание. По мере того как математическая дисциплина отрывается от своего эмпирического источника, а тем более когда она принадлежит второму или третьему поколению и лишь косвенно вдохновляется идеями, восходящими к "реальности", над ней нависает очень серьезная опасность. Она превращается во всё более и более чисто эстетическое упражнение, в l'art pour l'art (искусство ради искусства). Это не всегда плохо, если вокруг данной дисциплины находятся другие родственные разделы математики, обладающие более тесными связями с эмпирическими науками, или же данная дисциплина находится под влиянием людей с исключительно хорошо развитым вкусом. Но существует серьезная опасность, состоящая в том, что математическая дисциплина начнет развиваться по линии наименьшего сопротивления, что поток вдали от источника разделится на множество мелких рукавов и что соответствующий раздел математики обратится в хаотическую массу деталей и разного рода сложностей. Иными словами, на большом расстоянии от эмпирического источника или в результате чересчур абстрактного инбридинга математической дисциплине угрожает вырождение. При рождении того или иного раздела математики стиль обычно бывает классическим; когда же он приобретает черты перерождения в барокко, это следует расценивать как сигнал опасности. Легко привести примеры соответствующих процессов перерождения математических теорий в барокко и даже высокое барокко, но это уже во многом сугубо технический вопрос.

Если этот этап развития математической дисциплины достигается, единственным исцеляющим лекарством является впрыскивание в нее более или менее собственно эмпирических идей. Я убежден, что это необходимое условия сохранения свежести и жизненной силы математической теории, и что это положение останется в силе и в будущем"[2].

Немногие математики разделили бы эти взгляды Дж. фон Неймана[3]. Но как мы можем защитить современную абстрактную математику от вырождения? Согласно Д. фон Нейману путем "впрыскивания в нее более или менее собственно эмпирических идей".

В этой идее важны два момента. Первый. Вырождение не есть вопрос её общезначимости. Общезначимость некоторых результатов, которые могут быть образцами её вырождения, по фон Нейману, может быть менее сомнительна, нежели некоторые уважаемые всеми достижения ряда блестящих математиков. Значит, если мы намерены контролировать процесс вырождения, то надо критиковать не общезначимость результатов, а нечто иное, а именно <u>источник</u> данных результатов.

---

[1] Lakatos I. Proofs and Refutations. PhD Thesis, Cambridge, 1961. pp. 189 – 192.

[2] The Mathematician. The Works of the Mind /Ed. Heywood and Nef, Chicago, 1947; перепечатано в: Newman J.R. The World of Mathematics. Vol. IV, New York, 1956).

[3] См., например, Предисловие к классической работе: Polya-Szege. Aufgaben und Lehrsätze de Analysis. Berlin, 1927.

И второй момент. Можно избежать вырождения в том случае, если не воспарять высоко вверх от эмпирического источника математики.

Второй момент, тем не менее, спорен. По давней традиции математики обязаны обеспечивать свидетельства общезначимости их результатов. Сейчас – если принять предупреждение фон Неймана всерьез – мы должны потребовать от них, чтобы их результаты были простимулированы "впрыскиванием в математику более или менее собственно эмпирических идей".

Дж. фон Нейман безусловно опротестовал бы столь упрощенное истолкование своих мыслей. Но означает ли это, что его соображения не имеют никакой практической пользы?

Проблема в том, что хотя "впрыскивание в математику более или менее собственно эмпирических идей" может быть мощным стимулом развития – дельта-функция Дирака является замечательным примером этого – но ошибочно отвергать автономность развития математики, следование её своим курсом при условии, конечно, здорового взаимодействия с наукой и искусством.

Таким образом, можно согласиться с тем, что для защиты от вырождения математики нужно иметь в виду лишь уважаемые, достойные источники. Но неразумно ограничивать уважаемые источники лишь сферой эмпирии. Нет и не должно быть никаких априорных ограничений на то, что можно считать уважаемым – каждый случай требует специального обсуждения. Любая проблема - эмпирического свойства она или нет – может быть кандидатом на "уважаемость" и "достойность".

Требование, связанное с определением статуса проблемы, и теоретически, и практически важно. Если воспринимать проблему вырождения математики серьезно, мы должны быть консерваторами, мы обязаны иметь в виду разумную непрерывность в последовательности проблем. Это требование, однако, совпадает с требованием внедрения эвристических элементов в стиль математического рассуждения и представления результатов и более того – внедрения этих элементов в систему математического образования.

Подобного рода изменения в современных подходах безусловно непросты, но некоторые из представителей современной математики уже ощущают необходимость таковых. Приведу только два примера.

В современных учебниках по теории меры или теории вероятностей мы часто сталкиваемся с определением измеримого множества, данном Каратеодори. Оно звучит следующим образом: " Множество **E** в H в наследственном σ-кольце **H** является μ^*-измеримым если для любого **A** в H

$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$ " где μ^* есть внешняя мера на **H**".

Загадочное определение. Конечно, можно всегда найти простой выход и заявить, что математики определяют свои понятия как им нравится. Но серьёзные ученые не прибегают к столь легкомысленным объяснениям. Они не могут сказать, что это лишь правильное, истинное определение измеримости и что зрелый математический ум должен видеть его именно таким. Обычно математик туманно намекает, что необходимо посмотреть на следствия, которые получаются из такого рода определений: "определения – это догмы; только следствия из них способны пробудить новые мысли"[4]. Итак, мы должны принимать определения на веру и смотреть, что из них вытекает. Хотя это авторитарный подход[5], но по крайней мере здесь можно усмотреть признак того, что

[4] Menger K. Dimensionstheorie. 1928. p. 28; эта же мысль с одобрением приводится К. Поппером в его кн.: Logic of Scientific Discovery, 1959. p. 55). В книге И. Лакатоса "Доказательства и опровержения. Логика математического открытия" (1976) приведена другая страница из работы К. Менгера – страница 76. Прим. переводчика.

[5] Суть авторитарного подхода объясняется И. Лакатосом во фрагменте "Дедуктивистский versus эвристический подход" его книги "Доказательства и опровержения. Логика математического открытия"

осознается сложность проблемы – это извинение, но авторитарного порядка. Приведу извинение Халмоша за определение Каратеодори[6]: "Довольно сложно приобрести интуитивное понимание сути μ^*-измеримости – разве что через знакомство с тем, что из него вытекает, что мы предлагаем сделать ниже". И далее: "Тем не менее, может быть полезным следующее замечание. Внешняя мера не является обязательно измеримой, даже конечной, аддитивной функцией множества. Для того, чтобы удовлетворить требованию аддитивности мы выделяем те множества, которые разбивают другие множества аддитивным образом – определение μ^*-измеримости есть ни что иное как точная формулировка этого достаточно расплывчатого описания. Мощное оправдание этого предположительно сложного понятия – это его возможно удивительный, но абсолютный успех в доказательстве важной и полезной теоремы о расширении в §13".

Первая – "интуитивная" – часть данного обоснования представляется в известной мере вводящей в заблуждение, поскольку, как мы узнаем из второй его части, определяемое понятие является порожденным доказательством в теореме Каратеодори о расширении мер (которую Халмош вводит только в следующей главе своей книги). Таким образом, является ли оно интуитивным или нет на самом деле не так уж интересно: его рациональность задается вовсе не интуитивной прозрачностью, а тем, что оно порождается некоторым доказательством. Невозможно разорвать связь такого рода определения от его основы и представить те или иные фрагменты рассуждения прежде, чем само доказательство, по отношению к которому оно является эвристически вторичным, хотя это и можно сделать с некоторыми извинениями. М. Лёв в его книге "Теория вероятностей"[7] весьма тщательно формулирует данное определение в разделе, посвященном расширению мер, - формулирует как понятие, необходимое для доказательства теоремы о расширении: "Мы нуждаемся в некоторых понятиях, которые формулируем в этом разделе"[8]. Но возникает вопрос, а как он догадывается о нужных для доказательства весьма сложных инструментах? Разумеется, он оговаривается, что соответствующие идеи появятся по мере движения вперед. Однако тогда непонятно зачем эта мистическая интрига с определением до появления самого доказательства?

Легко привести другие примеры, когда выдвижение примитивной гипотезы, относящейся к доказательству или контрапримерам, которые эвристически важны для получения той или иной теоремы и, в свою очередь, нужного определения развенчивает авторитарный мистицизм абстрактной математики и, стало быть, служит тормозом на пути её вырождения, о чем беспокоился Дж. фон Нейман. Несколько исследований конкретных случаев такого рода вырождения было бы очень полезно для математиков. К сожалению, дедуктивистский стиль и сильная степень специализации математического знания в значительной степени фактически защищают работы, выполненные в духе вырождения.

(1976). См. публикация перевода этого фрагмента в журнале "Эпистемология и философия науки", 2009, № 2. Прим. переводчика.

[6] Halmos R.P. Measure Theory. New York, 1950. p. 44.

[7] Loeve M. Probability Theory. New York, 1955.

[8] Ibid., p. 87.