Ульяновский государственный университет
ул. Л. Толстого 42
432970 Ульяновск Россия

07.12.2007

Кафедра Информационных технологий
Phone: +7 (8422) 32-3247
Fax: +7 (8422) 41-2340
innokentiy v.sem@ulsu.ru

ЗАЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ № 1

по дисциплине **Основы моделирования**
для студентов 1-го курса ФМиИТ

Микробы

Кувшин наполнен питательным раствором с некоторым количеством бактерий x. Размер x популяции бактерий непрерывно меняется с течением времени t, т. е. $x = x(t)$ из-за естественных процессов размножения и гибели. Пусть коэффициент b обозначает масштаб размножения ($b$irth=рождение) бактерий в популяции x, а p — масштаб их гибели ($p$erish=гибель).

Коэффициент b характеризует, какую долю от x составят вновь народившиеся бактерии. Это значит, что если в данный момент времени t имеется $x(t)$ бактерий, то через малый отрезок времени Δt их количество возрастает до $x(t + \Delta t)$ на величину $bx(t)\Delta t$. Иными словами, количество бактерий возрастает со скоростью $bx(t)$, причем величину b можно считать постоянной.

Для процесса гибели, аналогично, p характеризует, какую долю от x составят погибшие бактерии. Однако, по мере роста числа бактерий, им становится все теснее в данном объеме, они выделяют токсины, из-за чего погибают. Из-за ограниченности объема, чем больше бактерий, тем выше масштаб их гибели. Поэтому — в отличие от рождения — масштаб гибели разумно постулировать не как постоянный коэффициент p, а как переменную величину $px(t)$, где p — некоторое постоянное число.

Задание:

1. Для $t \geq 0$ напишите дифференциальное уравнение данной динамической системы, полагая, что в начальный момент $t = 0$ размер популяции равен x_0 (начальное условие).

2. [1] Если у вас есть возможность воспользоваться пакетом компьютерной алгебры *Mathematica* (или другим пакетом символьных вычислений, например, *Maple*),

[1] Этот пункт – по вашему выбору. Я его рассматриваю как поощрительный. Если вы это сделали, приведите распечатку текста команды которую вы вводили в пакет, и распечатку ответа, который вы получили от этого пакета.

введите уравнение по п. 1 в пакет и получите аналитическое решение этого уравнения в виде

$$x(t) = \frac{x_0 b e^{bt}}{(b - p x_0) + p x_0 b e^{bt}} \tag{1}$$

3. Проверьте (путем подстановки (1) в ваше уравнение и в начальное условие), что (1) действительно есть решение.

4. Ответьте на вопрос: *Есть ли в данной системе равновесный*[2] *(самоподдерживаемый) размер* $\tilde{x}$ *популяции ?*

5. Начертите график зависимости скорости $\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}$ от x и покажите на нем все ответы $\tilde{x}$ на вопрос по п. 4.

6. Пользуясь графиком по п. 5, ответьте на вопрос: *Какое из значений* $\tilde{x}$ *является точкой неустойчивого равновесия*[3]*, а какое — точкой устойчивого равновесия ?*

Оформите вашу работу письменно и сдайте ее мне на кафедру для проверки не поднее, чем за неделю до окончания зачетной недели. Не забудьте указать № группы и, разумеется, ваше имя и фамилию. Результат проверки (*зачтено/не зачтено*) смотрите на доске объявлений кафедры через неделю после сдачи. Этот результат и будет вашей оценкой в зачетной ведомости.

Как оценивается работа. Достаточно выполнить одну работу их двух (на выбор). Работа должна демонстрировать, что вы сделали ее лично. Работа-копия получает оценку *не зачтено.* Отсутствие работы влечет отметку «неявка» в ведомости.

И. В. Семушин, д-р техн. наук, профессор

[2] *Равновесный* размер популяции означает такой ее размер $\tilde{x}$, который с течением времени не изменяется, благодаря тому, что сколько бактерий нарождается вновь, столько же и погибает.

[3] *Неустойчивым* называют равновесие, обладающее той особенностью, что малые нарушения этого равновесия приведут к потере равновесия. Напротив, равновесие называют *устойчивым*, если малые отклонения от точки равновесия не приводят к потере равновесия, так как система самостоятельно возвращается в это состояние.