

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Инженерно-физический факультет высоких технологий

Д.И. Семенцов, С.А. Афанасьев, Д.Г. Санников

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

Учебное пособие

Ульяновск
2012

УДК 537.86 (075.8)

ББК 22.336 я73

С30

*Печатается по решению Ученого совета
инженерно-физического факультета высоких технологий
Ульяновского государственного университета*

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры физического материаловедения УлГУ

А. А. Соловьёв,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Физика» Улья-
новского государственного технического университета

В. В. Ефимов

Семенцов, Д. И.

С30 **Основы теории распространения электромагнитных волн :**
учебное пособие / Д. И. Семенцов, С. А. Афанасьев, Д. Г. Санников. –
Ульяновск : УлГУ, 2012. – 112 с.

В учебном пособии на основе уравнений Максвелла для электромагнитного поля в сплошной среде изложена теория распространения электромагнитных волн в изотропных и анизотропных средах. Анализируется также поведение электромагнитных волн на границе раздела сред.

Предназначено для студентов старших курсов специальностей «Радиофизика», «Радиофизика и электроника» и «Телекоммуникации».

УДК 537.86 (075.8)

ББК 22.336 я73

© Семенцов Д. И. , Афанасьев С. А., Санников Д. Г. , 2012

© Ульяновский государственный университет, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. Основные уравнения классической электродинамики	6
1.1. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в среде.....	6
1.2. Материальные уравнения. Классификация сред в электродинамике	9
1.3. Граничные условия для векторов электромагнитного поля	11
1.4. Закон сохранения энергии электромагнитного поля. Плотность и поток энергии.....	13
1.5. Волновое уравнение в однородном изотропном диэлектрике.....	15
2. Плоские монохроматические волны в однородной изотропной среде без потерь	19
2.1. Метод комплексных амплитуд для гармонических колебаний.....	19
2.2. Уравнения Максвелла для монохроматических колебаний и уравнения Гельмгольца	21
2.3. Плоские монохроматические волны.....	22
2.4. Структура поля плоской монохроматической волны.....	25
2.5. Поляризация электромагнитных волн.....	28
2.6. Энергия и поток энергии бегущей монохроматической волны.....	30
2.7. Стоячие электромагнитные волны	33
2.8. Групповая скорость	36
3. Электромагнитные волны на границах раздела сред	39
3.1. Отражение и преломление плоской волны на границе раздела двух диэлектриков.....	39
3.2. Полное внутреннее отражение.....	45
3.3. Прохождение плоской волны через плоскопараллельный диэлектрический слой	48
3.4. Волны в плоскостной периодической среде. Дисперсионное уравнение для собственных волн.....	51
4. Электромагнитные волны в средах с комплексными материальными параметрами	55
4.1. Плоские монохроматические волны в среде с комплексными материальными параметрами.....	55
4.2. Потоки энергии монохроматических волн в средах с комплексными материальными параметрами.....	58
4.3. Комплексный показатель преломления. Правые и левые среды.....	60

4.4. Среды с одновременно отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. Отрицательное преломление	63
4.5. Среды с отрицательным значением диэлектрической или магнитной проницаемостей. Электромагнитное туннелирование.....	65
5. Электромагнитные волны в проводящих средах	69
5.1. Плоские монохроматические волны в проводящей среде	69
5.2. Скин-эффект. Случай хорошо проводящей среды.....	70
5.3. Плоская волна на границе раздела «диэлектрик – проводник». Приближённое граничное условие Леонтовича.....	72
5.4. Случай идеального проводника	74
5.5. Поверхностные волны на границе раздела «диэлектрик – проводник»	75
6. Электромагнитные волны в анизотропных средах.....	81
6.1. Общие свойства плоских монохроматических волн в анизотропных средах.....	81
6.2. Электромагнитные волны в одноосных кристаллах.....	86
6.3. Тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы.....	90
6.4. Электромагнитные волны в магнитоактивной плазме	94
6.5. Тензор высокочастотной магнитной проницаемости феррита. Ферромагнитный резонанс	98
6.6. Поперечно намагниченный феррит. Эффект Коттона – Мутона	102
6.7. Продольно намагниченный феррит. Эффект Фарадея	106
Список литературы	111

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено в первую очередь для студентов бакалавриата специальности «Радиофизика», изучающих курс «Распространение электромагнитных волн», и студентов специальности «Радиофизика и электроника», изучающих курс «Физика волновых процессов». Также оно может быть использовано студентами специальности «Телекоммуникации» при изучении дисциплины «Электромагнитные поля и волны».

Предполагается, что читатель знаком с основами теории электромагнитных явлений по курсам общей и теоретической физики, а также владеет математическим аппаратом теории электромагнитного поля (векторный и тензорный анализ, теория дифференциальных уравнений). Краткий обзор основных соотношений классической электродинамики Максвелла содержится в главе 1. В последующих главах на их основе излагается теория распространения плоских монохроматических волн в линейных средах. В главах 2–5 рассмотрены волны в изотропных средах, включая особенности их поведения на границе раздела сред (глава 3 и ряд вопросов глав 4, 5). Материал глав 2–5 обязателен для изучения всеми студентами, поскольку он является теоретической базой для дальнейшего изучения спецкурсов прикладной направленности, а также выполнения работ радиофизического лабораторного практикума. Исключение составляют п. 4.3, 4.4, 4.5 и 5.4, которые изучаются по требованию преподавателя или факультативно. В главе 6 анализируется распространение электромагнитных волн в анизотропных средах на примерах прозрачного кристалла, магнитоактивной плазмы и намагниченного феррита. Эта глава изучается выборочно, в соответствии с требованиями учебной программы изучаемой дисциплины.

В пособии использована Международная система единиц (СИ), которая является общепринятой в инженерно-технической литературе. Однако в научной литературе до сих пор широко используется Гауссова система единиц, в которой многие соотношения электродинамики записываются несколько иначе. Это надо иметь в виду при работе с литературой.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1.1. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в среде

Основными уравнениями классической электродинамики являются уравнения Максвелла, которые вытекают из обобщения многочисленных экспериментальных данных. *Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме* для электромагнитного поля в среде имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(II)} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \\ \text{(III)} \quad \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \text{(IV)} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Все величины, входящие в эти уравнения, являются функциями координат (радиус-вектора \mathbf{r}) и времени t . Характеристиками электромагнитного поля являются четыре векторные функции \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} и \mathbf{H} . **Напряжённость электрического поля \mathbf{E} и магнитная индукция \mathbf{B}** – силовые характеристики поля, определяющие силу \mathbf{F} (силу Лоренца), с которой поле действует на внесённое в него заряженное тело:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \tag{0.2}$$

где q – электрический заряд, \mathbf{v} – скорость движения тела в данной системе отсчёта. Напряжённость электрического поля в СИ измеряется в Н/Кл или В/м, единица измерения магнитной индукции – тесла (Тл). Для определения электромагнитного поля в веществе дополнительно вводятся **электрическая индукция (электрическое смещение) \mathbf{D} и напряжённость магнитного поля \mathbf{H}** , связанные с векторами \mathbf{E} и \mathbf{B} так называемыми *материальными уравнениями* (см. п. 1.2). В СИ электрическая индукция измеряется в Кл/м², а напряжённость магнитного поля – в А/м.

Объёмная плотность заряда $\rho(\mathbf{r}, t)$ и плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ характеризуют распределение в пространстве и времени источников электромагнитного поля – электрических зарядов и токов. Функция $\rho(\mathbf{r}, t)$ при непрерывном распределении заряда в пространстве определяется как

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad (0.3)$$

где dq – заряд в элементарном объёме пространства dV . Единица измерения объёмной плотности заряда – Кл/м³. Плотность тока \mathbf{j} измеряется в А/м² и включает в себя:

- **плотность токов проводимости** $\mathbf{j}_{\text{пр}}$;
- **плотность конвекционных токов** $\mathbf{j}_{\text{к}} = \rho \mathbf{v}$, обусловленных движением макроскопических заряженных тел;
- **плотность сторонних токов** $\mathbf{j}_{\text{ст}}$, связанных с силами неэлектромагнитной природы.

В технических задачах под сторонними токами обычно понимают любые токи, создаваемые внешними источниками и не зависящие от возбуждаемого ими поля. В таких задачах функция $\mathbf{j}_{\text{ст}}(\mathbf{r}, t)$ обычно задана (известна заранее). Пример – расчёт полей, возбуждаемых антенной во внешнем пространстве при протекании по ней известного тока от внешнего источника.

Функции $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ в каждой точке пространства связаны между собой соотношением, известным как **уравнение непрерывности**:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (0.4)$$

Для выяснения физического смысла (0.4) проинтегрируем обе части этого выражения по объёму пространства V , ограниченному замкнутой поверхностью S . Используя теорему Гаусса – Остроградского

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} \cdot dV = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S},$$

находим:

$$I = -\frac{\partial q}{\partial t}, \quad (0.5)$$

где $q = \int_V \rho dV$ – заряд в объёме V , $I = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}$ – сила тока, протекающего через

поверхность S . Таким образом, заряд в объёме V может изменяться только при наличии тока I через поверхность S , т.е. за счёт того, что часть заряда пересекает эту поверхность. Следовательно, уравнение непрерывности (0.4) и (0.5) выражает **закон сохранения электрического заряда**.

Уточним физический смысл каждого из уравнений I – IV системы (0.1), а также перепишем их в *интегральной форме*.

Уравнение I выражает закон, по которому переменное магнитное поле порождает электрическое поле. Для получения его интегральной формы рассмотрим в пространстве произвольный замкнутый контур L , ограничивающий поверхность S . Проинтегрируем обе части уравнения I по поверхности S . С учётом теоремы Стокса

$$\int_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

оно приобретает вид

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}, \quad (0.6)$$

где $\Phi_B = \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$ – поток вектора магнитной индукции \mathbf{B} через поверхность

S (**магнитный поток**). Соотношение (0.6) является обобщением **закона электромагнитной индукции Фарадея**. Электрическое поле, порождаемое переменным магнитным полем, является *вихревым*: его силовые линии замкнуты, а циркуляция вектора \mathbf{E} по замкнутому контуру, согласно (0.6), отлична от нуля.

Аналогично получается интегральная форма уравнения II:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} + I = I_{\text{см}} + I, \quad (0.7)$$

где $\Phi_D = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S}$ – поток вектора электрической индукции \mathbf{D} через поверхность S , I – сила тока, протекающего через ту же поверхность. Величину

$\partial \mathbf{D} / \partial t$, характеризующую переменное электрическое поле, Максвелл назвал **плотностью тока смещения**, а величину $\partial \Phi_D / \partial t = I_{\text{см}}$ – **током смещения**. Уравнение II указывает на два возможных источника магнитного поля: движение свободных электрических зарядов (электрический ток) и переменное электрическое поле (ток смещения) порождают магнитное поле. Интегральная форма (0.7) является обобщением **закона полного тока**: циркуляция вектора \mathbf{H} по произвольному замкнутому контуру равна полному току, пронизывающему этот контур, где полный ток является суммой токов проводимости и смещения.

Уравнение III системы (0.1) означает, что источниками электрического поля являются электрические заряды: точки, в которых плотность заряда ρ отлична от нуля, служат истоками и стоками линий вектора \mathbf{D} . Для получения интегральной формы уравнения III проинтегрируем его правую и левую части по объёму V , ограниченному замкнутой поверхностью S . По теореме Гаусса – Остроградского имеем

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} \cdot dV = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \Phi_D,$$

и уравнение III принимает вид

$$\Phi_D = q, \quad (0.8)$$

где q – заряд в объёме V . Это – так называемая **теорема Гаусса для электрического поля**: поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен суммарному электрическому заряду, находящемуся внутри поверхности.

Таким же образом уравнение IV приводится к виду

$$\Phi_B = 0, \quad (0.9)$$

где Φ_B – магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность. Физический смысл уравнения IV состоит в том, что линии вектора \mathbf{B} замкнуты, т.е. магнитное поле не имеет источников (магнитные заряды в природе не обнаружены).

1.2. Материальные уравнения. Классификация сред в электродинамике

В задачах электродинамики обычно требуется по заданному распределению электрических зарядов $\rho(\mathbf{r}, t)$ и токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ определить четыре вектора \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} и \mathbf{H} как функции координат и времени. При этом система уравнений Максвелла (0.1) содержит два векторных и два скалярных уравнения, чего недостаточно для нахождения четырех векторных величин. Однако между характеристиками поля существует связь, которую можно обнаружить, рассмотрев электродинамические свойства среды, в которой существует поле. Феноменологически, т.е. без углубления в микроскопическую теорию, эти свойства учитываются следующим образом.

Под воздействием электрического поля напряжённостью \mathbf{E} единица объёма вещества приобретает электрический дипольный момент \mathbf{P} (вектор

поляризации или поляризованность вещества). Вектор \mathbf{P} связан с напряжённостью \mathbf{E} соотношением

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E}, \quad (0.10)$$

где $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, а безразмерная величина κ – диэлектрическая восприимчивость вещества. Вектор электрической индукции \mathbf{D} определяется как

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \mathbf{E}. \quad (0.11)$$

Вводя обозначение $1 + \kappa = \varepsilon$, запишем

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (0.12)$$

где безразмерная величина ε называется диэлектрической проницаемостью вещества.

Аналогично под воздействием магнитного поля напряжённостью \mathbf{H} единица объёма вещества приобретает магнитный момент \mathbf{M} (намагниченность вещества):

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad (0.13)$$

где безразмерная величина χ – магнитная восприимчивость вещества. Вектор магнитной индукции \mathbf{B} связан с векторами \mathbf{M} и \mathbf{H} соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H}, \quad (0.14)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, или

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (0.15)$$

где введена магнитная проницаемость вещества $\mu = 1 + \chi$.

Для проводящих сред к уравнениям Максвелла следует добавить закон Ома в дифференциальной форме, определяющий плотность тока проводимости:

$$\mathbf{j}_{\text{пр}} = \sigma \mathbf{E}, \quad (0.16)$$

где σ – удельная проводимость вещества (единица измерения – См/м).

Уравнения (0.12), (0.15) и (0.16), добавляемые к уравнениям Максвелла для учёта свойств среды, называются *материальными уравнениями*. Входящие в них величины ε , μ и σ , характеризующие электромагнитные свойства среды, называются *материальными параметрами* или *материальными константами*.

В зависимости от свойств материальных констант проводится классификация сред в электродинамике.

Если материальные константы НЕ ЗАВИСЯТ от величин \mathbf{E} и \mathbf{H} , то среда называется **линейной**, а если такая зависимость наблюдается, то **нелинейной**.

Среда называется **однородной**, если её параметры НЕ ЗАВИСЯТ от координат, и **неоднородной**, если такая зависимость имеется.

Среда называется **изотропной**, если характер протекания электромагнитных процессов в ней НЕ ЗАВИСИТ от направления векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . В изотропных средах параметры ε и μ являются обычными скалярными величинами, поэтому векторы \mathbf{E} и \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{H} ПАРАЛЛЕЛЬНЫ друг другу. В **анизотропных средах** векторы \mathbf{E} и \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{H} в общем случае НЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ. При этом характер связи между векторами \mathbf{E} и \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{H} зависит от ориентации векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} относительно некоторых выделенных направлений в пространстве. Эта связь имеет уже более сложный вид, и уравнения (0.12), (0.15) содержат по девять скалярных материальных констант, образующих **тензоры диэлектрической $\boldsymbol{\epsilon}$ и магнитной $\boldsymbol{\mu}$ проницаемостей среды** (подробнее см. гл. 6). Тензором может быть и удельная проводимость σ в (0.16).

Среда называется **диспергирующей**, если значения векторов \mathbf{P} и \mathbf{M} (или \mathbf{D} и \mathbf{B}) в данной точке в данный момент времени зависят от значений векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в других точках пространства (**пространственная дисперсия**) и в другие (предшествующие) моменты времени (**временная, или частотная, дисперсия**). Для монохроматических полей дисперсия среды проявляется в зависимости материальных параметров от волнового вектора \mathbf{k} в случае пространственной и частоты ω в случае временной дисперсии.

1.3. Граничные условия для векторов электромагнитного поля

Часто в задачах электродинамики рассматриваются различные части пространства, разделённые границами раздела и отличающиеся материальными параметрами. Тогда к системе уравнений Максвелла и материальным уравнениям приходится добавлять **граничные условия** – соотношения между векторными характеристиками поля по обе стороны от границы раздела. Сами уравнения Максвелла для вычислений на границах раздела непригодны, так как входящие в них векторные функции координат на границах являются разрывными и их нельзя дифференцировать.

Приведём без вывода граничные условия для всех четырёх векторных характеристик электромагнитного поля. Они выводятся для плоских границ раздела, но ввиду дифференциального характера применимы для границ любой формы.

Рассмотрим границу раздела сред 1 и 2 с параметрами ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 соответственно. Пусть \mathbf{n}_0 – единичный вектор нормали к границе раздела, направленный из среды 1 в среду 2.

I. Граничное условие для вектора \mathbf{E} :

$$[\mathbf{n}_0, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = 0 \quad \text{или} \quad E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (0.17)$$

т.е. тангенциальная (параллельная границе раздела) составляющая вектора \mathbf{E} непрерывна на границе раздела сред.

II. Граничное условие для вектора \mathbf{H} :

$$[\mathbf{n}_0, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \mathbf{J}_{\text{пов}}, \quad (0.18)$$

т.е. тангенциальная (параллельная границе раздела) составляющая вектора \mathbf{H} на границе раздела испытывает скачок, равный плотности поверхностного тока $\mathbf{J}_{\text{пов}}$ (эта величина измеряется в А/м). Поверхностный ток протекает в бесконечно тонком слое на границе раздела. Он существует, если одна из сред является *идеальным проводником*, для которого удельная проводимость $\sigma \rightarrow \infty$ (подробнее см. гл. 5). При конечных значениях σ , а также для диэлектриков ($\sigma \rightarrow 0$) $\mathbf{J}_{\text{пов}} = 0$ и условие (0.18) имеет вид

$$H_{2\tau} = H_{1\tau}, \quad (0.19)$$

т.е. касательная (тангенциальная) составляющая вектора \mathbf{H} непрерывна на границе раздела сред.

III. Граничное условие для вектора \mathbf{D} :

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)\mathbf{n}_0 = \rho_{\text{пов}} \quad \text{или} \quad D_{2n} - D_{1n} = \rho_{\text{пов}}, \quad (0.20)$$

т.е. нормальная составляющая вектора \mathbf{D} на границе раздела испытывает скачок, равный поверхностной плотности заряда $\rho_{\text{пов}}$ (измеряется в Кл/м²).

IV. Граничное условие для вектора \mathbf{B} :

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)\mathbf{n}_0 = 0 \quad \text{или} \quad B_{2n} = B_{1n}, \quad (0.21)$$

т.е. нормальная составляющая вектора \mathbf{B} непрерывна на границе раздела.

1.4. Закон сохранения энергии электромагнитного поля.

Плотность и поток энергии

Рассмотрим некоторый замкнутый объём пространства V , содержащий электромагнитное поле и движущиеся электрические заряды, т.е. токи. Для получения соотношения, описывающего изменение энергии поля, заключённого в данном объёме, используем тождество векторного анализа:

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

С учетом уравнений Максвелла I и II системы (0.1)

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = -\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{jE}.$$

Для изотропной среды

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{ED}}{2} \right)$$

и аналогично $\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{BH}}{2} \right)$.

Величины

$$\begin{aligned} w_э &= \frac{1}{2}(\mathbf{ED}) = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2, \\ w_м &= \frac{1}{2}(\mathbf{BH}) = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2 \end{aligned} \quad (0.22)$$

называются **плотностью энергии электрического (магнитного) поля** (единица измерения плотности энергии – Дж/м³). Векторная величина

$$\mathbf{П} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}], \quad (0.23)$$

измеряемая в Дж/(м²·с) (или Вт/м²), получила название **вектора Пойнтинга**. Выражение

$$p = \mathbf{jE} \quad (0.24)$$

определяет **плотность мощности взаимодействия поля с током \mathbf{j}** (измеряется в Вт/м³). В результате этого взаимодействия происходит взаимопревращение различных форм энергии друг в друга. В общем случае величина p включает в себя плотность мощности всех токов в среде:

- токов проводимости, т.е. *потерь на выделение джоулева тепла*, величина которых определяется дифференциальной формой **закона Джоуля – Ленца**: $p_{Дж} = \mathbf{j}_{пр} \mathbf{E} = \sigma E^2$;

- конвекционных токов: $p_k = \mathbf{j}_k \mathbf{E} = \rho \mathbf{v} \mathbf{E}$;

- сторонних токов: $p_{ст} = \mathbf{j}_{ст} \mathbf{E}$ (последняя величина может быть как положительной, так и отрицательной).

В результате имеем соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathbf{\Pi} - p , \quad (0.25)$$

где величина $w = w_э + w_M$ определяет **плотность электромагнитной энергии**, т.е. энергию электромагнитного поля в единице объёма пространства. Выражение (0.25) представляет собой **закон сохранения электромагнитной энергии в дифференциальной форме**.

Проинтегрируем обе части соотношения (0.25) по объёму V . Применяя теорему Гаусса – Остроградского

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{\Pi} \cdot dV = \oint_S \mathbf{\Pi} dS,$$

получаем **интегральную форму закона сохранения электромагнитной энергии**:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\Sigma - P, \quad (0.26)$$

где $W = \int_V w dV$ – **электромагнитная энергия**, заключённая в объёме V ,

$\Sigma = \oint_S \mathbf{\Pi} dS$ – **поток энергии** через замкнутую поверхность S , ограничивающую объём V ,

вающую объём V ,

$P = \int_V p dV$ – **мощность взаимодействия поля с токами** в объёме V .

Все величины в (0.26) измеряются в Дж/с или Вт.

Поток энергии Σ характеризует количество электромагнитной энергии, проходящей через поверхность S в единицу времени (т.е. мощность). Поток Σ положителен, если энергия покидает объём V через поверхность S , и отрицателен, если энергия поступает в объём извне. Соответственно вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$ определяет количество энергии, переносимое в единицу времени через поверхность единичной площади. Таким образом, он имеет смысл **плотности потока энергии (плотности мощно-**

сти). Направление вектора $\mathbf{\Pi}$ определяет направление переноса электромагнитной энергии в данной точке пространства.

Величина P учитывает изменение энергии W в объёме V за счёт *потерь*, т.е. перехода её в другие виды энергии, а также за счёт работы сторонних сил. Таким образом, (0.26) имеет следующий смысл: энергия поля, заключённого в некотором объёме, изменяется за счёт переноса энергии через ограничивающую этот объём поверхность, а также работы токов и сторонних сил в этом объёме. Если токи в среде отсутствуют, то уравнения (0.25) и (0.26) принимают вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\text{div}\mathbf{\Pi}, \quad (0.27)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\Sigma. \quad (0.28)$$

1.5. Волновое уравнение в однородном изотропном диэлектрике

Из уравнений Максвелла вытекает важнейший вывод: ПЕРЕМЕННЫЕ электромагнитные поля могут существовать без зарядов и токов. Точнее, поле может существовать, когда породивших его зарядов и токов уже нет. При этом изменение во времени электрического поля приводит к появлению вихревого магнитного поля, а изменение во времени магнитного поля приводит к появлению вихревого электрического поля. Указанные изменения (возмущения) поля переносятся в пространстве в виде *электромагнитных волн*, которые могут распространяться как в среде, так и в вакууме.

Чтобы убедиться в сказанном, запишем систему уравнений Максвелла (0.1) для *однородного изотропного диэлектрика*, т.е. среды, в которой отсутствуют свободные заряды и токи проводимости ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$). Используя материальные уравнения (0.12) и (0.15), в ней можно уменьшить число неизвестных, исключив, например, векторы \mathbf{D} и \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \text{(II)} \quad \text{rot } \mathbf{H} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \text{(III)} \quad \text{div } \mathbf{E} &= 0, \\ \text{(IV)} \quad \text{div } \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (0.29)$$

Величины \mathbf{E} и \mathbf{H} , являющиеся переменными системы уравнений (0.29), в теории электромагнитных волн принято называть **векторами поля**. Вектор \mathbf{E} называют **вектором электрического поля** или, для краткости, **электрическим полем**, а вектор \mathbf{H} – **вектором магнитного поля** или **магнитным полем**.

Дифференцируя уравнение II системы (0.29) по времени и заменяя в полученном уравнении $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ из уравнения II, приходим к уравнению:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Пользуясь формулой векторного анализа $\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$ и учитывая уравнение III, получаем:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (0.30)$$

где $\Delta = \nabla^2$ – дифференциальный оператор Лапласа, а $v = (\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0)^{-1/2}$ – постоянная величина, имеющая размерность скорости. Уравнение (0.30) называется **однородным волновым уравнением** для вектора \mathbf{E} . Ввиду симметрии уравнений (0.29) относительно векторов поля, такому же уравнению удовлетворяет и вектор магнитного поля \mathbf{H} :

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (0.31)$$

Простейшим решением данных волновых уравнений является решение в виде **плоской волны**, распространяющейся в некотором фиксированном направлении, заданном единичным вектором \mathbf{m} . В этом случае векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} зависят лишь от одной пространственной координаты $\xi = (\mathbf{m}\mathbf{r})$, отсчитываемой по направлению единичного вектора \mathbf{m} (рис. 1.1).

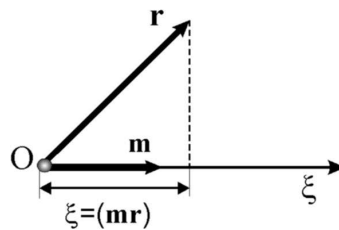


Рис. 1.1.

В этом случае $\Delta = \partial^2 / \partial \xi^2$ и уравнения вида (0.30), (0.31) преобразуются в **одномерное волновое уравнение**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (0.32)$$

где u – любая из декартовых компонент векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} .

Общее решение уравнения (0.32) записывается как

$$u(\xi, t) = u_1\left(t - \frac{\xi}{v}\right) + u_2\left(t + \frac{\xi}{v}\right), \quad (0.33)$$

где u_1 , u_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции. Поверхность, в каждой точке которой в любой момент времени векторы поля имеют одинаковые значения, называется **волновой поверхностью**. Для волны вида (0.33) волновой поверхностью является любая плоскость, перпендикулярная направлению \mathbf{m} . Поэтому волна данного типа и получила название «плоской».

Для уяснения физического смысла решения (0.33) рассмотрим вначале решение $u_1(t - \xi/v)$. Пусть в некоторый момент времени $t = 0$ в некоторой плоскости $\xi = \text{const}$ функция u_1 имеет некоторое значение $u_1(\xi, 0)$. Спустя промежуток времени t функция u_1 будет иметь такое же значение на расстоянии $+vt$ от первоначального места: $u_1(\xi + vt, t) = u_1(\xi, 0)$. Значит, с течением времени график этой функции будет смещаться со скоростью v в направлении $+\mathbf{m}$, но форма графика при этом будет оставаться неизменной (см. рис. 1.2). Аналогично график функции $u_2(t + \xi/v)$ смещается с течением времени со скоростью v в направлении $-\mathbf{m}$. Таким образом, решение (0.33) является суперпозицией двух возмущений поля (т.е. двух волн), распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси ξ . Константа v при этом имеет смысл скорости распространения волны.

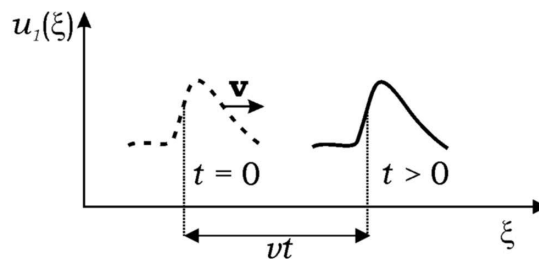


Рис. 1.2.

Теперь рассмотрим решение волновых уравнений в виде **сферической волны**. Сферическая волна возбуждается точечным источником в неограниченном однородном и изотропном пространстве, а векторы поля зависят лишь от радиальной координаты r сферической системы координат.

Используя выражение для радиальной части оператора Лапласа в сферических координатах

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

однородное волновое уравнение для скалярной функции u можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial t^2} = 0, \quad (0.34)$$

аналогичному уравнению (0.32). Его общим решением являются произвольные функции аргумента $t \mp r/v$, поэтому выражение для компонент векторов поля сферической волны имеет вид

$$u(r, t) = \frac{1}{r} u_1 \left(t - \frac{r}{v} \right) + \frac{1}{r} u_2 \left(t + \frac{r}{v} \right). \quad (0.35)$$

Первое слагаемое в (0.35) описывает волну, распространяющуюся от начала координат в радиальном направлении со скоростью v (расходящаяся волна). Второму слагаемому соответствует волна, сходящаяся к началу координат. В произвольный момент времени значения функции (0.35) одинаковы на сфере любого фиксированного радиуса r , т.е. волновые поверхности сферической волны имеют вид концентрических сфер. Согласно (0.35) амплитуда сферических волн убывает обратно пропорционально расстоянию r от начала координат.

2. ПЛОСКИЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ БЕЗ ПОТЕРЬ

2.1. Метод комплексных амплитуд для гармонических колебаний

Монохроматической волной называется электромагнитная волна, поле которой является *гармонической функцией времени*:

$$u(t) = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.1)$$

(u – компонента одного из векторов поля). Здесь аргумент косинуса $\omega t + \alpha$, определяющий мгновенное значение функции $u(t)$, называется **фазой**; A и α – соответственно **амплитуда** и **начальная фаза** величины u ; $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ – **циклическая частота** колебаний, где T – **период**, f – **частота**. Чаще всего в зависимостях вида (2.1) используется циклическая частота ω , причём слово «циклическая» для краткости обычно опускают. Амплитуда и начальная фаза в общем случае являются функциями координат.

В основе *метода комплексных амплитуд* для гармонических функций времени лежит **формула Эйлера**:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (2.2)$$

где i – мнимая единица. На формуле (2.2) основана связь между экспоненциальной (тригонометрической) и алгебраической формами записи комплексного числа:

$$\tilde{c} = |\tilde{c}| e^{i\varphi} = |\tilde{c}| \cos \varphi + i |\tilde{c}| \sin \varphi = \operatorname{Re} \tilde{c} + i \operatorname{Im} \tilde{c}, \quad (2.3)$$

где $|\tilde{c}|$ – **модуль комплексного числа** \tilde{c} , φ – его **аргумент (фаза)**, $\operatorname{Re} \tilde{c} = |\tilde{c}| \cos \varphi$ – **вещественная часть** числа \tilde{c} , $\operatorname{Im} \tilde{c} = |\tilde{c}| \sin \varphi$ – его **мнимая часть**. Модуль и аргумент комплексного числа $\tilde{c} = a + ib$ ($a = \operatorname{Re} \tilde{c}$, $b = \operatorname{Im} \tilde{c}$) определяются соотношениями

$$|\tilde{c}|^2 = \tilde{c} \tilde{c}^* = a^2 + b^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

где $\tilde{c}^* = a - ib$ – комплексно-сопряжённое число.

В соответствии с (2.3), функцию (2.1) можно представить в виде

$$u(t) = \operatorname{Re}(\tilde{u}(t)) = \operatorname{Re}(\tilde{A} e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(|\tilde{A}| e^{i\alpha} e^{i\omega t}), \quad (2.4)$$

где величина $\tilde{A} = |\tilde{A}| \exp(i\alpha)$ называется **комплексной амплитудой** комплексной функции $\tilde{y}(t)$. Сравнивая (2.4) с (2.1), видим, что модуль $|\tilde{A}|$ и фаза α комплексной амплитуды \tilde{A} совпадают с амплитудой и начальной фазой величины $u(t)$. Комплексная гармоническая функция $\tilde{y}(t)$ и соответствующая вещественная величина $u(t)$ обозначаются одной и той же буквой. Для их различия комплексные числа, в том числе и комплексные амплитуды, будут обозначаться тильдой над буквой. В некоторых пособиях комплексность величины обозначается точкой или «шляпкой» над буквой: \dot{i}, \hat{i} . Если нет особой необходимости различать комплексные и вещественные величины, то значок комплексности может опускаться.

Таким образом, в теоретических выкладках можно представлять монохроматические поля не в виде вещественных гармонических функций синуса или косинуса, а в комплексной форме. Для получения реально наблюдаемой величины необходимо выделить вещественную часть соответствующего комплексного выражения.

Следует отметить, что над комплексными функциями нельзя выполнять такие операции, как умножение, деление, возведение в степень – для этого необходимо выделять их вещественную часть. Например, при вычислении произведения двух комплексных чисел \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 возможна ошибка из-за того, что $\text{Re}(\tilde{c}_1 \cdot \tilde{c}_2) \neq \text{Re}(\tilde{c}_1) \cdot \text{Re}(\tilde{c}_2)$. С такой ситуацией мы столкнёмся в п. 2.6 при вычислении плотности энергии и вектора Пойнтинга монохроматической волны.

Внимание! Вещественная часть комплексного числа не зависит от выбора знака его фазы. Поэтому в представлении (2.4) временной множитель можно записать и как $e^{-i\omega t}$. Это не влияет на вещественную часть результата, однако сказывается на виде формул, содержащих комплексные числа. В данном пособии временной множитель всегда записывается в виде $e^{i\omega t}$. При работе же с другими пособиями необходимо прежде всего выяснить, какой знак перед мнимой единицей используют его авторы.

2.2. Уравнения Максвелла для монохроматических колебаний и уравнения Гельмгольца

Запишем векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{H} в комплексном виде

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{i\omega t} \quad (0.36)$$

и подставим их в уравнения Максвелла (1.29) для однородного изотропного диэлектрика. После сокращения на множитель $e^{i\omega t}$ эти уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \text{rot } \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= -i\omega\mu\mu_0\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), \\ \text{(II)} \quad \text{rot } \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= i\omega\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \\ \text{(III)} \quad \text{div } \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= 0, \\ \text{(IV)} \quad \text{div } \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (0.37)$$

Мы получили *уравнения Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля* $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$. Напомним, что для изотропных сред параметры ε и μ в уравнениях (0.37) скалярны, а для анизотропных сред являются тензорами. При отсутствии потерь в среде (т.е. для диэлектрика) материальные параметры ε и μ являются вещественными величинами.

Решая систему (0.37), находят комплексные амплитуды векторов поля $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$ как функции координат. После домножения на $\exp(i\omega t)$ получают комплексные выражения векторов поля в виде (0.36), а затем выделяют их вещественную часть.

Чтобы получить другой вид уравнений для комплексных амплитуд, подставим поля вида (0.36) в волновые уравнения (1.30) и (1.31). Для этого вычислим производные

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = i\omega\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\omega^2\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$$

и учтём, что $\Delta \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \Delta \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\omega t}$. После сокращения на отличный от нуля множитель $e^{i\omega t}$ волновое уравнение (1.30) для комплексной амплитуды вектора \mathbf{E} принимает вид

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + k^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0, \quad (0.38)$$

где введено обозначение $k^2 = (\omega/v)^2 = \omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0$. Ввиду симметрии уравнений Максвелла аналогичное по виду уравнение для комплексной амплитуды вектора магнитного поля \mathbf{H} получается из (1.31):

$$\Delta\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) + k^2\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0. \quad (0.39)$$

Полученные уравнения носят название **уравнений Гельмгольца** для комплексных амплитуд монохроматических полей.

2.3. Плоские монохроматические волны

Рассмотрим решение уравнений Гельмгольца (0.38), (0.39) в виде *плоской монохроматической волны* в простейшем *одномерном* случае, когда векторы поля зависят от одной координаты ξ , отсчитываемой в направлении распространения волны. В этом случае уравнение (0.38) записывается как

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}(\xi)}{\partial \xi^2} + k^2 \tilde{\mathbf{E}}(\xi) = 0. \quad (0.40)$$

Его общее решение имеет вид

$$\tilde{\mathbf{E}}(\xi) = \tilde{\mathbf{E}}_{m1} e^{-ik\xi} + \tilde{\mathbf{E}}_{m2} e^{ik\xi}, \quad (0.41)$$

где $\tilde{\mathbf{E}}_{m1}$ и $\tilde{\mathbf{E}}_{m2}$ – комплексные постоянные. Подставляя (0.41) в (0.36), получаем

$$\tilde{\mathbf{E}}(\xi, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{m1} e^{i(\omega t - k\xi)} + \tilde{\mathbf{E}}_{m2} e^{i(\omega t + k\xi)}. \quad (0.42)$$

Это решение описывает две встречные бегущие волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях оси ξ .

Поверхности постоянной фазы (волновые поверхности) волны вида (0.42) представляют собой бесконечные плоскости, перпендикулярные оси ξ . Скорость перемещения в пространстве поверхности постоянной фазы называют **фазовой скоростью** v_ϕ волны. Для её нахождения запишем условие постоянства фазы $\omega t \mp k\xi = \text{const}$ и продифференцируем его с учётом того, что для монохроматической волны ω и k – постоянные величины: $\omega dt \mp k d\xi = 0$. Отсюда фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{d\xi}{dt} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v. \quad (0.43)$$

Величину v можно записать иначе:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \quad (0.44)$$

где $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 3 \cdot 10^8$ м/с – **скорость электромагнитной волны в вакууме**, а $n = c/v = (\epsilon \mu)^{1/2}$ – **показатель преломления**, определяющий величину фазовой скорости в зависимости от материальных параметров среды ϵ и μ .

Параметр k называют **волновым числом**:

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n = k_0 n, \quad (0.45)$$

где n – показатель преломления среды, $k_0 = \omega/c$ – волновое число в вакууме. В технической литературе можно встретить другое название параметра k – **постоянная распространения волны**.

Длина волны λ равна расстоянию, на которое плоскость постоянной фазы распространяется за один период колебаний, т.е. $\lambda = vT$. Волновое число связано с длиной волны соотношением

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (0.46)$$

Длина волны λ в среде в n раз (n – показатель преломления) меньше длины волны λ_0 в вакууме:

$$\lambda = vT = \frac{cT}{n} = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (0.47)$$

Координату ζ можно представить как $\zeta = (\mathbf{m}\mathbf{r})$, где \mathbf{m} – единичный вектор в направлении оси ζ , \mathbf{r} – радиус-вектор произвольной точки пространства (рис. 2.1).

При этом можно ввести **волновой вектор** $\mathbf{k} = \pm k\mathbf{m}$, сонаправленный с вектором фазовой скорости волны, а по модулю равный волновому числу. Величины $\pm k$ в решении (0.42) тогда имеют смысл проекций волнового вектора на ось ζ . Решению (0.42) можно придать вид (для волны, распространяющейся в направлении $+\mathbf{m}$):

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{m}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (0.48)$$

Аналогичный вид имеет решение уравнения Гельмгольца (0.39) для вектора магнитного поля:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{m}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (0.49)$$

Соотношения (0.48) и (0.49) позволяют определить векторы поля плоской волны в случае произвольной ориентации волнового вектора \mathbf{k} относительно координатных осей. Например, в декартовой системе координат

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z,$$

где $k_x = k \cos \alpha$, $k_y = k \cos \beta$, $k_z = k \cos \gamma$ – проекции вектора \mathbf{k} на оси x , y , z соответственно, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, – его направляющие косинусы.

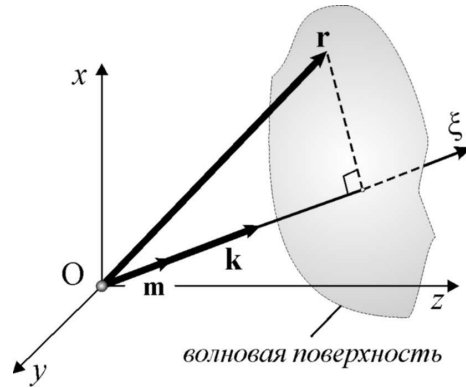


Рис. 2.1.

Для дальнейшего исследования свойств плоских волн подставим решения вида (0.48) и (0.49) в уравнения Максвелла (0.37). С учётом того, что

$$\operatorname{div} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \nabla(e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) = -i\mathbf{k} \cdot e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}},$$

уравнения III и IV системы (0.37) дают

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}} &= \nabla \left(\tilde{\mathbf{E}}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right) = -i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{H}} &= \nabla \left(\tilde{\mathbf{H}}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right) = -i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{H}} = 0. \end{aligned} \quad (0.50)$$

Равенство нулю скалярных произведений в (0.50) означает, что $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$, т.е. волна является **поперечной** как по электрическому, так и по магнитному полю (ТЕМ-волна). Покажем, что к тому же $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. Подстановка (0.48) и (0.49) в левые части уравнений I и II системы (0.37) приводит к выражениям

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} &= \left[\nabla, \tilde{\mathbf{E}}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right] = -i[\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{E}}]; \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} &= \left[\nabla, \tilde{\mathbf{H}}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right] = -i[\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{H}}]. \end{aligned}$$

Тогда уравнения I и II приводятся к виду

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{E}}] &= \omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}; \\ [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{H}}] &= -\omega\epsilon\epsilon_0\tilde{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad (0.51)$$

Из уравнений (0.51) следует, что в случае ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ значений параметров ϵ и μ три вектора \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} взаимно перпендикулярны и образуют в указанном порядке ПРАВУЮ тройку векторов (рис. 2.2).

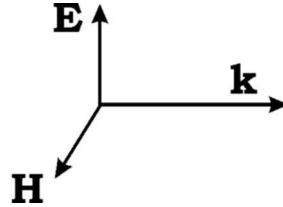


Рис. 2.2.

Возможные случаи отрицательных значений материальных констант будут рассмотрены далее в главе 4.

Из (0.51) вытекает также связь между модулями векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H \quad \text{или} \quad E = ZH, \quad (0.52)$$

где величина

$$Z = \sqrt{\mu\mu_0/\epsilon\epsilon_0}, \quad (0.53)$$

имеющая размерность сопротивления, называется **волновым сопротивлением** или **импедансом среды**. Также из соотношений (0.51) можно заключить, что колебания векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в плоской волне происходят в одинаковых фазах.

2.4. Структура поля плоской электромагнитной волны

Выше показано, что плоская волна в однородном изотропном диэлектрике является поперечной, т.е. векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{H} колеблются в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Теперь необходимо решить вопрос об их ориентации в указанной плоскости, другими словами, определить **поляризацию волны**.

Пусть плоская волна распространяется в направлении оси z декартовой системы координат. Волновые поверхности (поверхности одинаковой фазы) такой волны – это плоскости, перпендикулярные оси z (см. п. 2.3). В каждый момент времени в любой точке волновой поверхности векторы поля должны принимать одинаковые значения. Значит, они не должны за-

висеть от координат x и y . Следовательно, их производные по x и y также равны нулю. С учётом сказанного запишем уравнения I и II системы (0.37) в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} = -i\omega\mu\mu_0\tilde{H}_x, \\ \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = -i\omega\mu\mu_0\tilde{H}_y, \\ 0 = -i\omega\mu\mu_0\tilde{H}_z; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} = i\omega\epsilon\epsilon_0\tilde{E}_x, \\ \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} = i\omega\epsilon\epsilon_0\tilde{E}_y, \\ 0 = i\omega\epsilon\epsilon_0\tilde{E}_z. \end{cases} \quad (0.54)$$

Из уравнений для проекций на ось z сразу следует, что продольные составляющие полей \tilde{E}_z и \tilde{H}_z равны нулю, что подтверждает вывод о поперечности волны. Оставшиеся четыре уравнения распадаются на две независимых подсистемы, одна из которых содержит переменные \tilde{E}_x и \tilde{H}_y , а другая – \tilde{E}_y и \tilde{H}_x . Эти подсистемы приводят к двум независимым решениям, которые называются обычно **собственными** или **нормальными волнами**.

В данном случае обе подсистемы, а значит, и их решения имеют совершенно одинаковый вид, поэтому рассмотрим только одну из них – с переменными \tilde{E}_x и \tilde{H}_y :

$$-\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} = i\omega\epsilon\epsilon_0\tilde{E}_x, \quad \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = -i\omega\mu\mu_0\tilde{H}_y. \quad (0.55)$$

Дифференцируя, например, второе уравнение подсистемы (0.55) по z с учётом первого получаем уравнение Гельмгольца для составляющей \tilde{E}_x :

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_x}{\partial z^2} + k^2 \tilde{E}_x = 0. \quad (0.56)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{E}_x = \tilde{A}_1 e^{-ikz} + \tilde{A}_2 e^{ikz}. \quad (0.57)$$

Подставляя решение (0.57) в (0.55), найдём составляющую магнитного поля:

$$\tilde{H}_y = \frac{1}{Z} \left(\tilde{A}_1 e^{-ikz} - \tilde{A}_2 e^{ikz} \right), \quad (0.58)$$

где Z – импеданс среды (0.53). *Комплексные* величины \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 в полученных решениях (0.57) и (0.58) являются двумя *произвольными постоянными*, которые в дальнейшем будем представлять в виде

$$\tilde{A}_1 = A_1 e^{i\alpha_1}, \quad \tilde{A}_2 = A_2 e^{i\alpha_2}, \quad (0.59)$$

где $A_{1,2}$ и $\alpha_{1,2}$ – *вещественные* постоянные величины.

Для нахождения реальных значений векторов поля нужно умножить комплексные амплитуды (0.57) и (0.58) на множитель $e^{i\omega t}$ и выделить вещественную часть:

$$\begin{aligned} E_x &= \text{Re}(\tilde{E}_x e^{i\omega t}) = A_1 \cos(\omega t - kz + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + kz + \alpha_2); \\ H_y &= \text{Re}(\tilde{H}_y e^{i\omega t}) = \frac{1}{Z} \{A_1 \cos(\omega t - kz + \alpha_1) - A_2 \cos(\omega t + kz + \alpha_2)\}. \end{aligned} \quad (0.60)$$

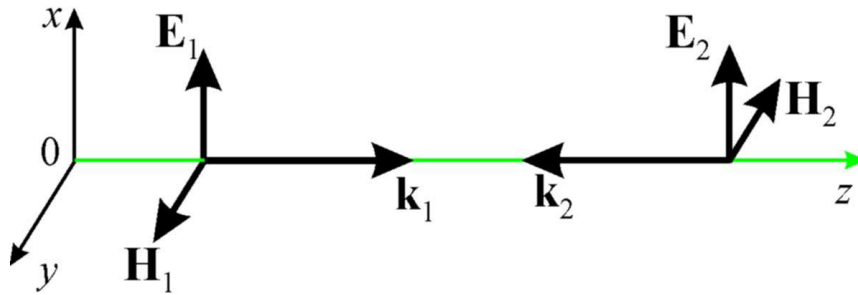


Рис. 2.3.

Полученное решение представляет собой суперпозицию двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях: по и против оси Oz (рис. 2.3). Их можно условно назвать «вперёд бегущей» (с волновым вектором $\mathbf{k}_1 \uparrow \uparrow Oz$) и «назад бегущей» с $\mathbf{k}_2 \uparrow \downarrow Oz$. Постоянные A_1 и A_2 представляют собой **действительные амплитуды** электрических полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 этих волн, α_1 и α_2 – их **начальные фазы**. Согласно (0.60) действительные амплитуды магнитных полей \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 в Z раз меньше амплитуд A_1 и A_2 . Видно также, что фазы колебаний векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} обеих волн одинаковы; они равны $\varphi_j = \omega t \mp kz + \alpha_j$; $j = 1, 2$. Обратите внимание, что изменению направления распространения волны соответствует смена знака не только перед k , но и перед Z (поэтому $\mathbf{H}_2 \uparrow \downarrow \mathbf{H}_1$). Впрочем, можно было бы изменить знак не \mathbf{H}_2 , а \mathbf{E}_2 : главное, чтобы векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} для обеих волн образовывали правовинтовую тройку.

2.5. Поляризация электромагнитных волн

В предыдущем разделе было показано, что векторы поля обеих собственных волн изотропного однородного диэлектрика имеют определенное направление в пространстве (ось x или ось y), т.е. обладают **линейной поляризацией**.

Выясним, какова поляризация волны в общем случае. В силу линейности уравнений Максвелла их общее решение является суперпозицией решений (E_x, H_y) и (E_y, H_x) , соответствующих нормальным волнам (см. п. 2.4). Таким образом, каждый из векторов поля плоской волны является суммой двух ортогональных составляющих с линейной поляризацией. Запишем мгновенные значения составляющих электрического поля в некоторой фиксированной плоскости $z = \text{const}$:

$$E_x = A_x \cos \omega\tau, \quad E_y = A_y \cos(\omega\tau + \delta), \quad (0.61)$$

где $\tau = t - z/v$, A_x и A_y – действительные амплитуды двух составляющих, δ – разность их фаз, которая лежит в интервале от $-\pi$ до π .

Исключая из уравнений (0.61) переменную τ , получаем уравнение эллипса, который описывает конец вектора \mathbf{E} в плоскости (x, y) , перпендикулярной направлению распространения волны:

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - \frac{2E_x E_y}{A_x A_y} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (0.62)$$

Такую волну называют **эллиптически поляризованной**.

В общем случае траектория конца вектора \mathbf{E} в плоскости (x, y) имеет вид эллипса («**эллипс поляризации**»), оси которого не совпадают с осями x и y (см. рис. 2.4). Вращение конца вектора \mathbf{E} по эллипсу поляризации может происходить в двух противоположных направлениях. Если при наблюдении НАВСТРЕЧУ ВОЛНЕ вектор \mathbf{E} обходит эллипс поляризации ПРОТИВ ЧАСОВОЙ СТРЕЛКИ, то поляризация называется **правой**, если же вращение вектора происходит ПО ЧАСОВОЙ СТРЕЛКЕ, то поляризация называется **левой**. Направление вращения определяется знаком разности фаз δ : при $\delta < 0$ поляризация правая, при $\delta > 0$ – левая.

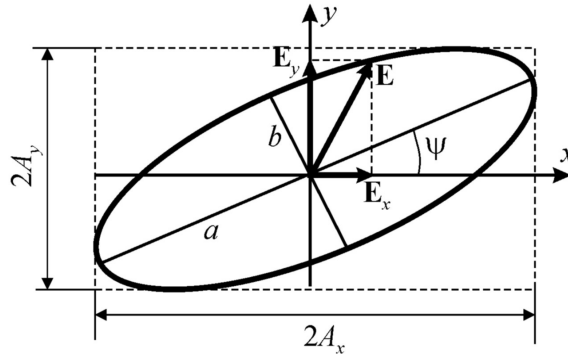


Рис. 2.4.

Рассмотрим возможные частные случаи.

1. $\delta = 0$ или $\delta = \pi$. Тогда из (0.62) получаем

$$\frac{E_x}{A_x} \pm \frac{E_y}{A_y} = 0 \quad \text{или} \quad E_y = \mp \frac{A_y}{A_x} E_x. \quad (0.63)$$

Это соотношение представляет собой уравнение прямой линии, угол наклона которой определяется отношением A_y/A_x . Таким образом, поляризация будет *линейной*, причём ориентация вектора \mathbf{E} относительно осей x и y может быть произвольной в зависимости от соотношения амплитуд ортогональных составляющих волны.

2. $\delta = \pm\pi/2$. Тогда (0.62) является уравнением эллипса, оси которого совпадают с осями координат:

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 = 1. \quad (0.64)$$

При $A_x = A_y = A$ (0.64) переходит в уравнение окружности:

$$E_x^2 + E_y^2 = A^2; \quad (0.65)$$

поляризация в этом случае называется **круговой**. Случаи $\delta = \pi/2$ и $\delta = -\pi/2$ отличаются направлением вращения вектора \mathbf{E} (левая и правая поляризации соответственно). Отметим, что в волне круговой поляризации комплексные x - и y -составляющие вектора электрического поля связаны соотношением

$$\tilde{E}_y = \pm i \tilde{E}_x. \quad (0.66)$$

где верхний знак соответствует левой, а нижний – правой поляризации. Действительно, в этом случае

$$\tilde{E}_x = A e^{i\omega\tau}, \quad \tilde{E}_y = A e^{i(\omega\tau \pm \pi/2)},$$

откуда и вытекает (0.66) с учётом того, что по формуле Эйлера

$$e^{\pm i\pi/2} = \cos(\pi/2) \pm i \sin(\pi/2) = \pm i.$$

Для количественного определения вида поляризации электромагнитной волны вводят следующие параметры:

а) **угол ориентации ψ эллипса поляризации**, равный углу между осью абсцисс и большой осью эллипса поляризации; для линейной и эллиптической поляризации угол ψ лежит в пределах $0 \dots 180^\circ$, а для круговой поляризации является неопределённым;

б) **коэффициент эллиптичности**, равный отношению малой оси эллипса поляризации к большой оси; в обозначениях рисунка 2.4

$$r = \frac{b}{a}; \quad (0.67)$$

для линейной поляризации $r = 0$ или $r \rightarrow \infty$, для круговой $r = 1$, а для эллиптической поляризации $0 < r < 1$;

в) **направление вращения** вектора \mathbf{E} в плоскости (x, y) , которое формально учитывают знаком перед коэффициентом эллиптичности: для левой поляризации $+r$, а для правой $-r$.

Выше было показано, что волны с эллиптической и круговой поляризацией можно математически представить в виде суперпозиции волн с взаимно ортогональной линейной поляризацией. Это правило можно расширить так, что волна, описываемая любой комбинацией поляризационных параметров, может быть представлена в виде суперпозиции волн, имеющих другие поляризационные параметры, например, линейно поляризованная волна может быть представлена в виде комбинации волн круговой поляризации.

2.6. Энергия и поток энергии бегущей монохроматической волны

Рассчитаем энергетические характеристики (вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$ и плотность электромагнитной энергии w) плоской бегущей монохроматической волны. Сначала покажем, каким образом эти величины выражаются через комплексные амплитуды векторов поля.

Вещественные значения \mathbf{E} , \mathbf{H} векторов поля можно выразить через их комплексные амплитуды $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \text{Re}(\tilde{\mathbf{E}} e^{i\omega t}) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{E}} e^{i\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}^* e^{-i\omega t}), \\ \mathbf{H} &= \text{Re}(\tilde{\mathbf{H}} e^{i\omega t}) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{H}} e^{i\omega t} + \tilde{\mathbf{H}}^* e^{-i\omega t}),\end{aligned}\tag{0.68}$$

где символ «*» обозначает комплексно-сопряжённые величины. Подставляя (0.68) в определение (1.23) вектора Пойнтинга, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] &= \frac{1}{4}([\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}^*] + [\tilde{\mathbf{E}}^*, \tilde{\mathbf{H}}] + [\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}]e^{2i\omega t} + [\tilde{\mathbf{E}}^*, \tilde{\mathbf{H}}^*]e^{-2i\omega t}) = \\ &= \frac{1}{2}\text{Re}[\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}^*] + \frac{1}{2}\text{Re}([\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}]e^{2i\omega t}).\end{aligned}\tag{0.69}$$

Первое слагаемое в правой части (0.69) не зависит от времени, а второе изменяется во времени гармонически с частотой 2ω .

Для среднего значения вектора $\mathbf{\Pi}$ за период колебаний T получим

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{\Pi} dt = \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}^*].\tag{0.70}$$

Таким образом, первое (постоянное) слагаемое вектора Пойнтинга (0.69) – это **среднее за период колебаний значение** плотности потока энергии электромагнитной волны. Второе слагаемое называют **колеблющейся составляющей** вектора Пойнтинга:

$$\mathbf{\Pi}_{\text{кол}} = \frac{1}{2} \text{Re}([\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}]e^{2i\omega t});\tag{0.71}$$

среднее значение этой величины за период колебаний T равно нулю.

На практике обычно интересуются средним значением $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$ вектора Пойнтинга. Поля в электромагнитных волнах колеблются с достаточно большими частотами, поэтому именно это значение фиксируют измерительные приборы. Ввиду своей важности величина (0.70) получила особое название: **интенсивность волны**.

Аналогичную структуру имеют выражения для плотности энергии электрического и магнитного поля; они также включают в себя среднее значение и колеблющуюся составляющую:

$$\begin{aligned}w_{\text{э}} &= \langle w_{\text{э}} \rangle + w_{\text{э кол}} = \frac{1}{4} \varepsilon \varepsilon_0 \text{Re}(\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^*) + \frac{1}{4} \varepsilon \varepsilon_0 \text{Re}(\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^* e^{2i\omega t}), \\ w_{\text{м}} &= \langle w_{\text{м}} \rangle + w_{\text{м кол}} = \frac{1}{4} \mu \mu_0 \text{Re}(\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^*) + \frac{1}{4} \mu \mu_0 \text{Re}(\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^* e^{2i\omega t}).\end{aligned}\tag{0.72}$$

В качестве простейшего примера рассчитаем энергетические характеристики плоской монохроматической волны с линейной поляризацией, распространяющейся в направлении оси Oz в однородном изотропном диэлектрике без потерь.

Пусть волна имеет компоненты полей

$$\tilde{E}_x = ZAe^{i(\omega t - kz + \alpha)}, \quad \tilde{H}_y = Ae^{i(\omega t - kz + \alpha)} \quad (0.73)$$

(буквой A здесь обозначена амплитуда колебаний магнитного вектора). Вектор Пойнтинга при этом будет иметь только z -составляющую:

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ E_x & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = E_x H_y \mathbf{z}_0 = \Pi_z \mathbf{z}_0, \quad (0.74)$$

где $E_x = \text{Re } \tilde{E}_x$; $H_y = \text{Re } \tilde{H}_y$. Выделяя вещественные части полей (0.73) и подставляя их в (0.74), получаем, что Π_z включает в себя постоянное среднее значение и колеблющуюся составляющую:

$$\begin{aligned} \Pi_z &= \langle \Pi_z \rangle + \Pi_{\text{кол}}; \\ \langle \Pi_z \rangle &= \frac{1}{2} ZA^2, \quad \Pi_{\text{кол}} = \frac{1}{2} ZA^2 \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (0.75)$$

где $\varphi = \omega t - kz + \alpha$ (разумеется, тот же результат получится и путём расчётов в комплексном виде согласно (0.69)). Интенсивность $\langle \Pi_z \rangle$ отлична от нуля, что говорит о переносе энергии бегущей волной в направлении её распространения (ось z).

Для плотностей энергии $w_{\text{э}}$ и $w_{\text{м}}$ получаем:

$$\begin{aligned} w_{\text{э}} &= \langle w_{\text{э}} \rangle + w_{\text{э кол}} = \frac{1}{4} \varepsilon \varepsilon_0 Z^2 A^2 + \frac{1}{4} \varepsilon \varepsilon_0 Z^2 A^2 \cos 2\varphi, \\ w_{\text{м}} &= \langle w_{\text{м}} \rangle + w_{\text{м кол}} = \frac{1}{4} \mu \mu_0 A^2 + \frac{1}{4} \mu \mu_0 A^2 \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (0.76)$$

Видно, что мгновенные значения $w_{\text{э}}$ и $w_{\text{м}}$ колеблются около своих средних значений $\langle w_{\text{э}} \rangle$ и $\langle w_{\text{м}} \rangle$ с удвоенной частотой 2ω , причём эти колебания совпадают по частоте и фазе с колебаниями плотности потока энергии Π_z . Заметим, что $\langle w_{\text{э}} \rangle = \langle w_{\text{м}} \rangle$ (это легко показать, используя определение (0.53) импеданса Z).

Суммарная средняя плотность электромагнитной энергии равна

$$\langle w \rangle = \langle w_{\text{э}} \rangle + \langle w_{\text{м}} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 Z^2 A^2 = \frac{1}{2} \mu \mu_0 A^2. \quad (0.77)$$

Интенсивность волны $\langle \Pi_z \rangle$ связана с величиной $\langle w \rangle$ соотношением

$$\langle \Pi_z \rangle = \langle w \rangle v$$

или в векторном виде

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \langle w \rangle \mathbf{v}, \quad (0.78)$$

где v – фазовая скорость волны. Это означает, что средняя электромагнитная энергия, которой обладает бегущая волна, переносится в направлении распространения волны.

Заметим, что к такому результату приводит тот факт, что векторы поля данной волны совершают колебания *в одинаковых фазах*. По аналогии с теорией цепей переменного тока переносимую волной мощность в этом случае принято называть **активной**. Если же перенос электромагнитной энергии в определённом направлении отсутствует, т.е. вектор Пойнтинга имеет только колеблющуюся составляющую, то говорят о **реактивной** мощности (энергии) колебаний. Этот случай будет рассмотрен далее на примере стоячей электромагнитной волны.

2.7. Стоячие электромагнитные волны

Рассмотрим суперпозицию двух волн одинаковой частоты и амплитуды, распространяющихся навстречу друг другу в однородном изотропном диэлектрике без потерь. Обычно такая ситуация возникает при полном отражении падающей волны от границы раздела сред. Для волн СВЧ-диапазона такой границей может служить поверхность металла.

Суммарное поле системы двух встречных волн запишем в вещественной форме:

$$\begin{aligned} E_x &= ZA \cos(\omega t - kz) + ZA \cos(\omega t + kz) = 2ZA \cos kz \cdot \cos \omega t, \\ H_y &= A \cos(\omega t - kz) - A \cos(\omega t + kz) = 2A \sin kz \cdot \sin \omega t. \end{aligned} \quad (0.79)$$

Запись (0.79) предполагает, что начальные фазы обеих волн одинаковы и равны нулю. Это упрощает запись формул и несущественно для дальнейшего изложения.

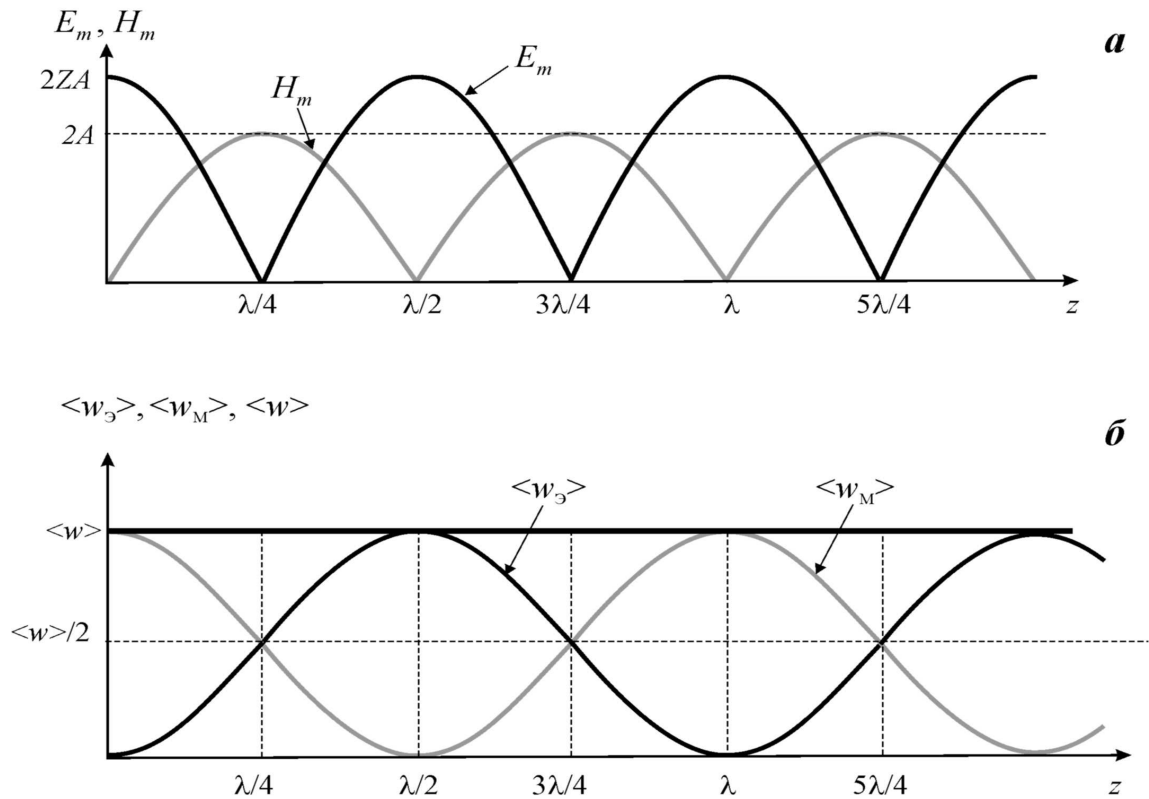


Рис. 2.5.

Из (0.79) видно, что суммарное поле представляет собой гармоническое колебание частоты ω . Однако электрическое поле изменяется по закону косинуса, а магнитное – синуса, что говорит о сдвиге фаз колебаний векторов поля, равном $\pi/2$.

Амплитуды колебаний электрического и магнитного полей

$$E_m = 2ZA|\cos kz|, \quad H_m = 2A|\sin kz| \quad (0.80)$$

периодически зависят от координаты z . На оси z можно выделить **узлы** – точки, в которых амплитуда поля равна нулю, и **пучности**, в которых амплитуда максимальна (рис. 2.5а). Расстояние между соседними узлами (пучностями) по оси z составляет $\lambda/2$ (λ – длина волны), причём пучности располагаются посередине между соседними узлами. При этом в узлах электрического поля располагаются пучности магнитного и наоборот. Положения узлов и пучностей на оси z неизменны, поэтому колебательный процесс данного типа называют **стоячей волной**.

Вектор Пойнтинга стоячей волны имеет только одну z -компоненту:

$$\Pi_z = E_x H_y = 2ZA^2 \sin 2kz \cdot \sin 2\omega t. \quad (0.81)$$

Видно, что поток энергии стоячей волны имеет только колеблющуюся составляющую, а его среднее значение (интенсивность) равно нулю. Таким образом, в отличие от бегущей волны, стоячая волна не переносит энергии. Это объясняется наличием узлов – точек, в которых одно из полей неизменно равно нулю.

Плотность энергии электрического и магнитного полей стоячей волны рассчитывают следующим образом:

$$\begin{aligned} w_э &= \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E_x^2 = \epsilon \epsilon_0 Z^2 A^2 \cos^2 kz (1 + \cos 2\omega t); \\ w_м &= \frac{1}{2} \mu \mu_0 H_y^2 = \mu \mu_0 A^2 \sin^2 kz (1 - \cos 2\omega t). \end{aligned} \quad (0.82)$$

Видно, что $w_э$ и $w_м$ колеблются около средних значений:

$$\langle w_э \rangle = \epsilon \epsilon_0 Z^2 A^2 \cos^2 kz; \quad \langle w_м \rangle = \mu \mu_0 A^2 \sin^2 kz, \quad (0.83)$$

которые отличны от нуля, но не равны друг другу, как в бегущей волне, поскольку различным образом зависят от координаты z (рис. 2.5б). Максимумы $\langle w_э \rangle$ приходятся на пучности электрического, а максимумы $\langle w_м \rangle$ – на пучности магнитного поля, которые разнесены в пространстве. В то же время суммарная средняя плотность энергии является постоянной величиной:

$$\langle w \rangle = \langle w_э \rangle + \langle w_м \rangle = \epsilon \epsilon_0 Z^2 A^2 = \mu \mu_0 A^2. \quad (0.84)$$

Итак, стоячая волна обладает некоторым запасом электромагнитной энергии, которая, однако, не вовлекается в процесс переноса. Эту энергию называют **реактивной** в отличие от «активной» энергии бегущей волны, переносящей энергию в пространстве. Обращаем внимание на причину такого различия: в бегущей волне колебания векторов поля синфазны, а в стоячей волне сдвиг фаз составляет $\pi/2$.

Перенос энергии стоячей волной является локальным, ограниченным пространственной ячейкой длиной $\lambda/4$ между двумя соседними узлами – узлом электрического и узлом магнитного полей. В течение половины периода колебаний энергия переносится, например, от пучности электрического поля к пучности магнитного, превращаясь при этом из электрической в магнитную. В течение следующей половины периода энергия переносится в противоположном направлении, испытывая обратное превращение. Аналогичные взаимные превращения электрической и магнитной составляющих реактивной энергии имеют место в цепях переменного тока.

2.8. Групповая скорость

Бегущая монохроматическая волна переносит энергию, но с её помощью нельзя передать информацию – сигнал для этого должен быть *модулированным*. Более того, на практике чисто монохроматическая волна не осуществима, так как должна была бы быть бесконечной – прежде всего во времени. Реальные сигналы чаще всего являются *импульсами* конечной длительности. С помощью спектрального разложения в ряд или интеграл Фурье произвольный сигнал можно представить в виде суперпозиции конечного или бесконечного числа монохроматических колебаний различных частот.

Волновой процесс, образованный монохроматическими составляющими, близкими по частоте, называется **группой волн** или **волновым пакетом**. Рассмотрим простейший волновой пакет, имеющий всего две монохроматических волны с одинаковыми амплитудами и различными, но близкими друг другу частотами ω_1 и ω_2 и волновыми числами k_1 и k_2 , т.е.

$$\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)/2 \ll \omega, \quad \Delta k = (k_2 - k_1)/2 \ll k,$$

где $\omega = (\omega_2 + \omega_1)/2$, $k = (k_2 + k_1)/2$.

Мгновенные значения напряжённости электрического поля данного сигнала можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= A \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A \cos(\omega_2 t - k_2 z) = \\ &= 2A \cos(\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot z) \cdot \cos(\omega t - kz). \end{aligned} \quad (0.85)$$

Данный процесс можно рассмотреть как монохроматическое колебание средней частоты ω , но с модулированной амплитудой, достаточно медленно изменяющейся во времени по гармоническому закону:

$$E_m(z, t) = 2A |\cos(\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot z)| \quad (0.86)$$

(частота изменения амплитуды $\Delta\omega \ll \omega$). Другими словами, процесс носит характер *биений*. Функция (0.86) – это *уравнение огибающей* высокочастотного сигнала.

Скорость переноса энергии группой волн (**групповую скорость**) найдём как *скорость некоторой фиксированной точки огибающей сигнала*. Положим $\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot z = \text{const}$ и найдём отсюда групповую скорость $v_{\text{гр}}$ как

$$v_{\text{гр}} = \frac{dz}{dx} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Переходя к пределу $\Delta\omega \rightarrow 0$, окончательно найдём

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (0.87)$$

Для расчета групповой скорости необходимо знать соотношение между частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} в виде зависимости $\omega(\mathbf{k})$ или $\mathbf{k}(\omega)$, которую называют **законом дисперсии** или **дисперсионным уравнением**.

Найдём групповую скорость плоской волны. С учётом (0.87) и (0.45)

$$v_{\text{гр}} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \left(\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{c} n \right) \right)^{-1} = \left(\frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} \right)^{-1}.$$

Если показатель преломления n не зависит от частоты ω , то групповая скорость равна фазовой:

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} = v_{\text{ф}}.$$

Если n и как следствие фазовая скорость волны являются функциями частоты ω , то говорят, что среда обладает **частотной дисперсией**. В этом случае фазовая и групповая скорости различны. Их связь выражается формулой

$$v_{\text{гр}} = \frac{d(v_{\text{ф}}k)}{dk} = v_{\text{ф}} + k \frac{dv_{\text{ф}}}{dk}. \quad (0.88)$$

Учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$, (0.88) можно привести к виду

$$v_{\text{гр}} = v_{\text{ф}} - \lambda \frac{dv_{\text{ф}}}{d\lambda}. \quad (0.89)$$

Соотношение (0.89) называют **формулой Рэлея**. Из неё видно, что фазовая и групповая скорости не только отличаются по величине, но могут также различаться и знаками. В анизотропных средах векторы фазовой и групповой скорости обычно не совпадают по направлению.

Групповая скорость характеризует перемещение в пространстве возмущения фиксированной амплитуды; поскольку с амплитудой связана энергия волны, то групповая скорость определяет скорость и направление переноса энергии волной. В соответствии с теорией относительности групповая скорость не может превышать скорости света в вакууме c . Напротив,

фазовая скорость является абстрактным понятием и не связана с переносом в пространстве чего-то материального, поэтому её величина может быть больше c .

Понятие групповой скорости применимо, когда потери малы и дисперсия является слабой. Если фазовые скорости различных составляющих сигнала будут сильно отличаться друг от друга, то со временем импульс будет «расплываться» и его огибающая будет терять свою форму. Проследить за движением какой-либо точки огибающей при этом невозможно, и понятие групповой скорости теряет свой смысл.

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА СРЕД

3.1. Отражение и преломление плоской волны на границе раздела двух диэлектриков

Электромагнитное поле в виде простейших волн – плоской, цилиндрической, сферической – может существовать только в бесконечном однородном изотропном пространстве. Если в пространство помещены тела, изменяющие его свойства, то нахождение электромагнитного поля сводится к решению задач дифракции. Наиболее простым случаем дифракции является отражение. Под отражением понимают процесс взаимодействия электромагнитных волн с телами, находящимися на пути их распространения, при котором структура результирующего поля может быть представлена в виде конечной суперпозиции волн той же самой структуры. Наиболее простые результаты получаются при рассмотрении отражения плоских волн.

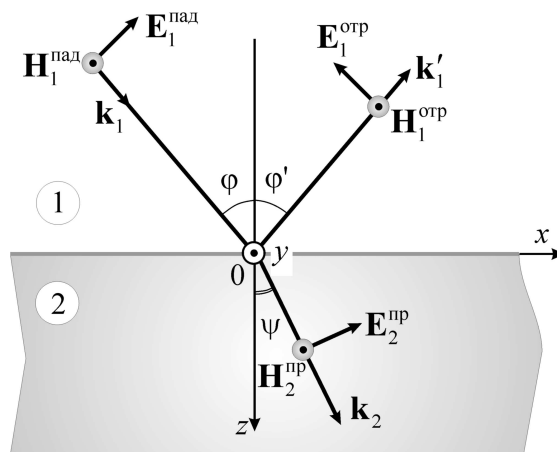


Рис. 3.1.

Покажем, что следствием граничных условий для векторов электромагнитного поля являются законы отражения и преломления электромагнитных волн.

Пусть на плоскую границу раздела двух диэлектрических сред 1 и 2 с проницаемостями ϵ_1, μ_1 и ϵ_2, μ_2 падает под углом φ плоская линейно поляризованная волна частоты ω_1 с волновым вектором \mathbf{k}_1 , где $k_1 = \omega_1/v_1$, v_1 – фазовая скорость волны в среде 1 (рис. 3.1). Углом падения принято называть угол между волновым вектором падающей волны и

нормалью к поверхности раздела, проведенной в точке падения (на рисунке 3.1 вдоль этой нормали направлена ось z декартовой системы координат). Помимо падающей волны, в среде 1 будет существовать отражённая волна частоты ω'_1 с волновым вектором \mathbf{k}'_1 , по модулю равным $k'_1 = \omega'_1 / v_1$ (φ' – угол отражения). Таким образом, часть энергии падающей волны возвращается в среду 1. Поле в среде 1 будет являться суперпозицией полей падающей и отражённой волн.

Если источники электромагнитного поля находятся в первой среде, поле во второй среде будет существовать только в виде одной волны (преломлённая волна), переносящей часть энергии падающей волны вглубь среды 2. Преломлённая волна частоты ω_2 будет распространяться под **углом преломления** ψ в направлении волнового вектора \mathbf{k}_2 , модуль которого $k_2 = \omega_2 / v_2$, где v_2 – фазовая скорость волны в среде 2 (пока не будем рассматривать особый случай полного внутреннего отражения, когда преломлённой волны в обычном смысле не существует).

С учётом сказанного поля в средах 1 и 2 можно представить в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}_1 &= \tilde{\mathbf{H}}_1^{\text{пад}} + \tilde{\mathbf{H}}_1^{\text{отр}} = \tilde{\mathbf{H}}_m^{\text{пад}} e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} + \tilde{\mathbf{H}}_m^{\text{отр}} e^{i(\omega'_1 t - \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r})}, \\ \tilde{\mathbf{E}}_1 &= \tilde{\mathbf{E}}_1^{\text{пад}} + \tilde{\mathbf{E}}_1^{\text{отр}} = \tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{пад}} e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} + \tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{отр}} e^{i(\omega'_1 t - \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r})}, \\ \tilde{\mathbf{H}}_2 &= \tilde{\mathbf{H}}_2^{\text{пр}} = \tilde{\mathbf{H}}_m^{\text{пр}} e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_2^{\text{пр}} = \tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{пр}} e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})}.\end{aligned}\tag{0.90}$$

Амплитуды электрического и магнитного векторов в (0.90) связаны соотношениями

$$\tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{пад}} = Z_1 \tilde{\mathbf{H}}_m^{\text{пад}}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{отр}} = Z_1 \tilde{\mathbf{H}}_m^{\text{отр}}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{пр}} = Z_2 \tilde{\mathbf{H}}_m^{\text{пр}},$$

где Z_1 и Z_2 – импедансы (волновые сопротивления) сред 1 и 2 соответственно.

Возникает задача определения комплексных амплитуд отражённой и прошедшей волн. Введем **амплитудные коэффициенты отражения и преломления** по электрическому полю

$$\tilde{\rho}(E) = \frac{\tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{отр}}}{\tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{пад}}}, \quad \tilde{\tau}(E) = \frac{\tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{пр}}}{\tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{пад}}},\tag{0.91}$$

которые в общем случае являются комплексными величинами. Аналогичные коэффициенты можно ввести и для напряжённостей магнитного поля,

при этом $\tilde{\rho}(H) = \tilde{\rho}(E)$, $\tilde{\tau}(H) = (Z_1/Z_2)\tilde{\tau}(E)$. Как видим, следует различать два коэффициента прохождения: по электрическому и по магнитному полям. Нахождение коэффициентов отражения и прохождения является основной целью граничных задач электродинамики.

Плоскость, в которой лежат волновой вектор падающей волны и нормаль к границе раздела, проведённая в точке падения, называется **плоскостью падения**. Следует различать два случая ориентации векторов поля (т.е. поляризации) падающей волны относительно плоскости падения.

I. Параллельная поляризация (в оптике она называется также р-поляризацией от нем. *parallel* –параллельный) вектора электрического поля **E**: вектор **E** лежит в плоскости падения, вектор магнитного поля **H** перпендикулярен плоскости падения (см. рис. 3.1).

Запишем проекции величин (0.90) на оси x , y и z . Для данного типа поляризации падающей волны вектор **H** каждой из трёх волн имеет только одну декартову компоненту H_y , тогда как вектор **E** – две: тангенциальную E_x и нормальную E_z , которые находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{1x}^{\text{пад}} &= E_1^{\text{пад}} \cos \varphi, & E_{1x}^{\text{отр}} &= -E_1^{\text{отр}} \cos \varphi', & E_{2x}^{\text{пр}} &= E_2^{\text{пр}} \cos \psi; \\ E_{1z}^{\text{пад}} &= -E_1^{\text{пад}} \sin \varphi, & E_{1z}^{\text{отр}} &= -E_1^{\text{отр}} \sin \varphi', & E_{2z}^{\text{пр}} &= -E_2^{\text{пр}} \sin \psi. \end{aligned}$$

Учтём также, что в (0.90)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} &= k_{1x}x + k_{1z}z = k_1 \sin \varphi \cdot x + k_1 \cos \varphi \cdot z, \\ \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} &= k'_{1x}x + k'_{1z}z = k'_1 \sin \varphi' \cdot x - k'_1 \cos \varphi' \cdot z, \\ \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} &= k_{2x}x + k_{2z}z = k_2 \sin \psi \cdot x + k_2 \cos \psi \cdot z. \end{aligned}$$

В результате приходим к следующим выражениям для проекций полей:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{1y} &= \tilde{H}_{1y}^{\text{пад}} + \tilde{H}_{1y}^{\text{отр}} = \tilde{A}e^{i(\omega_1 t - k_1 \sin \varphi \cdot x - k_1 \cos \varphi \cdot z)} + \\ &\quad + \tilde{\rho}_{\parallel} \tilde{A}e^{i(\omega'_1 t - k_1 \sin \varphi' \cdot x + k_1 \cos \varphi' \cdot z)}, \\ \tilde{E}_{1x} &= \tilde{E}_{1x}^{\text{пад}} + \tilde{E}_{1x}^{\text{отр}} = Z_1 \cos \varphi \cdot \tilde{H}_{1y}^{\text{пад}} - Z_1 \cos \varphi' \cdot \tilde{H}_{1y}^{\text{отр}}, \\ \tilde{E}_{1z} &= \tilde{E}_{1z}^{\text{пад}} + \tilde{E}_{1z}^{\text{отр}} = -Z_1 \sin \varphi \cdot \tilde{H}_{1y}^{\text{пад}} - Z_1 \sin \varphi' \cdot \tilde{H}_{1y}^{\text{отр}}, \\ \tilde{H}_{2y} &= \tilde{H}_{2y}^{\text{пр}} = \tilde{\tau}_{\parallel} \tilde{A}e^{i(\omega_2 t - k_2 \sin \psi \cdot x - k_2 \cos \psi \cdot z)}, \\ \tilde{E}_{2x} &= \tilde{E}_{2x}^{\text{пр}} = Z_2 \cos \psi \cdot \tilde{H}_{2y}^{\text{пр}}, & \tilde{E}_{2z} &= \tilde{E}_{2z}^{\text{пр}} = -Z_2 \sin \psi \cdot \tilde{H}_{2y}^{\text{пр}}, \end{aligned} \tag{0.92}$$

где амплитуда магнитного поля падающей волны обозначена как \tilde{A} , а ρ и τ являются коэффициентами по МАГНИТНОМУ полю. В обозначении коэффициентов ρ и τ учтено, что рассматривается параллельная поляризация электрического поля.

На границе раздела $z = 0$ должны выполняться граничные условия (1.19) и (1.17) для тангенциальных составляющих векторов \mathbf{H} и \mathbf{E} , т.е. компонент H_y и E_x :

$$\tilde{H}_{1y} = \tilde{H}_{2y}, \quad \tilde{E}_{1x} = \tilde{E}_{2x} \quad \text{при } z = 0,$$

или, подробнее,

$$\tilde{H}_{1y}^{\text{пад}} + \tilde{H}_{1y}^{\text{отр}} = \tilde{H}_{2y}^{\text{пр}}, \quad \tilde{E}_{1x}^{\text{пад}} + \tilde{E}_{1x}^{\text{отр}} = \tilde{E}_{2x}^{\text{пр}} \quad \text{при } z = 0. \quad (0.93)$$

Расписывая в (0.93) составляющие полей согласно (0.92), имеем

$$\begin{aligned} e^{i(\omega_1 t - k_1 \sin \varphi \cdot x)} + \tilde{\rho}_{\parallel} e^{i(\omega_1' t - k_1 \sin \varphi' \cdot x + k_1 \cos \varphi \cdot z)} &= \tilde{\tau}_{\parallel} e^{i(\omega_2 t - k_2 \sin \psi \cdot x)}, \\ Z_1 \cos \varphi \cdot e^{i(\omega_1 t - k_1 \sin \varphi \cdot x)} - Z_1 \cos \varphi' \cdot \tilde{\rho}_{\parallel} e^{i(\omega_1' t - k_1 \sin \varphi' \cdot x + k_1 \cos \varphi \cdot z)} &= \\ &= Z_2 \cos \psi \cdot \tilde{\tau}_{\parallel} e^{i(\omega_2 t - k_2 \sin \psi \cdot x)}. \end{aligned} \quad (0.94)$$

Эти соотношения должны выполняться в любой момент времени t и в любой точке границы раздела независимо от x . Это возможно, если

$$\omega_1 = \omega_1' = \omega_2, \quad k_1 \sin \varphi = k_1 \sin \varphi' = k_2 \sin \psi. \quad (0.95)$$

Отсюда вытекают известные из оптики **закон отражения** $\varphi = \varphi'$ и **закон преломления (закон Снеллиуса)**:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (0.96)$$

где $n_{1,2}$ – показатели преломления граничащих сред.

С учётом (0.95) система (0.94) переписется как

$$1 + \tilde{\rho}_{\parallel} = \tilde{\tau}_{\parallel}, \quad Z_1 \cos \varphi \cdot (1 - \tilde{\rho}_{\parallel}) = Z_2 \cos \psi. \quad (0.97)$$

Решая систему (0.97), получаем следующие выражения для коэффициентов отражения и прохождения, известные под названием **формул Френеля**:

$$\begin{aligned} \rho_{\parallel} &= \frac{Z_1 \cos \varphi - Z_2 \cos \psi}{Z_1 \cos \varphi + Z_2 \cos \psi}, \\ \tau_{\parallel}(H) &= \frac{2Z_1 \cos \varphi}{Z_1 \cos \varphi + Z_2 \cos \psi}, \quad \tau_{\parallel}(E) = \frac{2Z_2 \cos \psi}{Z_1 \cos \varphi + Z_2 \cos \psi}. \end{aligned} \quad (0.98)$$

II. **Перпендикулярная поляризация** (в оптике s-поляризация от нем. *senkrecht* – перпендикулярный) вектора электрического поля \mathbf{E} : вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости падения, вектор \mathbf{H} лежит в плоскости падения (рис. 3.2).

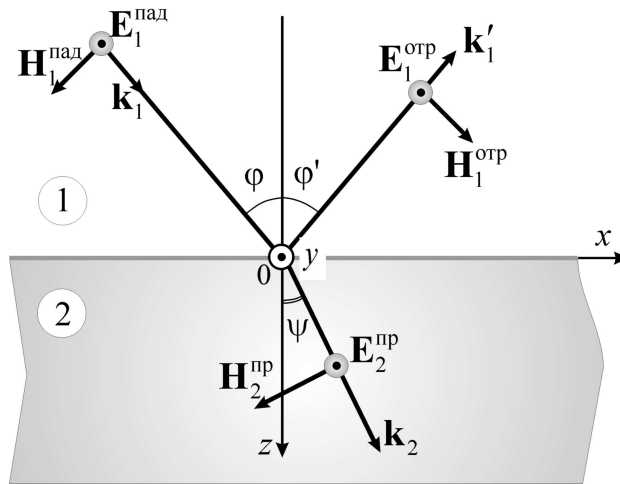


Рис. 3.2.

Формулы Френеля для данного вида поляризации получаются аналогично случаю I:

$$\rho_{\perp} = \frac{Z_2 \cos \varphi - Z_1 \cos \psi}{Z_2 \cos \varphi + Z_1 \cos \psi}, \quad (0.99)$$

$$\tau_{\perp}(H) = \frac{2Z_1 \cos \varphi}{Z_2 \cos \varphi + Z_1 \cos \psi}, \quad \tau_{\perp}(E) = \frac{2Z_2 \cos \varphi}{Z_2 \cos \varphi + Z_1 \cos \psi}.$$

Поскольку любую плоскую электромагнитную волну можно представить в виде суммы волн с параллельной и перпендикулярной поляризациями, то можно, пользуясь формулами Френеля (0.98) и (0.99), найти электромагнитные поля при произвольном случае отражения.

Коэффициенты ρ и τ в общем случае комплексны, т.е. имеют вид

$$\tilde{\rho} = |\tilde{\rho}| e^{i\xi_{\rho}}, \quad \tilde{\tau} = |\tilde{\tau}| e^{i\xi_{\tau}}, \quad (0.100)$$

где $|\tilde{\rho}|$ и $|\tilde{\tau}|$ определяют действительные амплитуды полей отражённой и прошедшей волн, а ξ_{ρ} и ξ_{τ} – фазовые сдвиги, приобретаемые падающей волной при отражении и преломлении. Если среды 1 и 2 являются прозрачными диэлектриками, т.е. потери электромагнитной энергии пренебрежимо малы, то ρ и τ вещественны (исключением является особый случай полного отражения, который будет рассмотрен ниже). Это означает, что

фазовые скачки при отражении и преломлении равны либо нулю, либо π . Поскольку всегда $\tau > 0$, то $\xi_\tau = 0$, т.е. фаза преломлённой волны равна фазе падающей. Скачок фазы ξ_ρ при отражении определяется знаком числителя в выражениях (0.98) и (0.99) для коэффициента ρ .

Кроме амплитудных коэффициентов отражения и преломления, вводятся величины, определяющие интенсивность отражённой и преломлённой волн, т.е. количество энергии, покидающее единицу площади поверхности раздела за 1 с. **Отражательная способность R** представляет собой отношение интенсивностей отражённой и падающей волн, **пропускательная способность T** – отношение интенсивностей преломлённой и падающей волн. Величины R и T связаны с амплитудными коэффициентами ρ , τ соотношениями

$$R = |\tilde{\rho}|^2, \quad T = \frac{Z_2 \cos \psi}{Z_1 \cos \varphi} |\tilde{\tau}(H)|^2 = \frac{Z_1 \cos \varphi}{Z_2 \cos \psi} |\tilde{\tau}(E)|^2. \quad (0.101)$$

При определённых условиях коэффициент отражения ρ на границе раздела двух сред может обратиться в нуль. Угол падения, при котором $\rho = 0$ и энергия падающей волны полностью проникает в среду 2, называется **углом Брюстера** и обозначается φ_B . Из (0.98) и (0.99) следует, что угол Брюстера удовлетворяет одному из двух соотношений:

$$Z_1 \cos \varphi_B - Z_2 \cos \psi = 0 \quad (0.102)$$

для параллельной поляризации электрического поля и

$$Z_2 \cos \varphi_B - Z_1 \cos \psi = 0 \quad (0.103)$$

для перпендикулярной.

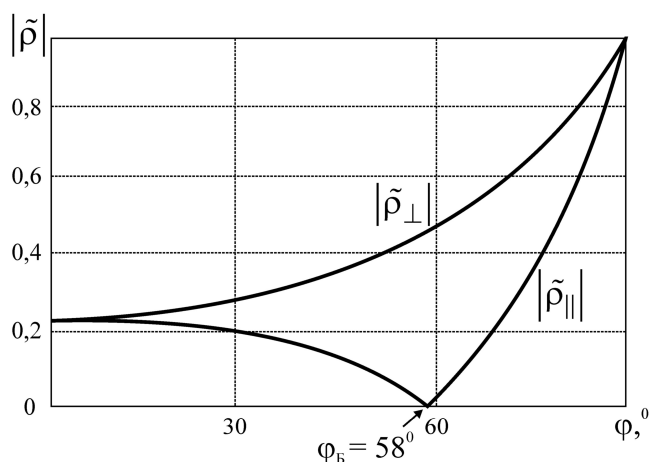


Рис. 3.3.

Условия (0.102) и (0.103) не могут выполняться одновременно, т.е. угол Брюстера существует только для одного вида поляризации падающей волны. Рассмотрим наиболее типичный случай, когда граничащие среды являются немагнитными ($\mu_1 = \mu_2 = 1$), а среда 2 является оптически более плотной, чем среда 1 ($n_2 > n_1$). При этом $Z_1 > Z_2$, а в силу закона Снеллиуса (0.96) $\psi < \varphi$. В таком случае уравнение (0.103) не имеет решений, а (0.102) приводит к следующему выражению для угла Брюстера:

$$\varphi_B = \text{arctg}(n_2/n_1). \quad (0.104)$$

Понятие угла Брюстера иллюстрирует рис. 3.3, на котором представлены зависимости модуля коэффициента отражения $|\tilde{\rho}|$ от угла падения φ для волн обеих поляризаций (расчёт проведён для границы раздела «воздух – полистирол»: $n_1 = 1$, $n_2 = 1,6$). Если на границу раздела сред под углом Брюстера падает волна с произвольной эллиптической поляризацией, то отражённая волна будет содержать только составляющую с перпендикулярной поляризацией, т.е. она окажется линейно поляризованной.

3.2. Полное внутреннее отражение

Рассмотрим закон Снеллиуса (0.96) в случае, когда среда 2 является оптически менее плотной, чем среда 1 ($n_2 < n_1$). Тогда $\psi > \varphi$, и поэтому найдётся критическое значение угла падения $\varphi_{кр}$, при котором угол преломления достигает своего предельного значения $\psi = 90^\circ$, т.е. преломлённая волна распространяется вдоль границы раздела:

$$\varphi_{кр} = \text{arcsin}(n_2/n_1). \quad (0.105)$$

При $\varphi > \varphi_{кр}$ преломлённой волны в обычном смысле не существует, и вся энергия падающей волны полностью возвращается в первую среду. Описанное явление называют **полным внутренним отражением**, а угол $\varphi_{кр}$ – **углом полного внутреннего отражения**.

Рассмотрим структуру поля в средах 1 и 2 при полном внутреннем отражении (на примере его электрической составляющей). Систему коор-

динат введём так же, как и на рисунках 3.1 и 3.2. Поле в среде 1 представляет собой суперпозицию падающей и отражённой волн:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_1 &= \tilde{\mathbf{E}}_1^{\text{пад}} + \tilde{\mathbf{E}}_1^{\text{отр}} = \\ &= \tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{пад}} e^{i(\omega t - k_1 \sin \varphi \cdot x - k_1 \cos \varphi \cdot z)} + \tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{отр}} e^{i(\omega t - k_1 \sin \varphi \cdot x + k_1 \cos \varphi \cdot z)}.\end{aligned}\quad (0.106)$$

При полном отражении амплитуды падающей и отраженной волн равны по модулю, но отличаются фазовым множителем $e^{i\xi}$. При этом (0.106) приводится к виду

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_1 &= \left| \tilde{\mathbf{E}}_m \right| \left(e^{-ik_1 \cos \varphi \cdot z} + e^{i(k_1 \cos \varphi \cdot z + \xi)} \right) e^{i(\omega t - k_1 \sin \varphi \cdot x)} = \\ &= \left| \tilde{\mathbf{E}}_m \right| \left(e^{-i(k_1 \cos \varphi \cdot z + \xi/2)} + e^{i(k_1 \cos \varphi \cdot z + \xi/2)} \right) e^{i(\omega t - k_1 \sin \varphi \cdot x + \xi/2)} = \\ &= 2 \left| \tilde{\mathbf{E}}_m \right| \cos(k_1 \cos \varphi \cdot z + \xi/2) e^{i(\omega t - k_1 \sin \varphi \cdot x + \xi/2)}.\end{aligned}\quad (0.107)$$

Из (0.107) следует, что в среде 1 в направлении оси x распространяется бегущая волна с фазовой скоростью

$$v_{\phi 1} = \frac{\omega}{k_1 \sin \varphi} = \frac{c}{n_1 \sin \varphi}.\quad (0.108)$$

Амплитуда этой волны гармонически зависит от координаты z ; это означает, что в направлении оси z поле представляет собой стоячую волну с чередованием минимумов (узлов) и максимумов (пучностей).

Несмотря на полное отражение, электромагнитное поле присутствует и в среде 2. Запишем его формально как обычную преломлённую волну:

$$\tilde{\mathbf{E}}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{пр}} e^{i(\omega t - k_2 \sin \psi \cdot x - k_2 \cos \psi \cdot z)}.\quad (0.109)$$

При полном отражении $\sin \psi = (n_1/n_2) \sin \varphi > 1$, что невозможно, если угол преломления ψ считать вещественным. Однако синус комплексного аргумента может принимать любые значения. Косинус угла ψ будет при этом мнимой величиной:

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \pm i \sqrt{\left(\frac{n_1 \sin \varphi}{n_2} \right)^2 - 1} = \pm i \alpha.\quad (0.110)$$

Подставляя выражения для $\sin \psi$ и $\cos \psi$ в (0.109), получим

$$\tilde{\mathbf{E}}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_m^{\text{пр}} e^{\mp \alpha k_2 z} e^{i(\omega t - k_2 \sin \psi \cdot x)}.\quad (0.111)$$

Источники поля находятся в среде 1, поэтому при удалении от границы раздела вглубь среды 2 амплитуда преломлённой волны может только убывать. Значит, в показателе первой экспоненты в (0.111) следует выбрать знак «минус» (при условии, что $\alpha > 0$). Поле (0.111) представляет собой волну, бегущую в направлении оси x с фазовой скоростью

$$v_{\phi 2} = \frac{\omega}{k_2 \sin \psi} = \frac{c}{n_2 \sin \psi}. \quad (0.112)$$

Амплитуда волны (0.111) экспоненциально убывает по мере удаления от границы раздела. Таким образом, поверхности равных амплитуд волны в среде 2 представляют собой плоскости $z = \text{const}$, параллельные границе раздела сред. В то же время фаза волны распространяется в направлении оси x , и поверхности равных фаз $z = \text{const}$ перпендикулярны границе раздела. Волну, у которой поверхности равных амплитуд не совпадают с поверхностями равных фаз, называют **неоднородной**.

Глубина, на которой амплитуда поля уменьшается в e раз, равна $d = 1/\alpha k_2$, и по порядку величины равна длине волны в среде 2. Таким образом, поле в среде 2 при полном отражении сосредоточено в достаточно тонком приповерхностном слое. В связи с этим волну данного типа, распространяющуюся параллельно границе раздела сред, называют **поверхностной волной**. Эту волну называют также **медленной**, поскольку ее фазовая скорость (0.112) при распространении в направлении оси x меньше фазовой скорости при распространении соответствующей однородной волны в среде 2, равной ω/k_2 .

Можно показать, что интенсивность (средняя плотность потока энергии) $\langle P_z \rangle$ волны в среде 2 в направлении оси z равна нулю (однако при этом существует колеблющаяся составляющая вектора Пойнтинга $P_{z \text{ кол}}$). Перенос энергии в среде 2 осуществляется только в направлении оси x (интенсивность $\langle P_x \rangle$ отлична от нуля). Детальный анализ нестационарной задачи показывает, что поток энергии во вторую среду отличен от нуля в первые моменты времени. В результате при переходе в стационарное состояние происходит установление во второй среде описанной выше поверхностной волны.

3.3. Прохождение плоской волны через плоскопараллельный диэлектрический слой

Рассмотрим плоскопараллельный диэлектрический слой толщиной d . Показатель преломления вещества слоя (среда 2) обозначим n_2 , а показатели преломления окружающих его сред 1 и 3 – n_1 и n_3 . Все показатели преломления будем считать постоянными (среды однородны). Получим формулы для расчёта коэффициентов отражения и прохождения электромагнитной волны, падающей на слой из среды 1. Ограничимся частным случаем *нормального падения*, при котором случаи параллельной и перпендикулярной поляризации падающей волны неотличимы друг от друга. Волновые векторы и векторы поля волн во всех трёх областях рассматриваемой структуры изображены на рисунке 3.4.

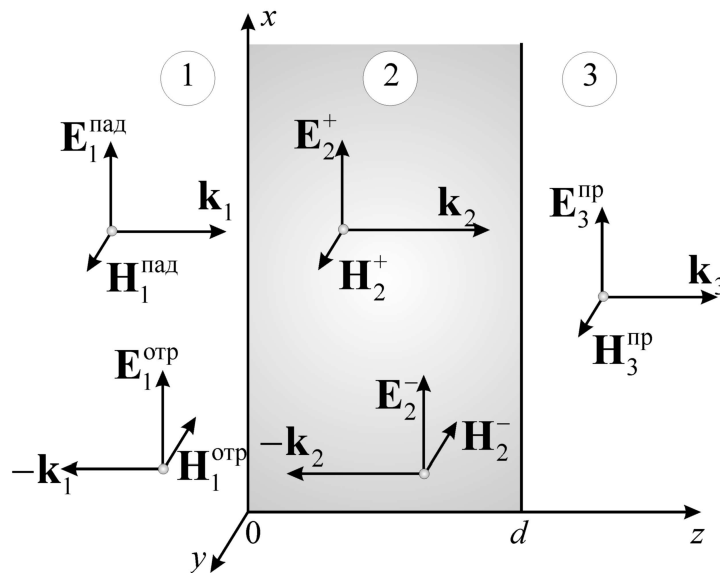


Рис. 3.4.

Векторы поля в среде 1 ($z \leq 0$) записываются в виде суперпозиции падающей и отражённой волн, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси z :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{1y} &= \tilde{H}_{1y}^{\text{пад}} + \tilde{H}_{1y}^{\text{отр}} = \tilde{A}e^{i(\omega t - k_1 z)} - \tilde{\rho}\tilde{A}e^{i(\omega t + k_1 z)}, \\ \tilde{E}_{1x} &= \tilde{E}_{1x}^{\text{пад}} + \tilde{E}_{1x}^{\text{отр}} = Z_1\tilde{A}e^{i(\omega t - k_1 z)} + \tilde{\rho}Z_1\tilde{A}e^{i(\omega t + k_1 z)}, \end{aligned} \quad (0.113)$$

где введён комплексный коэффициент отражения $\tilde{\rho}$. Волна внутри слоя (область 2, $0 \leq z \leq d$) формируется в результате многолучевой интерференции: её поле является суммой полей бесконечного числа парциальных

волн, возникающих при многократных отражениях от поверхностей слоя. Формально это поле можно, как и для среды 1, записать в виде суперпозиции двух встречных волн:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{2y} &= \tilde{H}_{2y}^+ + \tilde{H}_{2y}^- = \tilde{\beta}^+ \tilde{A} e^{i(\omega t - k_2 z)} - \tilde{\beta}^- \tilde{A} e^{i(\omega t + k_2 z)}, \\ \tilde{E}_{2x} &= \tilde{E}_{2x}^+ + \tilde{E}_{2x}^- = Z_2 \tilde{\beta}^+ \tilde{A} e^{i(\omega t - k_2 z)} + Z_2 \tilde{\beta}^- \tilde{A} e^{i(\omega t + k_2 z)},\end{aligned}\quad (0.114)$$

где $\tilde{\beta}^\pm$ – подлежащие определению комплексные коэффициенты. Наконец, в области 3 ($z \geq d$) существует одна прошедшая через слой волна:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{3y} &= \tilde{H}_{3y}^{\text{пр}} = \tilde{\tau} \tilde{A} e^{i(\omega t - k_3 z)}, \\ \tilde{E}_{3x} &= \tilde{E}_{3x}^{\text{пр}} = Z_3 \tilde{\tau} \tilde{A} e^{i(\omega t - k_3 z)}\end{aligned}\quad (0.115)$$

($\tilde{\tau}$ – комплексный коэффициент прохождения по магнитному полю).

Для нахождения коэффициентов $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\tau}$ используются граничные условия (1.19) и (1.17) для векторов магнитного и электрического полей. Их следует записать дважды – для границ раздела сред $z = 0$ и $z = d$:

$$\begin{cases} \tilde{H}_{1y}^{\text{пад}} + \tilde{H}_{1y}^{\text{отр}} = \tilde{H}_{2y}^+ + \tilde{H}_{2y}^-, \\ \tilde{E}_{1y}^{\text{пад}} + \tilde{E}_{1y}^{\text{отр}} = \tilde{E}_{2x}^+ + \tilde{E}_{2x}^- \end{cases} \quad \text{при } z = 0;$$

$$\begin{cases} \tilde{H}_{2y}^+ + \tilde{H}_{2y}^- = \tilde{H}_{3y}^{\text{пр}}, \\ \tilde{E}_{2x}^+ + \tilde{E}_{2x}^- = \tilde{E}_{3x}^{\text{пр}} \end{cases} \quad \text{при } z = d.$$
(0.116)

Подставляя в (0.116) выражения для проекций векторов поля (0.113) – (0.115), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 - \tilde{\rho} = \tilde{\beta}^+ - \tilde{\beta}^-, \\ Z_1(1 + \tilde{\rho}) = Z_2(\tilde{\beta}^+ + \tilde{\beta}^-), \\ \tilde{\beta}^+ e^{-ik_2 d} - \tilde{\beta}^- e^{ik_2 d} = \tilde{\tau} e^{-ik_3 d}, \\ Z_2(\tilde{\beta}^+ e^{-ik_2 d} + \tilde{\beta}^- e^{ik_2 d}) = Z_3 \tilde{\tau} e^{-ik_3 d}. \end{cases}\quad (0.117)$$

Исключая из системы (0.117) коэффициенты $\tilde{\beta}^+$ и $\tilde{\beta}^-$, получаем искомые выражения для $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\tau}$:

$$\tilde{\rho} = \frac{Z_2(Z_3 - Z_1) \cos k_2 d + i(Z_2^2 - Z_1 Z_3) \sin k_2 d}{Z_2(Z_3 + Z_1) \cos k_2 d + i(Z_2^2 + Z_1 Z_3) \sin k_2 d}, \quad (0.118)$$

$$\tilde{\tau} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2(Z_3 + Z_1) \cos k_2 d + i(Z_2^2 + Z_1 Z_3) \sin k_2 d} \cdot e^{ik_3 d}.$$

Коэффициент $\tilde{\tau}$ в (0.115) определён как коэффициент прохождения по магнитному полю. Коэффициент прохождения по электрическому полю связан с ним соотношением $\tilde{\tau}(E) = (Z_3/Z_1) \tilde{\tau}(H)$. Представляя комплексные коэффициенты (0.118) в виде (0.100), можно определить амплитуды и фазы отражённой и прошедшей через слой волн.

Из формул (0.118) видно, что коэффициенты отражения и прохождения являются периодическими функциями толщины слоя d . Не вдаваясь в подробности, отметим некоторые частные случаи. Прежде всего, установим условия полного прохождения энергии падающей волны через слой, т.е. когда коэффициент отражения $\tilde{\rho}$ обращается в нуль.

Случай 1. Если $k_2 d = N\pi$, где $N = 1, 2, 3, \dots$, т.е. толщина слоя принимает ряд значений $d = N \cdot \lambda_2/2$, то $\cos k_2 d = \pm 1$, $\sin k_2 d = 0$ и коэффициент отражения равен

$$\tilde{\rho} = \frac{Z_3 - Z_1}{Z_3 + Z_1}. \quad (0.119)$$

Если слой граничит с одинаковыми средами, то $Z_1 = Z_3$ и $\tilde{\rho} = 0$. Данный случай хорошо известен в оптике как слой толщиной в полволны, или полуволновая пластинка (плёнка). Выражение (0.119) совпадает с формулой коэффициента отражения от одиночной границы раздела сред с импедансами Z_1 и Z_3 (см. формулы Френеля (0.98) и (0.99)).

Случай 2. Пусть $k_2 d = N\pi/2$, где N – НЕЧЁТНОЕ целое число ($N = 1, 3, 5, \dots$), т.е. $d = N \cdot \lambda_2/4$ («слой в четверть длины волны», «четвертьволновая пластинка»). Тогда $\cos k_2 d = 0$, $\sin k_2 d = \pm 1$ и

$$\tilde{\rho} = \frac{Z_2^2 - Z_1 Z_3}{Z_2^2 + Z_1 Z_3}. \quad (0.120)$$

В данном случае коэффициент отражения обращается в нуль при выполнении условия

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}. \quad (0.121)$$

Для немагнитных сред ($\mu = 1$) $Z = 1/n$ (n – показатель преломления среды) и условие (0.121) записывается как $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$. Полученный результат используется при нанесении на поверхности просветляющих покрытий с целью уменьшения отражательной способности. Толщина просветляющего покрытия должна составлять четверть длины волны, а его материальные параметры должны обеспечивать выполнение условия (0.121).

3.4. Волны в плоскостой периодической среде.

Дисперсионное уравнение для собственных волн

Рассмотрим двухслойную периодическую структуру, состоящую из чередующихся слоёв диэлектриков с толщинами d_1 и d_2 , имеющих диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2 (рис. 3.5). Два соседних слоя составляют период структуры $d = d_1 + d_2$. Пусть электромагнитная волна распространяется вдоль оси периодичности структуры z , направленной перпендикулярно границам раздела. Будем предполагать, что в плоскости слоёв поля не зависят от координат x и y (плоская волна). Тогда в каждом из слоёв распространение собственных волн можно описать с помощью одномерного волнового уравнения вида (1.32):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (0.122)$$

где u — компонента поля волны, v — ее фазовая скорость в среде. При подстановке решения в виде $u = u_m \exp[i(\omega t - k_z z)]$ уравнение (0.122) приводит к **уравнению Хилла**:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + k^2(z) u = 0, \quad (0.123)$$

где волновое число k является периодической (ступенчатой) функцией координаты z (см. рис. 3.5б):

$$k^2(z) = \begin{cases} k_1^2 = k_0^2 \varepsilon_1 \mu, & 0 < z < d_1, \\ k_2^2 = k_0^2 \varepsilon_2 \mu, & d_1 < z < d_2 \end{cases}$$

(индексы 1 и 2 обозначают принадлежность к слоям с различными параметрами). Уравнение Гельмгольца, в котором $k \neq f(z)$, является частным случаем уравнения Хилла.

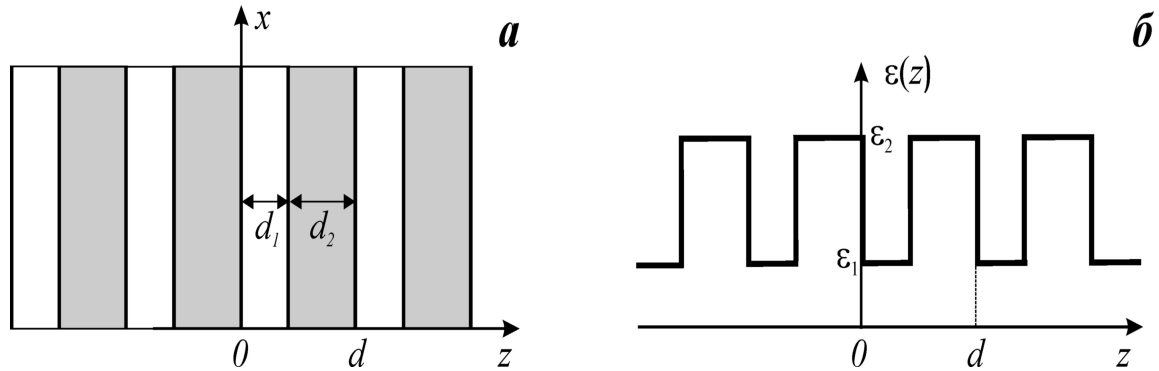


Рис. 3.5.

Для ступенчатой функции уравнение Хилла решается следующим образом. Для каждого из двух соседних слоёв запишем решение уравнения Гельмгольца в виде суперпозиции двух встречных волн:

$$\begin{cases} u_1(z) = A_1 e^{-ik_1 z} + A_2 e^{ik_1 z}, & 0 < z < d_1, \\ u_2(z) = B_1 e^{-ik_2 z} + B_2 e^{ik_2 z}, & d_1 < z < d_2. \end{cases} \quad (0.124)$$

Для определения четырех констант A_j и B_j ($j=1, 2$) следует учесть непрерывность как самого поля u , так и его производной du/dz на границах раздела. Непрерывность производной обусловлена тем, что согласно уравнениям Максвелла I и II системы (2.6) связь между электрическим и магнитным полями волны устанавливается с помощью производных по координате (операция ротора).

На границе $z = d_1$ имеем

$$u_1(z) = u_2(z), \quad \frac{du_1(z)}{dz} = \frac{du_2(z)}{dz} \quad \text{при } z = d_1. \quad (0.125)$$

Кроме того, решение должно удовлетворять условию периодичности, т.е. поля на границах периода при $z = 0$ и $z = d$ могут отличаться только на фазовый множитель

$$u(d) = u(0) e^{-ikd}. \quad (0.126)$$

Соотношение (3.6) носит название **теоремы Флоке**, сформулированной в 1883 году. В дальнейшем эта теорема была применена Блохом в

1928 году к решению уравнения в частных производных с периодическими коэффициентами. Решения Блоха легли в основу электронной теории твердого тела. Волновое число \bar{k} называется **блеховским волновым числом**.

Подставляя поля (0.124) в соотношения (0.125) и (0.126), получаем

$$\begin{aligned} A_1 e^{-ik_1 d_1} + A_2 e^{ik_1 d_1} &= B_1 e^{-ik_2 d_1} + B_2 e^{ik_2 d_1}, \\ k_1(A_1 e^{-ik_1 d_1} - A_2 e^{ik_1 d_1}) &= k_2(B_1 e^{-ik_2 d_1} - B_2 e^{ik_2 d_1}), \\ A_1 + A_2 &= e^{-i\bar{k}d} (B_1 e^{-ik_2 d} + B_2 e^{ik_2 d}), \\ k_1(A_1 - A_2) &= e^{-i\bar{k}d} k_2 (B_1 e^{-ik_2 d} - B_2 e^{ik_2 d}). \end{aligned} \quad (0.127)$$

Формулы (0.127) являются линейной однородной системой уравнений относительно неизвестных A_1, A_2, B_1 и B_2 . Её нетривиальное решение существует лишь в том случае, если определитель системы равен нулю. Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение:

$$y^2 - 2y\Phi + 1 = 0, \quad (0.128)$$

где введены обозначения

$$y = \exp(-i\bar{k}d), \quad \Phi = \cos(k_1 d_1) \cos(k_2 d_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \sin(k_1 d) \sin(k_2 d_2).$$

По теореме Виета для корней $y_{1,2}$ уравнения (0.128) имеем $y_1 y_2 = 1$, т.е. $y_1 = \exp(i\bar{k}d)$, $y_2 = \exp(-i\bar{k}d)$ и $y_1 + y_2 = 2 \cos(\bar{k}d) = 2\Phi$. В итоге получаем дисперсионное уравнение рассматриваемой структуры, связывающее волновое число \bar{k} с известными величинами k_1 и k_2 :

$$\cos(\bar{k}d) = \cos(k_1 d_1) \cos(k_2 d_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \sin(k_1 d) \sin(k_2 d_2). \quad (0.129)$$

Случай $|\cos \bar{k}d| < 1$ соответствует полосе прозрачности структуры. Если же $|\cos \bar{k}d| > 1$, то мы попадаем в полосу непропускания (волновое число \bar{k} будет мнимым, и волна становится экспоненциально затухающей).

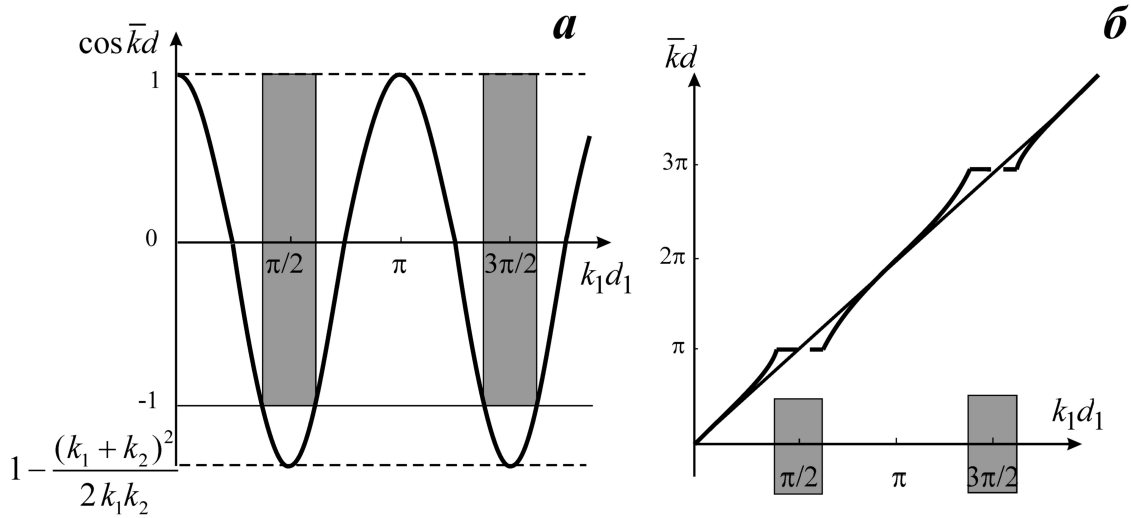


Рис. 3.6.

Анализ дисперсионного уравнения (0.129) достаточно сложен, поэтому рассмотрим частный случай, положив $k_1d_1 = k_2d_2$. Это означает, что при распространении в каждом из слоёв фаза волны изменяется на одну и ту же величину. При этом (0.129) принимает вид

$$\cos(\bar{k}d) = 1 - \frac{(k_1 + k_2)^2}{2k_1k_2} \cdot \sin^2(k_1d_1). \quad (0.130)$$

На рисунке 3.6а построена правая часть (0.130). Точки пересечения с прямой -1 соответствуют границам областей непрозрачности, которые на рисунке заштрихованы. Рисунок 3.6б иллюстрирует зависимость волнового числа \bar{k} от частоты ω , т.е. вид закона дисперсии.

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С КОМПЛЕКСНЫМИ МАТЕРИАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

4.1. Плоские монохроматические волны в среде с комплексными материальными параметрами

Выше, в главах 2 и 3, значения материальных констант ε и μ предполагались *вещественными*. Теперь рассмотрим более общий случай, когда диэлектрическая и (или) магнитная проницаемость имеют отличные от нуля мнимые части.

Записать выражение для *комплексной* проницаемости, например, $\tilde{\varepsilon}$, можно различными способами:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon'' = |\tilde{\varepsilon}|e^{-i\delta_\varepsilon} = |\tilde{\varepsilon}|\cos\delta_\varepsilon - i|\tilde{\varepsilon}|\sin\delta_\varepsilon, \quad (0.131)$$

где ε' и ε'' – соответственно вещественная и мнимая части комплексного числа $\tilde{\varepsilon}$, $|\tilde{\varepsilon}|$ – его модуль, δ_ε – аргумент (фаза). Аналогично можно представить и комплексную магнитную проницаемость $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mu} = \mu' - i\mu'' = |\tilde{\mu}|e^{-i\delta_\mu} = |\tilde{\mu}|\cos\delta_\mu - i|\tilde{\mu}|\sin\delta_\mu. \quad (0.132)$$

Фазовые углы δ_ε и δ_μ комплексных проницаемостей $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ называют **углами диэлектрических (магнитных) потерь**. В справочниках часто приводят значения **тангенсов диэлектрических (магнитных) потерь**, т.е. величин $\operatorname{tg}\delta_\varepsilon = \varepsilon''/\varepsilon'$ и $\operatorname{tg}\delta_\mu = \mu''/\mu'$.

При учёте комплексности параметров $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ внешний вид уравнений Максвелла и их решений не изменяется. Однако теперь при анализе выражений вида (2.26), (2.27) для полей плоских монохроматических волн необходимо учесть, что:

1) становится комплексным показатель преломления

$$\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}} = n' - in'' \quad (0.133)$$

и, соответственно, волновое число (постоянная распространения)

$$\tilde{k} = k_0\tilde{n} = \frac{\omega}{c}\tilde{n} = k' - ik''; \quad (0.134)$$

2) становится комплексным импеданс (волновое сопротивление)

$$\tilde{Z} = \sqrt{\tilde{\mu}\mu_0/\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0} = Z' - iZ'' = |\tilde{Z}|e^{-i\zeta}, \quad (0.135)$$

где $|\tilde{Z}|$ – модуль, ζ – фаза комплексного импеданса.

При учёте комплексности величин \tilde{k} и \tilde{Z} выражения для компонент векторов поля плоской волны линейной поляризации, распространяющейся в положительном направлении оси z , принимают вид:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x &= |\tilde{Z}| A e^{-k''z} e^{i(\omega t - k'z + \alpha - \zeta)}, \\ \tilde{H}_y &= A e^{-k''z} e^{i(\omega t - k'z + \alpha)}\end{aligned}\quad (0.136)$$

(здесь A и α – амплитуда и начальная фаза магнитного поля волны).

Анализируя (0.136), приходим к следующим выводам.

1. Роль волнового числа для волны вида (0.136) играет вещественная часть k' комплексного волнового числа \tilde{k} , при этом выполняются соотношения

$$k' = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

причем λ – длина волны в среде.

2. Амплитуда волны (выражение, стоящее перед комплексной экспонентой) оказывается зависящей от координаты z по экспоненциальному закону. При $k'' > 0$ амплитуда уменьшается в направлении оси z (волна затухает), а при $k'' < 0$ – увеличивается (волна усиливается). Затухание волны характерно в первую очередь для сред, обладающих потерями, где оно обусловлено переходом энергии ЭМП волны в другие формы энергии (обычно во внутреннюю). Такая среда называется **поглощающей** или **пассивной**. Усиление волны наблюдается в квантовых генераторах, среды такого типа называют **усиливающими** или **активными** (не путать с понятиями «активные компоненты полей» и «активная энергия!»). Мнимая часть k'' называется **коэффициентом затухания (усиления)**. Его величина обратна расстоянию d_e , на котором амплитуда волны убывает (возрастает) в e раз.

3. Отношение амплитуд колебаний электрического и магнитного полей равно модулю комплексного импеданса среды:

$$|\tilde{Z}| = \sqrt{Z'^2 + Z''^2}.$$

4. При отличии от нуля мнимой части импеданса $Z'' \neq 0$ возникает сдвиг фаз между колебаниями электрического и магнитного векторов, равный фазе комплексного импеданса $\zeta = \arctg(Z''/Z')$. Величина сдвига фаз

ζ играет существенную роль в процессах переноса энергии электромагнитной волной.

Итак, комплексность материальных констант влечёт за собой затухание или усиление электромагнитной волны, а также рассогласование фаз колебаний векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Далее будут рассматриваться только пассивные среды, в которых имеет место затухание электромагнитных волн (оно не обязательно связано с потерями!). Как будет показано ниже, для ПАССИВНЫХ сред углы потерь δ_ϵ , δ_μ должны быть ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ, если изображать комплексные числа $\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\mu}$ точками координатной плоскости. На рисунке 4.1 изображена координатная плоскость (ϵ', ϵ'') , каждой точке которой соответствует определённое значение комплексной диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}$. Комплексное число $\tilde{\epsilon}$ также может быть представлено вектором, соединяющим начало координат с соответствующей точкой плоскости; его модуль равен $|\tilde{\epsilon}|$, а угол, который он образует с осью абсцисс – углу потерь δ_ϵ .

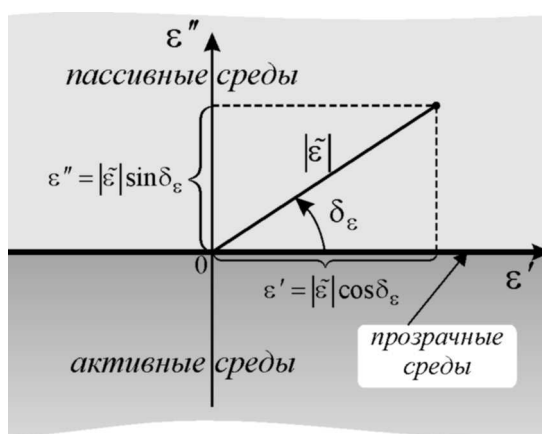


Рис. 4.1.

Пассивным средам на рисунке 4.1 соответствует верхняя полуплоскость ($\epsilon'' > 0$, $0 < \delta_\epsilon < \pi$), активным – нижняя ($\epsilon'' < 0$, $-\pi < \delta_\epsilon < 0$). Прозрачным средам без потерь (в данном случае – диэлектрических) соответствуют точки с $\delta_\epsilon = 0, \pi$ ($\epsilon'' = 0$). Аналогично выглядит комплексная плоскость значений магнитной проницаемости $\tilde{\mu}$.

4.2. Потоки энергии монохроматических волн в средах с комплексными материальными параметрами

Рассчитаем суммарную интенсивность двух встречных волн одинаковой частоты в среде с комплексными параметрами $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{\mu}$. Пусть волны распространяются в положительном и отрицательном направлениях оси z и имеют при этом одинаковую линейную поляризацию электрического поля вдоль оси x (см. рис. 2.3). Воспользуемся формулой

$$\langle \Pi_z \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\tilde{E}_x \tilde{H}_y^*), \quad (0.137)$$

где поля \tilde{E}_x и \tilde{H}_y определяются выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= |\tilde{Z}| A_1 e^{-k''z} e^{i(\omega t - k'z + \alpha_1 - \zeta)} + |\tilde{Z}| A_2 e^{k''z} e^{i(\omega t + k'z + \alpha_2 - \zeta)}, \\ \tilde{H}_y &= A_1 e^{-k''z} e^{i(\omega t - k'z + \alpha_1)} - A_2 e^{k''z} e^{i(\omega t + k'z + \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (0.138)$$

Сначала запишем комплексно сопряжённое выражение y -компоненты магнитного поля:

$$\tilde{H}_y^* = A_1 e^{-k''z} e^{-i(\omega t - k'z + \alpha_1)} - A_2 e^{k''z} e^{-i(\omega t + k'z + \alpha_2)},$$

а затем – произведение $\tilde{E}_x \tilde{H}_y^*$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x \tilde{H}_y^* &= |\tilde{Z}| A_1^2 e^{-2k''z} e^{-i\zeta} - |\tilde{Z}| A_2^2 e^{2k''z} e^{-i\zeta} + \\ &+ |\tilde{Z}| A_1 A_2 e^{-i\zeta} e^{i(2k'z + \alpha_2 - \alpha_1)} - |\tilde{Z}| A_1 A_2 e^{-i\zeta} e^{-i(2k'z + \alpha_2 - \alpha_1)}. \end{aligned} \quad (0.139)$$

Последние два слагаемых в (0.139) можно объединить в одно с учётом соотношения

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi,$$

после чего (0.139) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x \tilde{H}_y^* &= |\tilde{Z}| A_1^2 e^{-2k''z} e^{-i\zeta} - |\tilde{Z}| A_2^2 e^{2k''z} e^{-i\zeta} + \\ &+ 2i |\tilde{Z}| A_1 A_2 e^{-i\zeta} \cdot \sin(2k'z + \alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned} \quad (0.140)$$

Теперь выделим вещественную часть выражения (0.140). Учтём, что

$$\operatorname{Re}(e^{-i\zeta}) = \cos \zeta, \quad |\tilde{Z}| \cos \zeta = Z',$$

$$\operatorname{Re}(ie^{-i\zeta}) = \sin \zeta, \quad |\tilde{Z}| \sin \zeta = Z''.$$

В итоге получаем, что полный поток энергии вдоль оси z можно представить в виде алгебраической суммы трёх слагаемых:

$$\langle P_z \rangle = P_1 + P_2 + P_{\text{int}},$$

где $P_1 = \frac{1}{2} Z' A_1^2 e^{-2k''z}$, $P_2 = -\frac{1}{2} Z' A_2^2 e^{2k''z}$,

$$P_{\text{int}} = Z'' A_1 A_2 \cdot \sin(2k'z + \alpha_2 - \alpha_1).$$

Первые два слагаемых P_1 , P_2 в (0.141) имеют противоположные знаки. Это – потоки энергии каждой из двух встречных волн. При наличии потерь они затухают в направлении распространения соответствующей волны (постоянная затухания равна $2k''$). Третье слагаемое P_{int} – интерференционный поток энергии встречных волн, пропорциональный произведению их амплитуд $A_1 A_2$ и зависящий от разности их начальных фаз $\alpha_2 - \alpha_1$. Интерференционный поток является незатухающим: от координаты z он зависит по гармоническому закону. В частном случае $k' = 0$ P_{int} является постоянной величиной. Еще одна особенность интерференционного потока заключается в том, что потоки одиночных волн $P_{1,2}$ пропорциональны вещественной части импеданса $Z' = |\tilde{Z}| \cos \zeta$, а P_{int} – мнимой части $Z'' = |\tilde{Z}| \sin \zeta$. Поток энергии одиночной волны равен нулю, если векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} колеблются со сдвигом по фазе $\zeta = \pm\pi/2$ (компоненты векторов поля в этом случае называются «реактивными»). Перенос электромагнитной энергии в этом случае возможен только при наличии двух встречных волн за счёт интерференционного потока P_{int} .

Предположим теперь, что две волны одинаковой частоты, создаваемые двумя независимыми источниками, распространяются в одном направлении. Расчёт, аналогичный приведённому, даёт, что суммарный поток энергии в направлении распространения (ось z), как и поток (0.141), состоит из трёх слагаемых:

$$\langle P_z \rangle = P_1 + P_2 + P_{\text{int}},$$

где $P_1 = \frac{1}{2} Z' A_1^2 e^{-2k''z}$, $P_2 = \frac{1}{2} Z' A_2^2 e^{-2k''z}$,

$$P_{\text{int}} = Z' A_1 A_2 e^{-2k''z} \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Однако интерференционный поток P_{int} в случае однонаправленных волн по своим свойствам не отличается от потоков P_1 и P_2 : он пропорциона-

лен вещественной части импеданса Z' и экспоненциально затухает в направлении распространения.

4.3. Комплексный показатель преломления. Правые и левые среды

Получим и проанализируем выражения для вещественной и мнимой частей комплексного показателя преломления \tilde{n} . Комплексные материальные константы $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{\mu}$ представим в экспоненциальной форме. Тогда

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\epsilon}\tilde{\mu} = |\tilde{\epsilon}||\tilde{\mu}|e^{-i(\delta_\epsilon + \delta_\mu)} = |\tilde{\epsilon}||\tilde{\mu}|\{\cos(\delta_\epsilon + \delta_\mu) - i\sin(\delta_\epsilon + \delta_\mu)\}.$$

Извлекая квадратный корень из комплексного числа \tilde{n}^2 , получаем

$$\tilde{n} = \pm\sqrt{|\tilde{\epsilon}||\tilde{\mu}|}e^{-i(\delta_\epsilon + \delta_\mu)/2} = \pm|\tilde{n}|(\cos\delta - i\sin\delta), \quad (0.143)$$

где $|\tilde{n}| = \sqrt{|\tilde{\epsilon}||\tilde{\mu}|}$ – модуль комплексного показателя преломления, $\delta = (\delta_\epsilon + \delta_\mu)/2$ – его фазовый угол. Возникает проблема выбора знака перед радикалом в (0.143). Для её решения уточним физический смысл действительной n' и мнимой n'' частей комплексного показателя преломления \tilde{n} .

Согласно (0.136), векторы поля волны в среде с комплексным показателем преломления (0.133) зависят от координаты z по закону

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \sim \exp(-k_0 n'' z) \exp[i(\omega t - k_0 n' z)]. \quad (0.144)$$

Вещественная часть n' показателя преломления определяет вещественную часть постоянной распространения $k' = k_0 n'$ и величину фазовой скорости $v_\phi = c/n'$. Примем, что положительное направление оси Oz совпадает с направлением переноса энергии волной, т.е. с её вектором Пойнтинга $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$, всегда образующего правый винт с направлениями векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Тогда при $n' > 0$ векторы \mathbf{k} и $\mathbf{\Pi}$ сонаправлены, и вектор \mathbf{k} образует с векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} правую тройку (рис. 4.2а). Соответственно, при $n' < 0$ векторы \mathbf{k} и $\mathbf{\Pi}$ антипараллельны (рис. 4.2б). Это также означает, что фазовая и групповая скорости в такой среде направлены противоположно, т.е. противоположны направления распространения фазы и переноса энергии. Волны, для которых $\mathbf{k} \uparrow \downarrow \mathbf{\Pi}$ и, соответственно, $\mathbf{v}_\phi \uparrow \downarrow \mathbf{v}_{гр}$, принято называть **обратными волнами**. Векторы \mathbf{k} , \mathbf{E} , и \mathbf{H} обратной волны образуют левую тройку; поэтому за средами с $n' < 0$ закрепился также термин «**левые среды**» (англ. *left-handed materials*).

«Традиционные» среды с $n' > 0$ теперь имеет смысл называть «**правыми**».

Согласно (0.144), знак мнимой части n'' определяет характер изменения амплитуды волны в направлении её распространения. При $n'' > 0$ амплитуда уменьшается в направлении переноса энергии (волна затухает, пассивная среда), а при $n'' < 0$ – увеличивается (волна усиливается, активная среда).

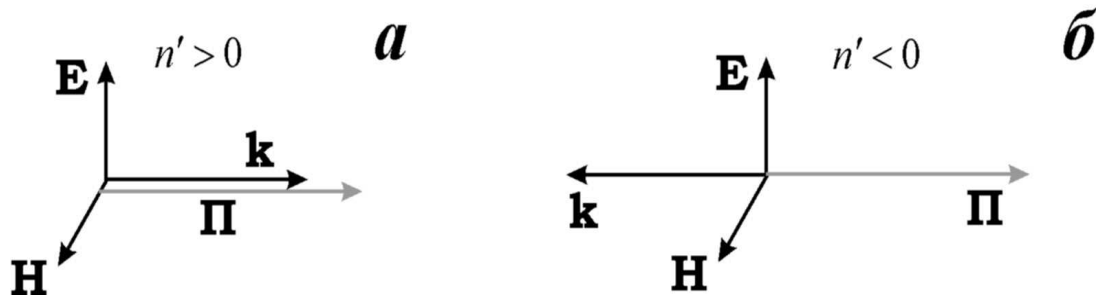


Рис. 4.2.

В результате в зависимости от знаков величин n' и n'' могут быть выделены четыре типа сред:

- (I) $n' > 0, n'' > 0, (\delta = 0 \dots \pi/2)$ – правая пассивная;
- (II) $n' < 0, n'' > 0, (\delta = \pi/2 \dots \pi)$ – левая пассивная;
- (III) $n' < 0, n'' < 0, (\delta = -\pi \dots -\pi/2)$ – левая активная;
- (IV) $n' > 0, n'' < 0, (\delta = -\pi/2 \dots 0)$ – правая активная.

Римская цифра, обозначающая тип среды, соответствует номеру квадранта координатной плоскости (n', n'') , который занимает указанную в скобках область значений фазового угла δ (см. рис. 4.3).

Для пассивных сред $\epsilon'', \mu'' > 0$ и $0 < \delta_\epsilon, \delta_\mu < \pi$, следовательно, $0 < \delta < \pi$, т.е. $\sin \delta > 0$. Это означает, что при вычислении квадратного корня в (0.143) следует выбрать знак «+»; тогда $n'' = |\tilde{n}| \sin \delta > 0$, что и должно быть в случае затухания. Знак вещественной части $n' = |\tilde{n}| \cos \delta$ может оказаться и положительным, и отрицательным. Знак «-» в (0.143) также имеет смысл: он отвечает встречной волне, переносящей энергию в отрицательном направлении оси z .

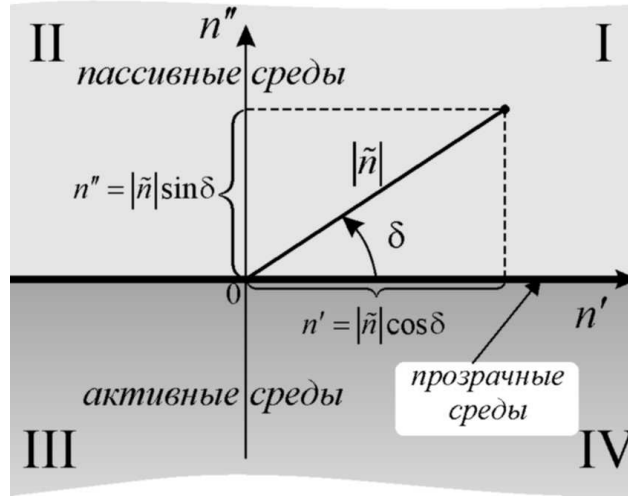


Рис. 4.3.

Рассмотрим, как зависит знак величины n' от значений комплексных материальных параметров $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{\mu}$. Проанализируем все возможные здесь частные случаи (по-прежнему ограничиваясь случаем пассивной среды).

1. Вещественные части материальных констант одновременно **ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ** ($\epsilon' > 0, \mu' > 0$). Тогда $0 \leq \delta_\epsilon, \delta_\mu < \pi/2$, значит, $0 \leq \delta < \pi/2$ и, соответственно, $n' > 0$ – правая пассивная среда (тип I).

2. Величины ϵ' и μ' одновременно **ОТРИЦАТЕЛЬНЫ** ($\epsilon' < 0, \mu' < 0$). Тогда $\pi/2 < \delta_\epsilon, \delta_\mu \leq \pi$, $\pi/2 < \delta \leq \pi$ и $n' < 0$ – левая пассивная среда типа II.

3. Величины ϵ', μ' имеют **ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЗНАКИ** (т.е. $\epsilon'\mu' < 0$). Пусть (для определённости) $\epsilon' < 0$, а $\mu' > 0$, т.е. $\pi/2 < \delta_\epsilon \leq \pi$, но $0 \leq \delta_\mu < \pi/2$. Тогда фазовый угол δ показателя преломления лежит в секторе $\pi/4 \leq \delta \leq 3\pi/4$. Это означает, что знак n' может быть любым – в зависимости от соотношения диэлектрических и магнитных потерь среда может быть либо правой, либо левой. Кроме того, выполняется условие $n' < n''$, т.е. волна в такой среде сильно затухает. Если потери пренебрежимо малы ($\delta_\epsilon = \pi, \delta_\mu = 0$), то $n' \rightarrow 0$ и волна в такой среде перестаёт распространяться.

Приведём также формулу для расчёта вещественной и мнимой частей комплексного импеданса среды:

$$\tilde{Z} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}\mu_0}{\tilde{\epsilon}\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{|\mu|\mu_0}{|\epsilon|\epsilon_0}} e^{-i(\delta_\mu - \delta_\epsilon)} = \pm |\tilde{Z}| (\cos \zeta - i \sin \zeta), \quad (0.145)$$

$$\text{где } |\tilde{Z}| = \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}|\mu_0}{|\tilde{\epsilon}|\epsilon_0}}, \quad \zeta = (\delta_\mu - \delta_\epsilon)/2.$$

Выбор знака здесь производится на основании того, что вещественная часть импеданса Z' – величина положительная по своему смыслу (как отношение амплитуд электрического и магнитного полей). Легко показать, что для пассивных сред $-\pi/2 \leq \zeta \leq \pi/2$, т.е. всегда $\cos \zeta > 0$ и в (0.145) следует выбрать знак «+». Знак мнимой части $Z'' = |\tilde{Z}| \sin \zeta$ определяется знаком разности углов магнитных и диэлектрических потерь: $Z'' > 0$ при $\delta_\mu > \delta_\epsilon$; $Z'' < 0$ при $\delta_\epsilon > \delta_\mu$.

4.4. Среды с одновременно отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей.

Отрицательное преломление

Необычные электродинамические свойства сред с отрицательными материальными параметрами ($\epsilon < 0$, $\mu < 0$) были подробно рассмотрены в теоретических работах В.Г. Веселаго 1960-х гг., где впервые было введено понятие отрицательного показателя преломления. Первые сообщения о создании искусственных материалов с такими свойствами появились в начале 2000-х гг. Эти материалы представляют собой композиты, состоящие из множества металлических элементов, вкрапленных в диэлектрическую основу. Элементы располагаются в строгом порядке и образуют структуру, похожую на решётку кристалла. В решётке чередуются элементы двух типов. Первый тип – тонкие металлические стерженьки, представляющие собой антенны, взаимодействующие с электрическим полем распространяющейся в структуре волны. Второй тип – колечки с прорезями, взаимодействующие с магнитной компонентой поля. Если размеры элементов и расстояние между ними существенно меньше длины волны падающего излучения, то данную структуру можно рассматривать как сплошную среду, являющуюся однородной и изотропной.

Обратимся к формулам (2.20), связывающим векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} плоской монохроматической волны. Рассмотрим однородную изотропную непоглощающую среду с отрицательными материальными константами

$\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$. Тогда ε , μ скалярны и вещественны: $\varepsilon = -|\varepsilon|$, $\mu = -|\mu|$ и соотношения (2.20) при этом можно переписать как

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{E}}] &= -\omega|\mu|\mu_0\tilde{\mathbf{H}}; \\ [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{H}}] &= \omega|\varepsilon|\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad (0.146)$$

Сравнивая (2.20) с (0.146), легко видеть, что одновременная смена знаков ε и μ переводит правую тройку векторов \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{H} в левую (см. рис. 4.2). Значит, среда с $\varepsilon, \mu < 0$ должна быть левой с отрицательным показателем преломления, а волна в такой среде является обратной.

Для того чтобы доказать отрицательность показателя преломления, отрицательные проницаемости, даже в случае пренебрежения потерями, следует рассмотреть как комплексные величины вида (0.131), (0.132) и использовать результаты п. 4.3 (см. частный случай 2). Полагая $\delta_\varepsilon = \delta_\mu = \pi$, получаем, что $\delta = \pi$ и $n' = -|\tilde{n}| < 0$, $n'' = 0$, т.е.

$$n = -\sqrt{|\varepsilon||\mu|} < 0.$$

Отрицательность показателя преломления проявляется в необычной реализации некоторых законов оптики, прежде всего, закона Снеллиуса. Рассмотрим отражение и преломление плоской монохроматической волны на границе раздела среды 1 с $n_1 > 0$ и левой среды 2 с $n_2 < 0$. Если формально записать закон Снеллиуса (3.7) с учётом отрицательного знака n_2 , то окажется, что

$$\sin \psi = -\frac{n_1}{|n_2|} \sin \varphi < 0,$$

т.е. угол преломления ψ будет отрицательным. Это означает, что в отличие от «обычного» случая отражения и преломления на границе двух «правых» сред (рис. 4.4а) падающий и преломлённый лучи лежат по одну сторону от нормали, восстановленной в точке падения (рис. 4.4б).

Вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi}_2$ преломлённой волны в левой среде по-прежнему направлен вглубь среды 2. Поскольку преломлённая волна в левой среде является обратной, ее волновой вектор \mathbf{k}_2 будет направлен к границе раздела сред. Иными словами, в этом случае энергия уходит от границы, тогда как фазовый фронт «набегает» на нее. Аномальный ход преломлённого луча обеспечивает при этом выполнение условия $k_{1x} = k_{2x}$,

необходимого для удовлетворения граничных условий для векторов электромагнитного поля. В связи со сказанным, левые среды называют также **средами с отрицательным преломлением**.

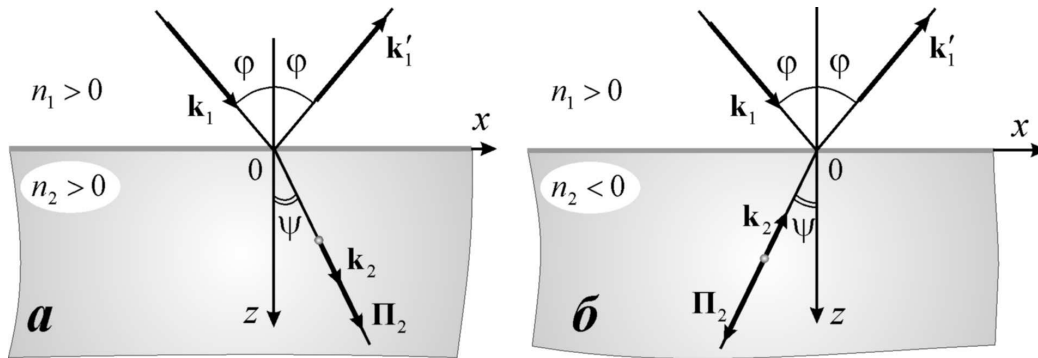


Рис. 4.4.

4.5. Среды с отрицательным значением диэлектрической или магнитной проницаемости. Электромагнитное туннелирование

Рассмотрим особенности распространения электромагнитных волн в среде с отрицательным значением одной из материальных констант. Рассмотрим идеальный случай отсутствия потерь ($\epsilon'' = \mu'' = 0$). Для определённости будем считать, что $\epsilon' = -|\epsilon| < 0$ при $\mu' = \mu > 0$ (т.е. в формулах (0.131), (0.132) $\delta_\epsilon = \pi$, $\delta_\mu = 0$). Расчёт по формуле (0.143) даёт чисто мнимый показатель преломления

$$\tilde{n} = -in'' = -i\sqrt{|\epsilon|\mu},$$

а значит, и чисто мнимое волновое число

$$\tilde{k} = -ik'' = -ik_0\sqrt{|\epsilon|\mu}, \quad (0.147)$$

где k_0 – волновое число в вакууме. Чисто мнимым, согласно (0.145), будет и импеданс среды:

$$\tilde{Z} = i|Z''| = i\sqrt{\mu/|\epsilon|}. \quad (0.148)$$

С учётом (0.147) и (0.148) выражения (0.136) для компонент электрического и магнитного полей волны, распространяющейся в направлении оси z , примут вид:

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = i|Z''|Ae^{-k''z}e^{i\varphi} = |Z''|Ae^{-k''z}e^{i(\varphi+\pi/2)}, \\ \tilde{H}_y = Ae^{-k''z}e^{i\varphi}. \end{cases} \quad (0.149)$$

где $\varphi = \omega t + \alpha$. Выделим вещественную часть комплексных выражений (0.149) :

$$\begin{cases} E_x = \operatorname{Re} \tilde{E}_x = |Z''| A e^{-k''z} \cos(\varphi + \pi/2) = -|Z''| A e^{-k''z} \sin \varphi, \\ H_y = \operatorname{Re} \tilde{H}_y = A e^{-k''z} \cos \varphi. \end{cases} \quad (0.150)$$

Анализируя (0.150), приходим к следующим выводам.

1. Ввиду того, что $k' = 0$, данный процесс нельзя назвать бегущей волной. Это – гармоническое электромагнитное колебание с амплитудой, экспоненциально спадающей в направлении оси z .

2. Сдвиг фаз между колебаниями векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} составляет $\pi/2$, т.е. E_x и H_y являются реактивными компонентами полей. Значит, средний поток энергии (интенсивность) в направлении оси z должен быть равен нулю. Это подтверждает прямой расчёт:

$$P_z = E_x H_y = -\frac{1}{2} |Z''| A^2 e^{-2k''z} \sin 2\varphi, \quad (0.151)$$

т.е. поток энергии колеблется с частотой 2ω , а его среднее значение за период равно нулю.

3. Плотность электрической и магнитной энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} w_{\text{э}} &= -\frac{1}{2} |\varepsilon| \varepsilon_0 E_x^2 = -w_0 (1 - \cos 2\varphi); \\ w_{\text{м}} &= \frac{1}{2} \mu \mu_0 H_y^2 = w_0 (1 + \cos 2\varphi), \end{aligned} \quad (0.152)$$

где $w_0 = (1/4) |\varepsilon| \varepsilon_0 (Z'' A)^2 e^{-2k''z} = (1/4) \mu \mu_0 A^2 e^{-2k''z}$. Величины $w_{\text{э}}$ и $w_{\text{м}}$ колеблются с частотой 2ω около средних значений $\mp w_0$. При этом наблюдается периодический процесс взаимного превращения энергии электрического и магнитного полей, который полностью аналогичен энергетическим процессам, протекающим в идеальном колебательном контуре, обладающем чисто реактивным сопротивлением. Суммарная плотность энергии $w = w_{\text{э}} + w_{\text{м}} = 2w_0 \cos 2\varphi$ колеблется около среднего значения $\langle w \rangle = -w_0 + w_0 = 0$. С точки зрения энергетических соотношений данный процесс напоминает стоячую электромагнитную волну (см. п. 2.7) с тем отличием, что в стоячей волне $\langle w \rangle \neq 0$.

Описанный здесь процесс можно реализовать вблизи плоской границы раздела среды 1 – вакуума (воздуха) с $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ и среды 2 с $\varepsilon_2 < 0$, $\mu_2 > 0$. Пусть из среды 1 на границу раздела $z = 0$ нормально падает плоская монохроматическая волна. Её электромагнитное поле проникает во вторую среду, где устанавливается затухающее в направлении оси z колебание вида (0.150), обладающее колеблющейся электромагнитной энергией (0.152). Также присутствует и мгновенный поток энергии (0.151), благодаря которому в течение половины периода колебаний энергия поступает внутрь среды 2, а затем в течение такого же времени выходит обратно. Средний поток через границу раздела равен нулю; это означает, что происходит полное отражение падающей волны (даже при нормальном падении!) и перед границей образуется стоячая волна. Распределение амплитуды электрического поля вдоль оси z для этого случая представлено на рисунке 4.5а.

Однако полное отражение «нарушается», если волна отражается от достаточно тонкого слоя среды 2 (толщиной порядка $1/k''$). При этом на «задней» поверхности слоя формируется ещё одно колебание, затухающее в направлении, противоположном z . Из трёх составляющих суммарного потока энергии встречных волн (формула (0.141)) в данном случае ($Z' = 0$, $Z'' \neq 0$) будет отличен от нуля интерференционный поток энергии. При $k' = 0$ он не зависит от координаты z :

$$P_{\text{int}} = Z'' |p| |q| A^2 \cdot \sin(\alpha_p - \alpha_q), \quad (0.153)$$

где $|p|$, $|q|$ – модули, а α_p и α_q – фазовые углы амплитудных коэффициентов двух встречных волн внутри слоя (все эти величины могут быть найдены из граничных условий). Благодаря наличию интерференционного потока (0.153) электромагнитная энергия частично «просачивается» или, как говорят, «туннелирует» через слой среды, в которой одиночная волна не переносит энергии. В этом случае говорят, что имеет место **«нарушенное полное отражение»** или **«электромагнитное туннелирование»** (см. рис. 4.5б). В диэлектрике за слоем (среда 3) распространяется бегущая волна (с увеличением толщины слоя среды 2 её амплитуда асимптотически приближается к нулю). Волна перед слоем уже не будет чисто стоячей (амплитуда поля в её «узлах» отлична от нуля).

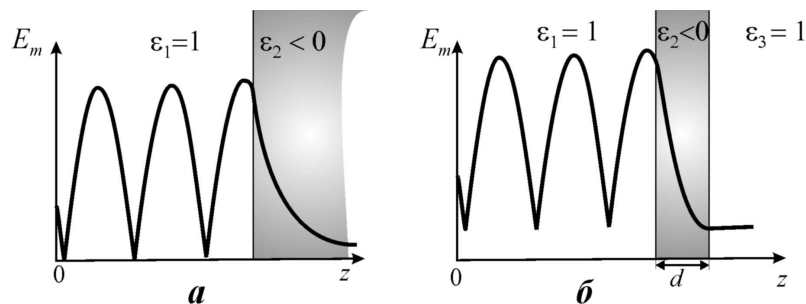


Рис. 4.5.

В реальном случае среда обладает потерями (ε'' , $\mu'' \neq 0$) и вещественные части постоянной распространения k' и импеданса Z' отличны от нуля. Волна в среде 2 будет тогда распространяющейся, переносящей энергию волной, что приведёт к нарушению полного отражения даже в ситуации, изображённой на рис. 4.5а. Однако ввиду соотношения $k' < k''$ эта волна будет сильно затухающей.

Следует заметить, что свойства сред с отрицательной проницаемостью ε или μ были здесь рассмотрены в идеализированном случае бездисперсной среды. Все реально существующие (природные и искусственные) среды с отрицательной проницаемостью обладают частотной дисперсией. В определённых диапазонах частот отрицательную проницаемость ε или μ обнаруживают диэлектрики в области линий резонансного поглощения, металлы в видимой области спектра, намагниченные ферриты и плазма, а также многие искусственные композитные материалы. Более строгое рассмотрение с учётом дисперсии требует корректировки некоторых соотношений, в частности, формул (0.152) для плотности электромагнитной энергии.

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

5.1. Плоские монохроматические волны в проводящей среде

Проводимость среды является одной из причин затухания электромагнитных волн. При распространении в проводящей среде электромагнитной волны возбуждаются переменные токи проводимости, что приводит к частичному преобразованию электромагнитной энергии поля волны в джоулево тепло.

Для учёта проводимости среды в правую часть уравнения II системы уравнений Максвелла (1.29) необходимо добавить плотность токов проводимости $\mathbf{j}_{\text{пр}}$. Будем считать, что $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ подчиняется закону Ома (1.16). Проводящую среду будем считать изотропной и неферромагнитной, т.е. ε и μ будем считать скалярными вещественными величинами. Таким образом, первые два уравнения Максвелла запишутся как

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma\mathbf{E}. \end{cases} \quad (0.154)$$

Решение системы (0.154) будем искать в виде монохроматических полей вида (2.5). Подставляя (2.5) в (0.154), приходим к системе уравнений Максвелла для комплексных амплитуд $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$:

$$\begin{cases} \text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\mu_0\tilde{\mathbf{H}}, \\ \text{rot } \tilde{\mathbf{H}} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}} + \sigma\tilde{\mathbf{E}}. \end{cases} \quad (0.155)$$

Вынося во втором уравнении за скобки величину $i\omega\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}$, приводим систему (0.155) к виду:

$$\begin{cases} \text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\mu_0\tilde{\mathbf{H}}, \\ \text{rot } \tilde{\mathbf{H}} = i\omega\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}, \end{cases} \quad (0.156)$$

где величина

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \varepsilon' - i\varepsilon'' \quad (0.157)$$

выступает как **комплексная диэлектрическая проницаемость проводящей среды.**

Уравнения системы (0.156) ничем не отличаются от аналогичных уравнений системы (2.6), записанной изначально для диэлектрической среды. Значит, одинаково записываются и решения этих систем. С учетом комплексности $\tilde{\epsilon}$ компоненты векторов поля имеют вид (4.6) (для волны, распространяющейся в проводящей среде в направлении оси z).

Комплексное волновое число в проводящей среде определяется как

$$\tilde{k} = k_0 \sqrt{\tilde{\epsilon}\mu} = k' - ik'',$$

где $k_0 = \omega/c$ – волновое число в вакууме, а $\tilde{\epsilon}$ определяется соотношением (0.157). С учётом (0.157) выражения для действительной и мнимой частей комплексного волнового числа \tilde{k} имеют вид:

$$k' = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \epsilon_0^2 \omega^2}} + 1 \right)}, \quad k'' = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \epsilon_0^2 \omega^2}} - 1 \right)}. \quad (0.158)$$

Соотношения (0.158) являются общими и справедливыми в очень широком частотном диапазоне (от $\omega = 0$ до $\omega \sim 10^{14} \text{ с}^{-1}$, выше которой становятся существенными квантовые эффекты) как для слабо-, так и для сильнопоглощающих сред. Для различных сред в различных частотных диапазонах величина $\sigma/\epsilon\epsilon_0\omega$ может быть как очень большой, так и очень малой, что обычно используется для упрощения этих выражений.

5.2. Скин-эффект. Случай хорошо проводящей среды

Проникая в глубь проводника, волна затухает по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания k'' . Мнимая часть волнового числа k'' характеризует скорость убывания амплитуды вдоль направления распространения волны. Обратная величина $d_S = 1/k''$ определяет **глубину проникновения** поля в среду. На этой глубине амплитуда волны убывает в e раз. Так как интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды, то энергия прошедшей в поглощающую среду волны сосредоточена в слое толщиной порядка нескольких значений d_S . Для сред с высокой проводимостью толщина этого слоя может быть достаточно малой. Так, для меди ($\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$) на частоте $f = \omega/2\pi = 10 \text{ ГГц}$ (диапазон СВЧ) $d_S \approx 0,7 \text{ мкм}$. По этой причине приповерхностная область среды, где сосредоточена большая часть энергии проникающей электромагнитной вол-

ны, называется **скин-слоем** (от англ. *skin* – кожа), величина d_S – **толщиной скин-слоя**, а сам эффект локализации энергии электромагнитной волны в приповерхностном слое – **скин-эффектом**.

Запишем и проанализируем формулу для толщины скин-слоя в предельных случаях малой и большой проводимости.

Для малой проводимости $\sigma \ll \epsilon\epsilon_0\omega$ (*высокочастотный предел*) имеем

$$d_S = \frac{1}{k''} \approx \frac{2\epsilon_0 c}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} = \frac{2}{\sigma Z} \quad (0.159)$$

(выражение (0.158) для k'' было преобразовано при помощи формулы приближённых вычислений $(1+x)^{1/2} \approx 1+x/2$). Из (0.159) видно, что глубина проникновения поля в среду не зависит от частоты и обратно пропорциональна проводимости σ и волновому сопротивлению Z . В случае $\sigma \rightarrow 0$ среда становится непроводящей и $d_S \rightarrow \infty$.

В случае высокой проводимости $\sigma \gg \epsilon\epsilon_0\omega$ (*низкочастотный предел*) выражение для толщины скин-слоя принимает вид

$$d_S \approx c \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\mu\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma\omega}}, \quad (0.160)$$

т.е. с ростом проводимости среды и частоты поля глубина его проникновения уменьшается. При $\omega \rightarrow 0$ (статическое поле) $d_S \rightarrow \infty$.

В последнем случае высокой проводимости (или же достаточно низкой частоты) может выполняться условие $\epsilon'' \gg \epsilon'$. Тогда в выражении (0.157) для комплексной диэлектрической проницаемости среды можно положить $\epsilon' = 0$. Среду в таком случае называют **хорошо проводящей**. Условие $\epsilon'' \gg \epsilon'$ хорошо выполняется для металлов в диапазоне СВЧ, а на радиочастотах хорошо проводящей средой является, например, почва.

Комплексный показатель преломления хорошо проводящей среды вычисляем как

$$\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}\mu} = \sqrt{-i \frac{\sigma\mu}{\epsilon_0\omega}} = \sqrt{\frac{\sigma\mu}{2\epsilon_0\omega}} (1-i). \quad (0.161)$$

В (5.9) использовано равенство: $\sqrt{-i} = (1-i)/\sqrt{2}$. Модуль показателя преломления равен

$$|\tilde{n}| = \sqrt{\frac{\sigma\mu}{\varepsilon_0\omega}} \gg 1. \quad (0.162)$$

Это означает, что угол преломления ψ на границе раздела «диэлектрик – хорошо проводящая среда» близок к нулю. Поэтому можно считать, что независимо от угла падения φ преломлённая волна уходит вглубь хорошо проводящей среды перпендикулярно её поверхности.

Комплексный импеданс хорошо проводящей среды имеет вид:

$$\tilde{Z} = Z' + iZ'' = |\tilde{Z}|e^{i\zeta} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{-i\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{2\sigma}}(1+i). \quad (0.163)$$

Из (0.163) видно, что $Z' = Z''$ и $\operatorname{tg}\zeta = Z''/Z' = 1$, т.е. сдвиг фаз колебаний векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} волны в хорошо проводящей среде составляет $\pi/4$ рад.

5.3. Плоская волна на границе раздела «диэлектрик – проводник».

Приближённое граничное условие Леонтовича

Пусть на плоскую границу раздела диэлектрической непоглощающей среды 1 и проводящей среды 2 падает из среды 1 плоская монохроматическая волна (см. рис. 5.1). Рассмотрим особенности распространения волны, прошедшей в проводящую среду. Независимо от поляризации падающей волны координатная зависимость векторов поля прошедшей волны от координат описывается выражением

$$\tilde{\mathbf{E}}_2^{\text{пр}}, \tilde{\mathbf{H}}_2^{\text{пр}} \sim e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{-i(k_{2x}x + k_{2z}z)} = e^{-ik_2(\sin\psi \cdot x + \cos\psi \cdot z)}, \quad (0.164)$$

где ψ – угол преломления. Граничные условия для тангенциальных компонент векторов поля

$$\tilde{E}_{1x,y} = \tilde{E}_{2x,y}, \quad \tilde{H}_{1x,y} = \tilde{H}_{2x,y} \quad \text{при } z = 0$$

требуют выполнения соотношения (см. п. 3.1)

$$k_{1x} = k_{2x} \quad \text{или} \quad k_1 \sin\varphi = \tilde{k}_2 \sin\tilde{\psi}. \quad (0.165)$$

Волновое число \tilde{k}_2 в поглощающей среде 2 будет комплексным, однако его проекция k_{2x} вещественна (в левой части (0.165) вещественны как волновое число k_1 , так и угол падения φ). Но это означает, что $\sin\tilde{\psi}$ и сам угол преломления $\tilde{\psi}$ должны быть комплексными величинами. Проекция $\tilde{k}_{2z} = \tilde{k}_2 \cos\tilde{\psi}$ также будет комплексной величиной: $\tilde{k}_{2z} = k'_{2z} - ik''_{2z}$. С учётом сказанного (0.164) можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}_2^{\text{пр}}, \tilde{\mathbf{H}}_2^{\text{пр}} \sim e^{-k_{2z}'' z} \cdot e^{-i(k_{2x} \cdot x + k_{2z}' \cdot z)}. \quad (0.166)$$

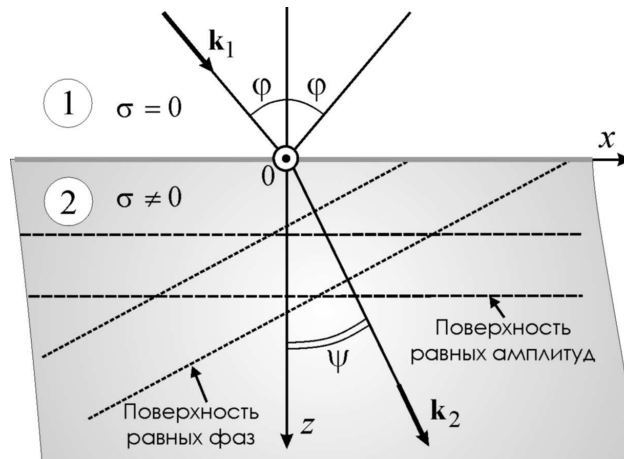


Рис. 5.1.

Формула (0.166) показывает, что независимо от угла падения преломлённая волна затухает строго в направлении нормали к границе раздела (ось z). Поверхностями равных амплитуд здесь являются плоскости $z = \text{const}$, параллельные поверхности раздела $z = 0$. Поверхности равных фаз определяются уравнением

$$k_{2x} \cdot x + k_{2z}' \cdot z = \text{const}.$$

Нормаль к поверхностям равных фаз направлена к оси z под углом ψ , который имеет смысл *вещественного* угла преломления ($\text{tg } \psi = k_{2x} / k_{2z}'$). Таким образом, плоскости равной амплитуды и равной фазы не совпадают (см. рис. 5.1), т.е. преломлённая волна в поглощающей среде является неоднородной.

Как показано в п. 5.2, в *хорошо проводящей среде* преломлённая волна распространяется перпендикулярно границе раздела. Поверхности равных фаз становятся параллельными границе раздела сред, и преломлённая волна является практически однородной. При этом $\mathbf{k}_2 \uparrow \uparrow \mathbf{n}_0$, где \mathbf{n}_0 – единичный вектор нормали к границе, направленный в среду 2. Это означает, что векторы поля \mathbf{E}_2 и \mathbf{H}_2 , перпендикулярные \mathbf{k}_2 , параллельны границе раздела, т.е. являются касательными составляющими полей $\mathbf{E}_{2\tau}$ и $\mathbf{H}_{2\tau}$. Они связаны векторным соотношением

$$\mathbf{E}_{2\tau} = \tilde{Z}_2 [\mathbf{H}_{2\tau}, \mathbf{n}_0], \quad (0.167)$$

где \tilde{Z}_2 – комплексный импеданс среды 2, определяемый формулой (0.163) и называемый в данном случае **поверхностным импедансом**.

Но на границе раздела выполняются граничные условия (1.17) и (1.19) для касательных составляющих векторов поля:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

Значит, касательные составляющие $\mathbf{E}_{1\tau}$ и $\mathbf{H}_{1\tau}$ полей в диэлектрике на границе раздела также связаны соотношением вида (0.167):

$$\mathbf{E}_{1\tau} = \tilde{Z}_2 [\mathbf{H}_{1\tau}, \mathbf{n}_0]. \quad (0.168)$$

Равенство (0.168) называют **приближённым граничным условием Леонтовича**. Его часто используют при расчёте электромагнитных полей вблизи проводящих поверхностей. Оно было предложено М.А. Леонтовичем в его работах по распространению радиоволн вблизи поверхности Земли.

5.4. *Случай идеального проводника*

В заключение обсудим предельный случай хорошо проводящей среды, когда ее электропроводность считается бесконечно большой (**модель идеального проводника**). В этом случае модуль импеданса среды (см. формулу (0.163)) стремится к нулю:

$$|\tilde{Z}| = \sqrt{\frac{\omega \mu \mu_0}{\sigma}} \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow \infty, \quad (0.169)$$

что означает, согласно (0.167), равенство нулю электрического, а, значит, и магнитного поля волны. Таким образом, поле падающей волны вообще не проникает в проводник, толщина скин-слоя d_S стремится к нулю, и можно пренебречь потерями на джоулево тепло в проводнике.

Обсудим особенности записи граничных условий для поверхности идеального проводника. Рассмотрим нормальное падение волны на поверхность идеального проводника (рис. 5.2). Поскольку $E_{2\tau}, H_{2\tau} = 0$, должно быть $E_{1\tau}, H_{1\tau} = 0$. $E_{1\tau}$ представляет собой сумму напряжённостей электрического поля падающей и отражённой волн:

$$E_{1\tau} = E_{1\tau}^{\text{пад}} + E_{1\tau}^{\text{отр}} = 0, \text{ откуда } E_{1\tau}^{\text{отр}} = -E_{1\tau}^{\text{пад}}. \quad (0.170)$$

Это говорит о том, что падающая волна испытывает полное отражение, и перед границей раздела сред 1 и 2 формируется стоячая волна. Вектор \mathbf{E} ,

не меняя своего модуля, изменяет направление на противоположное, но направление вектора \mathbf{H} , согласно правилу правого винта, при этом остаётся неизменным и $H_{1\tau} = H_{1\tau}^{\text{пад}} + H_{1\tau}^{\text{отр}} = 2H_{1\tau}^{\text{пад}} \neq 0$.

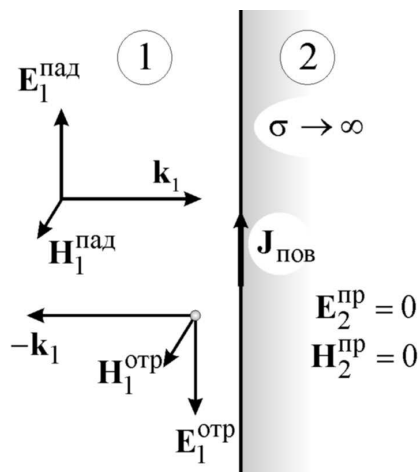


Рис. 5.2.

Создаётся видимость нарушения граничного условия непрерывности тангенциальных компонент напряжённости магнитного поля. Однако в данном случае в граничном условии (1.18) необходимо учесть плотность поверхностного тока $\mathbf{J}_{\text{пов}}$, протекающего по поверхности идеального проводника (строго говоря, в тонкой приповерхностной плёнке, толщина которой при $\sigma \rightarrow \infty$ стремится к нулю). Таким образом, в рассматриваемом случае граничное условие для вектора \mathbf{H} имеет вид:

$$2H_{1\tau}^{\text{пад}} = J_{\text{пов}}. \quad (0.171)$$

Плотность поверхностного тока появляется в граничном условии (1.18) только для границы с идеальным проводником, при конечных значениях проводимости σ оно принимает «обычный» вид (1.19).

5.5. Поверхностные волны на границе раздела «диэлектрик – проводник»

Поверхностными называются волны, распространяющиеся вдоль границы раздела двух разнородных сред. Их поля локализованы вблизи поверхности раздела и затухают по мере удаления от неё. Поверхностные волны являются особым решением уравнений Максвелла, которое впервые было обнаружено Зоммерфельдом в начале XX в.

Пусть плоскость $z=0$ разделяет две полубесконечные среды с диэлектрическими проницаемостями ε_1 (область 1, $z < 0$) и ε_2 (область 2, $z > 0$). Среды будем считать немагнитными ($\mu_1 = \mu_2 = 1$). Для каждой среды можно записать уравнения Максвелла для векторов поля монохроматической волны:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}_j &= -i\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}_j, \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}}_j &= i\omega\varepsilon_j\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}_j \end{aligned} \quad (0.172)$$

где $j=1, 2$ – номер области. Они сводятся к уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta \tilde{u}_j + k_0^2 \varepsilon_j \tilde{u}_j = 0, \quad (0.173)$$

где $k_0 = \omega/c$ – волновое число для вакуума, а u_j обозначает любую из компонент векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{H} в области с номером j .

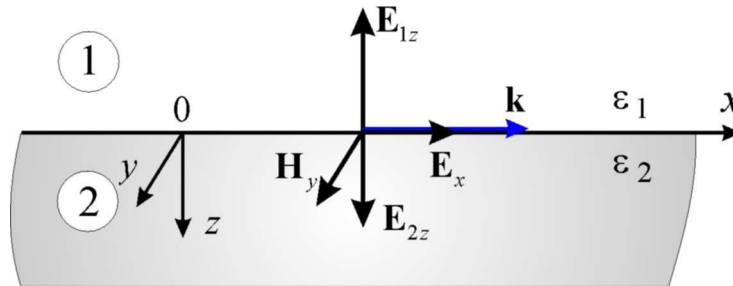


Рис. 5.3.

Будем искать решение этих уравнений в виде поверхностной волны, бегущей в направлении оси x (см. рис. 5.3):

$$u_j(\mathbf{r}, t) = u_j(z) \cdot e^{i(\omega t - kx)}, \quad (0.174)$$

где k – волновое число, одинаковое в обеих областях 1 и 2. Подстановка (0.174) в (0.173) приводит к уравнениям

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial z^2} - \kappa_j^2 \tilde{u}_j = 0, \quad (0.175)$$

где введено обозначение

$$\kappa_j^2 = k^2 - k_0^2 \varepsilon_j. \quad (0.176)$$

Решение уравнений (0.175) имеет вид

$$\begin{cases} u_1 = U_1 e^{\kappa_1 \cdot z} \cdot e^{i(\omega t - kx)}, & z < 0; \\ u_2 = U_2 e^{-\kappa_2 \cdot z} \cdot e^{i(\omega t - kx)}, & z > 0, \end{cases} \quad (0.177)$$

где $U_{1,2}$ – постоянные. Из (0.176), (0.177) видно, что величины $\kappa_{1,2}$ являются компонентами волнового вектора вдоль нормали к поверхности раздела. По соображениям конечности энергии волны, поля поверхностной волны в обеих средах, не обладающих усилением, должны экспоненциально спадать (а не нарастать) при удалении от поверхности раздела. Поэтому в записи (0.177) величины $\kappa_{1,2}$, имеющие смысл постоянных затухания, должны быть положительными.

Записывая уравнения системы (0.172) в проекциях на оси координат, нетрудно показать, что она имеет два независимых решения, соответствующих волнам с различными поляризациями. Первое решение определяет волну типа ТМ (поперечно-магнитную) с компонентами векторов поля \tilde{H}_y , \tilde{E}_x и \tilde{E}_z , а второе – поперечно-электрическую волну типа ТЕ с компонентами \tilde{E}_y , \tilde{H}_x и \tilde{H}_z . Вначале рассмотрим ТМ-решение.

На поверхности раздела $z = 0$ должны выполняться следующие граничные условия для векторов поля (см. п. 1.3):

$$\tilde{H}_{1y} = \tilde{H}_{2y}, \quad \tilde{E}_{1x} = \tilde{E}_{2x}, \quad \varepsilon_1 \tilde{E}_{1z} = \varepsilon_2 \tilde{E}_{2z}. \quad (0.178)$$

Из (0.178) видно, что вектор магнитного поля на границе раздела одинаков для обеих сред. Чтобы выразить величины \tilde{E}_x , \tilde{E}_z через магнитное поле \tilde{H}_y , запишем второе уравнение системы (0.172) в проекциях на оси x и z с учётом того, что поля не зависят от координаты y :

$$-\frac{\partial \tilde{H}_{jy}}{\partial z} = i\omega \varepsilon_j \varepsilon_0 \tilde{E}_{jx}, \quad \frac{\partial \tilde{H}_{jy}}{\partial x} = i\omega \varepsilon_j \varepsilon_0 \tilde{E}_{jz}.$$

Вычисляя производные согласно (0.177), находим

$$\tilde{E}_{jx} = \frac{\pm i \kappa_j}{\omega \varepsilon_j \varepsilon_0} \tilde{H}_{jy}, \quad \tilde{E}_{jz} = \frac{-k}{\omega \varepsilon_j \varepsilon_0} \tilde{H}_{jy}, \quad (0.179)$$

где знаки «+» и «-» в выражении для \tilde{E}_{jx} соответствуют средам 1 и 2. Векторы поля поверхностной волны изображены на рисунке 5.3.

Как следует из (0.179), граничное условие $\tilde{E}_{1x} = \tilde{E}_{2x}$ удовлетворяется только при выполнении соотношения

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad (0.180)$$

откуда с учётом того, что $\kappa_{1,2} > 0$, следует, что поверхностная волна может распространяться только вдоль границ раздела сред с диэлектрическими проницаемостями разных знаков. Если $\varepsilon_1 > 0$, то должно быть $\varepsilon_2 = -|\varepsilon_2| < 0$ (в случае комплексной проницаемости это условие относится к её действительной части). Среду с отрицательной диэлектрической проницаемостью называют **поверхностно-активной**.

Подставляя в (0.180) выражения (0.176) для постоянных затухания $\kappa_{1,2}$, получаем выражение для волнового числа k :

$$k = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 |\varepsilon_2|}{|\varepsilon_2| - \varepsilon_1}} = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}}, \quad (0.181)$$

которое является *дисперсионным соотношением* для волн данного типа, поскольку определяет зависимость волнового числа от частоты ω (функциями частоты являются все величины в правой части (0.181)). Из (0.181) вытекает еще одно условие существования поверхностной волны: $|\varepsilon_2| > \varepsilon_1$ (это – условие действительности волнового числа k).

Для поверхностной ТЕ-волны (поперечно-электрической) с компонентами полей E_y , H_x и H_z получается соотношение

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = -\frac{\mu_1}{\mu_2},$$

которое в данных условиях не может быть удовлетворено ($\mu_1 = \mu_2$, однако согласно (0.176) $\kappa_1 \neq \kappa_2$ из-за того, что $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$). Таким образом, поверхностная волна на границе двух немагнитных сред может быть только волной ТМ-типа.

Поверхностные волны могут возбуждаться на границе раздела двух диэлектриков на частотах, соответствующих для одного из них области аномальной дисперсии вблизи линий резонансного поглощения энергии внешнего поля. Также поверхностные волны могут возбуждаться на границе сред с высокой проводимостью – металлов и полупроводников. Отрицательный знак величины $\varepsilon = \text{Re} \tilde{\varepsilon}$ здесь обусловлен доминирующим вкладом электронного газа в поляризуемость вещества. Свободные электроны движутся так, что создаваемое ими поле противоположно по направлению внешнему электрическому полю. Поэтому электроны частично экранируют внешнее поле, которое проникает в проводник на небольшую

глубину, значительно меньшую длины волны. Однако на достаточно больших частотах электроны не успевают реагировать на внешнее поле, и металл становится прозрачным. Характерная частота, на которой это происходит, называется **плазменной частотой**.

Простейшей формулой, описывающей зависимость $\tilde{\epsilon}(\omega)$ для металла, является **формула Друде**:

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}, \quad (0.182)$$

где ω_p – плазменная частота, γ – частота электронных столкновений. В оптическом диапазоне частот ($\omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$) для металлов $\omega_p \sim 10^{16} \text{ с}^{-1}$, $\gamma \sim 10^{13} - 10^{14} \text{ с}^{-1}$, т.е. $\gamma < \omega < \omega_p$. Тогда для границы раздела «воздух – металл» ($\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = \text{Re } \tilde{\epsilon} = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$) из (0.182) имеем

$$k \approx k_0 \left(1 + \omega^2 / 2\omega_p^2 \right). \quad (0.183)$$

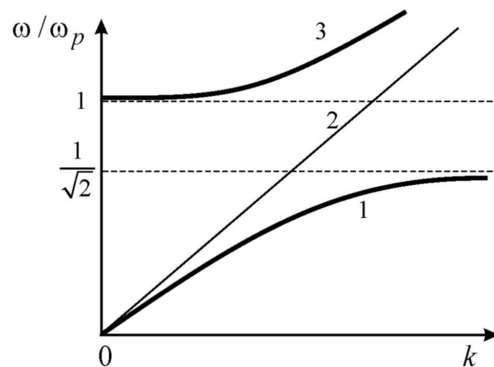


Рис. 5.4.

На рисунке 5.4 приведена дисперсионная кривая $\omega(k)$ для поверхностной волны, следующая из (0.183) (кривая 1). Для сравнения представлена зависимость $\omega(k)$ для вакуума $\omega = ck$ (кривая 2). Видно, что отклонение кривой 2 от кривой 1 увеличивается с частотой, что говорит об уменьшении как фазовой, так и групповой скоростей поверхностной волны по сравнению с волной в неограниченной среде. Кривая 3 представляет дисперсионное уравнение $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$ для объёмных волн, которые могут распространяться в металле в области прозрачности $\omega > \omega_p$.

Из-за различия фазовых скоростей поверхностную волну нельзя возбудить волной, падающей из вакуума. Существуют два эффективных метода возбуждения поверхностных волн: *призменный* и *решёточный*.

Существует две модификации *призменного метода*, называемого также *методом нарушенного полного внутреннего отражения*: геометрия Отто (рис. 5.5а) и геометрия Кретчманна (рис. 5.5б). В геометрии Отто, прежде чем войти в среду 1 с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , падающая световая волна попадает на призму, имеющую диэлектрическую проницаемость $\epsilon_p > \epsilon_1$. При углах падения θ , превышающих критический угол полного внутреннего отражения, вдоль границы раздела сред 3 и 1 распространяется «медленная» волна (см. п. 3.2) с фазовой скоростью, меньшей, чем фазовая скорость волны в неограниченной среде. При достаточно малой толщине зазора d между призмой и поверхностно-активной средой 2 с ϵ_2 (порядка длины волны) волновой процесс захватывает и границу раздела сред 1 и 2. Вдоль неё и распространяется поверхностная волна (при согласовании её фазовой скорости с фазовой скоростью «медленной» волны на границе сред 1 и 3).

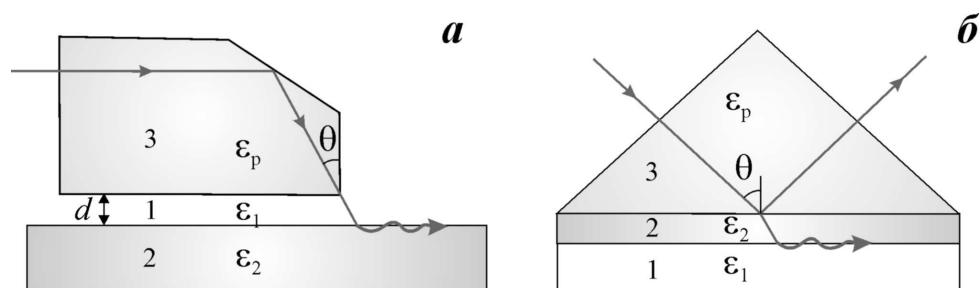


Рис. 5.5.

Поскольку закон Снеллиуса и дисперсионное соотношение (0.181) симметричны относительно ϵ_1 и ϵ_2 , можно менять положение этих сред относительно призмы, что и осуществляется в геометрии Кретчманна (рис. 5.5б). Активной средой в данном случае служит тонкая плёнка 2, нанесенная на нижнюю поверхность призмы. Из-за сильного поглощения в активной среде толщина плёнки должна быть достаточно мала для того, чтобы существенная часть энергии достигала границы раздела 1–2.

Возбуждение поверхностных электромагнитных волн осуществляют также с помощью дифракционной решетки, нанесенной на поверхностно-активную среду и рассеивающей излучение под определёнными углами.

6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

6.1. Общие свойства плоских монохроматических волн в анизотропных средах

При распространении электромагнитной волны в изотропной среде выделено только направление волнового вектора. В анизотропной среде появляются новые выделенные направления, которые связаны со структурой среды (как, например, в кристаллах), или же с внешними полями (магнитным, электрическим), в которых среда находится.

Для анизотропных сред основополагающие уравнения электродинамики – уравнения Максвелла – сохраняют свой вид. Однако усложняются материальные уравнения (1.12) и (1.15). Векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{H} здесь не являются коллинеарными, и каждая декартова компонента векторов \mathbf{D} и \mathbf{B} зависит от каждой компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_0(\varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z); \\ D_y = \varepsilon_0(\varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z); \\ D_z = \varepsilon_0(\varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z), \end{cases} \begin{cases} B_x = \mu_0(\mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z); \\ B_y = \mu_0(\mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z); \\ B_z = \mu_0(\mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z). \end{cases} \quad (6.1)$$

Соотношения (6.1) можно записать и более компактно:

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_j \varepsilon_{ij} E_j; \quad B_i = \mu_0 \sum_j \mu_{ij} H_j, \quad (6.2)$$

где $i, j = x, y, z$.

Совокупность девяти величин ε_{ij} , связывающих компоненты векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} , называют **тензором диэлектрической проницаемости** $\boldsymbol{\varepsilon}$ и записывают в виде матрицы; аналогично вводится **тензор магнитной проницаемости** $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

В тензорной форме записи материальные уравнения принимают вид:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}. \quad (6.4)$$

Для проводящих анизотропных сред удельная электропроводность σ в уравнении (1.16) также может быть тензорной величиной.

Компоненты тензоров $\boldsymbol{\epsilon}$ и $\boldsymbol{\mu}$ в общем случае являются комплексными величинами, некоторые из которых при определённых условиях могут равняться нулю. Для частного случая *изотропной среды* равны нулю все недиагональные компоненты обоих тензоров, а диагональные имеют одинаковые значения: $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon$, $\mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_{zz} = \mu$. Можно показать, что для *прозрачных сред* тензоры $\boldsymbol{\epsilon}$ и $\boldsymbol{\mu}$ должны быть *симметричными*, т.е. их недиагональные компоненты, отличающиеся перестановкой индексов, равны друг другу: $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ при $i \neq j$. Таким образом, тензоры $\boldsymbol{\epsilon}$ и $\boldsymbol{\mu}$ прозрачной среды в общем случае содержат только по шесть независимых компонент.

Известно, что любой симметричный тензор за счёт выбора системы координат можно привести к диагональному виду, когда все недиагональные компоненты обращаются в нуль:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Оси системы координат, в которой тензор $\boldsymbol{\epsilon}$ ($\boldsymbol{\mu}$) принимает вид (6.5), называются **главными диэлектрическими (магнитными) осями**, а величины $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ и μ_x, μ_y, μ_z – соответственно **главными диэлектрическими (магнитными) проницаемостями**. Материальные уравнения (6.1) и многие другие соотношения для анизотропной среды в главных осях имеют наиболее простой вид.

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну в прозрачной анизотропной среде, свободной от зарядов и токов проводимости. Тогда все четыре вектора \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{H} в комплексном представлении имеют аналогичный вид:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{H}}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (6.6)$$

где $\tilde{\mathbf{D}}_m$, $\tilde{\mathbf{E}}_m$, $\tilde{\mathbf{B}}_m$ и $\tilde{\mathbf{H}}_m$ – постоянные. После подстановки выражений (6.6) система уравнений Максвелла (1.1) (с учётом $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$) примет вид

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{E}}] &= \omega \tilde{\mathbf{B}}, & \text{(II)} \quad [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{H}}] &= -\omega \tilde{\mathbf{D}}, \\ \text{(III)} \quad \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{D}} &= 0, & \text{(IV)} \quad \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}} &= 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Среды, в которых одновременно присутствует анизотропия как диэлектрической, так и магнитной проницаемостей, встречаются сравнительно редко. Поэтому оба вида анизотропии электромагнитных свойств будем рассматривать отдельно.

I. Среда с анизотропией диэлектрической проницаемости, материальные уравнения для которой имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}, \quad (6.8)$$

где μ – скаляр. С учётом (6.8) уравнения Максвелла (6.7) запишутся как

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{E}}] &= \omega \mu_0 \mu \tilde{\mathbf{H}}, & \text{(II)} \quad [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{H}}] &= -\omega \tilde{\mathbf{D}}, \\ \text{(III)} \quad \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{D}} &= 0, & \text{(IV)} \quad \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{H}} &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Из уравнений III и IV системы (6.9) вытекает, что $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$ и $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$, т.е. волна является поперечной в отношении вектора электрической индукции \mathbf{D} и вектора напряжённости магнитного поля \mathbf{H} (а также вектора магнитной индукции \mathbf{B} , коллинеарного \mathbf{H}). Из уравнения II следует, что $\mathbf{D} \perp \mathbf{H}$, а из уравнения I – что $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. Это означает, что векторы \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{k} лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{H} , но \mathbf{E} и \mathbf{D} при этом не коллинеарны вследствие анизотропии диэлектрической проницаемости. Взаимное расположение перечисленных векторов показано на рисунке 6.1а.

Плоскость волновой поверхности определяют векторы \mathbf{D} и \mathbf{H} , а вектор \mathbf{E} не лежит в этой плоскости. Значит, вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ не коллинеарен вектору \mathbf{k} . Таким образом, в анизотропной среде направление плотности потока энергии не совпадает с направлением волнового вектора. При этом вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$ вместе с векторами \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{k} лежит в плоскости, перпендикулярной векторам \mathbf{H} и \mathbf{B} (см. рис. 6.1а).

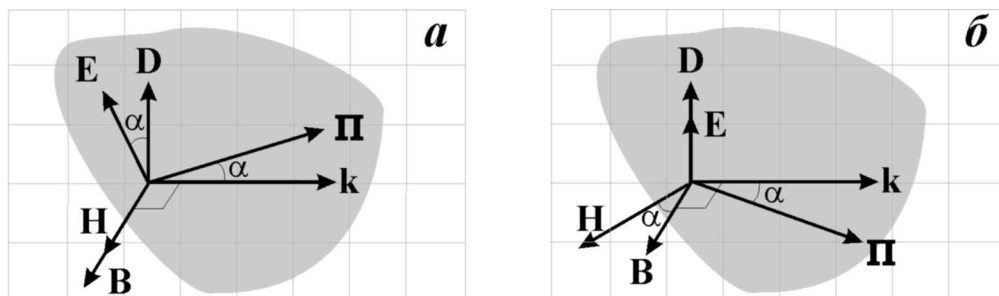


Рис. 6.1.

II. Среда с анизотропией магнитной проницаемости с материальными уравнениями вида

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}. \quad (6.10)$$

Уравнения Максвелла (6.7) при этом принимают вид

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{E}}] &= \omega \tilde{\mathbf{B}}, \quad \text{(II)} \quad [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{H}}] = -\omega \epsilon_0 \epsilon \tilde{\mathbf{E}}, \\ \text{(III)} \quad \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} &= 0, \quad \text{(IV)} \quad \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Из уравнений системы (6.11) вытекает, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$ и $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Таким образом, векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} лежат в плоскости волновой поверхности. Вектор \mathbf{H} не коллинеарен вектору \mathbf{B} и не лежит в этой плоскости; по этой же причине вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$ не коллинеарен волновому вектору \mathbf{k} . Векторы \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{k} и $\mathbf{\Pi}$ лежат в одной плоскости, перпендикулярной векторам \mathbf{E} , \mathbf{D} . Взаимное расположение этих векторов для среды с магнитной анизотропией показано на рисунке 6.1б.

Далее, для определённости, будем рассматривать первый случай среды с анизотропией диэлектрической проницаемости. Получим из системы (6.9) волновое уравнение для вектора \mathbf{E} . Для этого выразим из уравнения I вектор \mathbf{H} и подставим его в уравнение II. Имеем

$$[\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{E}}]] + k_0^2 \mu \epsilon \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad (6.12)$$

где $k_0 = \omega/c$ – волновое число для вакуума. Раскрывая в (6.12) двойное векторное произведение, получаем уравнение

$$\mathbf{k}(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{E}}) + (k_0^2 \mu \epsilon - k^2)\tilde{\mathbf{E}} = 0. \quad (6.13)$$

В проекциях на оси координат (6.13) даёт систему трёх линейных однородных уравнений в переменных \tilde{E}_i ($i = x, y, z$). Такая система имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю. Запишем это условие, выбирая в качестве осей координат главные диэлектрические оси:

$$\det \begin{vmatrix} k_0^2 \mu \epsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & k_0^2 \mu \epsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & k_0^2 \mu \epsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.14)$$

Раскрывая определитель в (6.14), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & n^2 (\epsilon_x n_x^2 + \epsilon_y n_y^2 + \epsilon_z n_z^2) - \\ & - (n_x^2 \epsilon_x (\epsilon_y + \epsilon_z) + n_y^2 \epsilon_y (\epsilon_x + \epsilon_z) + n_z^2 \epsilon_z (\epsilon_x + \epsilon_y)) + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z = 0, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где введён вектор $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k_0$ с компонентами $n_i = k_i/k_0$ ($i = x, y, z$), модуль которого равен показателю преломления волны, распространяющейся в данном направлении. Уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** называют *уравнением Френеля* или *дисперсионным уравнением*, поскольку оно позволяет определить зависимость $k(\omega)$ волнового числа от частоты (от частоты в **Ошибка! Источник ссылки не найден.** зависят компоненты тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$).

Для волны фиксированной частоты ω уравнение Френеля является квадратным уравнением относительно квадрата волнового числа. Для каждого направления в пространстве существует два положительных корня этого уравнения, т.е. два значения волнового числа k и показателя преломления n . Например, при распространении вдоль главной оси z следует положить $n = n_z, n_x = n_y = 0$. Тогда **Ошибка! Источник ссылки не найден.** принимает вид

$$n^4 - n^2(\epsilon_x + \epsilon_y) + \epsilon_x \epsilon_y = 0, \quad (0.184)$$

откуда находим два показателя преломления $n_1^2 = \epsilon_x$ и $n_2^2 = \epsilon_y$.

Таким образом, в заданном направлении в анизотропной среде могут распространяться две независимые (нормальные) волны, различающиеся волновыми числами и, соответственно, фазовыми скоростями. Можно показать, что в отношении вектора \mathbf{D} нормальные волны линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях.

Как уже отмечалось, для волны в анизотропной среде следует различать направление распространения фазы волны (т.е. волнового вектора \mathbf{k}) и направление переноса энергии (в кристаллооптике его принято называть **лучом**). Соответственно, помимо фазовой скорости v_ϕ , рассматривается скорость переноса энергии (**лучевая скорость** v_Π). Она направлена по вектору Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$ и определяется согласно (2.47) как отношение интенсивности волны к средней плотности её энергии:

$$v_\Pi = \langle \mathbf{\Pi} \rangle / \langle w \rangle. \quad (0.185)$$

Лучевая скорость в анизотропной среде отличается от фазовой как направлением (ввиду несовпадения ориентаций векторов \mathbf{k} и $\mathbf{\Pi}$), так и по модулю.

Можно показать, что $v_{\text{г}}$ по величине равна групповой скорости волны и связана с фазовой скоростью соотношением $v_{\text{ф}} = v_{\text{г}} \cos \alpha$, где α – угол между векторами \mathbf{k} и $\mathbf{\Pi}$ (см. рис. 6.1).

6.2. Электромагнитные волны в одноосных кристаллах

Важным и в то же время простым частным случаем анизотропной среды является среда, в которой два из трёх главных значений тензора диэлектрической проницаемости вида **Ошибка! Источник ссылки не найден.** равны. В кристаллооптике такие среды называются **одноосными кристаллами**.

В одноосных кристаллах существует одно выделенное направление – **оптическая ось**, совпадающее с одной из главных диэлектрических осей. Направления двух других главных осей произвольны. Если, например, оптическая ось совпадает с осью z , то $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_{\perp}$, $\epsilon_z = \epsilon_{\parallel}$. Величины ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} называются **продольной** и **поперечной диэлектрическими проницаемостями** одноосного кристалла. Векторы электрического поля \mathbf{E} и \mathbf{D} можно разложить на составляющие \mathbf{E}_{\parallel} , \mathbf{D}_{\parallel} , направленные вдоль оптической оси, и перпендикулярные к ней составляющие \mathbf{E}_{\perp} , \mathbf{D}_{\perp} ; для них

$$\mathbf{D}_{\parallel} = \epsilon_0 \epsilon_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{D}_{\perp} = \epsilon_0 \epsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}. \quad (0.186)$$

Плоскость, в которой лежат оптическая ось и волновой вектор \mathbf{k} , называется **главным сечением кристалла**. Буквой θ обозначим угол между вектором \mathbf{k} и осью z , совпадающей с оптической осью (рис. 6.2).

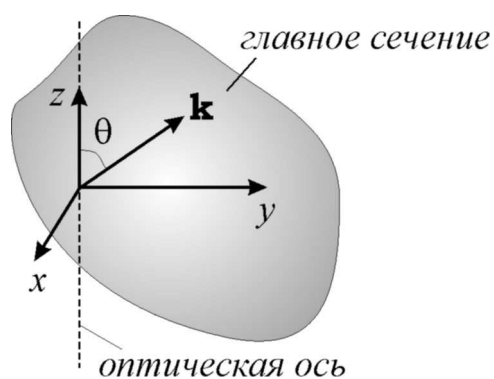


Рис. 6.2.

Уравнение Френеля **Ошибка! Источник ссылки не найден.** для одноосного кристалла принимает вид

$$\left(n^2 - \varepsilon_{\perp}\right)\left(\varepsilon_{\parallel}n_z^2 + \varepsilon_{\perp}\left(n_x^2 + n_y^2\right) - \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\right) = 0, \quad (0.187)$$

т.е. распадается на два уравнения:

$$n^2 = \varepsilon_{\perp}, \quad (0.188)$$

$$\frac{n_z^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{n_x^2 + n_y^2}{\varepsilon_{\parallel}} = 1, \quad (0.189)$$

соответствующие двум нормальным волнам одноосного кристалла. Волна, определяемая уравнением (0.188), называется **обыкновенной**, так как она ничем не отличается от волны, которая распространялась бы в изотропной среде с показателем преломления $n = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$. Показатель преломления второй волны, как следует из (0.189), зависит угла θ , т.е. от направления её распространения. Эту волну называют **необыкновенной**.

Таким образом, обыкновенная волна распространяется в кристалле по всем направлениям с одинаковой фазовой скоростью $v_o = c/n_o$, а фазовая скорость необыкновенной волны $v_e = c/n_e$, напротив, есть функция угла θ . Согласно рисунку 6.2, $n_z = k_z/k_0 = n \cos \theta$, $n_y = k_y/k_0 = n \sin \theta$, $n_x = 0$. Тогда для показателей преломления обыкновенной n_o и необыкновенной n_e волн получаем

$$n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}, \quad (0.190)$$

$$n_e = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}\sin^2\theta + \varepsilon_{\parallel}\cos^2\theta}}. \quad (0.191)$$

Если волна распространяется вдоль оптической оси ($\theta = 0$), то (0.190) и (0.191) дают $n_e = n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$, т.е. фазовые скорости обыкновенной и необыкновенной волн одинаковы ($v_o = v_e$). Наибольшее различие показателей преломления и фазовых скоростей двух нормальных волн достигается в направлении, перпендикулярном оптической оси.

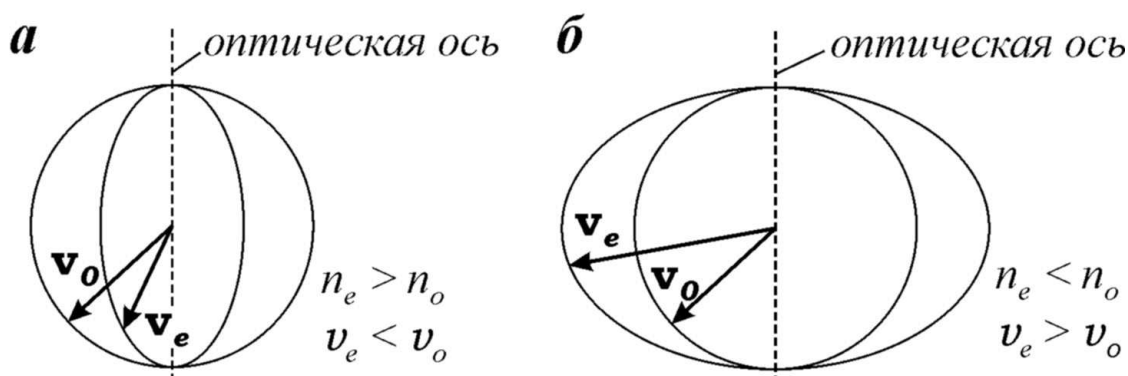


Рис. 6.3.

Для наглядности представления о характере изменения скорости волны в зависимости от направления её распространения рассматривается **поверхность нормалей** (рис. 6.3а, б). Для её построения из некоторой точки в различных направлениях откладывают отрезки, длины которых равны значениям фазовых скоростей в данном направлении. Для каждого направления таких значений будет два, поэтому поверхность нормалей оказывается двойной. Для обыкновенной волны она представляет собой сферу, для необыкновенной – эллипсоид вращения. Эллипсоид и сфера касаются друг друга в точках пересечения с оптической осью. Если для всех других направлений $n_e > n_o$, то $v_o > v_e$ и кристалл называется **положительным**. Для **отрицательных кристаллов** $n_e < n_o$ и $v_o < v_e$. Для положительного кристалла эллипсоид вращения вытянут и вписан в сферу (рис. 6.3а), а для отрицательного – сплюснут и описан около сферы (рис. 6.3б). Если от центра откладывать не фазовую, а лучевую скорость в данном направлении, то получится так называемая **лучевая поверхность**, имеющая вид, аналогичный поверхности нормалей.

Рассмотрим структуру (поляризацию) электрического поля обыкновенной и необыкновенной волн, а также обыкновенного и необыкновенного лучей. Каждой из двух нормальных волн соответствует определённый случай ориентации вектора электрической индукции **D**.

1) Вектор **D** обыкновенной волны перпендикулярен главному сечению и главной оптической оси (рис. 6.4а). Тогда $\mathbf{D} = \mathbf{D}_\perp = \epsilon_0 \epsilon_\perp \mathbf{E}_\perp$, т.е. **D** и **E** коллинеарны и $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, как и в изотропной среде. Коллинеарны также векторы **k** и **П**, т.е. направления фазовой и лучевой скоростей совпадают.

2) Векторы **D** и **E** необыкновенной волны лежат в плоскости главного сечения (рис. 6.4б). При $\theta \neq 0, \pm \pi/2$ оба вектора имеют как продоль-

ную, так и поперечную составляющие и неколлинеарны друг другу, при этом $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$, а $\mathbf{E} \perp \mathbf{\Pi}$. Направления фазовой и лучевой скоростей совпадают только при распространении вдоль главной оптической оси или перпендикулярно ей.

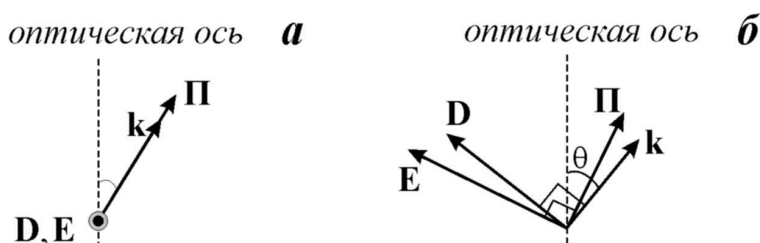


Рис. 6.4.

Если электромагнитная волна вступает в одноосный кристалл из изотропной среды, то внутри кристалла она в общем случае порождает две линейно поляризованные волны, распространяющиеся в кристалле с различными фазовыми и лучевыми скоростями. Это явление называется **двойным лучепреломлением**. Рассмотрим его подробнее.

Пусть на плоскую границу одноосного кристалла под некоторым углом φ из вакуума падает неполяризованная плоская волна. Предположим, что оптическая ось кристалла лежит в плоскости падения и направлена под произвольным углом к плоскости границы (рис. 6.5). Для построения обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле используем **принцип Гюйгенса**. В нём постулируется, что каждая точка, до которой доходит возбуждение поля, может рассматриваться как источник сферических вторичных волн. Для определения волновой поверхности распространяющейся волны в последующие моменты времени следует построить огибающую волновых поверхностей этих вторичных волн. За время, в течение которого правый край фронта АВ достигает точки В' на поверхности кристалла, вокруг каждой из точек поверхности между А и В' возникают две лучевые поверхности – сферическая и эллипсоидальная. Эти две поверхности соприкасаются друг с другом на оптической оси.

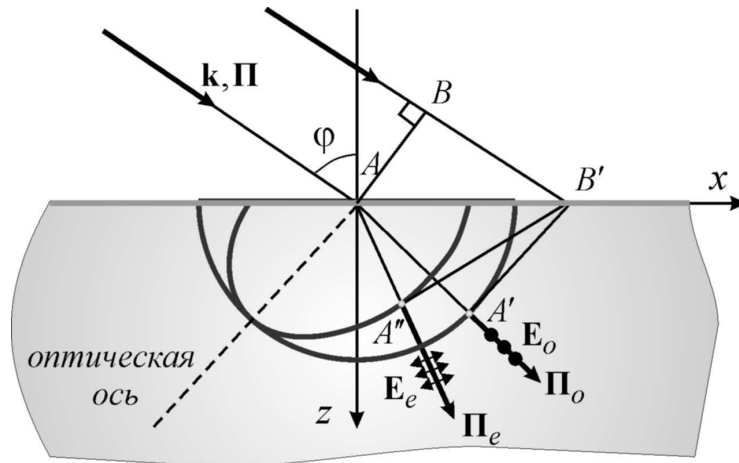


Рис. 6.5.

На рисунке 6.5 изображены лучевые поверхности с центром в точке A для случая положительного кристалла, когда эллипсоид вписан в сферу. Далее проводим касательные $A'B'$ и $A''B'$ соответственно к сфере и эллипсоиду. Линии, соединяющие точку A с точками касания сферической и эллипсоидальной поверхностей с касательными $A'B'$ и $A''B'$, дают соответственно обыкновенный и необыкновенный лучи, углы преломления которых в данном случае различны. При этом, в отличие от обыкновенного луча, направление необыкновенного луча и направление нормали к соответствующему волновому фронту не совпадают. Так как главное сечение кристалла в данном случае совпадает с плоскостью рисунка, то электрический вектор обыкновенного луча E_o колеблется перпендикулярно этой плоскости, а электрический вектор необыкновенного луча E_e колеблется в плоскости рисунка.

6.3. Тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы

Анизотропные среды, у которых диэлектрическая или магнитная проницаемость описывается *несимметричным тензором*, называются **гиротропными**. Среда, которая приобретает гиротропные свойства под действием постоянного внешнего магнитного поля, называется **магнитоактивной**. Примерами таких сред являются намагниченная плазма и намагниченный феррит. Магнитоактивная плазма служит примером **гиросреды**, у которой несимметричным тензором является диэлектрическая проницаемость, тогда как μ – скаляр. У намагниченного феррита

несимметричным тензором является магнитная проницаемость. В этом случае среду называют **гиромагнитной**.

Плазма – это ионизованный газ, представляющий собой смесь нейтральных и заряженных частиц. Обычно заряженные частицы – это положительно заряженные ионы и отрицательно заряженные свободные электроны. В целом, плазма является электрически нейтральной. В дальнейшем при рассмотрении движения частиц плазмы во внешних полях будем пренебрегать движением ионов. Также не будем учитывать столкновения заряженных частиц друг с другом, т.е. пренебрежём проводимостью плазмы. При этом в уравнении Максвелла II системы (1.1) можно пренебречь током проводимости по сравнению с током смещения.

Вначале рассмотрим ненамагниченную плазму. Ввиду хаотичности теплового движения частиц такая плазма должна быть изотропной. Пусть плазма находится в переменном электрическом поле вида

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i\omega t}. \quad (0.192)$$

Уравнение движения свободного электрона запишется как

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E}, \quad (0.193)$$

где m – масса электрона, e – элементарный заряд, \mathbf{r} – смещение электрона под действием поля. Уравнение (0.193) легко интегрируется, что с учётом (0.192) даёт

$$\mathbf{r} = e\mathbf{E}/m\omega^2. \quad (0.194)$$

Смещение электрона \mathbf{r} от первоначального положения приводит к появлению электрического дипольного момента $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$. Если в единице объёма содержится N свободных электронов, получающих под действием поля одинаковое смещение, то суммарный дипольный момент единицы объёма (**вектор поляризации**) с учётом (0.194) равен

$$\mathbf{P} = -Ne\mathbf{r} = -Ne^2\mathbf{E}/m\omega^2. \quad (0.195)$$

Используя выражения (1.11) и (1.12) вектора электрической индукции \mathbf{D} , для диэлектрической проницаемости ε плазмы получаем

$$\varepsilon = 1 - Ne^2/\varepsilon_0 m\omega^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2, \quad (0.196)$$

где введена **плазменная частота** ω_p :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}. \quad (0.197)$$

Диэлектрическая проницаемость (0.196) – скалярная величина, т.е. ненамагниченная плазма в самом деле является изотропной средой. Как видно из (0.196), ϵ обладает частотной дисперсией. Плазменная частота (0.197) играет роль частоты «отсечки», ниже которой электромагнитная волна в изотропной плазме распространяться не может: при $\omega < \omega_p$ $\epsilon < 0$ и показатель преломления плазмы становится мнимой величиной.

Пусть теперь наряду с полем (0.192) на плазму воздействует постоянное внешнее магнитное поле, приложенное вдоль оси z : $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$. Таким образом, в плазме появляется физически выделенное направление. Под действием магнитной составляющей силы Лоренца (1.2) свободные электроны плазмы движутся по винтовым траекториям, вращаясь вокруг направления внешнего поля с циклической частотой

$$\omega_H = \frac{e\mu_0 H_0}{m}, \quad (0.198)$$

не зависящей ни от скорости частицы, ни от радиуса орбиты. Частоту ω_H называют **циклотронной** или **резонансной частотой** электрона. При наличии переменного электрического поля вида (0.192) траектории электронов будут иметь более сложный характер, причём их вид будет зависеть от угла, который образует вектор \mathbf{E} с вектором \mathbf{H}_0 . Таким образом, вектор поляризации \mathbf{P} плазмы будет зависеть от направления и намагниченная плазма будет проявлять свойства анизотропной среды.

Поле \mathbf{E} может являться переменным электрическим полем распространяющейся в плазме электромагнитной волны. Для того чтобы были правомерны оговоренные выше приближения, частота волны ω должна удовлетворять следующим условиям. Ионы плазмы можно считать неподвижными, если $\omega \gg \omega_{Hi}$, где ω_{Hi} – циклотронная частота иона. Если, кроме того, $\omega \gg \nu$, где ν – частота соударений электронов с ионами и нейтральными частицами, то можно пренебречь токами проводимости по сравнению с токами смещения (фактически – пренебречь потерями в плазме). Определим диэлектрическую проницаемость магнитоактивной плазмы, удовлетворяющей данным условиям.

Ввиду гармонической зависимости поля \mathbf{E} от времени, такой же зависимостью будет обладать и вектор поляризации \mathbf{P} . Поэтому

$$\dot{\mathbf{P}} = i\omega\mathbf{P} = -Nev$$

(\mathbf{v} – скорость электрона), откуда

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\mathbf{E} - i\frac{eN}{\omega}\mathbf{v}. \quad (6.31)$$

Скорость \mathbf{v} будем искать с помощью уравнения движения электрона под действием силы Лоренца (1.2):

$$m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E} - e[\mathbf{v}, \mu_0\mathbf{H}_0]. \quad (6.32)$$

Временная зависимость скорости \mathbf{v} должна быть гармонической, т.е. $\dot{\mathbf{v}} = i\omega\mathbf{v}$. С учётом этого спроектируем векторное уравнение (6.32) на оси декартовой системы координат:

$$\begin{cases} v_x = i\frac{e}{m\omega}E_x + i\frac{\omega_H}{\omega}v_y, \\ v_y = i\frac{e}{m\omega}E_y - i\frac{\omega_H}{\omega}v_x, \\ v_z = i\frac{e}{m\omega}E_z \end{cases} \quad (6.33)$$

(где введена циклотронная частота (6.30)). Решая систему (6.33) относительно проекций скорости v_x , v_y , v_z и подставляя полученные выражения в (6.31), приходим к следующим выражениям проекций вектора электрической индукции \mathbf{D} :

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \right) E_x - i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)} E_y, \\ D_y = i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)} E_x + \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \right) E_y, \\ D_z = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) E_z \end{cases} \quad (6.34)$$

(при выводе (6.34) использовано определение плазменной частоты (6.29)). Из (6.34) следует, что диэлектрическая проницаемость магнитоактивной плазмы является тензором вида

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon_a & 0 \\ i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (6.35)$$

$$\text{где } \varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \varepsilon_z = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_a = \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}.$$

Из (6.35) видно, что в магнитоактивной плазме существует резонанс: при $\omega \rightarrow \omega_H$ некоторые компоненты тензора \mathfrak{E} стремятся к бесконечности. Наличие расходимостей связано с тем, что при выводе не учитывались диссипативные процессы, т.е. проводимость плазмы.

6.4. Электромагнитные волны в магнитоактивной плазме

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в магнитоактивной плазме, намагниченной в направлении оси z внешним полем \mathbf{H}_0 . Уравнения Максвелла (2.6) для комплексных амплитуд векторов поля $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ принимают при этом вид

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}, \quad \text{rot } \tilde{\mathbf{H}} = i\omega\mathfrak{E}_0\tilde{\mathbf{E}}, \quad (6.36)$$

где тензор диэлектрической проницаемости \mathfrak{E} определяется согласно (6.35). Запишем уравнения (6.36) в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu_0 H_x, & \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon E_x - i\varepsilon_a E_y), \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu_0 H_y, & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon_0(i\varepsilon_a E_x + \varepsilon E_y), \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu_0 H_z; & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_z E_z. \end{cases} \quad (6.37)$$

Далее ограничимся рассмотрением двух наиболее простых, но в то же время интересных частных случаев.

I. Распространение плоской волны в направлении постоянного внешнего поля, т.е. оси z (продольное распространение).

Искать решение системы (6.37) в этом случае будем в виде

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_m e^{-ikz}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{H}}_m e^{-ikz}, \quad (6.38)$$

где k – неизвестное пока волновое число, а $\tilde{\mathbf{E}}_m$, $\tilde{\mathbf{H}}_m$ – постоянные.

Подставим решения (6.38) в систему (6.37). Для плоской волны частные производные векторов поля по переменным x и y равны нулю. Тогда из выражений проекций на ось z получаем, что $\tilde{E}_z = 0$, $\tilde{H}_z = 0$, т.е. в данном частном случае волна является поперечной относительно как электрического, так и магнитного поля (ТЕМ-волна). Оставшиеся четыре уравнения примут вид

$$\begin{cases} k\tilde{E}_y = -\omega\mu_0\tilde{H}_x, & \begin{cases} k\tilde{H}_y = \omega\varepsilon_0(\varepsilon\tilde{E}_x - i\varepsilon_a\tilde{E}_y), \\ k\tilde{H}_x = -\omega\varepsilon_0(i\varepsilon_a\tilde{E}_x + \varepsilon\tilde{E}_y). \end{cases} \end{cases} \quad (0.199)$$

Путём исключения компонент H_x , H_y (0.199) сводится к системе линейных однородных уравнений относительно переменных \tilde{E}_x , \tilde{E}_y :

$$\begin{cases} i\omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_a\tilde{E}_x - (k^2 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon)\tilde{E}_y = 0, \\ (k^2 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon)\tilde{E}_x + i\omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_a\tilde{E}_y = 0. \end{cases} \quad (0.200)$$

Приравнивая к нулю определитель системы (0.200), получаем уравнение

$$k^2 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon = \pm\omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_a,$$

два положительных корня которого дают два возможных значения k :

$$k_{\pm} = k_0\sqrt{\varepsilon \pm \varepsilon_a}, \quad (0.201)$$

где $k_0 = \omega/c$ – волновое число в вакууме. Подставляя значения k_{\pm} в (0.200), приходим к соотношению, связывающему компоненты E_x и E_y :

$$E_y = \pm iE_x, \quad (0.202)$$

что соответствует волнам круговой поляризации с противоположным направлением вращения.

Итак, в магнитоактивной плазме в направлении намагничивающего поля могут распространяться две независимые волны круговой поляризации. Первая волна с постоянной распространения k_+ , для которой компоненты электрического вектора связаны соотношением $E_y = iE_x$, является волной ЛЕВОЙ круговой поляризации: вектор \mathbf{E} этой волны определяется выражением

$$\tilde{\mathbf{E}}^+ = A_1(\mathbf{x}_0 + iy_0)e^{-ik_+z}, \quad (0.203)$$

он вращается в плоскости (x, y) ПО ЧАСОВОЙ СТРЕЛКЕ, если смотреть НАВСТРЕЧУ внешнему магнитному полю. Соответственно, волна с постоянной распространения k_- является волной ПРАВОЙ круговой поляризации: её электрический вектор

$$\tilde{\mathbf{E}}^- = A_2 (\mathbf{x}_0 - i\mathbf{y}_0) e^{-ik_-z} \quad (0.204)$$

вращается ПРОТИВ ЧАСОВОЙ СТРЕЛКИ, если смотреть в том же направлении. Если же изменить «направление взгляда» на противоположное, т.е. смотреть ВСЛЕД волновому вектору бегущей волны и вектору \mathbf{H}_0 , то сменится на противоположное и направление вращения векторов поля обеих волн.

Нормальные волны (0.203) и (0.204) отличаются постоянными распространения и фазовыми скоростями. Этим объясняется явление вращения плоскости поляризации линейно поляризованной волны. Предположим, что амплитуды двух нормальных волн равны: $A_1 = A_2 = A$. Их суммарное поле найдётся как $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}^+ + \tilde{\mathbf{E}}^-$. При $z = 0$ $\tilde{\mathbf{E}} = 2A\mathbf{x}_0$, т.е. волна поляризована линейно вдоль оси x . В плоскости $z = l$ имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= A(\mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0)e^{-ik_+l} + A(\mathbf{x}_0 - i\mathbf{y}_0)e^{-ik_-l} = \\ &= 2Ae^{-ikl} (\mathbf{x}_0 \cos(\Delta k \cdot l) + \mathbf{y}_0 \sin(\Delta k \cdot l)), \end{aligned} \quad (0.205)$$

где $k = (k_+ + k_-)/2$, $\Delta k = (k_+ - k_-)/2$. Волна (0.205) также является линейно поляризованной, но вектор \mathbf{E} образует с осью x отличный от нуля угол ψ :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{tg}(\Delta k \cdot l), \quad \psi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \psi) = \Delta k \cdot l. \quad (0.206)$$

Согласно (0.206), угол поворота плоскости поляризации ψ линейно возрастает по мере распространения волны в плазме. Описанное явление называют **эффектом Фарадея**.

II. Распространение плоской волны перпендикулярно направлению постоянного внешнего поля (поперечное распространение).

Пусть волна распространяется в направлении оси y . Тогда в **Ошибка! Источник ссылки не найден.** равны нулю частные производные по переменным x и z . Подставляя в систему **Ошибка! Источник ссылки не найден.** её решение в виде

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_m e^{-iky}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{H}}_m e^{-iky},$$

находим, что она распадается на две независимые подсистемы, соответствующие двум нормальным (собственным) волнам.

Первая подсистема

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} = -i\omega\mu_0 \tilde{H}_x, \quad -\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_z \tilde{E}_z \quad (0.207)$$

даёт решение в виде плоской линейно-поляризованной волны с вектором \mathbf{E} , параллельным внешнему полю \mathbf{H}_0 и ортогональным ему вектором \mathbf{H} . Эта волна называется «обыкновенной»; её постоянная распространения соответствует волне, распространяющейся в изотропной плазме:

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_z}, \quad Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_z}}. \quad (0.208)$$

Вторая подсистема, соответствующая «необыкновенной» нормальной волне, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = i\omega\mu_0 \tilde{H}_z, \\ \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0 (\varepsilon \tilde{E}_x - i\varepsilon_a \tilde{E}_y), \\ 0 = i\omega\varepsilon_0 (i\varepsilon_a \tilde{E}_x + \varepsilon \tilde{E}_y). \end{cases} \quad (0.209)$$

Из (0.209) видно, что магнитное поле этой волны линейно поляризовано в направлении внешнего поля \mathbf{H}_0 . Электрическое поле поляризовано эллиптически в ортогональной внешнему полю плоскости (x, y) , так как его компоненты \tilde{E}_x и \tilde{E}_y связаны соотношением

$$\tilde{E}_y = -i \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} \tilde{E}_x.$$

Постоянная распространения и импеданс необыкновенной волны равны

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2}{\varepsilon}}, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon}{\varepsilon_0 (\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2)}}. \quad (0.210)$$

Различие волновых характеристик (0.208) и (0.210) нормальных волн означает наличие эффекта двойного лучепреломления. Произвольная волна, распространяющаяся в поперечно намагниченной плазме, является супер-

позицией двух нормальных волн, причём параметры поляризации суммарной волны будут изменяться по мере её распространения в плазме.

6.5. Тензор высокочастотной магнитной проницаемости феррита. Ферромагнитный резонанс

Ферриты – это магнитные полупроводники и диэлектрики, обладающие в диапазоне СВЧ достаточно малым уровнем потерь. Это твёрдые кристаллические вещества, обычно изготавливаемые в виде керамики. С точки зрения химии, ферриты – соединения оксида железа Fe_2O_3 с оксидами других двухвалентных металлов. Магнитные свойства ферритов обусловлены наличием в их кристаллической решётке атомов или ионов, обладающих нескомпенсированным спиновым моментом электронов.

В отличие от ферромагнетиков, в намагниченном состоянии магнитные атомы ферритов образуют две подрешётки, магнитные моменты которых имеют противоположные направления. Результирующий магнитный момент равен разности магнитных моментов двух подрешёток. Вещества такой магнитной структуры называются **ферримагнетиками**. Ферромагнетики и антиферромагнетики являются частными случаями ферримагнетиков.

Феррит, намагниченный внешним магнитным полем, обладает особым видом анизотропии – **магнитной гиротропией**.

Рассмотрим однородный неограниченный феррит, намагниченный до насыщения постоянным внешним магнитным полем напряжённостью \mathbf{H}_0 . Здесь и далее будем считать, что поле \mathbf{H}_0 приложено вдоль оси z декартовой системы координат. Также предположим, что в отсутствие намагничивающего поля феррит изотропен, т.е. будем пренебрегать всеми видами анизотропии феррита, кроме магнитной гиротропии, наведённой полем \mathbf{H}_0 .

Намагниченный феррит характеризуется вектором намагниченности \mathbf{M} , представляющим собой суммарный магнитный момент единицы объёма феррита. Движение вектора \mathbf{M} во внешних (постоянных и переменных) магнитных полях описывается **уравнением Ландау – Лифшица**:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma\mu_0 [\mathbf{M}, \mathbf{H}], \quad (0.211)$$

где $\gamma = e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг – **гиромагнитное отношение** электрона, \mathbf{H} – напряжённость внешнего магнитного поля.

Выясним характер движения вектора намагниченности в присутствии только постоянного внешнего поля $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$, намагничивающего феррит до насыщения. В проекциях на оси декартовой системы координат уравнение (0.211) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dM_x}{dt} = -\gamma\mu_0 H_0 M_y, \\ \frac{dM_y}{dt} = \gamma\mu_0 H_0 M_x, \\ \frac{dM_z}{dt} = 0. \end{cases} \quad (0.212)$$

Исключая, например, M_y из первых двух уравнений системы (0.212), получаем следующее уравнение для составляющей M_x :

$$\frac{d^2 M_x}{dt^2} + \omega_H^2 M_x = 0, \quad (0.213)$$

где зависящая от намагничивающего поля величина $\omega_H = \gamma\mu_0 H_0$ называется **частотой ферромагнитного резонанса**. Это – дифференциальное уравнение гармонических колебаний частоты ω_H , решение которого имеет вид

$$M_x = A \sin(\omega_H t + \alpha) \quad (0.214)$$

(A , α – произвольные постоянные). Подставляя (0.214) во второе уравнение системы (0.212), найдём

$$M_y = -A \cos(\omega_H t + \alpha). \quad (0.215)$$

Третье уравнение даёт $M_z = \text{const}$. Эта постоянная – **намагниченность насыщения** M_0 , которая определяется экспериментально и является одной из основных характеристик феррита.

Из уравнений (0.214) и (0.215) видно, что конец вектора \mathbf{M} вращается с угловой скоростью ω_H в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{H}_0 . Если смотреть **НАВСТРЕЧУ** вектору \mathbf{H}_0 , то вращение вектора \mathbf{M} происходит **ПРОТИВ ЧАСОВОЙ СТРЕЛКИ** (см. рис. 6.6а). Такой вид движения вектора намагниченности называется **прецессией**.

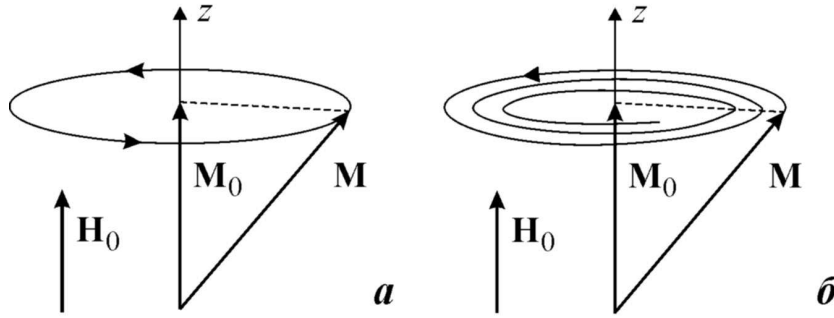


Рис. 6.6.

Уравнение Ландау – Лифшица в виде (0.211) не учитывает потери энергии. В реальном феррите энергия магнитных колебаний рассеивается, превращаясь в тепло, и траекторией конца вектора \mathbf{M} является не окружность, а спираль постепенно уменьшающегося радиуса (см. рис. 6.6б). За время порядка 10^{-8} с (время релаксации) прецессия магнитного момента затухает, и магнитные моменты всех атомов устанавливаются по полю \mathbf{H}_0 . Для поддержания прецессии к ферриту должно быть приложено внешнее переменное поле (режим вынужденной прецессии). Это может быть, например, поле распространяющейся в феррите электромагнитной волны.

Пусть теперь кроме постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$ в феррите присутствует переменное магнитное поле, ориентированное перпендикулярно \mathbf{H}_0 и изменяющееся по гармоническому закону с частотой ω , т.е.

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_0 + \tilde{\mathbf{H}}_1 e^{i\omega t}. \quad (0.216)$$

Вектор намагниченности \mathbf{M} будет совершать при этом вынужденные колебания той же частоты ω , т.е. у него также появится переменная составляющая:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_0 + \tilde{\mathbf{M}}_1 e^{i\omega t}. \quad (0.217)$$

Подставляя (0.216) и (0.217) в уравнение Ландау – Лифшица (0.211), получим:

$$i\omega \tilde{\mathbf{M}}_1 = -\gamma \mu_0 [\tilde{\mathbf{M}}_1, \mathbf{H}_0] - \gamma \mu_0 [\mathbf{M}_0, \tilde{\mathbf{H}}_1] - \gamma \mu_0 [\tilde{\mathbf{M}}_1, \tilde{\mathbf{H}}_1]. \quad (0.218)$$

Здесь учтено, что $\mathbf{M}_0 \uparrow \uparrow \mathbf{H}_0$ и поэтому $[\mathbf{M}_0, \mathbf{H}_0] = 0$. Приложенное переменное поле будем считать малым, так что выполняются неравенства $|\tilde{\mathbf{H}}_1| \ll H_0$, $|\tilde{\mathbf{M}}_1| \ll M_0$. Тогда в правой части уравнения (0.218) можно пренебречь третьим слагаемым ввиду его малости.

Спроектируем (0.218) на оси декартовой системы координат. Учитывая, что $\mathbf{H}_0(0, 0, H_0)$, $\tilde{\mathbf{H}}_1(\tilde{H}_x, \tilde{H}_y, 0)$, $\mathbf{M}_0(0, 0, M_0)$, $\tilde{\mathbf{M}}_1(\tilde{M}_x, \tilde{M}_y, \tilde{M}_z)$, получаем:

$$\begin{cases} i\omega\tilde{M}_x = -\omega_H\tilde{M}_y + \omega_M\tilde{H}_y, \\ i\omega\tilde{M}_y = \omega_H\tilde{M}_x - \omega_M\tilde{H}_x, \\ i\omega\tilde{M}_z = 0, \end{cases} \quad (0.219)$$

где введено обозначение $\omega_M = \gamma\mu_0 M_0$. Отсюда находим проекции вектора намагниченности:

$$\begin{cases} \tilde{M}_x = \frac{\omega_H\omega_M}{\omega_H^2 - \omega^2}\tilde{H}_x + i\frac{\omega\omega_M}{\omega_H^2 - \omega^2}\tilde{H}_y, \\ \tilde{M}_y = -i\frac{\omega\omega_M}{\omega_H^2 - \omega^2}\tilde{H}_x + \frac{\omega_H\omega_M}{\omega_H^2 - \omega^2}\tilde{H}_y, \\ \tilde{M}_z = 0. \end{cases} \quad (0.220)$$

Коэффициенты при \tilde{H}_x, \tilde{H}_y в правой части уравнений (0.220) образуют **тензор высокочастотной магнитной восприимчивости феррита**:

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 = \boldsymbol{\chi}\tilde{\mathbf{H}}_1, \quad (0.221)$$

где $\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi = \frac{\omega_H\omega_M}{\omega_H^2 - \omega^2}$, $\chi_a = \frac{\omega\omega_M}{\omega_H^2 - \omega^2}$.

Зная тензор $\boldsymbol{\chi}$, находим **тензор высокочастотной магнитной проницаемости $\boldsymbol{\mu}$** :

$$\boldsymbol{\mu} = 1 + \boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (0.222)$$

где $\mu = 1 + \chi = \frac{\omega_H^2 - \omega^2 + \omega_H\omega_M}{\omega_H^2 - \omega^2}$, $\mu_a = \chi_a = \frac{\omega\omega_M}{\omega_H^2 - \omega^2}$.

Компоненты тензора $\boldsymbol{\mu}$ обладают резонансной зависимостью от частоты (роль резонансной частоты при этом играет величина ω_H): при $\omega \rightarrow \omega_H$ $\mu, \mu_a \rightarrow \infty$. Такой же характер имеет зависимость μ и μ_a от на-

пряжённости внешнего постоянного поля H_0 на фиксированной частоте ω , причём резонанс достигается при значении поля $H_{\text{рез}} = \omega/\gamma\mu_0$.

Если решать уравнение Ландау – Лифшица с учётом потерь, то зависимости величин μ и μ_a от ω и H_0 будут иметь вид гладких кривых без разрывов. Кроме того, μ и μ_a будут комплексными величинами: $\mu = \mu' - i\mu''$, $\mu_a = \mu'_a - i\mu''_a$. Полевые и частотные зависимости мнимых частей μ'' , μ''_a имеют максимум в области резонанса. Таким образом, наблюдается резонансное поглощение энергии высокочастотного поля ферритом. Это явление называется **ферромагнитным резонансом**. Частотные и полевые зависимости вещественной и мнимой частей величин μ , μ_a показаны на рисунке 6.7 (штриховой линией показан ход зависимостей в отсутствие потерь).

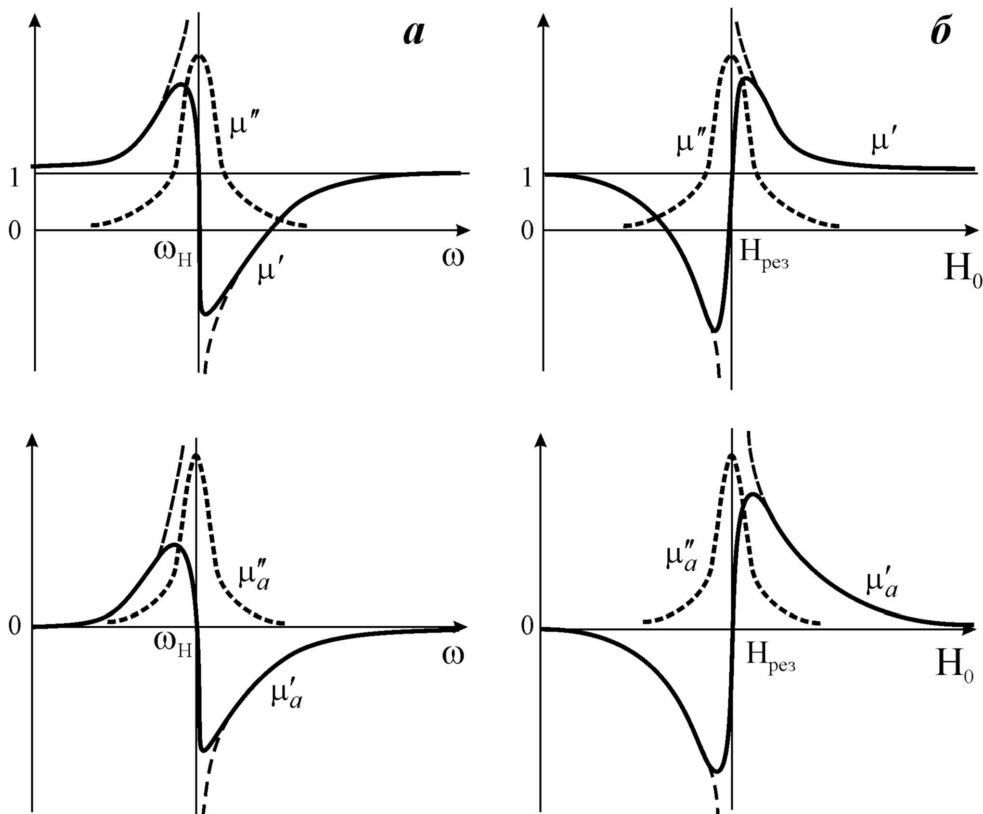


Рис. 6.7.

6.6. Поперечно намагниченный феррит. Эффект Коттона – Мутона

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в феррите ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО направлению внешнего намагничивающего поля $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$ (например, в направлении оси y . Феррит ха-

рактируется скалярной диэлектрической проницаемостью ϵ и тензором магнитной проницаемости μ вида (6.62).

Запишем уравнения Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$

$$\begin{cases} \text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}, \\ \text{rot } \tilde{\mathbf{H}} = i\omega\epsilon\epsilon_0\tilde{\mathbf{E}} \end{cases} \quad (6.63)$$

и спроектируем их на оси выбранной системы координат. В левой части получившихся выражений учтём, что волна плоская и частные производные по координатам x и z равны нулю. При записи проекций первого уравнения системы (6.63) необходимо учесть тензорный характер магнитной проницаемости. В результате получается система шести скалярных уравнений, которая разбивается на две независимые подсистемы. Первая подсистема содержит компоненты полей $\tilde{E}_z, \tilde{H}_x, \tilde{H}_y$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} = -i\omega\mu_0(\mu\tilde{H}_x + i\mu_a\tilde{H}_y), \\ 0 = -i\omega\mu_0(-i\mu_a\tilde{H}_x + \mu\tilde{H}_y), \\ -\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = i\omega\epsilon\epsilon_0\tilde{E}_z. \end{cases} \quad (6.64)$$

Во вторую подсистему входят остальные компоненты $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{H}_z$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} = i\omega\epsilon\epsilon_0\tilde{E}_x, \\ 0 = i\omega\epsilon\epsilon_0\tilde{E}_y, \\ \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = i\omega\mu_0\tilde{H}_z. \end{cases} \quad (6.65)$$

Подсистемы (6.64) и (6.65) соответствуют двум независимым собственным (нормальным) волнам поперечно намагниченного феррита.

Решением первой подсистемы (6.64) является так называемая «необыкновенная» волна. Она имеет только одну (поперечную) компоненту электрического поля \tilde{E}_z , параллельную подмагничивающему полю, и две компоненты магнитного поля: поперечную \tilde{H}_x и продольную \tilde{H}_y . Компоненты магнитного поля связаны соотношением

$$\tilde{H}_y = i \frac{\mu_a}{\mu} \tilde{H}_x, \quad (6.66)$$

которое вытекает из второго уравнения подсистемы (6.64). Таким образом, первая нормальная волна является поперечной и линейно поляризованной только в отношении электрического поля. Магнитное поле данной волны эллиптически поляризовано в плоскости (x, y) . Это видно из формулы (6.66): множитель i указывает, что сдвиг фаз колебаний компонент \tilde{H}_x и \tilde{H}_y равен $\pi/2$, а их амплитуды отличаются в μ_a/μ раз. Отметим, что появление продольной составляющей магнитного поля напрямую связано с гиротропией феррита: согласно (6.64) при $\mu_a = 0$ $\tilde{H}_y = 0$.

Исключая \tilde{H}_y из подсистемы (6.64), приводим её к виду

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} = -i\omega\mu_{\perp}\mu_0\tilde{H}_x, \quad -\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = i\omega\epsilon\epsilon_0\tilde{E}_z, \quad (6.67)$$

где введено обозначение $\mu_{\perp} = (\mu^2 - \mu_a^2)/\mu$. Система (6.67) по виду совпадает с аналогичной системой (2.24) для изотропного диэлектрика с тем отличием, что роль магнитной проницаемости играет величина μ_{\perp} (её иногда называют «поперечной магнитной проницаемостью»). По аналогии с решением системы (2.24) (см. выражения (2.26), (2.27)), решение системы (6.67) может быть записано в виде плоской монохроматической волны, для которой волновое число k_1 и импеданс Z_1 определяются как

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu_{\perp}}, \quad Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_{\perp}}{\epsilon_0\epsilon}}. \quad (6.68)$$

Так же, как и компоненты тензора высокочастотной магнитной проницаемости μ, μ_a , поперечная магнитная проницаемость μ_{\perp} обладает сильной дисперсией: для неё характерна резонансная зависимость от частоты ω и напряжённости внешнего поля H_0 .

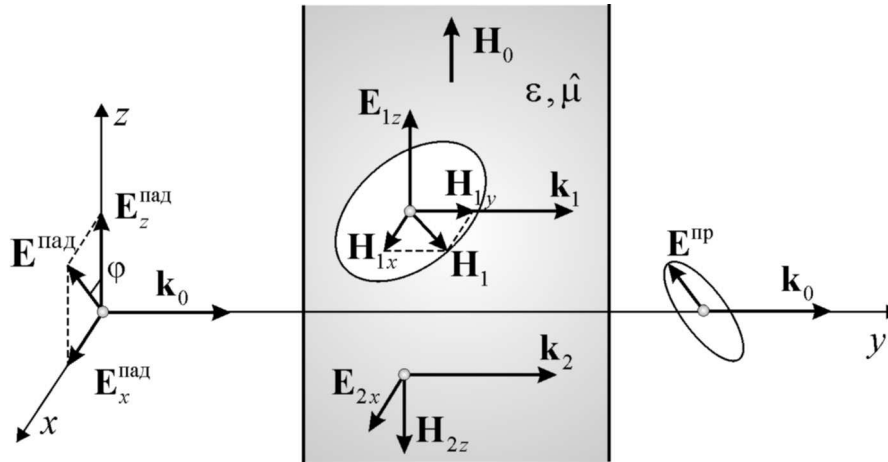


Рис. 6.8.

Решением подсистемы (6.64) является вторая («обыкновенная») нормальная волна. Она не имеет особенностей по сравнению с «обычным», изотропным диэлектриком. Её поля линейно поляризованы и имеют только поперечные составляющие \tilde{E}_x и \tilde{H}_z , а $\tilde{E}_y = 0$. Волновые характеристики «обыкновенной» волны k_2 и Z_2 , в отличие от k_1 и Z_1 , не обладают частотной и полевой дисперсией:

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon}}. \quad (0.223)$$

Рассмотрим нормальное падение линейно поляризованной волны на плоский слой поперечно намагниченного феррита (рис. 6.8).

Если электрическое поле $\mathbf{E}^{\text{пад}}$ падающей волны поляризовано под углом φ к полю \mathbf{H}_0 , отличным от 0 и $\pi/2$, то в слое феррита возбуждаются две нормальные волны. Составляющая электрического поля $\mathbf{E}_{\parallel}^{\text{пад}}$, параллельная полю \mathbf{H}_0 , возбуждает «необыкновенную» волну, а ортогональная полю составляющая $\mathbf{E}_{\perp}^{\text{пад}}$ – «обыкновенную». Эти волны распространяются в феррите с различными фазовыми скоростями $v_{\phi 1} = \omega/k_1$ и $v_{\phi 2} = \omega/k_2$. В результате на выходе из феррита эти волны приобретут сдвиг по фазе и при сложении дадут волну эллиптической поляризации. Параметры эллипса поляризации будут зависеть от толщины ферритового слоя, угла φ , внешнего магнитного поля H_0 и частоты ω . Описанный эффект преобразования поляризации волны слоем поперечно намагниченного феррита называется *эффектом Коттона – Мутона*.

Эффект Коттона – Мутона, а также резонансные свойства «необыкновенной» волны в поперечно намагниченном феррите находят применение в технике СВЧ для создания устройств, управляемых внешним магнитным полем, например, вентилях, поляризаторов и модуляторов.

6.7. Продольно намагниченный феррит. Эффект Фарадея

Рассмотрим теперь задачу о распространении плоской монохроматической волны в неограниченном феррите при условии, что оно происходит в направлении вектора напряжённости магнитного поля $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$, намагничивающего феррит до насыщения. Запишем уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в проекциях на оси x и y декартовой системы координат. Учтём, что магнитная проницаемость феррита является тензором вида (0.222), а также то, что для плоской волны производные векторов поля по координатам x и y равны нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} = i\omega\mu_0(\mu\tilde{H}_x + i\mu_a\tilde{H}_y), & \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} = -i\omega\epsilon\epsilon_0\tilde{E}_x, \\ \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = -i\omega\mu_0(-i\mu_a\tilde{H}_x + \mu\tilde{H}_y); & \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} = i\omega\epsilon\epsilon_0\tilde{E}_y. \end{cases} \quad (0.224)$$

Проекция на ось z даёт $\tilde{E}_z = 0$, $\tilde{H}_z = 0$, т.е. волна является поперечной в отношении как электрического, так и магнитного полей.

Перейдём в системе (0.224) к новым переменным \tilde{E}_+ , \tilde{E}_- , \tilde{H}_+ , \tilde{H}_- , которые называются циркулярными:

$$\tilde{E}_\pm = \tilde{E}_x \pm i\tilde{E}_y, \quad \tilde{H}_\pm = \tilde{H}_x \pm i\tilde{H}_y. \quad (0.225)$$

Для этого второе и четвёртое уравнения системы (0.224) сложим с первым и третьим, умноженными на i или на $-i$. В результате получим две независимые подсистемы из двух уравнений каждая: первая – для переменных \tilde{E}_+ , \tilde{H}_+ , вторая – для \tilde{E}_- , \tilde{H}_- :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{E}_+}{\partial z} = -\omega\mu_0(\mu + \mu_a)\tilde{H}_+, & \frac{\partial \tilde{E}_-}{\partial z} = \omega\mu_0(\mu - \mu_a)\tilde{H}_+, \\ \frac{\partial \tilde{H}_+}{\partial z} = \omega\epsilon\epsilon_0\tilde{E}_+; & \frac{\partial \tilde{H}_-}{\partial z} = -\omega\epsilon_0\tilde{E}_+. \end{cases} \quad (0.226)$$

Решения этих подсистем соответствуют двум собственным (нормальным) волнам продольно намагниченного феррита:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{\pm} &= (\tilde{A}_1 e^{-ik_{\pm}z} + \tilde{A}_2 e^{ik_{\pm}z}), \\ \tilde{E}_{\pm} &= Z_{\pm} (\tilde{A}_1 e^{-ik_{\pm}z} - \tilde{A}_2 e^{ik_{\pm}z}),\end{aligned}\tag{0.227}$$

где $k_{\pm} = k_0 \sqrt{\varepsilon(\mu \pm \mu_a)}$, $Z_{\pm} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{\pm}}{\varepsilon_0 \varepsilon}}$, $k_0 = \frac{\omega}{c}$ – волновое число для вакуума. Эти волны являются поперечными волнами круговой поляризации, имеющими различное направление вращения. Волна с полями \tilde{E}_+ , \tilde{H}_+ является волной с ПРАВЫМ направлением вращения (рис. 6.9а): если смотреть НАВСТРЕЧУ вектору \mathbf{H}_0 , то конец вектора поля $\tilde{\mathbf{E}}_+$ или $\tilde{\mathbf{H}}_+$ описывает окружность, вращаясь ПРОТИВ ЧАСОВОЙ СТРЕЛКИ. Соответственно, волна с полями \tilde{E}_- , \tilde{H}_- – волна с ЛЕВЫМ направлением вращения (конец вектора поля описывает окружность, двигаясь ПО ЧАСОВОЙ СТРЕЛКЕ, рис. 6.9б).

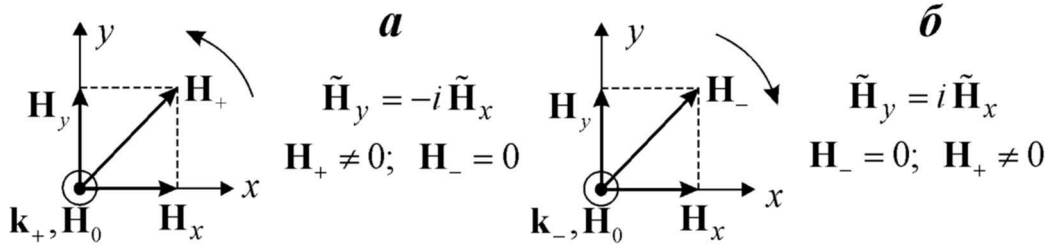


Рис. 6.9.

Чтобы убедиться в сказанном, вспомним, что для волны с круговой поляризацией взаимно ортогональные составляющие векторов поля (например, магнитного) должны иметь одинаковые амплитуды и фазовый сдвиг $\pm\pi/2$. Значит, они должны быть связаны соотношениями $H_y = \mp i H_x$, где верхний знак соответствует правому, а нижний – левому направлениям вращения. Для волны ПРАВОЙ поляризации (сдвиг фаз $-\pi/2$) имеем:

$$\tilde{H}_+ = \tilde{H}_x + i\tilde{H}_y = 2i\tilde{H}_y = 2\tilde{H}_x \neq 0; \quad H_- = \tilde{H}_x - i\tilde{H}_y = 0,$$

а для второй волны с ЛЕВОЙ поляризацией (сдвиг фаз $+\pi/2$):

$$\tilde{H}_+ = \tilde{H}_x + i\tilde{H}_y = 0; \quad ; \quad H_- = \tilde{H}_x - i\tilde{H}_y = -2i\tilde{H}_y = 2\tilde{H}_x \neq 0.$$

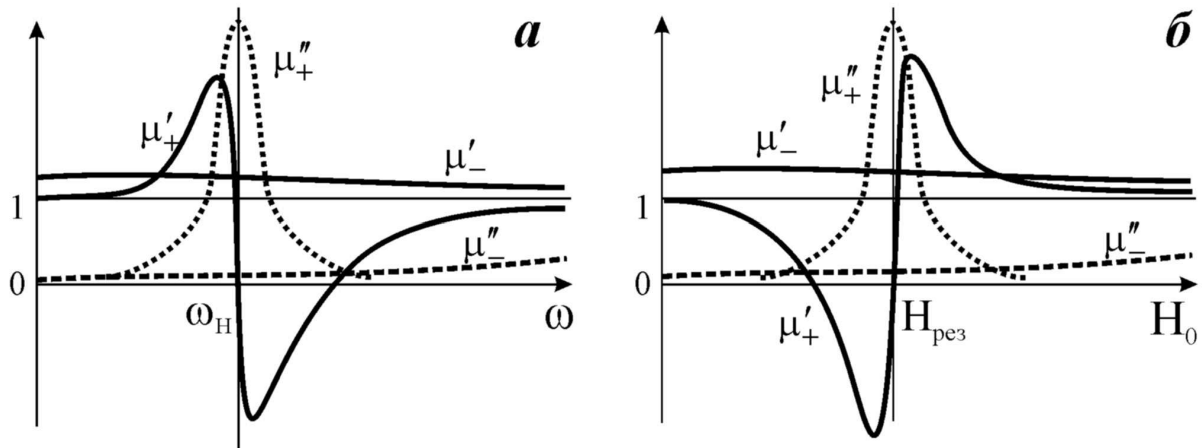


Рис. 6.10.

Нормальные волны продольно намагниченного феррита имеют различные волновые характеристики k_+ , Z_+ и k_- , Z_- , что связано с различием их эффективных магнитных проницаемостей $\mu_+ = \mu + \mu_a$ и $\mu_- = \mu - \mu_a$. При этом зависимости μ_+ от частоты ω и внешнего поля H_0 имеют резонансный характер: в отсутствие потерь $\mu_+ \rightarrow \pm\infty$ при $\omega \rightarrow \omega_H$ или $H_0 \rightarrow H_{рез} = \omega/\gamma\mu_0$. Таким образом, для волны с правой круговой поляризацией может наблюдаться ферромагнитный резонанс. Напротив, аналогичные зависимости μ_- являются монотонными, т.е. ферромагнитный резонанс для волны с левой поляризацией отсутствует (см. рис. 6.10).

Собственные волны с правой и левой круговой поляризацией распространяются в феррите с различными фазовыми скоростями $v_+ = \omega/k_+$ и $v_- = \omega/k_-$. Это приводит к поляризационному **эффекту Фарадея**: вращению плоскости поляризации линейно поляризованной волны в продольно намагниченном феррите.

Пусть на слой продольно намагниченного феррита из вакуума падает нормально волна, магнитное поле которой линейно поляризовано, например, вдоль оси x (см. рис. 6.11). Волну с линейной поляризацией можно представить в виде суперпозиции двух волн с круговой поляризацией, имеющих одинаковые амплитуды и противоположные направления вращения:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_x &= \tilde{H}_x^+ + \tilde{H}_x^- = \tilde{A} \left(e^{-ik_+z} + e^{-ik_-z} \right), \\ \tilde{H}_y &= \tilde{H}_y^+ + \tilde{H}_y^- = i\tilde{A} \left(e^{-ik_+z} - e^{-ik_-z} \right).\end{aligned}\tag{0.228}$$

Вводя обозначения $k = (k_+ + k_-)/2$, $\Delta k = (k_+ - k_-)/2$, (0.228) можно переписать как

$$\begin{aligned}\tilde{H}_x &= \tilde{A}e^{-ikz} \left(e^{-i\Delta k \cdot z} + e^{i\Delta k \cdot z} \right) = 2\tilde{A}e^{-ikz} \cos(\Delta k \cdot z), \\ \tilde{H}_y &= i\tilde{A}e^{-ikz} \left(e^{-i\Delta k \cdot z} - e^{i\Delta k \cdot z} \right) = 2\tilde{A}e^{-ikz} \sin(\Delta k \cdot z).\end{aligned}\quad (0.229)$$

Угол ψ , который образует плоскость поляризации волны с осью x , найдётся из (0.229):

$$\psi = \arctg\left(\frac{H_y}{H_x}\right) = \arctg(\operatorname{tg}(\Delta k \cdot z)) = \Delta k \cdot z. \quad (0.230)$$

Из (0.230) видно, что плоскость поляризации волны по мере её распространения в феррите поворачивается. Если смотреть навстречу направлению внешнего магнитного поля, то поворот происходит против часовой стрелки. Если волна распространяется навстречу направлению \mathbf{H}_0 , то направление вращения плоскости поляризации изменяется на противоположное. Таким образом, если волна проходит в феррите одинаковое расстояние сначала по направлению \mathbf{H}_0 , а затем обратно, то её плоскость поляризации не возвращается в исходное положение, а оказывается повернутой на угол $2\Delta k \cdot z$.

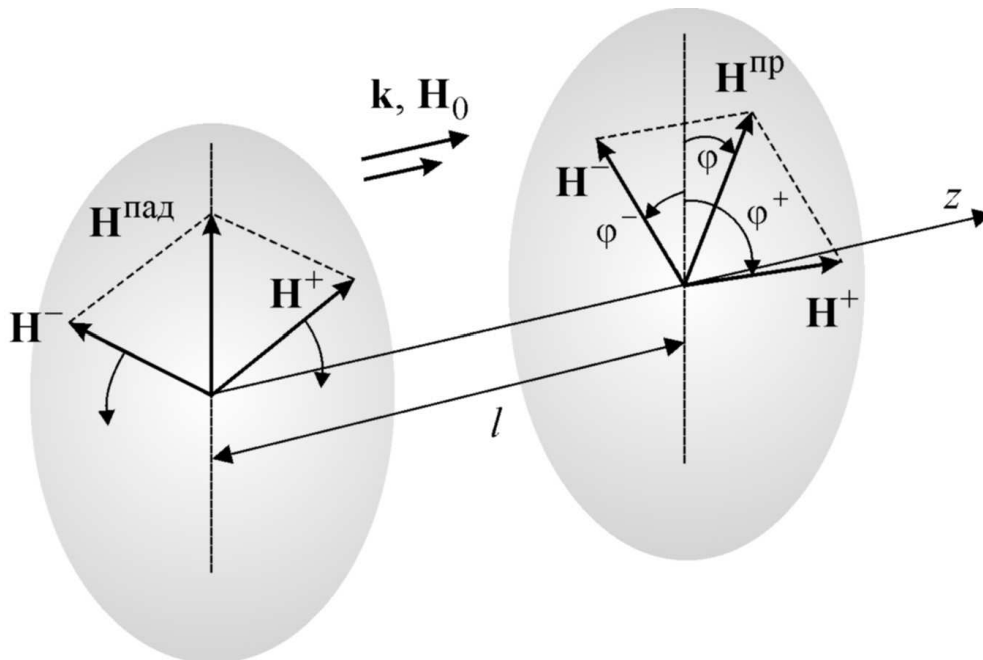


Рис. 6.11.

Величину

$$\Delta k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} (\sqrt{\mu_+} - \sqrt{\mu_-}),$$

определяющую величину эффекта Фарадея, называют **постоянной вращения** или **постоянной Фарадея**.

Заметим, что электрическое поле волны, прошедшей через феррит, окажется поляризованным эллиптически ввиду различия импедансов Z_+ и Z_- двух нормальных волн. На практике магнитное поле прошедшей волны также приобретает некоторую эллиптичность из-за наличия потерь в реальном феррите.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградова, М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. – М. : Наука, 1990.
2. Баскаков, С. И. Электродинамика и распространение радиоволн / С. И. Баскаков. – М. : Высшая школа, 1992
3. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. пособие для вузов / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М. : Наука, 1989.
4. Семёнов, А. А. Теория электромагнитных волн / А. А. Семёнов. – М. : Изд-во МГУ, 1968.
5. Вайнштейн, Л. А. Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988.
6. Гольдштейн, Л. Д. Электромагнитные поля и волны / Л. Д. Гольдштейн, Н. В. Зернов. – М. : Советское радио, 1972.
7. Григорьев, А. Д. Электродинамика и техника СВЧ / А. Д. Григорьев. – М. : Высшая школа, 1990.
8. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М. : Мир, 1978.
9. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М. : Наука, 1988.
10. Гуревич, А. Г. Магнитные колебания и волны / А. Г. Гуревич, Г. А. Мелков. – М. : Физматлит, 1994.
11. Гуревич, А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках / А. Г. Гуревич. – М.: Наука, 1973.
12. Веселаго, В. Г. Электродинамика материалов с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173, № 7. – С. 790–794.

Учебное издание

Д.И. Семенцов, С.А. Афанасьев, Д.Г. Санников

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

Учебное пособие

Директор Издательского центра *Т. В. Филиппова*
Редактирование, подготовка оригинал-макета и обложки *Е. П. Мамаевой*

Подписано в печать 24.08.2012
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 6,3. Уч.-изд. л. 5,3
Тираж 100 экз. Заказ 135/

Оригинал-макет подготовлен в Издательском центре
Ульяновского государственного университета

Отпечатано в Издательском центре
Ульяновского государственного университета
432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42