

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ульяновский государственный университет»
Инженерно-физический факультет высоких технологий

С. А. Афанасьев, Д. Г. Санников

ВВЕДЕНИЕ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ СВЧ

Учебное пособие

Ульяновск, 2012

УДК 537.86.029(075.8)

ББК 32.840.4я73

A94

*Печатается по решению Ученого совета
инженерно-физического факультета высоких технологий
Ульяновского государственного университета*

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
физических методов в прикладных исследованиях УлГУ
Ю. Н. Зубков;

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ульяновского филиала Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
В. Л. Веснин

Афанасьев, С. А.

A94 **Введение в электродинамику СВЧ** : учебное пособие /
С. А. Афанасьев, Д. Г. Санников. – Ульяновск : УлГУ, 2012. – 60 с.

В пособии изложены основы теории волноводов, резонаторов и антенн
диапазона СВЧ.

Предназначено для студентов инженерно-физического факультета высо-
ких технологий, изучающих спецкурс «Электродинамика СВЧ». Может исполь-
зоваться при подготовке к выполнению работ радиофизического практикума.

УДК 537.86.029(075.8)

ББК 32.840.4я73

© Афанасьев С. А., Санников Д. Г., 2012

© Ульяновский государственный университет, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Электромагнитные волны и колебания в волноводах и резонаторах	6
1.1. Классификация направляющих систем	6
1.2. Классификация направляемых волн	7
1.3. Общие свойства направляемых волн	8
<i>Уравнения Гельмгольца для направляемых волн. Формулы связи поперечных и продольных компонент</i>	8
<i>Критическая длина волны и длина волны в волноводе</i>	10
<i>Фазовая и групповая скорости направляемых волн</i>	11
1.4. Волна типа Н и Е в прямоугольном волноводе	12
1.5. Волна типа H_{10} в прямоугольном волноводе	17
<i>Структура поля волны типа H_{10}</i>	17
<i>Мощность, переносимая по волноводу волной типа H_{10}</i>	18
<i>Токи на стенках волновода, излучающие и неизлучающие щели</i>	20
1.6. Затухание волн в полых металлических волноводах	22
<i>Общие выражения для постоянной затухания</i>	22
<i>Частотные зависимости постоянных затухания</i>	24
<i>Расчёт постоянной затухания волны основного типа прямоугольного волновода</i>	25
1.7. Линии передачи с ТЕМ-волнами. Коаксиальная линия передачи	27
<i>Общие свойства ТЕМ-волн в линиях передачи</i>	27
<i>ТЕМ-волна в коаксиальной линии передачи</i>	28
<i>Волновое сопротивление коаксиальной линии</i>	29
<i>Затухание в коаксиальной линии</i>	30
1.8. Объёмные резонаторы	31
<i>Собственные колебания полых металлических резонаторов</i>	31
<i>Добротность объёмных резонаторов</i>	34
Глава 2. Излучение электромагнитных волн	36
2.1. Неоднородные волновые уравнения в потенциалах и их решение в виде запаздывающих потенциалов	36

2.2. Элементарный электрический излучатель (электрический диполь)	40
<i>Расчёт полей элементарного электрического излучателя</i>	40
<i>Ближняя и дальняя зоны элементарного электрического излучателя</i>	44
<i>Диаграмма направленности элементарного электрического излучателя</i>	45
<i>Мощность, излучаемая диполем. Сопротивление излучения</i>	46
2.3. Элементарный магнитный излучатель (магнитный диполь)	48
<i>Принцип перестановочной двойственности</i>	48
<i>Поле магнитного диполя в дальней зоне. Щелевой излучатель</i>	50
2.4. Диаграмма направленности линейной антенны	52
2.5. Направленные свойства апертурных антенн	55
<i>Ближняя и дальняя зоны апертурной антенны</i>	55
<i>Направленные свойства апертурных антенн</i>	56
<i>Элемент Гюйгенса</i>	56
Список литературы	60

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория электромагнитного поля, созданная Дж. К. Максвеллом, заложила основы для практического применения электромагнитных колебаний и волн. С развитием радиосвязи и радиолокационной техники возникла потребность в теоретическом изучении и инженерном освоении волноводов, резонаторов и антенн радиочастотного и сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазонов. Перечисленные вопросы составляют основу современной технической электродинамики указанных диапазонов электромагнитных волн.

В основу данного учебного пособия положен курс лекций по предмету «Электродинамика СВЧ», читаемый в течение ряда лет одним из авторов для студентов специальности «Радиофизика и электроника». Оно предназначено, в первую очередь, для студентов различных специальностей инженерно-физического факультета высоких технологий, выполняющих работы радиофизического практикума в лаборатории электродинамики СВЧ (работы этого практикума описаны в [1]). Пособие, по сути, представляет развёрнутое теоретическое введение в данный практикум. В нём изложены основы теории волноводов, резонаторов и антенн диапазона СВЧ, т.е. базовых элементов тех установок, с которыми столкнётся студент при выполнении работ практикума [1].

Перечисленные темы должны изучаться после усвоения основных законов классической электродинамики и основ теории электромагнитных волн. Эти вопросы изучаются студентами инженерно-физического факультета в таких курсах, как «Физика волновых процессов» и «Распространение электромагнитных волн», и изложены в учебном пособии [2]. Настоящее пособие является непосредственным продолжением пособия [2], к которому студентам необходимо обращаться как к справочнику при изучении изложенного здесь материала. Следует также пользоваться учебной литературой, список которой имеется в конце пособия.

Пособие может быть полезно также студентам специальности «Телекоммуникации» при изучении курса «Электромагнитные поля и волны» и выполнении работ соответствующего лабораторного практикума.

Изложение ведется с использованием Международной системы единиц (СИ) как общепринятой в технических приложениях электродинамики.

Глава 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И КОЛЕБАНИЯ В ВОЛНОВОДАХ И РЕЗОНАТОРАХ

1.1. Классификация направляющих систем

Направляющей системой, или **линией передачи**, в электродинамике называется система тел, обеспечивающих перенос энергии электромагнитного поля в определённом направлении. В качестве элементов таких систем, направляющих поток энергии в нужном направлении, обычно выступают какие-либо металлические или диэлектрические поверхности.

Волна, распространяющаяся в направляющей системе, называется **направляемой волной**. Структура электромагнитного поля направляемых волн отличается от структуры поля волн, распространяющихся в свободном (безграничном) пространстве. Поле направляемой волны должно удовлетворять не только уравнениям Максвелла, но и граничным условиям, задаваемым структурой линии передачи.

Регулярными называют направляющие системы, у которых поперечное сечение и другие параметры в продольном направлении неизменны или изменяются по периодическому закону. В первом случае систему называют **однородной**, во втором – **периодической**.

В направляющих системах **открытого типа** поле, строго говоря, распределено во всём пространстве, однако большая часть его энергии локализуется вблизи направляющих элементов системы. В направляющих системах **закрытого типа** поле существует в области, отделённой от остального пространства металлической оболочкой.

На рис. 1.1 изображены поперечные сечения некоторых практически важных направляющих систем: двухпроводной линии (*a*); полых металлических волноводов прямоугольного (*b*) и круглого (*в*) сечений; коаксиальной (*г*) и полосковой (*д*) линий передачи; круглого диэлектрического волновода (*e*).

На низких частотах (1 Гц...100 кГц) широко используются открытые двухпроводные линии передачи. На более высоких частотах возрастают потери за счёт излучения энергии в окружающее пространство. Для уменьшения потерь переходят к закрытым линиям передачи, вводя метал-

лические экраны. В диапазоне от 100 кГц до 3 ГГц, как правило, используются коаксиальные линии передачи, а на частотах свыше 3 ГГц – полые металлические волноводы с различной формой сечения, которые перекрывают сантиметровой и частично миллиметровой диапазоны длин волн. С уменьшением длины волны уменьшаются размеры волновода и повышаются требования к качеству поверхности стенок, что создаёт трудности при их изготовлении. Поэтому в миллиметровом диапазоне (на частотах свыше 10...15 ГГц) волноводы вытесняются микрополосковыми линиями, состоящими из двух металлических полосок, разделённых слоем диэлектрика. В оптическом диапазоне (частоты $10^{13} \dots 10^{15}$ Гц) используются диэлектрические волноводы из прозрачных материалов, в которых полностью отсутствуют металлические поверхности.

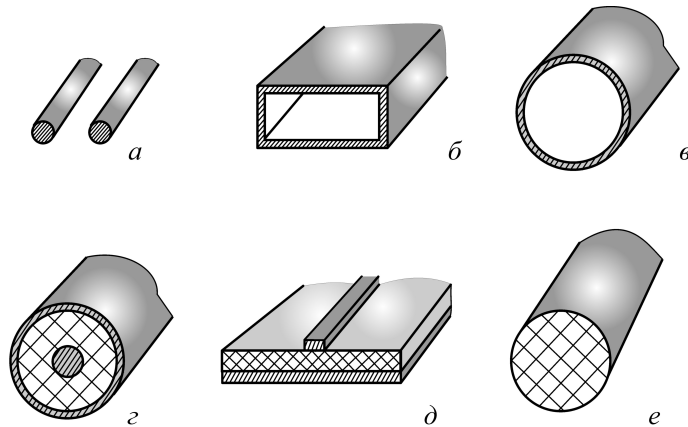


Рис. 1.1

1.2. Классификация направляемых волн

Направляемая волна в любой точке пространства характеризуется двумя векторами поля \vec{E} и \vec{H} или шестью их проекциями на координатные оси. Продольную координату, отсчитываемую в направлении распространения волны, будем обозначать буквой z . Для переноса энергии в направлении Oz вектор Пойнтинга $\vec{P} = [\vec{E}, \vec{H}]$ должен иметь продольную

составляющую P_z . Для этого поле волны обязано содержать хотя бы одну пару поперечных составляющих $\vec{E}_\perp, \vec{H}_\perp$. Направляемые волны классифицируются в зависимости от наличия или отсутствия в них продольных составляющих \vec{E}_z и \vec{H}_z векторов электрического и магнитного полей. Здесь возможны четыре случая:

1. **ТЕМ-волны (волны типа Т, поперечные волны)**, у которых оба вектора \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны оси Oz и не имеют продольных составляющих: $E_z = 0, H_z = 0$. Аббревиатура ТЕМ происходит от английского Transverse Electromagnetic. Примером ТЕМ-волны является плоская электромагнитная волна в неограниченном пространстве. С помощью ТЕМ-волн переносится энергия в двухпроводных (энергоснабжающих, телефонных), коаксиальных и полосковых линиях передачи.

2. **ТЕ-волны (Transverse Electric), или магнитные волны, или волны типа Н**, имеющие продольную составляющую магнитного вектора H_z при $E_z = 0$.

3. **ТМ-волны (Transverse Magnetic), или электрические волны, или волны типа Е**, у которых $E_z \neq 0$ при $H_z = 0$. Можно показать, что собственные волны полых металлических волноводов могут быть только волнами типа Е или Н.

4. **Смешанные (гибридные) волны**, обладающие обеими продольными составляющими ($E_z \neq 0, H_z \neq 0$). В практически важных направляющих системах такие волны не наблюдаются.

1.3. Общие свойства направляемых волн

Уравнения Гельмгольца для направляемых волн. Формулы связи поперечных и продольных компонент

При отсутствии сторонних источников векторы поля \vec{E} и \vec{H} направляемой волны должны удовлетворять **однородным уравнениям Гельмгольца**

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0, \quad (1.1)$$

где $k = \omega(\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0)^{1/2}$ – волновое число плоской волны при её распространении в свободном пространстве. Уравнения (1.1) непосредственно вытекают из **системы уравнений Максвелла для комплексных амплитуд волновых полей**

$$\text{rot}\vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{H}, \quad \text{rot}\vec{H} = i\omega\epsilon_0\vec{E} \quad (1.2)$$

(см. [2], пп. 2.2). Решение уравнений (1.1) будем искать в виде неоднородной плоской волны, направляемой волноводом вдоль оси Oz :

$$\vec{H} = \vec{H}_0(x, y)\exp(-ihz), \quad \vec{E} = \vec{E}_0(x, y)\exp(-ihz), \quad (1.3)$$

где $h = k_z$ – **продольное волновое число**, т.е. проекция волнового числа \vec{k} на ось Oz (см. рис. 1.2). (В формулах записи полей монохроматической волны (1.3) опущен временной множитель $\exp(i\omega t)$.) Подставим решение (1.3) в уравнения (1.1). После вычисления вторых производных по продольной координате z в операторе Лапласа

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -h^2 \vec{E}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = -h^2 \vec{H}, \quad (1.4)$$

уравнения Гельмгольца принимают вид

$$\Delta_{\perp} \vec{E} + g^2 \vec{E} = 0, \quad \Delta_{\perp} \vec{H} + g^2 \vec{H} = 0, \quad (1.5)$$

где $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, а величина $g = (k^2 - h^2)^{1/2}$ представляет собой

поперечное волновое число.

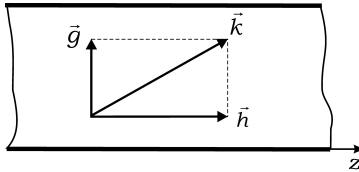


Рис. 1.2

Разложим векторы поля в (1.3) на продольную и поперечную составляющие:

$$\vec{H} = \vec{H}_z + \vec{H}_{\perp}, \quad \vec{E} = \vec{E}_z + \vec{E}_{\perp}. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.3) в систему (1.2), получаем, что поперечные составляющие полей направляемых волн связаны с продольными соотношениями

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i}{g^2} \left(\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} + h \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), & E_y &= \frac{i}{g^2} \left(\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} - h \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \\ H_x &= \frac{i}{g^2} \left(\omega\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} - h \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), & H_y &= -\frac{i}{g^2} \left(\omega\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + h \frac{\partial H_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Методика определения полей направляемых волн обычно сводится к следующему:

а) записывают однородное уравнение Гельмгольца вида (1.5) для продольной составляющей и ищут его решение методом разделения переменных;

б) на найденное в п. а) решение накладывают граничные условия на стенках волновода, определяют постоянные интегрирования и получают решение для продольной составляющей в окончательном виде;

в) пользуясь формулами связи (1.7), определяют поперечные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей.

Критическая длина волны и длина волны в волноводе

Согласно рис. 1.2 волновое число k направляемой волны связано с его продольной h и поперечной g составляющими соотношением

$$k^2 = h^2 + g^2. \quad (1.8)$$

Отсюда продольное волновое число (постоянная распространения) h равно

$$h = \pm \sqrt{k^2 - g^2}. \quad (1.9)$$

Очевидно, что возможны три случая:

1) $k > g$, т.е. величина h вещественна, что соответствует распространяющейся вдоль волновода волне;

2) $k < g$, когда h – чисто мнимая величина, и направляемая волна экспоненциально затухает в направлении своего распространения;

3) критический случай $k = g$, когда $h = 0$.

Величина $\lambda_{кр} = 2\pi/g$ называется **критической длиной волны**. Критическая длина волны для данного типа колебаний зависит от формы

поперечного сечения волновода и его размеров, а также от диэлектрической и магнитной проницаемостей заполняющей волновод среды.

Расписывая в (1.9) $h = 2\pi/\lambda$, $g = 2\pi/\lambda_{кр}$, $k = 2\pi/\lambda_0$, где λ_0 – длина волны в безграничной среде, находим, что длина волны λ в волноводе связана с критической длиной волны соотношением

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{кр})^2}}. \quad (1.10)$$

Таким образом, длина волны λ в волноводе всегда больше длины волны λ_0 той же частоты в свободном пространстве. Поскольку фазовая скорость волны равна $v_{\phi} = \lambda f$, где f – частота, то фазовая скорость в волноводе больше фазовой скорости волны в безграничной среде.

При $\lambda_0 = \lambda_{кр}$ $\lambda \rightarrow \infty$, а при $\lambda_0 > \lambda_{кр}$ (1.10) даёт мнимое значение λ , т.е. волны, более длинные, чем $\lambda_{кр}$, в виде колебания данного типа по волноводу распространяться не могут. Область частот, для которой $\lambda_0 > \lambda_{кр}$, называется **областью отсечки** для данного типа колебаний.

Фазовая и групповая скорости направляемых волн

Знание критической длины волны позволяет определить фазовую скорость данного типа колебаний в волноводе

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{h} = \frac{2\pi f}{h} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{кр})^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (f_{кр} / f)^2}}, \quad (1.11)$$

где частота $f = c / \lambda_0$, c – скорость света в свободном пространстве, $f_{кр} = c / \lambda_{кр}$ – критическая частота волны данного типа.

Групповая скорость

$$\begin{aligned} v_{gp} &= \frac{d\omega}{dh} = 2\pi \frac{df}{dh} = 2\pi \frac{df}{d\lambda_0} \cdot \frac{d\lambda_0}{dh} = \\ &= c \sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{кр})^2} = c \sqrt{1 - (f_{кр} / f)^2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Из (1.11) и (1.12) видно, что $v_{\phi} > c$, $v_{gp} < c$ и между фазовой и групповой скоростями в волноводе существует соотношение $v_{\phi} v_{gp} = c^2$.

Фазовая скорость в волноводе является функцией частоты электромагнитного колебания. Такое явление получило название дисперсии. Дисперсия становится наиболее существенной, когда длина волны, на которой возбуждается волновод, близка к критической. При $\lambda_0 \ll \lambda_{кр}$ $v_{\phi} \approx v_{gp} \approx c$. При достаточно большой ширине спектра сигнала наличие дисперсии приводит к нелинейным искажениям сигналов, передаваемых по волноводу.

1.4. Волны типа H и E в прямоугольном волноводе

В качестве линий передачи диапазона СВЧ наиболее распространены полые металлические волноводы в виде трубки прямоугольного сечения. Прямоугольный волновод вместе с используемой системой координат показан на рис. 1.3. Размер широкой стенки волновода принято обозначать a , а узкой – b .

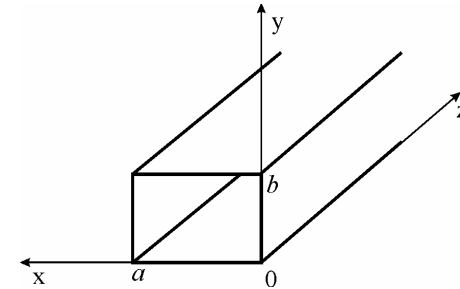


Рис. 1.3

Волна типа H (TE-волна) в прямоугольном волноводе имеет продольную составляющую магнитного поля H_z , тогда как электрическое поле поперечно ($E_z = 0$). Для нахождения H_z необходимо решить уравнение Гельмгольца

$$\Delta_{\perp} H_z + g^2 H_z = 0 \quad (1.13)$$

с учётом соответствующих граничных условий. Для волновода с *идеально проводящими стенками* граничное условие заключается в равенстве нулю тангенциальных составляющих электрического вектора на стенках волно-

вода (см. [2], п. 5.4). Из геометрии задачи (рис. 1.3) следует, что для широких стенок волновода ($y = 0, b$) тангенциальной является составляющая поля E_x , а для узких ($x = 0, a$) – E_y . Формулы связи (1.7) позволяют записать граничные условия через искомую функцию H_z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} &= 0 \quad \text{при} \quad y = 0; b, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0; a. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Краевая задача, в которой на границе области обращается в нуль не сама искомая функция, а её производная, называется *задачей Неймана*. Решается такая задача стандартным методом разделения переменных. Будем искать $H_z(x, y, z)$ в виде (1.3), где $H_0(x, y)$ имеет вид произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной из поперечных координат:

$$H_0(x, y) = X(x)Y(y). \quad (1.15)$$

Подставляя (1.15) в (1.13), имеем

$$X''Y + XY'' + g^2XY = 0, \quad (1.16)$$

где двумя штрихами обозначена вторая производная функции. Деля обе части (1.16) на XY , получаем уравнение

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -g^2, \quad (1.17)$$

где в левой части стоит сумма независимых друг от друга функций, зависящих от x и y соответственно. Поэтому (1.17) разбивается на два уравнения

$$X''/X = -g_x^2, \quad Y''/Y = -g_y^2, \quad (1.18)$$

где g_x, g_y – неизвестные числа, причём

$$g_x^2 + g_y^2 = g^2. \quad (1.19)$$

Уравнения (1.18) – это хорошо известные дифференциальные уравнения гармонических колебаний, имеющие следующие решения:

$$\begin{aligned} X(x) &= A \sin(g_x x) + B \cos(g_x x), \\ Y(y) &= C \sin(g_y y) + D \cos(g_y y). \end{aligned} \quad (1.20)$$

В итоге общее решение уравнения Гельмгольца (1.13) имеет вид

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) &= (A \sin(g_x x) + B \cos(g_x x)) \times \\ &\times (C \sin(g_y y) + D \cos(g_y y)) \exp(-ihz). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Постоянные A, B, C, D находятся из граничных условий. Условия (1.14) при $x = 0, y = 0$ выполняются, если $A = C = 0$. Обозначая $BD = H_m$, общее решение (1.21) запишем как

$$H_z = H_m \cos(g_x x) \cos(g_y y) \exp(-ihz). \quad (1.22)$$

Из граничных условий при $x = a, y = b$ следует, что

$$g_x = m\pi / a, \quad g_y = n\pi / b, \quad (1.23)$$

где m, n – положительные целые числа, одновременно не равные нулю. Тогда согласно (1.19) поперечное волновое число g будет определяться соотношением

$$g_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (1.24)$$

Таким образом, данная волноводная задача имеет решение только при определённых значениях параметра g , которые определяются соотношением (1.24). Эти значения называются **собственными значениями**, они образуют дискретную последовательность возрастающих положительных чисел g_{mn} , каждое из которых соответствует паре чисел m, n . Каждому из собственных значений g_{mn} соответствует функция вида (1.22), называемая **собственной функцией**, которая описывает распределение составляющей H_z в волноводе. Распределение прочих (поперечных) составляющих легко получить по формулам связи (1.7).

Аналогично может быть решена задача о волнах типа Е (ТМ-волнах) в прямоугольном металлическом волноводе. Решается уравнение Гельмгольца для продольной составляющей электрического вектора E_z :

$$\Delta_{\perp} E_z + g^2 E_z = 0. \quad (1.25)$$

Искомая функция E_z для каждой из стенок волновода является тангенциальной составляющей, для которой граничные условия имеют вид

$$E_z = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; a, \quad y = 0; b. \quad (1.26)$$

Граничные условия для составляющих E_x, E_y с помощью формул связи (1.7) сводятся к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } y = 0; b, \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } x = 0; a. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Условие (1.27) автоматически обеспечивается выполнением условия (1.26). Краевая задача, в которой искомая функция на границе области обращается в нуль, называется *краевой задачей Дирихле*. Так же, как и задача Неймана, она может быть решена методом разделения переменных. Его применение с учётом граничных условий (1.26) приводит к решению вида

$$E_z = E_m \sin(g_x x) \sin(g_y y) \exp(-ihz), \quad (1.28)$$

где по-прежнему g_x, g_y определяются выражением (1.23), а собственные значения g_{mn} – (1.24). Однако для ТМ-волн числа m и n даже по отдельности не могут равняться нулю.

Итак, в случае прямоугольного волновода при заданных поперечных размерах a, b и длине волны генератора $\lambda_0 = 2\pi/k$ в волноводе может существовать дискретный набор собственных (нормальных) мод типов Е и Н, каждая из которых характеризуется двумя числовыми индексами m, n . Из формул (1.22), (1.28) видно, что распределение полей мод прямоугольного волновода в поперечном сечении соответствует стоячей волне. Индексы m и n при этом показывают, сколько полуwave стоячей волны укладывается вдоль широкой и узкой стенок волновода соответственно.

В общем случае поле может быть представлено в виде разложения по собственным волнам волновода (в виде суперпозиции собственных волн, имеющих разные амплитуды). При этом каждая собственная мода распространяется в волноводе независимо от других.

Заметим, что переносить энергию по волноводу способны только **распространяющиеся моды**, для которых $g_{mn}^2 < k^2$, а постоянная распространения h_{mn} вещественна. Моды с достаточно большими индексами, когда $g_{mn}^2 > k^2$, а величина h_{mn} становится чисто мнимой, являются **затухающими модами** и энергию не переносят. Заметим, что это затухание не связано с потерями энергии в стенках волновода и заполняющем

волновод диэлектрике (т.е. с превращением энергии электромагнитного поля волны во внутреннюю энергию). Потерями электромагнитной энергии пренебрегают в рамках рассматриваемой здесь задачи о волноводе с идеально проводящими стенками и заполненном идеальным диэлектриком. При попытке направить в такой волновод волну с $\lambda_0 > \lambda_{кр}$ происходит не поглощение, а полное отражение энергии волны. В самом волноводе существует затухающее электромагнитное колебание с реактивными компонентами полей, не переносящее энергии.

Таким образом, колебания с заданными индексами могут существовать лишь в определенных диапазонах длин волн, ограниченных сверху критической длиной волны $\lambda_{кр} = 2\pi/g_{mn}$. Это показано на диаграмме существования волн в прямоугольном волноводе, приведённой на рис. 1.4.

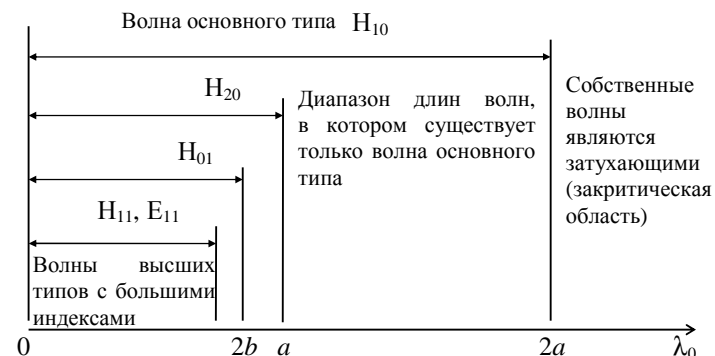


Рис. 1.4

Как видно из рис. 1.4, в некотором диапазоне длин волн ($a \dots 2a$) в волноводе может распространяться лишь одна волна, она называется **волной основного типа**. Остальные собственные волны называются **волнами высших типов**. В прямоугольном волноводе волной основного типа является мода H_{10} , для которой $\lambda_{кр} = 2a$. Эта длина называется критической длиной волны основного типа в волноводе, или **критической длиной волны волновода**. В большинстве технических устройств размеры волновода выбираются таким образом, что в нём может распространяться только одна волна основного типа.

1.5. Волна типа H_{10} в прямоугольном волноводе

Структура поля волны типа H_{10}

Рассмотрим подробнее распространение моды H_{10} , являющейся, как было отмечено выше, модой основного типа для прямоугольного металлического волновода. Полагая в (1.24) $m = 1$, $n = 0$ и вычисляя по (1.7) поперечные составляющие полей, получаем следующие выражения для всех составляющих электрического и магнитного полей рассматриваемой моды:

$$\begin{aligned} H_z &= H_m \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-ihz), \\ H_x &= H_m \frac{ih a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-ihz), \\ E_y &= -H_m \frac{i\omega\mu_0 a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-ihz), \\ H_y &= E_x = E_z = 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

На рис. 1.5 показана картина силовых линий напряжённостей электрического и магнитного полей волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе, построенная по (1.29), а на рис. 1.6 приведены графики, показывающие изменение амплитуд составляющих волны в поперечном направлении и изменение мгновенных значений составляющих полей в продольном направлении.

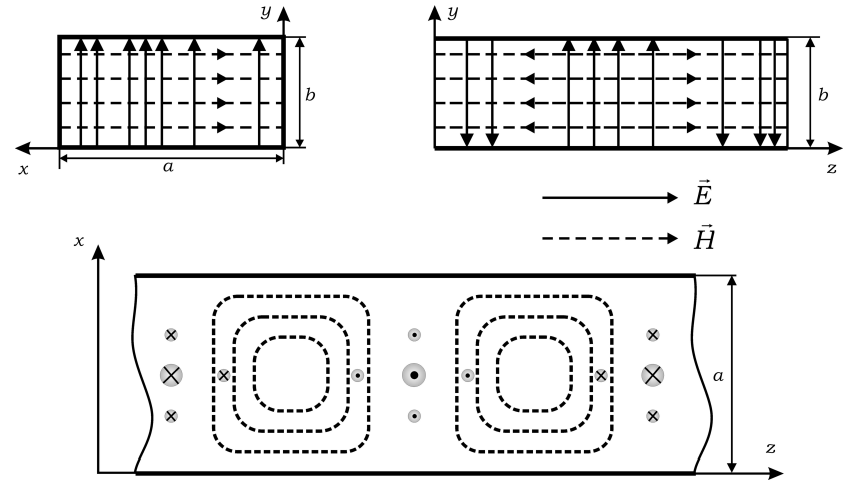


Рис. 1.5

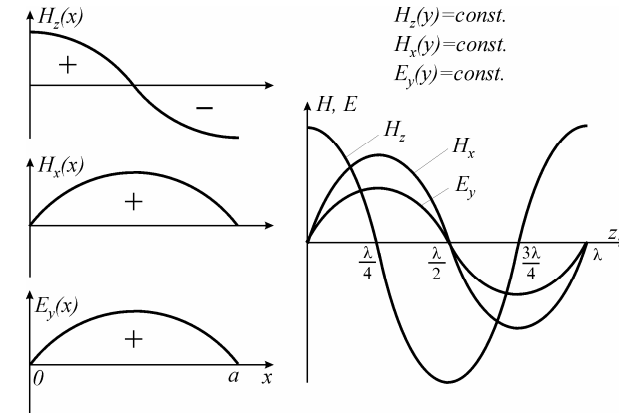


Рис. 1.6

Мощность, переносимая по волноводу волной типа H_{10}

Обсудим вопрос о переносе энергии по волноводу волной типа H_{10} . Но сначала перепишем формулы (1.29) для полей моды H_{10} , введя обозначение $H_0 = H_m (ha/\pi)$ – максимального значения амплитуды поперечной составляющей магнитного поля:

$$\begin{aligned}
H_x &= iH_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-ihz), \\
E_y &= -iZH_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-ihz), \\
H_z &= \frac{\pi}{ah} H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-ihz).
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Здесь введена величина Z , имеющая смысл **импеданса**, т.е. отношения амплитуд поперечных составляющих электрического и магнитного полей $Z = |E_y|/|H_x|$. В нашем случае импеданс даётся выражением

$$Z = \frac{\omega\mu\mu_0}{h} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{кр})^2}}, \tag{1.31}$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu\mu_0/(\epsilon\epsilon_0)}$ – импеданс однородной плоской волны в безграничной среде, а $\lambda_{кр} = 2a$.

Вектор Пойнтинга моды H_{10}

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & E_y & 0 \\ H_x & 0 & H_z \end{vmatrix} = E_y H_z \vec{e}_x - E_y H_x \vec{e}_z \tag{1.32}$$

имеет поперечную x -составляющую и продольную z -составляющую. Составляющие E_y , H_z , порождающие поперечную составляющую, реактивны, так как имеют сдвиг по фазе, равный $\pi/2$. Поэтому интенсивность (усреднённый по периоду вектор Пойнтинга) в поперечном направлении равен нулю, что подтверждает и прямой расчёт:

$$\langle \Pi_x \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_y H_z^*) = 0. \tag{1.33}$$

В то же время поперечные составляющие полей E_y , H_x активны, поскольку колеблются в одинаковых фазах, и интенсивность вдоль оси Oz отлична от нуля:

$$\langle \Pi_z \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_y H_x^*) = \frac{1}{2} ZH_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right). \tag{1.34}$$

Интенсивность максимальна в середине волновода и убывает по мере приближения к узким стенкам.

Для определения полной мощности P , переносимой через поперечное сечение волновода, нужно проинтегрировать (1.34) по площади поперечного сечения $S_{\perp} = ab$:

$$P = \int_{S_{\perp}} \langle \Pi_z \rangle dS_{\perp} = \frac{1}{2} ZH_0^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \int_0^b dy = \frac{ab}{4} ZH_0^2, \tag{1.35}$$

или

$$P = \frac{ab}{4Z} E_0^2, \tag{1.36}$$

где E_0 – максимальная амплитуда электрического поля в волноводе.

Токи на стенках волновода, излучающие и неизлучающие щели

В случае идеально проводящих стенок электромагнитное поле волн, распространяющихся в волноводе, возбуждает поверхностные токи на стенках, причём каждому типу волны соответствует определённая структура этих токов. Как известно, плотность поверхностных токов \vec{j}_s связана с магнитным полем в волноводе соотношением

$$\vec{j}_s = [\vec{n}, \vec{H}_\tau], \tag{1.37}$$

где \vec{n} – внутренняя нормаль к поверхности стенки, \vec{H}_τ – касательная к стенке составляющая магнитного поля ([2], пп. 1.3, 5.4). Мгновенное распределение плотности поверхностных токов по стенкам прямоугольного волновода с модой H_{10} показано на рис. 1.7. Ток растекается, например, из центральной области нижней широкой стенки и, поднимаясь по узким стенкам, стекает к центральной области верхней широкой стенки. Через половину длины волны направления линий тока меняются на обратные. Из сопоставления рис. 1.7 и 1.5 видно, что точки расхождения и схождения линий тока располагаются там, где в данный момент электрическое поле обращается в нуль. Это связано с тем, что линии поверхностного тока замыкаются внутри волновода линиями токов смещения $\vec{j}_{см} = \epsilon\epsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t$. Токи смещения достигают экстремальных значений в точках экстремума производной $\partial\vec{E}/\partial t$, т.е. там, где поле \vec{E} равно нулю.

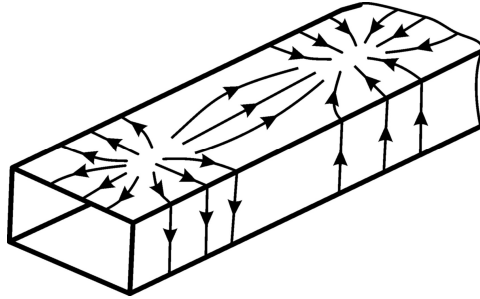


Рис. 1.7

Пусть в узкой стенке волновода прорезаны две щели, т.е. отверстия, длина которых значительно больше ширины (рис. 1.8). Горизонтальная щель пересекает под углом 90° большое количество линий поверхностного тока, что приводит к наведению на верхней и нижней кромках разреза зарядов противоположного знака, которые изменяются во времени с частотой генератора. Таким образом, такая щель будет обладать переменным дипольным моментом и, как показано в гл. 2, будет вести себя как излучатель электромагнитных волн. Из вертикальной щели, пересекающей небольшое количество линий поверхностного тока, излучение будет незначительным. Излучающие щели широко применяются при создании так называемых щелевых волноводных антенн диапазона СВЧ.

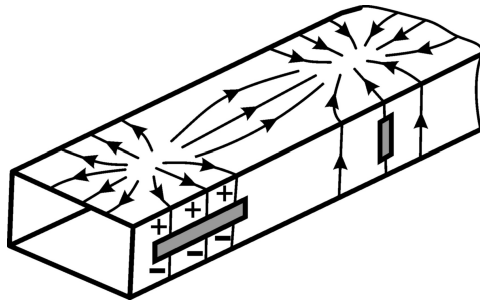


Рис. 1.8

1.6. Затухание волн в полых металлических волноводах

Общие выражения для постоянной затухания

Реальные волноводы изготавливаются из материалов, имеющих конечную величину проводимости. Поэтому токи проводимости, протекающие по стенкам волновода, частично преобразуют энергию электромагнитного поля в тепловую энергию, и по мере движения по волноводу энергия поля уменьшается (затухает). При этом одновременно уменьшаются амплитуды всех составляющих поля. При наличии затухания постоянная распространения становится комплексной величиной:

$$h = h' - ih'', \quad (1.38)$$

где h' сохраняет смысл продольного волнового числа, а мнимая часть h'' представляет собой **постоянную затухания**, определяющую длину волновода, при прохождении которого амплитуды полей уменьшаются в e раз. Тогда поля направляемых волн в зависимости от координаты z изменяются следующим образом:

$$\vec{E}, \vec{H} \sim \exp(-h''z) \exp(-ih'z). \quad (1.39)$$

Таким образом, распространяющаяся волноводная мода с $\lambda_0 < \lambda_{кр}$ оказывается затухающей; если же $\lambda_0 > \lambda_{кр}$, то $h' \neq 0$ при $h' \ll h''$ и наряду с большим затуханием существует малый поток энергии вдоль оси волновода. Соответственно, при сильном затухании теряет смысл понятие критической длины волны.

Некоторый вклад в величину постоянной затухания h'' дают потери в диэлектрике, заполняющем волновод. На практике волновод обычно заполнен воздухом, т.е. диэлектриком с очень малым уровнем потерь. Тогда потери в диэлектрике можно не принимать во внимание.

Мощность P , переносимая по волноводу, пропорциональна квадрату амплитуды поперечной составляющей поля направляемой волны. При затухании поля изменяются вдоль оси Oz по закону (1.39), поэтому для мощности как функции z имеем:

$$P = P_0 \exp(-2h''z), \quad (1.40)$$

где P_0 – мощность в сечении $z = 0$. Величина потерь мощности на единицу длины волновода равна

$$\frac{dP}{dz} = -2h''P, \quad (1.41)$$

откуда коэффициент затухания

$$h'' = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz}. \quad (1.42)$$

Если потери связаны только с конечной проводимостью стенок, то убыль мощности $-dP/dz$ можно считать равной мощности, входящей в боковые стенки волновода единичной длины площадью S_1 :

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_1} [\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau^*] d\vec{S}_1 \quad (1.43)$$

(мощность вычисляется как поверхностный интеграл от интенсивности, т.е. среднего вектора Пойнтинга, вклад в него дают только касательные к стенке составляющие полей $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$).

Мощность P вычисляется как интеграл от интенсивности по поперечному сечению волновода S_\perp :

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_\perp} [\vec{E}, \vec{H}^*] d\vec{S}_\perp. \quad (1.44)$$

С учётом (1.43), (1.44) выражение (1.42) для h'' принимает вид

$$h'' = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re} \int_{S_1} [\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau^*] d\vec{S}_1}{\operatorname{Re} \int_{S_\perp} [\vec{E}, \vec{H}^*] d\vec{S}_\perp}. \quad (1.45)$$

Формула (1.45) является точным и наиболее общим выражением для постоянной затухания. Однако нахождение полей направляемых волн с учётом конечной проводимости стенок является весьма сложной и трудоёмкой задачей. Поэтому расчёты по формуле (1.45) обычно проводят приближённым методом, основанным на двух предположениях:

1. Структура поля в волноводе такая же, как и для волновода с идеально проводящими стенками.
2. Тангенциальные составляющие $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$ полей на хорошо проводящих стенках волновода взаимно ортогональны и связаны **граничным условием Леонтовича** (см. [2], п. 5.3)

$$E_\tau = Z_S H_\tau, \quad (1.46)$$

где Z_S – комплексный **поверхностный импеданс** металла:

$$Z_S = R_S + iX_S = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{2\sigma}} (1 + i) \quad (1.47)$$

(σ – удельная проводимость металла).

Согласно сделанным предположениям, при вычислении мощности P по (1.44) используются поля, полученные в задаче для волновода с идеально проводящими стенками. Составляющая \vec{H}_τ на стенке волновода также полагается такой же, как и для волновода без потерь, а E_τ определяется согласно граничному условию Леонтовича (1.46). С учётом ортогональности векторов $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$ и $d\vec{S}_1$ формула (1.45) принимает вид

$$h'' = \frac{1}{2} \frac{R_S \int_{S_1} |H_\tau|^2 dS_1}{\operatorname{Re} \int_{S_\perp} [\vec{E}, \vec{H}^*] d\vec{S}_\perp}. \quad (1.48)$$

Частотные зависимости постоянных затухания

Приведём без вывода общие формулы, отражающие частотную зависимость постоянных затухания Е- и Н-волн в полых металлических волноводах, следующие из (1.48) [3]:

$$h''_E \sim \frac{C_1 \nu \sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu^2 - 1}}, \quad h''_H \sim \frac{C_2 \sqrt{\nu} + C_3 \nu \sqrt{\nu} (\nu^2 - 1)}{\nu \sqrt{\nu^2 - 1}}, \quad (1.49)$$

где C_1, C_2, C_3 – константы, а буквой ν обозначена безразмерная величина $f/f_{кр}$. Частотная зависимость постоянных затухания примерно одинакова для всех нормальных волн металлических волнопроводов (см. рис. 1.9). При $f \rightarrow f_{кр}$ ($\nu \rightarrow 1$) величина h'' бесконечно возрастает (этот результат является следствием приближённого расчёта). С увеличением частоты h'' сначала уменьшается до некоторого минимального значения, а затем возрастает примерно пропорционально $\sqrt{\nu}$. Этот рост связан с увеличением поверхностного сопротивления R_S . С ростом индексов m, n потери возрастают для волн как Н-, так и Е-типа. Исключение составляют моды H_{0n}

круглого волновода: для них $C_3 = 0$ и h'' неограниченно убывает с ростом частоты.

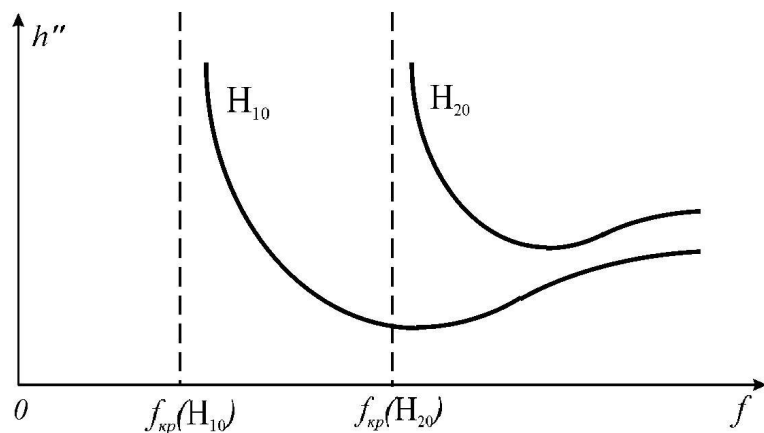


Рис. 1.9

*Расчёт постоянной затухания волны основного типа
прямоугольного волновода*

В качестве примера применим формулу (1.48) к расчёту постоянной затухания волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе. Используя формулы (1.30) для проекций поля волны H_{10} , в числителе (1.48) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{S_1} |H_\tau|^2 dS_1 &= 2 \int_0^a (|H_x|^2 + |H_z|^2)|_{y=0} \cdot dx + \int_0^b |H_z|^2|_{x=0} \cdot dy = \\ &= 2H_0^2 \left(\int_0^a \left(\left(\frac{ha}{\pi} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \right) dx + \int_0^b dy \right) = \\ &= H_0^2 \left(\left(\frac{ha}{\pi} \right)^2 + a + 2b \right). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Знаменатель в (1.48) был рассчитан в п. 1.5 (см. формулу (1.35)). Учитывая формулы (1.31) и (1.10) для импеданса Z и длины волны $\lambda = 2\pi/h$, полу-

чаем приближённое теоретическое выражение для постоянной затухания волны основного типа прямоугольного волновода:

$$h''(H_{10}) = \frac{R_S}{Z_0 b} \left[1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2 \right]^{-1/2} \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2 \right], \quad (1.51)$$

где $R_S = \sqrt{\omega\mu\epsilon_0/(2\sigma)}$ – поверхностное сопротивление стенки волновода, Z_0 – импеданс среды, заполняющей волновод (для вакуума или воздуха $Z_0 \approx 120\pi$ Ом ≈ 377 Ом).

В пределе высоких частот выражение (1.51) принимает вид

$$h''(H_{10}) \approx \frac{R_S}{Z_0 b}. \quad (1.52)$$

Для стандартных волноводов с отношением сторон $a/b \approx 2$ минимальное затухание получается на длине волны $\lambda_0 \approx 0,8a$, не попадающей в область одноволновости (см. рис. 1.4). Однако в рабочем диапазоне $a < \lambda_0 < 2a$ увеличение потерь незначительно по сравнению с минимальным уровнем.

При анализе частотной зависимости постоянной затухания прямоугольного волновода следует учитывать, что при переходе от одного диапазона частот к другому изменяются стандартные размеры поперечного сечения волновода. Именно для стандартных волноводов остаются постоянными отношения b/a и λ_0/a (для средней частоты рабочего диапазона). Поэтому в (1.52) $b \sim \lambda_0 \sim 1/f$, и с учётом того, что $R_S \sim f^{1/2}$, $h'' \sim f^{3/2}$.

Например, для стандартного волновода из меди ($\sigma = 5,7 \cdot 10^7$ См/м) сечением 10×23 мм² на длине волны $\lambda_0 = 3$ см ($f = 10$ ГГц) $h'' = 0,1$ дБ/м. С уменьшением длины волны (увеличением частоты) в 10 раз размеры сечения также уменьшаются в 10 раз и затухание увеличивается в $10^{3/2}$ раз, т.е. становится равным примерно 3 дБ/м. Из-за большого затухания прямоугольные волноводы практически не используются в диапазоне миллиметровых длин волн.

1.7. Линии передачи с ТЕМ-волнами. Коаксиальная линия передачи

Общие свойства ТЕМ-волн в линиях передачи

Выявим условия существования в линии передачи поперечной электромагнитной волны. Уравнения связи (1.7) продольных и поперечных компонент поля при $E_z = 0$, $H_z = 0$ могут выполняться только в случае равенства нулю поперечного волнового числа $g = 0$ (соответственно, $h = k$). Это означает, что ТЕМ-волна распространяется вдоль волновода, не испытывая отражений от его стенок. Кроме того, поперечная волна будет существовать только в том случае, если её поле будет удовлетворять граничным условиям для данной направляющей системы. Например, для волновода с идеально проводящими стенками это условие состоит в том, что $E_\tau = 0$ всюду на поверхности стенок.

Условие $g = 0$ означает, что $\lambda_{кр} \rightarrow \infty$, $f_{кр} = 0$, т.е. линия передачи с ТЕМ-волной пропускает без ограничений колебания всех частот. При этом, согласно (1.10), длина волны, распространяющейся в линии передачи, $\lambda = \lambda_0$ (λ_0 – длина однородной плоской волны в свободном пространстве). Отметим также, что импеданс ТЕМ-волны совпадает с импедансом $Z_0 = (\mu\mu_0/(\epsilon\epsilon_0))^{1/2}$ однородной плоской волны в свободном пространстве.

Уравнение Гельмгольца (1.5) для вектора \vec{E} при $g = 0$ принимает вид

$$\Delta_\perp \vec{E} = 0. \quad (1.53)$$

Это – известное *уравнение Лапласа*, являющееся основным уравнением электростатики. В самом деле, оно получается из уравнения Гельмгольца общего вида (1.1) при $k = 0$, т.е. $\omega = 0$, а также из уравнений Максвелла для электростатических полей

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{E} = 0. \quad (1.54)$$

Поэтому можно утверждать, что поле ТЕМ-волны в поперечном сечении линии передачи совпадает с электростатическим полем конденсатора с обкладками соответствующей формы. Электростатический характер электрического поля позволяет ввести понятие разности потенциалов U между проводниками линии:

$$U = \int_L \vec{E} d\vec{l}, \quad (1.55)$$

где L – произвольный контур в поперечном сечении линии.

ТЕМ-волна в коаксиальной линии передачи

Из направляющих систем с ТЕМ-волнами широко используется **коаксиальная линия передачи**, представляющая собой систему двух соосных металлических цилиндров с радиусами a и b ($b > a$) (рис. 1.10а). Будем считать, что пространство между цилиндрами заполнено немагнитным ($\mu = 1$) диэлектриком без потерь с диэлектрической проницаемостью ϵ . Металлические поверхности будем считать идеально проводящими.

Данную систему целесообразно рассматривать в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Распределение поля \vec{E} в поперечном сечении линии должно повторять структуру электростатического поля в цилиндрическом конденсаторе. Поэтому поле \vec{E} имеет только одну, радиальную составляющую E_r , не зависящую от полярной координаты φ . Это обстоятельство обеспечивает выполнение граничного условия $E_\tau = 0$ на металлических поверхностях.

Применим уравнение Максвелла $\text{div } \vec{E} = 0$, расписав дивергенцию в цилиндрической системе координат с учётом $\partial/\partial\varphi = 0$:

$$\frac{d}{dr}(rE_r) = 0. \quad (1.56)$$

Из (1.56) следует, что

$$E_r = A/r, \quad (1.57)$$

где A – постоянная. Для её нахождения используем (1.55):

$$U = \int_a^b E_r dr = \int_a^b \frac{A}{r} dr = A \ln \frac{b}{a}, \quad (1.58)$$

откуда $A = U/\ln(b/a)$. Домножая комплексную амплитуду на фазовый множитель, получаем окончательное выражение электрического поля бегущей ТЕМ-волны:

$$E_r = \frac{U}{\ln(b/a)} \frac{1}{r} \cdot e^{i(\omega t - kz)}. \quad (1.59)$$

Расчёт магнитного поля можно провести, например, с помощью первого уравнения из (1.2). Распределение магнитного поля в пространстве между цилиндрами совпадает с магнитным полем постоянного тока. Поэтому вектор \vec{H} имеет единственную составляющую $H_\varphi = E_r / Z_0$, а его силовые линии представляют собой концентрические окружности (см. рис. 1.10б).

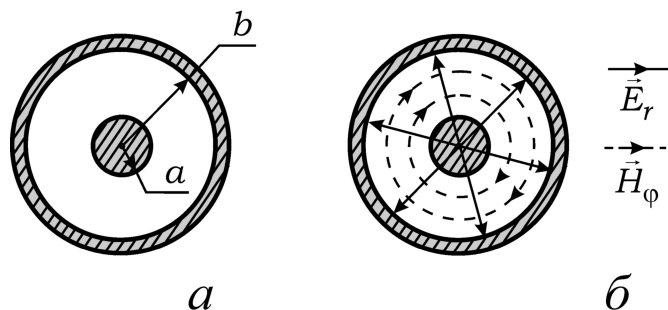


Рис. 1.10

Волновое сопротивление коаксиальной линии

Проведём расчёт мощности, переносимой TEM-волной вдоль коаксиальной линии:

$$P = \int_{S_\perp} \langle \Pi_z \rangle dS_\perp = \frac{1}{2} \int_{S_\perp} \text{Re} (E_r H_\varphi^*) dS_\perp. \quad (1.60)$$

Разобьём площадь поперечного сечения линии на элементы в виде тонких колец площадью $dS_\perp = 2\pi r \cdot dr$ и перейдём в (1.60) к интегралу по r в пределах от a до b . В итоге получаем:

$$P = \frac{\pi U^2}{Z_0 \ln(b/a)} = \frac{U^2}{2Z_B}, \quad (1.61)$$

где введено обозначение

$$Z_B = \frac{Z_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (1.62)$$

(при этом (1.61) принимает вид формулы мощности в цепи переменного тока, выделяемой на активном сопротивлении Z_B при подаче на него на-

пряжения U). Величина Z_B называется **волновым сопротивлением коаксиальной линии передач** (для волны TEM-типа).

Волновое сопротивление является одним из важнейших параметров линий передачи и определяется как отношение комплексных напряжения и силы тока в линии (в режиме бегущей волны). Не следует путать два понятия: волновое сопротивление Z_B линии передачи (зависящее от типа волны, распространяющейся в линии) и импеданс Z направляемой этой линией волны. Последняя величина также иногда называется волновым сопротивлением, но определяется иначе – как отношение амплитуд электрического и магнитного полей волны.

На стыке двух различных линий передачи (как вариант – линии передачи и нагрузки) должно выполняться **условие согласования**, которое заключается в равенстве волновых сопротивлений двух соединяемых участков:

$$Z_{B1} = Z_{B2}. \quad (1.63)$$

Только при выполнении условия (1.63) отсутствует отражение мощности от места стыка, и мощность целиком может быть передана из одной линии в нагрузку или другую линию. Условие (1.63) является приближённым, так как оно не учитывает возможность изменения структуры поля на стыке за счёт возбуждения колебаний высших типов.

Для обеспечения согласования номинальные значения волновых сопротивлений используемых в технике коаксиальных кабелей стандартизированы. Стандартными являются значения $Z_B = 50$ Ом и $Z_B = 75$ Ом.

Затухание в коаксиальной линии

Приведём без вывода формулу для постоянной затухания коаксиальной линии передач с TEM-волной, которая получается из общего выражения (1.48):

$$h'' = \frac{R_S}{2Z_0} \frac{1}{\ln(b/a)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad (1.64)$$

где $R_S = \sqrt{\omega\mu\mu_0/(2\sigma)}$ – поверхностное сопротивление металлических обкладок.

Величина

$$\frac{1}{\ln(b/a)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (1.65)$$

принимает минимальное значение при $b/a=3,6$, что является оптимальным с точки зрения потерь в металле. При стремлении отношения b/a к 1 потери растут за счёт уменьшения области пространства, в котором переносится электромагнитная энергия. При $b/a > 3,6$ потери возрастают ввиду увеличения плотности тока вследствие уменьшения радиуса внутреннего проводника.

Волновое сопротивление (1.62) коаксиальной линии с $b/a=3,6$ равно 50 Ом при заполнении диэлектриком с $\varepsilon = 2,35$ (полиэтилен) и 77 Ом для воздуха. Поэтому стандартные коаксиальные кабели имеют волновые сопротивления 50 и 75 Ом.

Как следует из частотной зависимости поверхностного сопротивления R_S , потери в коаксиальной линии возрастают с ростом частоты. Кроме того, коаксиальная линия обычно заполняется твёрдым диэлектриком, потери в котором в диапазоне СВЧ могут быть более существенными, чем в металле стенок. Коаксиальные кабели в основном используются для передачи небольших мощностей на частотах до 10 ГГц. На более высоких частотах становятся существенными потери в металле (по сравнению с металлическими волноводами с воздушным заполнением). Кроме того, поперечные размеры волновода становятся сравнимыми с длиной волны, и в кабеле, помимо основной ТЕМ-волны, могут распространяться волны высших типов (Е- и Н-волны).

1.8. Объёмные резонаторы

Собственные колебания полых металлических резонаторов

Резонатором называется устройство, в котором происходит накопление энергии колебаний. В условиях резонанса, т.е. вблизи некоторых частот (длин волн), называемых собственными, количество запасаемой энергии резко возрастает. Простейший резонатор, который широко применяется в радиотехнике – параллельный LC-колебательный контур, в кото-

ром запасённая электромагнитная энергия периодически переходит из электрической в магнитную и обратно. Для построения колебательных систем диапазона СВЧ нужно увеличить резонансную частоту контура, которая (без учёта потерь) равна

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1.66)$$

Таким образом, нужно уменьшить индуктивность L и ёмкость C . Ёмкость можно уменьшить, раздвигая пластины конденсатора, а индуктивность – уменьшая число витков катушки до одного витка. Дальнейшее уменьшение L возможно подключением дополнительных витков параллельно последнему витку, т.е. заменой витка сплошной металлической поверхностью. Для уменьшения утечки электромагнитной энергии в окружающее пространство эту поверхность целесообразно сделать замкнутой. В результате приходим к **объёмному резонатору**, представляющему собой замкнутый объём, ограниченный металлическими стенками (см. рис. 1.11).

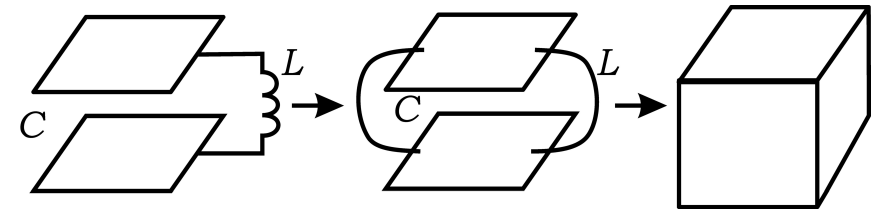


Рис. 1.11

В качестве объёмных резонаторов в технике СВЧ обычно используются отрезки полых металлических волноводов (прямоугольных, круглых, коаксиальных) с закрытыми торцами. На рис. 1.12 изображён **прямоугольный резонатор** в виде отрезка прямоугольного волновода длиной l . Пусть в таком волноводе распространяется вдоль оси Oz волна частотой ω . Если стенки волновода и перегородки, закрывающие торцы, – идеально проводящие, то на торце волна испытывает полное отражение и будет интерферировать с первоначальной волной. Этот процесс повторяется многократно. В случае резонанса результатом интерференции встречных волн должна быть стоячая волна. Она образуется, если на длине волновода l укладывается целое число полуволн, т.е. если длина волны равна

$$\lambda_{рез} = \frac{2l}{p}, \quad (1.67)$$

где p – положительное целое число. Условие (1.67) определяет бесконечное множество резонансных (собственных) длин волн резонатора.

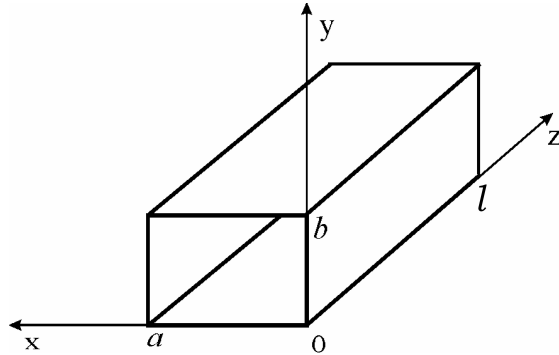


Рис. 1.12

Используя формулу (1.10), нетрудно найти собственные длины волн в свободном пространстве:

$$\lambda_{0рез} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_{крp}}\right)^2}}. \quad (1.68)$$

Из (1.68) следует, что собственная длина волны (частота) резонатора определяется типом волны в отрезке волновода и числом полуволн p , укладываемых на его длине l . Например, для нормальных Е- и Н-волн прямоугольного резонатора с размерами сечения $a \times b$ собственные длины волн равны

$$\lambda_{0рез} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}} \quad (1.69)$$

(см. формулу (1.24)). Каждому набору чисел m, n, p в (1.69) отвечает своя собственная длина волны $\lambda_{0рез}$, собственная частота $\omega_{рез} = 2\pi c / \lambda_{0рез}$, а также своё распределение поля в объёме резонатора. Соответственно, ви-

ды колебаний (моды) резонатора обозначаются H_{mnp} или E_{mnp} . При этом разделение колебаний на два вида (Е и Н) условно, так как в резонаторе все три основных направления равноправны. Если несколько видов колебаний имеют совпадающие собственные частоты, то такие колебания называются вырожденными. Для прямоугольных резонаторов вырожденными являются колебания, у которых ни один из индексов m, n, p не равен нулю.

Для собственных колебаний прямоугольного резонатора только один из трёх индексов m, n, p может быть равен нулю. При этом для Н-колебаний не может быть равен нулю индекс p . При $p = 0$ составляющие поля не будут зависеть от z , и граничные условия на торцевых стенках могут выполняться, только если поле тождественно равно нулю. (Напомним, что граничные условия для идеально проводящих поверхностей требуют равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля.)

Колебания основного типа с наибольшей собственной длиной волны соответствуют наименьшим возможным значениям m, n, p . Если $b < a < l$, то основным будет колебание E_{101} или H_{101} .

Добротность объёмных резонаторов

Добротность – одна из наиболее общих характеристик любой колебательной системы. Она пропорциональна числу колебаний, которые система успевает совершить за характерное время переходного процесса (время релаксации). Добротность Q определяется соотношением

$$Q = 2\pi \frac{\overline{W}}{\Delta \overline{W}} = \frac{2\pi \overline{W}}{T_0 \overline{P}} = \omega_{рез} \frac{\overline{W}}{\overline{P}}, \quad (1.70)$$

где \overline{W} – средняя за период энергия, запасённая в резонаторе, $\Delta \overline{W}$ – средняя энергия потерь, вычисленная за тот период, в который найдена \overline{W} , \overline{P} – средняя за период мощность потерь, T_0 – период колебаний без учёта потерь, $\omega_{рез}$ – резонансная частота. Мощность потерь \overline{P} складывается из мощности потерь в стенках резонатора и в среде, его заполняющей, а также мощности излучения, отводимой из резонатора в другие элементы

СВЧ-цепи (в «нагрузку» резонатора). Добротность объёмных резонаторов диапазона СВЧ достигает нескольких сотен или тысяч.

Энергия, запасённая в резонаторе, пропорциональна его объёму V . Величина $\overline{\Delta W}$ пропорциональна объёму скин-слоя стенок, в котором происходят потери, т.е. произведению площади стенок S на толщину скин-слоя d_S . В итоге

$$Q \sim \frac{V}{Sd_S}. \quad (1.71)$$

Для колебаний основного типа $V \sim \lambda^3$, $S \sim \lambda^2$, $d_S \sim \lambda^{1/2}$, поэтому $Q \sim \lambda^{1/2}$. С уменьшением длины волны добротность уменьшается, поэтому при переходе к миллиметровым волнам объёмные резонаторы оказываются неэффективными. В миллиметровом, субмиллиметровом и оптическом диапазонах используют открытые резонаторы, размер которых намного превышает длину волны.

Глава 2. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

2.1. Неоднородные волновые уравнения в потенциалах и их решение в виде запаздывающих потенциалов

Под излучением электромагнитных волн понимают процесс переноса энергии электромагнитного поля от источника в окружающее пространство. При изучении распространения электромагнитных волн в безграничной среде или в направляющей структуре поле волны обычно рассматривается вне связи с его источниками. Точнее, полагается, что источники достаточно удалены от области, в которой находится поле волны. При этом решаются так называемые однородные задачи электродинамики, приводящие к **однородным волновым уравнениям** (см. [2], п. 1.5).

В настоящей главе будут рассмотрены простейшие задачи теории излучения. В них требуется связать поле электромагнитной волны с его источниками (зарядами и токами). Для этого в правых частях уравнений (II) и (III) системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \text{rot } \vec{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \text{(II)} \quad \text{rot } \vec{H} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \\ \text{(III)} \quad \text{div } \vec{E} &= \rho / \varepsilon\varepsilon_0, \\ \text{(IV)} \quad \text{div } \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

следует задать функции плотности тока $\vec{j}(\vec{r}, t)$ и объёмной плотности заряда $\rho(\vec{r}, t)$, характеризующие излучающую систему зарядов и токов. В технике излучение электромагнитных волн обеспечивается специальными устройствами – антеннами. Источником излучения обычно является сторонний электрический ток, возбуждаемый в антенне подключением генератора. Величина этого тока в задачах на излучение считается заданной.

Задачи нахождения электромагнитных полей \vec{E} , \vec{H} из системы (2.1) по заданным источникам \vec{j} и/или ρ относятся к неоднородным задачам электродинамики, поскольку данная система сводится к **неоднородным волновым уравнениям** с отличной от нуля правой частью. Для упрощения

их решения вводят вспомогательные функции, которые принято называть **электродинамическими потенциалами**. Их определяют по-разному, в зависимости от особенностей задачи. Широко используются в электродинамике **векторный потенциал** \vec{A} и **скалярный потенциал** φ , связанные с векторами поля \vec{E} , \vec{H} соотношениями

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot } \vec{A}, \quad (2.2)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Соотношения (2.2) и (2.3) позволяют вычислить напряжённости \vec{E} и \vec{H} по известным потенциалам \vec{A} и φ . При решении уравнений Максвелла (2.1) определению подлежат шесть скалярных функций (составляющие векторов \vec{E} и \vec{H}). Переход к потенциалам \vec{A} , φ позволяет уменьшить число неизвестных функций до четырёх.

При решении волновых задач на функции \vec{A} , φ накладывают дополнительное условие, называемое **условием калибровки Лоренца**:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (2.4)$$

где $v = (\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0)^{-1/2}$ – скорость электромагнитной волны в среде с материальными параметрами ϵ и μ . При подстановке выражений (2.2), (2.3) с учётом условия калибровки (2.4) в систему (2.1) получаются уравнения, которым подчиняются потенциалы \vec{A} и φ :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 \vec{j}, \quad (2.5)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.6)$$

Уравнения (2.5) и (2.6) для потенциалов, называемые **уравнениями Даламбера**, имеют вид **неоднородных волновых уравнений**. Векторный потенциал \vec{A} зависит только от распределения в пространстве токов проводимости, а скалярный потенциал φ – от распределения зарядов.

Исследовать электромагнитное излучение – значит найти ту часть переменного электромагнитного поля, которую можно обнаружить на дос-

точно большом расстоянии от излучателя (антенны) – системы зарядов и токов, локализованной в ограниченной области пространства. Рассмотрим такую систему, занимающую объём V , и поставим задачу определить электромагнитное поле в некоторой фиксированной точке пространства M , не принадлежащей объёму V . Требование «большого расстояния» от излучателя даёт условие $r \gg l$, где r – модуль радиус-вектора точки M , отсчитываемый от начала отсчета O , выбранного внутри объёма V , а l – наибольший линейный размер излучающей системы (рис. 2.1).

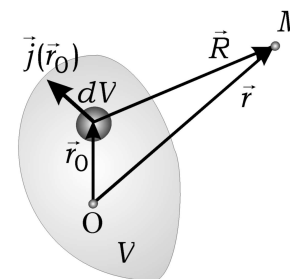


Рис. 2.1

Найдём общий вид векторного потенциала $\vec{A}(\vec{r}, t)$ в точке M , для чего построим общее решение уравнения (2.5). Если в объёме V протекают постоянные токи, то уравнение Даламбера (2.5) переходит в уравнение магнитостатики (**уравнение Пуассона**):

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu\mu_0 \vec{j}(\vec{r}). \quad (2.7)$$

Его общее решение

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{R} dV \quad (2.8)$$

соответствует принципу суперпозиции: потенциал $\vec{A}(\vec{r})$ в точке M является суммой потенциалов, создаваемых каждым элементарным объёмом dV , на которые разбивается объём V . Эта сумма записана в (2.8) как интеграл по объёму V , где \vec{r}_0 – радиус-вектор элементарного объёма dV относительно начала O , а R – расстояние объёма dV до «точки наблюдения» M (см. рис. 2.1).

С другой стороны, известно, что одним из решений однородного волнового уравнения вида

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

является сферическая волна

$$u(R, t) = \frac{1}{R} f\left(t \mp \frac{R}{v}\right). \quad (2.10)$$

При знаке «-» в (2.10) волна разбегается по всем направлениям из начала координат $R = 0$, а при знаке «+» сходится к этой точке. Можно предположить, что решение неоднородного волнового уравнения должно быть суперпозицией сферических волн вида (2.10), излучаемых каждой точкой объёма V . Строгое математическое рассмотрение подтверждает эти соображения. В итоге получаем, что общее решение (2.5) является обобщением (2.8) на случай переменных токов:

$$\bar{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_0, t \mp R/v)}{R} dV. \quad (2.11)$$

Строго говоря, (2.11) описывает два решения, что отражено наличием двух знаков. Однако в нашей задаче физический смысл имеет только одно из них, содержащее в аргументе функции \vec{j} знак «-». В этом случае для вычисления потенциала в точке M в момент времени t берётся значение плотности тока в элементе dV в более ранний момент $t - R/v$. Это связано с конечностью скорости v распространения электромагнитной волны: возбуждаемым элементом dV колебания поля требуются время R/v , чтобы пройти расстояние R . Потенциал (2.11) в случае знака «-» называют **запаздывающим потенциалом**. В случае знака «+» (**опережающий потенциал**) потенциалы в точке наблюдения возникают раньше, чем порождающие их токи. Это – нарушение причинно-следственной связи, поэтому такое решение должно быть отброшено.

Аналогичный вид имеет решение уравнения (2.6) для потенциала φ :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}_0, t \mp R/v)}{R} dV. \quad (2.12)$$

Допустим теперь, что плотность тока излучателя изменяется во времени по гармоническому закону с частотой ω :

$$\vec{j}(\vec{r}_0, t) = \vec{j}(\vec{r}_0) e^{i\omega t}. \quad (2.13)$$

По такому же закону будут изменяться и потенциалы \bar{A} , φ поля, порождаемого данным током. Уравнения Даламбера для потенциалов переходят в этом случае в **уравнения Гельмгольца**:

$$\Delta \bar{A} + k^2 \bar{A} = -\mu\mu_0 \vec{j}, \quad \Delta \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (2.14)$$

где $k = \omega/v$ – волновое число (постоянная распространения). Решение этих уравнений (в виде запаздывающего потенциала) является суперпозицией сферических монохроматических волн:

$$\bar{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{R} e^{i(\omega t - kR)} dV, \quad (2.15)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}_0)}{R} e^{i(\omega t - kR)} dV. \quad (2.16)$$

Далее в этом разделе будут рассматриваться только гармонические излучатели монохроматических волн.

2.2. Элементарный электрический излучатель (электрический диполь)

Расчёт полей элементарного электрического излучателя

Излучение электромагнитных волн в технике осуществляется с помощью разнообразных антенн. Но какой бы сложной ни была антенна, её всегда можно представить совокупностью элементарных излучателей.

Элементарным электрическим излучателем (вибратором) называется линейный отрезок проводника длиной l , много меньшей длины излучаемой волны λ , по которому протекает переменный электрический ток, причём амплитуда и фаза тока одинаковы по всей длине проводника. Переменный ток в излучателе возбуждается за счёт подключения генератора в разрыв проводника (рис. 2.2).

Направим вдоль проводника с током координатную ось Oz . Тогда выражение для плотности тока (2.13) запишется как

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}) e^{i\omega t} = (I/S) \vec{e}_z \cdot e^{i\omega t}, \quad (2.17)$$

где I – амплитуда силы тока в излучателе, S – площадь поперечного сечения проводника.

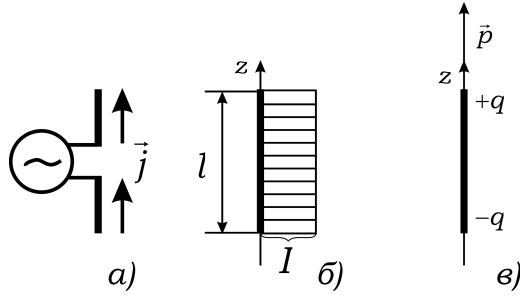


Рис. 2.2

Наличие переменного тока в линейном проводнике означает, что на его концах находятся заряды $+q$ и $-q$ одинаковой величины, но противоположного знака, колеблющиеся с частотой переменного тока (см. рис. 2.2б). Значит, излучатель длиной l может быть представлен как электрический диполь, дипольный момент \vec{p} которого колеблется по гармоническому закону

$$\vec{p} = Ql\vec{e}_z \cdot e^{i\omega t} = \frac{Il}{\omega} \vec{e}_z \cdot e^{i\omega t}, \quad (2.18)$$

где Q – амплитуда колебаний заряда. В связи со сказанным данный излучатель называют также электрическим дипольным излучателем, или (для краткости) **электрическим диполем**.

Рассчитаем поле, создаваемое излучателем, помещённым в неограниченную однородную изотропную среду. Воспользуемся сферической системой координат (r, θ, α) , полярная ось которой совпадает с осью Oz (см. рис. 2.3а). Начало координат O совместим с серединой проводника. В соответствии с результатами п. 2.1 сначала определим векторный потенциал \vec{A} , создаваемый излучателем в точке наблюдения M , а затем найдём векторы поля \vec{E} , \vec{H} .

Потенциал \vec{A} даётся интегралом (2.15). Нас интересует поле на большом расстоянии от излучателя ($r \gg l$), что даёт

$$R \approx r - z \cdot \cos \theta \quad (2.19)$$

(см. рис. 2.3б). Условие $l \ll \lambda$ позволяет в фазовом множителе считать $kR \approx kr$. В самом деле,

$$|kz \cdot \cos \theta| \leq \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{l}{2} \ll 1. \quad (2.20)$$

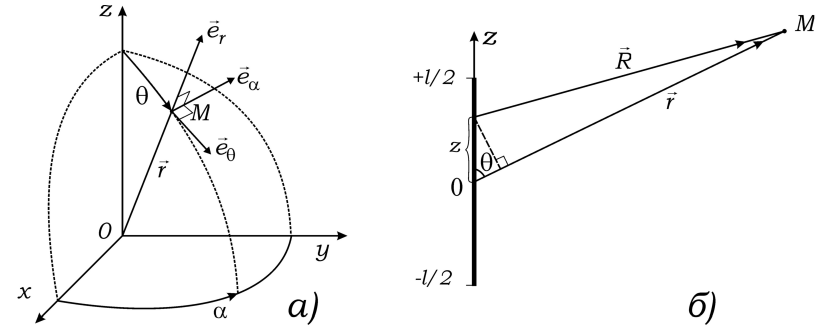


Рис. 2.3

В знаменателе подынтегрального выражения положим $R \approx r$, что позволяет вынести r вместе с фазовым множителем $\exp(i(\omega t - kr))$ из-под интеграла. Далее, с учётом того, что объём излучателя $V = Sl$, а $dV = d(Sl)$, из (2.15) получаем:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu\mu_0 Il}{4\pi r} \vec{e}_z \cdot e^{i(\omega t - kr)}. \quad (2.21)$$

Из (2.21) видно, что система излучает как бы единую сферическую волну и может считаться точечным источником. Это заложено в условии $l \ll \lambda$, из которого вытекает, что сферические волны, излучаемые всеми элементарными участками излучателя, приходят в точку наблюдения M приблизительно в одинаковых фазах (см. соотношение (2.20)).

Перейдём теперь к расчёту напряжённости поля. Сначала выполним расчёт вектора \vec{H} по формуле (2.2). Вектор \vec{A} параллелен оси Oz , а его компоненты в сферической системе координат равны (см. рис. 2.4):

$$A_r = A \cos \theta, \quad A_\theta = -A \sin \theta, \quad A_\alpha = 0. \quad (2.22)$$

Выполнив операцию ротора в сферической системе координат

$$\text{rot } \vec{A} = [\vec{\nabla}, \vec{A}] = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_r}{r^2 \sin \theta} & \frac{\vec{e}_\theta}{r \sin \theta} & \frac{\vec{e}_\alpha}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ A_r & A_\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\alpha, \quad (2.23)$$

находим, что магнитное поле имеет только одну, азимутальную составляющую

$$H_\alpha = \frac{1}{4\pi} \Pi \sin \theta \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) \cdot e^{i(\omega t - kr)}. \quad (2.24)$$

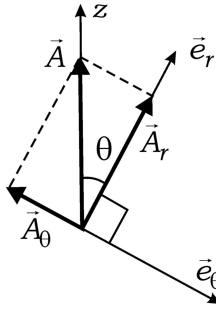


Рис. 2.4

Электрическое поле \vec{E} можно вычислить по (2.3), но для этого придётся определять скалярный потенциал φ . Удобнее находить его из второго уравнения Максвелла системы (1.2):

$$\vec{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon\epsilon_0} \text{rot } \vec{H}. \quad (2.25)$$

Для нахождения $\text{rot } \vec{H}$ следует повторить вычисление определителя из (2.23), заменив в нём компоненты \vec{A} на компоненты вектора \vec{H} , причём $H_r = H_\theta = 0$. В итоге получается, что электрический вектор \vec{E} имеет две компоненты: меридиональную E_θ и радиальную E_r :

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0\omega} \Pi \sin \theta \cdot \left(-\frac{i}{r^3} + \frac{k}{r^2} + \frac{ik^2}{r} \right) \cdot e^{i(\omega t - kr)}, \quad (2.26)$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon\epsilon_0\omega} \Pi \cos \theta \cdot \left(-\frac{i}{r^3} + \frac{k}{r^2} \right) \cdot e^{i(\omega t - kr)}.$$

Из (2.24), (2.26) следует, что в любой точке пространства вектор \vec{E} лежит в плоскости, проходящей через ось излучателя Oz , а вектор \vec{H} – в плоскости, перпендикулярной Oz .

Ближняя и дальняя зоны элементарного электрического излучателя

Анализируя выражения (2.24), (2.26) для компонент векторов поля элементарного излучателя, легко видеть, что они содержат слагаемые, поразному зависящие от расстояния r . Поэтому в зависимости от удалённости точки М от излучателя определяющий вклад в величины напряжённости полей будут вносить разные слагаемые. В связи с этим пространство вокруг излучателя условно делят на три зоны:

- а) ближняя зона, где $kr \ll 1$, т.е. $r \ll \lambda$ (но $r \gg l$!);
- б) промежуточная зона, где $kr \sim 1$, $r \sim \lambda$;
- в) дальняя зона, где $kr \gg 1$ и $r \gg \lambda$.

В **ближней зоне** в формулах (2.24), (2.26) оставляют слагаемые, пропорциональные $1/r^3$ для \vec{E} и $1/r^2$ для \vec{H} . Кроме того, в фазовом множителе можно считать, что $kr \ll \omega t$ и $\exp(ikr) \approx 1$. Тогда компоненты полей будут определяться следующими выражениями:

$$E_r = -\frac{i\Pi}{2\pi\epsilon\epsilon_0\omega r^3} \cos \theta \cdot e^{i\omega t},$$

$$E_\theta = -\frac{i\Pi}{4\pi\epsilon\epsilon_0\omega r^3} \sin \theta \cdot e^{i\omega t}, \quad (2.27)$$

$$H_\alpha = \frac{\Pi}{4\pi r^2} \sin \theta \cdot e^{i\omega t}.$$

Из (2.27) видно, что поле в ближней зоне имеет колебательный характер, причём колебания векторов \vec{E} и \vec{H} сдвинуты по фазе на $\pi/2$ («реактивные» компоненты полей). Поток энергии и в радиальном, и в меридиональном направлениях при этом имеет только колебательную составляющую, т.е. его среднее значение (интенсивность) равно нулю. Таким образом, в ближней зоне отсутствует перенос активной мощности. Однако следует учитывать приближённый характер этого вывода. Наряду с компонентами (2.27), в ближней зоне присутствуют активные (синфазные) компоненты полей, малые по сравнению с реактивными компонентами. Они формируют радиально направленный поток активной мощности, который проходит через промежуточную и дальнюю зоны, формируя поле излучения вибратора.

В дальней зоне, или зоне излучения ($r \gg \lambda$), преобладающими в (2.24), (2.26) будут слагаемые, пропорциональные $1/r$. Радиальной (продольной) составляющей E_r электрического поля здесь можно пренебречь по сравнению с поперечной E_θ . Таким образом, волну в дальней зоне можно считать поперечной, имеющей две компоненты полей: меридиональную E_θ электрического поля и азимутальную H_α магнитного поля:

$$\begin{cases} E_\theta = \frac{i\pi k^2}{4\pi\epsilon_0\omega r} \sin\theta \cdot e^{i(\omega t - kr)}, \\ H_\alpha = \frac{i\pi k}{4\pi r} \sin\theta \cdot e^{i(\omega t - kr)}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Видно, что поле в дальней зоне имеет характер сферической волны, расходящейся от излучателя по всем направлениям. Электрический и магнитный векторы колеблются в одинаковых фазах («активные» компоненты полей), что обеспечивает перенос активной мощности в радиальном направлении. Отметим, что выполняется следующее соотношение между компонентами полей E_θ и H_α в дальней зоне:

$$\frac{E_\theta}{H_\alpha} = \frac{k}{\epsilon\epsilon_0\omega} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} = Z_0, \quad (2.29)$$

где импеданс Z_0 совпадает с импедансом для плоской волны в безграничной среде. Таким образом, на достаточном удалении от излучателя (в дальней зоне) волна, излучаемая вибратором, может рассматриваться как локально плоская.

Диаграмма направленности элементарного электрического излучателя

Анализ (2.28) показывает, что при заданных амплитуде тока I и длине вибратора l амплитуды полей \vec{E} и \vec{H} в дальней зоне зависят от расстояния r и угла θ . Наличие угловой зависимости говорит о том, что интенсивность излучения различна в различных направлениях. Характеристикой направленности излучения антенны служит её **диаграмма направленности** $F(\theta, \alpha)$ – угловая зависимость амплитуды поля при $r = \text{const}$ в дальней зоне. Для наглядности диаграмма направленности изображается графически в декартовой или полярной системе координат. Обычно стро-

ятся графики нормированных значений амплитуды, отнесённых к максимальному её значению. Так как угловых координат две – θ и α , то диаграмма направленности должна быть поверхностью некоторой объёмной геометрической фигуры. Но часто её заменяют плоскими диаграммами, построенными в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Для элементарного электрического излучателя амплитуда поля зависит только от одного угла θ : $F(\theta) = \sin\theta$. Вибратор не излучает вдоль своей оси ($\theta = 0, \pi$), а в перпендикулярном к оси направлении ($\theta = \pi/2$) интенсивность максимальна. На рис. 2.5 изображена нормированная диаграмма направленности элементарного излучателя в декартовых (а) и полярных (б) координатах. В плоскости, проходящей через ось диполя, диаграмма изображается «восьмёркой», состоящей из двух окружностей. В плоскости, перпендикулярной оси Oz , диаграмма имеет вид окружности, так как амплитуды полей (2.28) не зависят от азимутального угла α . Объёмная диаграмма направленности имеет вид тора (рис. 2.5в).

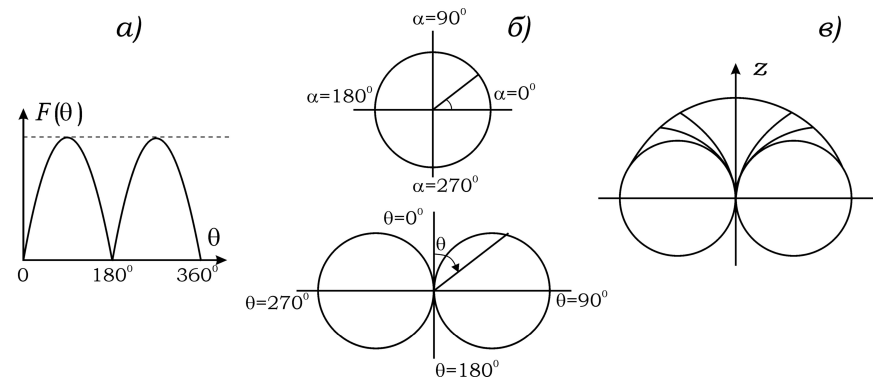


Рис. 2.5

Мощность, излучаемая диполем. Сопротивление излучения

Интенсивность излучения вибратора в дальней зоне найдём как среднее значение радиальной составляющей Π_r вектора Пойнтинга:

$$\langle \Pi_r \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (E_\theta H_\alpha^*) = \frac{1}{2} Z_0 |H_\alpha|^2 = \frac{Z_0 k^2 I^2 l^2}{32\pi^2 r^2} \sin^2 \theta. \quad (2.30)$$

Формула (2.30) определяет интенсивность излучения в зависимости от полярного угла θ . Для нахождения средней мощности излучения $\langle P \rangle$, т.е. энергии, излучаемой вибратором в единицу времени по всем направлениям, нужно проинтегрировать (2.30) по поверхности сферы радиусом r .

С учётом того, что элемент поверхности сферы $dS = r^2 \sin \theta \cdot d\theta d\alpha$, получим:

$$\langle P \rangle = \int_S \langle \Pi_r \rangle dS = \frac{Z_0 k^2 I^2 l^2}{32\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin^3 \theta \cdot d\theta. \quad (2.31)$$

Так как

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta \cdot d\theta = \frac{4}{3}, \quad (2.32)$$

то (2.31) приводит к выражению

$$\langle P \rangle = \frac{Z_0 k^2 I^2 l^2}{12\pi}. \quad (2.33)$$

Из (2.33) видно, что излучаемая вибратором мощность пропорциональна квадрату амплитуды тока. В этом смысле выражение (2.33) аналогично формуле активной мощности переменного тока, выделяемой на некотором активном сопротивлении. Используя эту аналогию, (2.33) можно представить в виде

$$P = \frac{1}{2} I^2 R_{изл}, \quad (2.34)$$

где величину

$$R_{изл} = \frac{2\pi Z_0}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (2.35)$$

называют **сопротивлением излучения**. По своему смыслу $R_{изл}$ – сопротивление резистора, амплитуда тока в котором равна амплитуде тока в излучателе, а выделяющаяся мощность равна мощности излучателя. При постоянной амплитуде тока в излучателе мощность излучения тем больше, чем больше величина $R_{изл}$. Величина сопротивления излучения является важной характеристикой излучательной способности антенн.

2.3. Элементарный магнитный излучатель (магнитный диполь)

Принцип перестановочной двойственности

Рассмотрим теперь элементарный излучатель с иным распределением тока. Пусть проводник с током имеет вид петли достаточно малых размеров (радиус петли $a \ll \lambda$). Известно, что плоский контур площадью S с током I обладает **магнитным моментом** $\vec{m} = IS\vec{e}_z$, направленным перпендикулярно плоскости контура (см. рис. 2.6). Можно предположить, что в случае переменного тока в петле, т.е. гармонических колебаний магнитного момента \vec{m} , мы будем иметь излучатель, подобный колеблющемуся электрическому диполю. Такой излучатель называют **элементарным магнитным излучателем** (или магнитным диполем).

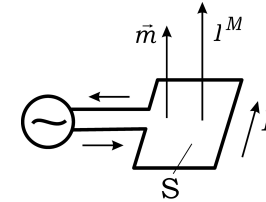


Рис. 2.6

Анализ задачи об излучении магнитного диполя значительно упрощается, если использовать так называемый **принцип перестановочной двойственности**.

Запишем систему уравнений Максвелла (2.1) при условии, что отсутствуют источники ($\vec{j} = 0, \rho = 0$):

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \text{rot } \vec{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \text{(II)} \quad \text{rot } \vec{H} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \text{(III)} \quad \text{div } \vec{E} &= 0, \\ \text{(IV)} \quad \text{div } \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Обращает на себя внимание симметрия этих уравнений: при замене вида

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}, \quad \varepsilon\varepsilon_0 \leftrightarrow \mu\mu_0 \quad (2.37)$$

уравнения в парах (I) и (II), (III) и (IV) переходят одно в другое. Соотношения (2.37) выражают принцип перестановочной двойственности. Если известно решение какой-либо задачи электродинамики, описываемой уравнениями (2.36), то перестановка (2.37) позволяет автоматически получить решение двойственной задачи, в которой структура электрического поля совпадает со структурой магнитного поля в исходной задаче и наоборот.

При наличии источников \vec{j} и ρ симметрия уравнений Максвелла нарушается. Симметрия сохранится, если ввести фиктивные плотность магнитных зарядов ρ^M и плотность магнитного тока \vec{j}^M . Например, выше было показано, что электрическому диполю с колеблющимся моментом \vec{p} соответствует переменный электрический ток. Аналогично, колеблющемуся магнитному диполю \vec{m} можно поставить в соответствие переменный магнитный ток. Величина ρ^M вводится в уравнение (IV), а \vec{j}^M – в уравнение (I) с отрицательными знаками:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \text{rot } \vec{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{j}^M, \\ \text{(II)} \quad \text{rot } \vec{H} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \\ \text{(III)} \quad \text{div } \vec{E} &= \rho / \varepsilon\varepsilon_0, \\ \text{(IV)} \quad \text{div } \vec{H} &= -\rho^M / \mu\mu_0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Итак, при наличии источников поля появляются дополнительные перестановочные соотношения:

$$\vec{j} \leftrightarrow -\vec{j}^M, \quad \rho \leftrightarrow -\rho^M. \quad (2.39)$$

Если в решении уравнений Максвелла с электрическими источниками ρ , \vec{j} совершить перестановки (2.37) и (2.39), то полученные поля будут являться решением уравнений Максвелла с магнитными источниками ρ^M , \vec{j}^M , распределёнными в пространстве аналогично исходным электрическим.

Поле магнитного диполя в дальней зоне. Щелевой излучатель

Покажем, как можно применить принцип перестановочной двойственности к задаче об элементарном магнитном излучателе. Например, поля магнитного диполя в дальней зоне можно получить из соответствующих формул (2.28) для электрического диполя. Сделав в них замены согласно (2.37) и (2.39), получаем:

$$\begin{cases} H_\theta = \frac{iI^M l k^2}{4\pi\mu\mu_0 \omega r} \sin \theta \cdot e^{i(\omega t - kr)}, \\ E_\alpha = -\frac{iI^M l k}{4\pi r} \sin \theta \cdot e^{i(\omega t - kr)}. \end{cases} \quad (2.40)$$

Силовые линии векторов \vec{E} , \vec{H} для магнитного диполя (рис. 2.7б) в точности повторяют конфигурацию силовых линий \vec{H} и \vec{E} в поле элементарного электрического излучателя (рис. 2.7а).

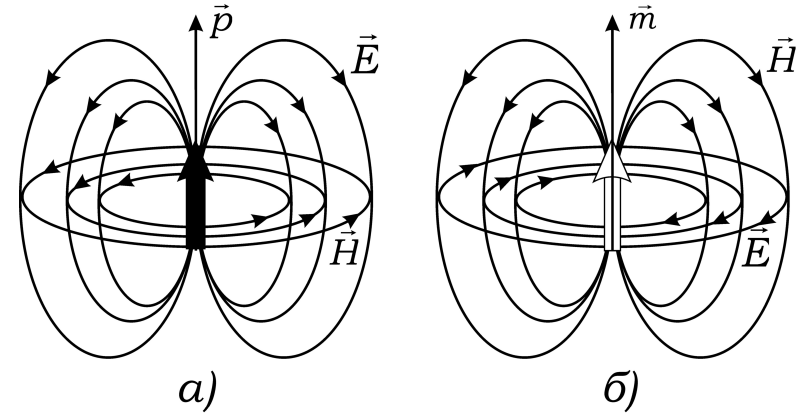


Рис. 2.7

Возникает вопрос о вычислении амплитуды колебаний магнитного тока I^M . Исходить здесь следует из того, что вводимые в уравнения Максвелла фиктивные магнитные источники должны создавать поле, совпадающее с полем реально существующих электрических источников. Рассмотрим этот вопрос на примере элементарного щелевого излучателя (щелевой антенны).

Элементарный щелевой излучатель представляет собой металлическую плоскость, в которой прорезана щель длиной l и шириной d . К боковым краям щели подключается генератор переменного напряжения $u = U \exp(i\omega t)$ (рис. 2.8а). На практике щель часто прорезается в боковой стенке металлического волновода, например прямоугольного волновода с волной основного типа H_{10} . Переменные электрические заряды наводятся при этом за счёт протекания поверхностных токов по стенкам волновода.

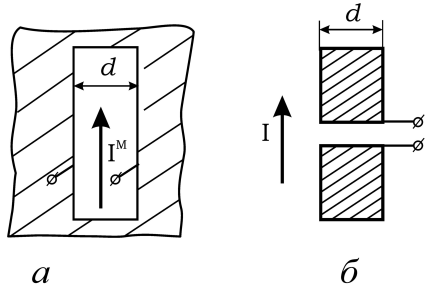


Рис. 2.8

Для задачи об излучении щелевой антенны двойственной будет задача об излучении электрического вибратора в виде металлической полоски с размерами, идентичными размерам щели (рис. 2.8б). При протекании по полоске вдоль её длинной стороны постоянного электрического тока I вектор \vec{H} его магнитного поля лежит в плоскости поперечного сечения полоски. Вблизи от поверхности полоски магнитные силовые линии приблизительно повторяют её контур, а на поверхности проводника вектор \vec{H} касателен к плоскости полоски (рис. 2.9). Пренебрежём толщиной полоски и применим закон полного тока к контуру, проведённому по её поверхности:

$$H_\tau \cdot 2d = I. \quad (2.41)$$

В силу принципа перестановочной двойственности аналогичное (2.41) соотношение должно выполняться для касательной составляющей электрического поля щелевой антенны:

$$E_\tau \cdot 2d = I^M. \quad (2.42)$$

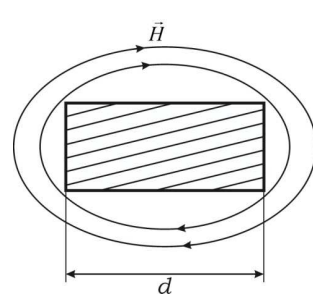


Рис. 2.9

С другой стороны, при постоянном напряжении U на зазоре щели

$$E_\tau \cdot d = U. \quad (2.43)$$

Сравнивая (2.42) и (2.43), делаем вывод, что

$$I^M = 2U. \quad (2.44)$$

Обобщая полученный результат на случай переменных напряжений и токов, можно положить, что вдоль щели протекает магнитный ток с амплитудой (2.44). Теперь можно записать окончательные выражения для компонент полей щелевой антенны в дальней зоне:

$$E_\alpha = -\frac{iUlk}{2\pi r} \sin \theta \cdot e^{i(\omega t - kr)}, \quad H_\theta = E_\alpha / Z_0. \quad (2.45)$$

Интенсивность и мощность излучения магнитного диполя рассчитываются так же, как и в задаче об элементарном электрическом излучателе.

2.4. Диаграмма направленности линейной антенны

Рассмотрим линейный проводник длиной l , по которому распределена стоячая волна тока, описываемая выражением

$$I = \begin{cases} I_0 \cos kz \cdot e^{i\omega t}, & k = \frac{\pi n}{l} \text{ при } n = 1, 3, \dots \\ I_0 \sin kz \cdot e^{i\omega t}, & k = \frac{\pi n}{l} \text{ при } n = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (2.46)$$

Число n определяет число пучностей или, что то же самое, число полу-волн, укладываемых на длине излучателя.

Полярную ось Oz сферической системы координат с началом в середине проводника направим вдоль излучателя (рис. 2.10). Для расчёта поля в произвольной точке M с радиус-вектором \vec{r} представим антенну в виде совокупности элементарных электрических излучателей длиной dl с током $I(z)$. Предполагая, что точка M находится в дальней зоне антенны, запишем в соответствии с (2.28) выражение для азимутальной компоненты магнитного поля dH_α , создаваемого в точке M одним из элементарных излучателей:

$$dH_\alpha = \frac{ik}{4\pi R_i} I_0 \cos kz \sin \theta_i \cdot e^{i(\omega t - kR_i)} dz, \quad (2.47)$$

где (R_i, θ_i) – сферические координаты точки М относительно данного элемента dz . В (2.47) использовано выражение тока при нечётных значениях n . Далее нужно алгебраически сложить поля, возбуждаемые в точке М всеми элементами антенны, т.е. проинтегрировать (2.47).

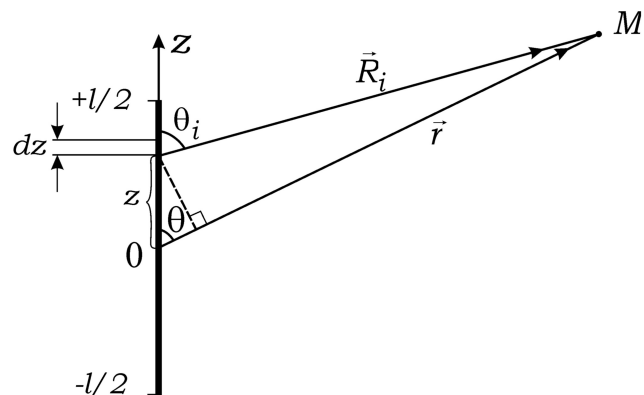


Рис. 2.10

Приняв условие $r \gg l$, для всех элементов антенны можно положить $R_i \approx r$, $\sin \theta_i \approx \sin \theta$ и вынести эти величины за знак интеграла. Однако в фазовом множителе будем считать, что $R_i \approx r - z \cdot \cos \theta$, т.е. сохраним фазовый множитель $\exp(ikz \cos \theta)$. Последнее означает, что антенна здесь уже не считается элементарным излучателем и учитываются фазовые сдвиги волн, приходящих в точку М из разных точек антенны. С учётом сделанных приближений интеграл принимает вид

$$H_\alpha = \frac{ik}{4\pi r} I_0 \sin \theta \cdot e^{i(\omega t - kr)} \int_{-l/2}^{+l/2} \cos kz \cdot e^{ikz \cos \theta} dz. \quad (2.48)$$

Интеграл для чётных n отличается заменой $\cos kz$ на $\sin kz$ в подынтегральном выражении.

Из (2.48) видно, что поле излучения представляет собой неоднородную сферическую волну с амплитудой, пропорциональной $1/r$ и зависящей по сложному закону от полярного угла θ . Для построения диаграммы направленности нужно определить эту угловую зависимость. Вычисление

интегралов для магнитного поля в случаях нечётных и чётных n приводит к различным зависимостям:

$$H_\alpha \sim \begin{cases} \frac{\cos\left(n \frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} & \text{при } n = 1, 3, \dots \\ \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} & \text{при } n = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (2.49)$$

На рис. 2.11 представлены диаграммы направленности линейной антенны при $n = 1, 2, 3$. Пунктирной линией показано распределение тока по длине антенны, сплошной – угловое распределение излучения. Ввиду симметрии диаграмм показана только область углов $0 \leq \theta \leq \pi$, причём в направлениях $\theta = 0, \pi$ излучение отсутствует. Разделение диаграммы направленности на отдельные лепестки связано с интерференцией полей, создаваемых различными участками антенны. Число лепестков совпадает с числом n пучностей стоячей волны тока в антенне. Случай $n = 1$ напоминает диаграмму направленности элементарного излучателя, но с более узким лепестком, т.е. с более высокой направленностью. При чётных n в направлении $\theta = \pi/2$ антенна не излучает, а лепестки диаграммы симметричны относительно этого направления.

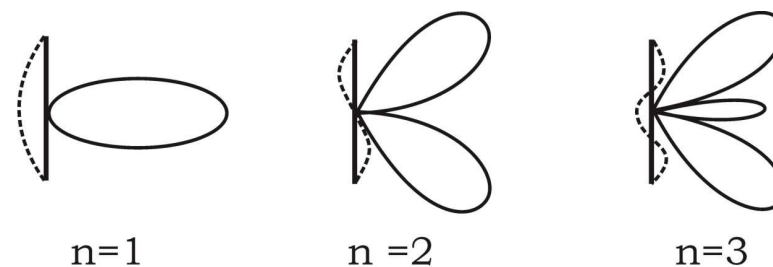


Рис. 2.11

Простейшей и в то же время наиболее распространённой линейной антенной является **полуволновой излучатель**, называемый также **диполем Герца** или **вибратором Герца**. Его длина составляет $\lambda/2$, что соот-

ветствует случаю $n = 1$. Ток в излучателе возбуждается путём подключения генератора в разрыв посередине проводника по схеме рис. 2.2а. Сопротивление излучения полуволнового излучателя в свободном пространстве составляет примерно 75 Ом, поэтому с целью согласования подключение обычно осуществляется коаксиальным кабелем с волновым сопротивлением 75 Ом.

2.5. Направленные свойства апертурных антенн

Ближняя и дальняя зоны апертурной антенны

В системах связи СВЧ широко используются **апертурные антенны** (рупорные, параболические и др.), в которых направленное излучение формируется плоской поверхностью (апертурой, или раскрытом антенны). Апертурные антенны могут быть остронаправленными: ширина главного лепестка их диаграммы направленности уменьшается с ростом отношения размера амплитуды l к длине волны λ .

Понятие дальней зоны (зоны излучения) было введено выше применительно к элементарным дипольным излучателям. Его следует уточнить применительно к апертурным антеннам, для которых условие $l \ll \lambda$ не выполняется.

Рассмотрим антенну с апертурой максимальной протяжённости l . Оценим фазовый сдвиг между волнами, приходящими от разных точек антенны в точку наблюдения М, лежащую напротив середины антенны О на расстоянии r (см. рис. 2.12).

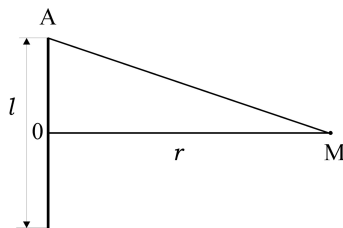


Рис. 2.12

Геометрическая разность хода волн, приходящих из точек А и О, равна

$$\delta = AM - OM = \sqrt{r^2 + (l/2)^2} - r \approx l^2/8r. \quad (2.50)$$

Ей соответствует фазовый сдвиг

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \approx \frac{\pi l^2}{4\lambda r}. \quad (2.51)$$

Принято считать, что точка М находится в дальней зоне, или в зоне Фраунгофера антенны, если выполняется условие

$$\Delta\varphi \leq \pi/8. \quad (2.52)$$

Тогда, согласно (2.51) и (2.52), к дальней зоне можно отнести точки, удалённые от антенны на расстояние

$$r \geq \frac{2l^2}{\lambda}. \quad (2.53)$$

На меньших расстояниях точка наблюдения находится в ближней зоне, или в зоне Френеля. Волновые поверхности в этой зоне можно приближённо считать плоскими, искажёнными только у краёв антенны. В дальней зоне, как и в случае элементарного излучения, волна имеет характер неоднородной сферической волны.

Направленные свойства апертурных антенн. Элемент Гюйгенса

Простейшей апертурной антенной диапазона СВЧ является открытый конец волновода. Однако для волновода $l \sim \lambda$, и такая антенна имеет слабую направленность. Для получения более узких диаграмм направленности сечение открытого конца плавно увеличивают, превращая волновод в рупор. При плавном увеличении сечения также улучшается согласование волновода со свободным пространством. В месте перехода волновода в рупор образуются волны высших типов, но они быстро затухают в горловине рупора. Поэтому структура поля в рупоре подобна структуре поля основной волны в волноводе. На рис. 2.13а изображён **пирамидальный рупор**, получаемый путём постепенного увеличения обоих размеров прямоугольного волновода. Если в волноводе распространяется волна основного типа H_{10} , то рупор излучает в открытое пространство волну, линейно по-

ляризованную по электрическому полю с вектором \vec{E} , перпендикулярным длиной стороне рупора.

Направленные свойства апертурной антенны приближенно можно оценить, используя метод *Гюйгенса-Кирхгофа*. В соответствии с ним поле излучения любой апертурной антенны можно рассчитать путем сложения полей излучения элементарных площадок, на которые разбивается вся излучающая поверхность антенны. Однако, в отличие от линейной антенны, элемент поверхности апертуры не является элементарным излучателем.

Элементарным излучателем апертурных антенн является **элемент Гюйгенса**. Он представляет собой малую по сравнению с длиной волны излучения плоскую площадку, обтекаемую по всей площади переменными токами: электрическим с поверхностной плотностью \vec{j} и магнитным \vec{j}^M , перпендикулярными друг другу (рис. 2.13а).

Элемент Гюйгенса можно представить как совокупность электрического и магнитного диполей, образующих прямой крест (рис. 2.13б). Поле элемента Гюйгенса находится суммированием полей этих двух диполей (с учётом того, что оси отсчёта полярных углов $\theta_{\mathcal{E}}$ и θ_M повернуты на 90° друг относительно друга).

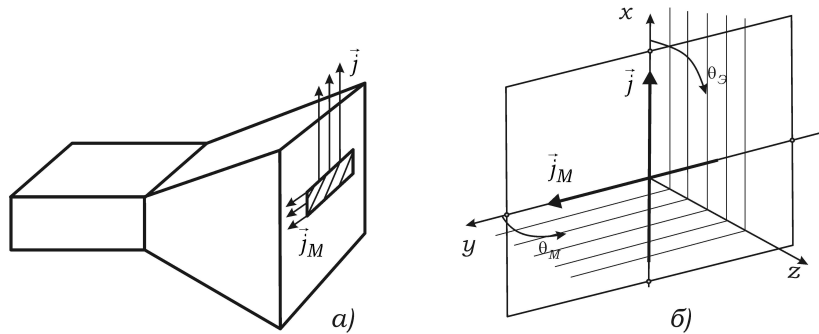


Рис. 2.13

В плоскости (x, z) электрический диполь имеет диаграмму направленности в виде «восьмёрки» $F_{\mathcal{E}}(\theta_{\mathcal{E}}) = \sin \theta_{\mathcal{E}}$, а магнитный излучает рав-

номерно по всем направлениям ($F_M(\theta_{\mathcal{E}}) = 1$). При их сложении получается диаграмма направленности в форме кардиоиды

$$F(\theta_{\mathcal{E}}) = 1 + \sin \theta_{\mathcal{E}} \quad (2.54)$$

(см. рис. 2.14а).

Аналогично строится диаграмма направленности в плоскости (y, z) :

$$F(\theta_M) = 1 + \sin \theta_M. \quad (2.55)$$

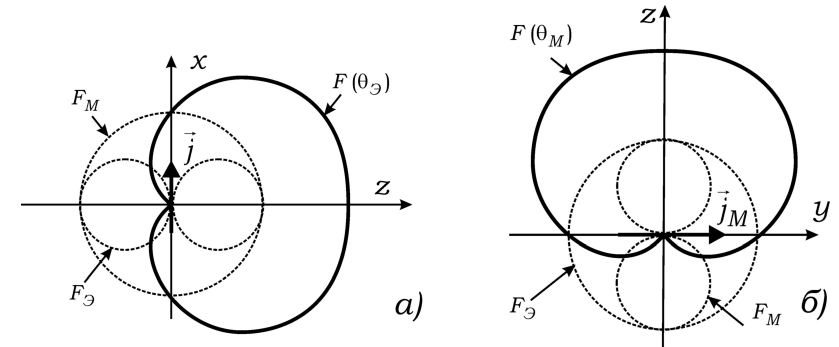


Рис. 2.14

Суммарная диаграмма образуется вращением кардиоиды вокруг оси Oz . В итоге получается, что элемент Гюйгенса не излучает только в одном направлении $\theta_{\mathcal{E}} = \theta_M = 270^\circ$, а максимум излучения приходится на направление $\theta_{\mathcal{E}} = \theta_M = 90^\circ$.

Расчёт суммарной диаграммы направленности апертурной антенны выходит за рамки настоящего пособия. Характерный вид диаграммы направленности представлен на рис. 2.15 в декартовой (а) и полярной (б) системах координат.

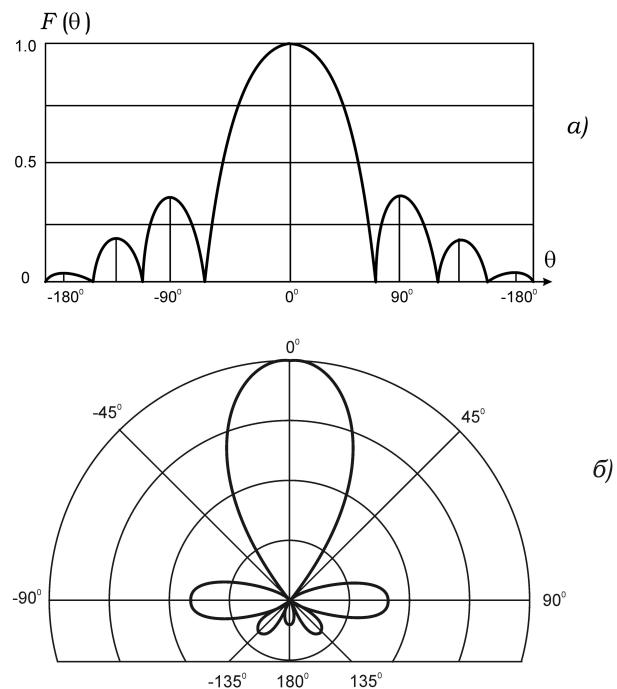


Рис. 2.15

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев, С. А. Электродинамика СВЧ : лабораторный практикум по курсу «Электродинамика СВЧ» / С. А. Афанасьев, А. П. Гераскин. – Ульяновск : УлГУ, 2007.
2. Семенцов, Д. И. Основы теории распространения электромагнитных волн / Д. И. Семенцов, С. А. Афанасьев, Д. Г. Санников. – Ульяновск : УлГУ, 2012.
3. Виноградова, М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. – М. : Наука, 1990.
4. Баскаков, С. И. Электродинамика и распространение радиоволн / С. И. Баскаков. – М. : Высшая школа, 1992.
5. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. пособие для вузов / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М. : Наука, 1989.
6. Лебедев, И. В. Техника и приборы СВЧ. Т. I / И. В. Лебедев. – М. : Высшая школа, 1970.
7. Григорьев, А. Д. Электродинамика и техника СВЧ / А. Д. Григорьев. – М. : Высшая школа, 1990.
8. Семёнов, А. А. Теория электромагнитных волн / А. А. Семёнов. – М. : Изд-во МГУ, 1968.
9. Вайнштейн, Л. А. Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988.
10. Гольдштейн, Л. Д. Электромагнитные поля и волны / Л. Д. Гольдштейн, Н. В. Зернов. – М. : Советское радио, 1972.

Директор Издательского центра *Т. В. Филиппова*
 Редактирование и подготовка оригинал-макета *Е. Г. Туженковой*

Подписано в печать 18.12.12.
 Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 3,5. Уч.-изд. л. 3,0.
 Тираж 50 экз. Заказ 219/

Оригинал-макет подготовлен
 в Издательском центре
 Ульяновского государственного университета

Отпечатано в Издательском центре
 Ульяновского государственного университета
 432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42