



07.12.2007

Ульяновский
государственный университет
ул. Л. Толстого 42
432970 Ульяновск Россия

Кафедра Информационных
технологий

Phone: +7 (8422) 32-3247

Fax: +7 (8422) 41-2340

innokentiy v.sem@ulsu.ru

ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ № 6

по дисциплине **Основы моделирования**

Микробы

Кувшин наполнен питательным раствором с некоторым количеством бактерий x . Размер x популяции бактерий непрерывно меняется с течением времени t , т. е. $x = x(t)$ из-за естественных процессов размножения и гибели. Пусть коэффициент b обозначает масштаб размножения (*birth*=рождение) бактерий в популяции x , а p — масштаб их гибели (*perish*=гибель).

Коэффициент b характеризует, какую долю от x составят вновь народившиеся бактерии. Это значит, что если в данный момент времени t имеется $x(t)$ бактерий, то через малый отрезок времени Δt их количество возрастает до $x(t + \Delta t)$ на величину $bx(t)\Delta t$. Иными словами, количество бактерий возрастает со скоростью $bx(t)$, причем величину b можно считать постоянной.

Для процесса гибели, аналогично, p характеризует, какую долю от x составят погибшие бактерии. Однако, по мере роста числа бактерий, им становится все теснее в данном объеме, они выделяют токсины, из-за чего погибают. Из-за ограниченности объема, чем больше бактерий, тем выше масштаб их гибели. Поэтому — в отличие от рождения — масштаб гибели разумно постулировать не как постоянный коэффициент p , а как переменную величину $px(t)$, где p — некоторое постоянное число.

Задание:

1. Для $t \geq 0$ напишите дифференциальное уравнение данной динамической системы, полагая, что в начальный момент $t = 0$ размер популяции равен x_0 (начальное условие).
2. ¹ Если у вас есть возможность воспользоваться пакетом компьютерной алгебры *Mathematica* (или другим пакетом символьных вычислений, например, *Maple*),

¹ Этот пункт — по вашему выбору. Я его рассматриваю как поощрительный. Если вы это сделали, приведите распечатку текста команды которую вы вводили в пакет, и распечатку ответа, который вы получили от этого пакета.

введите уравнение по п. 1 в пакет и получите аналитическое решение этого уравнения в виде

$$x(t) = \frac{x_0 b e^{bt}}{(b - px_0) + px_0 b e^{bt}} \quad (1)$$

3. Проверьте (путем подстановки (1) в ваше уравнение и в начальное условие), что (1) действительно есть решение.
4. Ответьте на вопрос: *Есть ли в данной системе равновесный² (самоподдерживаемый) размер \tilde{x} популяции ?*
5. Начертите график зависимости скорости $\frac{dx(t)}{dt}$ от x и покажите на нем все ответы \tilde{x} на вопрос по п. 4.
6. Пользуясь графиком по п. 5, ответьте на вопрос: *Какое из значений \tilde{x} является точкой неустойчивого равновесия³, а какое — точкой устойчивого равновесия ?*

Оформите вашу работу в виде презентации и будьте готовы сделать по ней доклад на 9-й или 10-й неделе семестра во время занятия по расписанию. Не забудьте указать № группы и, разумеется, ваше имя и фамилию. Результат (*зачтено/не зачтено*) смотрите на доске объявлений кафедры через неделю после вашего доклада.

Как оценивается работа. Презентация и доклад должны демонстрировать, что эту работу вы делали лично. За «работу»–копию вы получите 0 баллов при определении общей оценки «зачтено / не зачтено» по данному курсу. Отсутствие проекта также влечет 0 баллов за этот вид учебной работы.



И. В. Семушин, д-р техн. наук, профессор

² *Равновесный* размер популяции означает такой ее размер \tilde{x} , который с течением времени не изменяется, благодаря тому, что сколько бактерий нарождается вновь, столько же и погибает.

³ *Неустойчивым* называют равновесие, обладающее той особенностью, что малые нарушения этого равновесия приведут к потере равновесия. Напротив, равновесие называют *устойчивым*, если малые отклонения от точки равновесия не приводят к потере равновесия, так как система самостоятельно возвращается в это состояние.