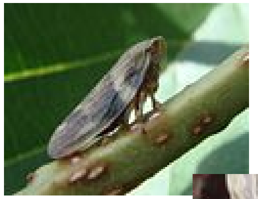
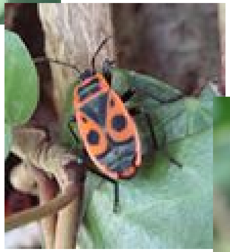
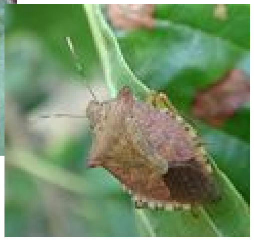
Ульяновский
Государственный Университет

Индивидуальный проект 5

Популяция птиц и насекомых на острове "Поел" (Германия)



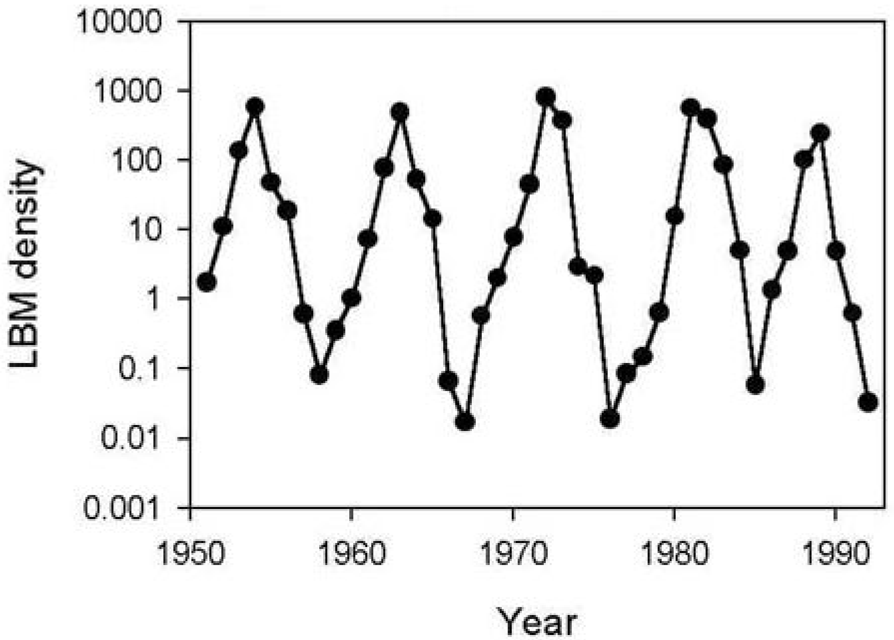




Выполнил: Алиуллов И.Д. гр. ИС-31
Научный руководитель: доктор т.н. Семушин И.В.

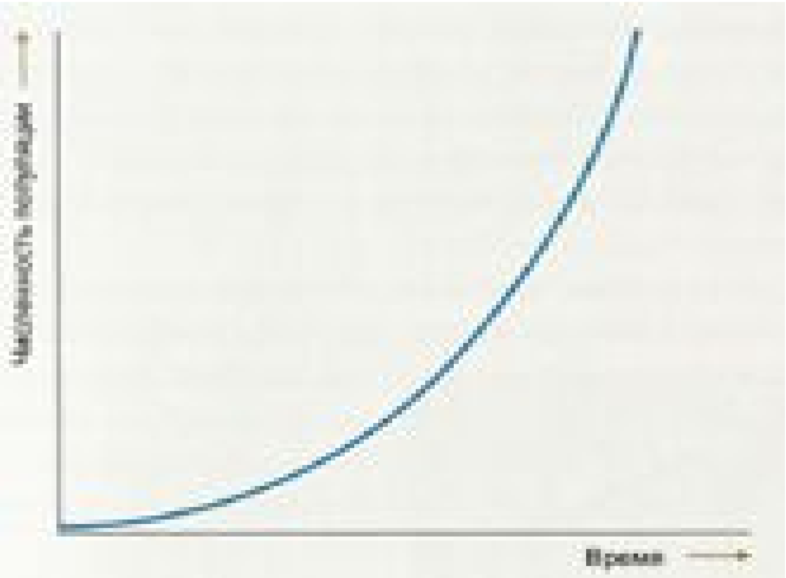
Исследования энтомологов

Популяция гусениц



- Срезали примерно по 100 кг веток, и подсчитывали колличество гусениц
- График иллюстрирует цикличность популяции
- Каждые 8,5 лет есть год или два, когда Альпы становятся рыжими, потому что всю хвою в это время съедают гусеницы
- Бывают также времена, когда обычному человеку сложно найти хотя бы одну гусеницу
- В цикле присутствует небольшая нерегулярность, но это всеже цикл

Экспоненциальный рост популяции отдельно вида



- Предположим, что насекомые находятся на острове одни, без птиц
- Предположим, что остров Поел обладает неограниченными ресурсами, которые необходимы для размножения насекомых
- Тогда очевидно, что прирост популяции в единицу времени будет пропорционален количеству насекомых
- Тогда процесс изменения популяции насекомых во времени будет описываться дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t)$$

- Решение: $x(t) = x_0 \cdot e^{r \cdot x(t)}$, где x_o начальное условие
- Соответственно получаем экспоненциальный рост популяции

Мальтус, Томас Роберт "Опыт о законе народонаселения" (1798 г.)

- Рассмотренная модель известна как модель Мальтуса, или как экспоненциальная модель роста

- Т. Мальтус (1766–1834), английский экономист и священник. Он утверждал, что в человеческом обществе, как и во всей живой природе, существует абсолютный закон безграничного размножения особей. При этом рост населения Земли идет в геометрической прогрессии, в то время как средства существования увеличиваются лишь в арифметической.

- Обычно, так ведет себя сравнительно небольшая популяция, расселившаяся на обширном пространстве. Но на самом деле в природе ни одна популяция по крайней мере долгое время экспоненциально не растет, то есть эта модель слишком упрощенная

- В случае развития птиц без насекомых (пищи), получается аналогичная ситуация с точностью до знака и коэффициентов. Популяция птиц будет вымирать. Уравнение будет иметь вид:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -d \cdot y(t)$$

- Рассмотрим случай когда обе популяции находятся в одном биологическом пространстве, то есть между ними будут возникать отношения "хищник и жертва"

- Очевидно понижение общего количества насекомых и повышение птиц в момент времени должно быть пропорционально популяции и птиц и насекомых

$$-a \cdot x(t) \cdot y(t)$$

где a - эффективность птицы (ср. скорость с которой птица съедает насекомых)

- Полученная величина (без минуса) показывает, сколько насекомых птицы съедают в ед. времени. Тогда повышение популяции птиц можно будет рассматривать, как способность птиц превращать биомассу насекомых в свое потомство.

$$c \cdot a \cdot x(t) \cdot y(t)$$

где c - эффективность превращения птицами биомассы жертв в себя и потомство

- На данную величину повысится популяция птиц в ед. времени

- В итоге получаем следующую модель популяции птиц и насекомых:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = r\cdot x(t) - a\cdot x(t)\cdot y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -d\cdot y(t) + c\cdot a\cdot x(t)\cdot y(t) \end{cases}$$

- Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений данных в задании на проект, как модулирующую популяцию птиц и насекомых на острове "Поел":

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = 0.4\cdot x(t) - 0.002\cdot x(t)\cdot y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -0.2\cdot y(t) + 0.000008\cdot x(t)\cdot y(t) \end{cases}$$

- Мы видим совпадение, в точности до коэффициентов. Обращаю внимание, что коэффициент 0.000008 стоит рассматривать как произведение 0.004 и 0.002

- Прежде чем анализировать модель, следует сказать еще несколько слов об этой модели

Модель Лотки-Вольтерра (1925-1926 г.)

- Только что рассмотренная простейшая модель взаимодействия хищников и жертв называется моделью Лотки-Вольтерра

- Альфред Джеймс Лотка - американец польского происхождения. Вито Вольтерра – итальянский ученый. Они изобрели свои модели почти одновременно, один в 1925 году, а другой – в 1926 году

- За последние 80 лет эта гипотеза «хищника-жертвы» рассматривается как основная гипотеза причин цикличности в экологии. Хотя эта модель неприменима в жизни, так как она слишком упрощена

- Неточность, - есть некоторый потолок, выше которого хищник не будет убивать жертв, потому что ему это не будет нужно. И в этой модели это не учитывается

Задание по проекту – найти равновесное решение

- Далее по проекту ставится задача найти равновесное решение и проанализировать его значение. Это значит нужно приравнять производные к нулю, и найти при каких значениях популяций птиц и насекомых это будет достигаться

$$\begin{cases} 0 = 0.4 \cdot x(t) - 0.002 \cdot x(t) \cdot y(t) \\ 0 = -0.2 \cdot y(t) + 0.000008 \cdot x(t) \cdot y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.002 \cdot x(t) \cdot y(t) = 0.4 \cdot x(t) \\ -0.000008 \cdot x(t) \cdot y(t) = -0.2 \cdot y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = 200 \\ x(t) = 25000 \end{cases}$$

- Основной вывод. Если передать эти параметры в систему в качестве начальных условий, то в системе не будет колебаний. Фазовая диаграмма будит находится в стабильной точке.

Задание по проекту – выражение dy/dx

- Найдем выражение dy/dx и решим его аналитически. Рассмотрим

$$\frac{dy(t)}{dx(t)}=\frac{-0.2\cdot y(t)+0.000008\cdot x(t)\cdot y(t)}{0.4\cdot x(t)-0.002\cdot x(t)\cdot y(t)}=\frac{-y(t)+0.00004\cdot x(t)\cdot y(t)}{2\cdot x(t)-0.01\cdot x(t)\cdot y(t)};$$

$$(2\cdot x(t)-0.01\cdot x(t)\cdot y(t))\cdot dy(t)=(-y(t)+0.00004\cdot x(t)\cdot y(t))\cdot dx(t)$$

$$(\frac{2}{y(t)}-0.01)\cdot dy(t)=(\frac{-1}{x(t)}+0.00004)\cdot dx(t)$$

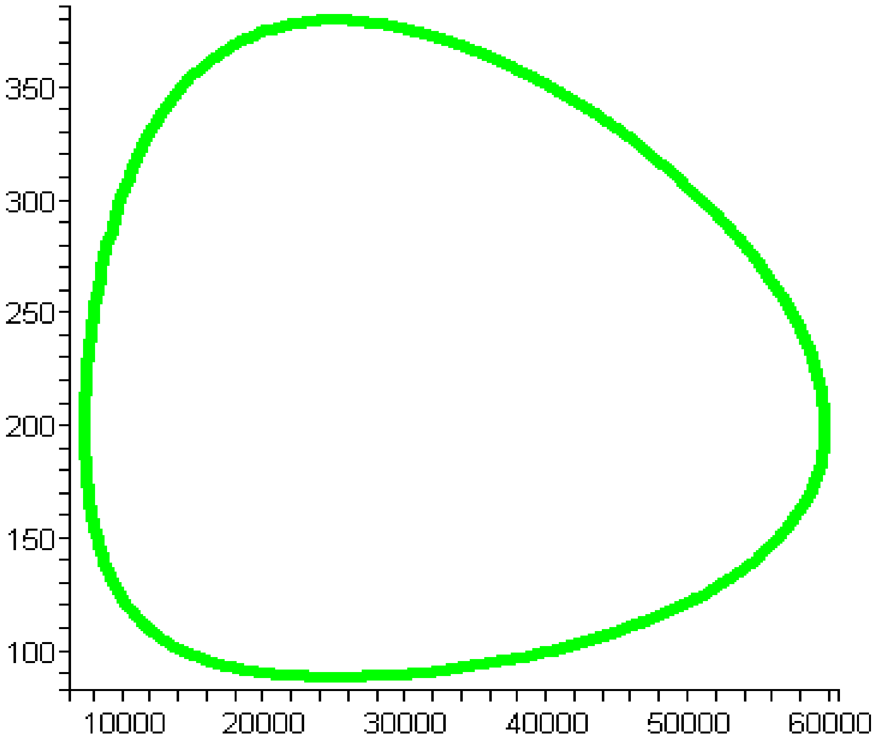
$$\int(\frac{2}{y(t)}-0.01)\cdot dy(t)=\int(\frac{-1}{x(t)}+0.00004)\cdot dx(t)$$

$$2\cdot\ln(y(t))-0.01\cdot y(t)=-\ln(x(t))+0.00004\cdot x(t)$$

- Основной вывод, который можно сделать из полученного результата, это то, что функции y(t) и x(t) являются симметричными функциями. То есть видимо, они будут иметь один и тот же период, но разные амплитуды, а также будут отличаться по фазе.

Задание по проекту – фазовая диаграмма

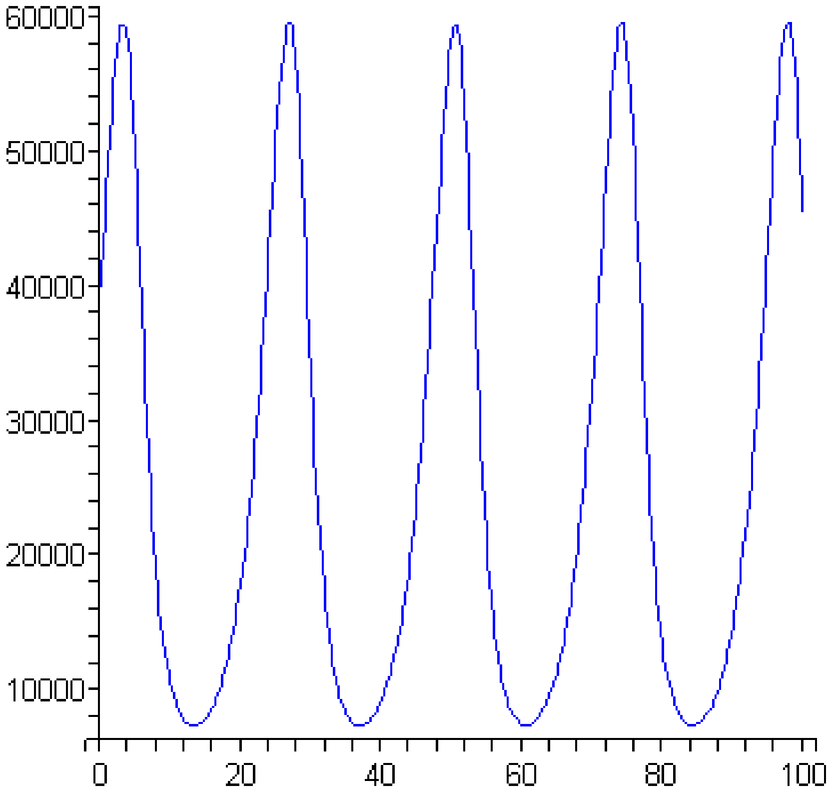
- Фазовая диаграмма исходной системы дифференциальных Уравнений при начальных условиях 100 птиц и 40000 насекомых построена с использованием пакета символьной математики "Maple 9.5". По оси Ох рассматривается популяция насекомых, по Оу – птиц



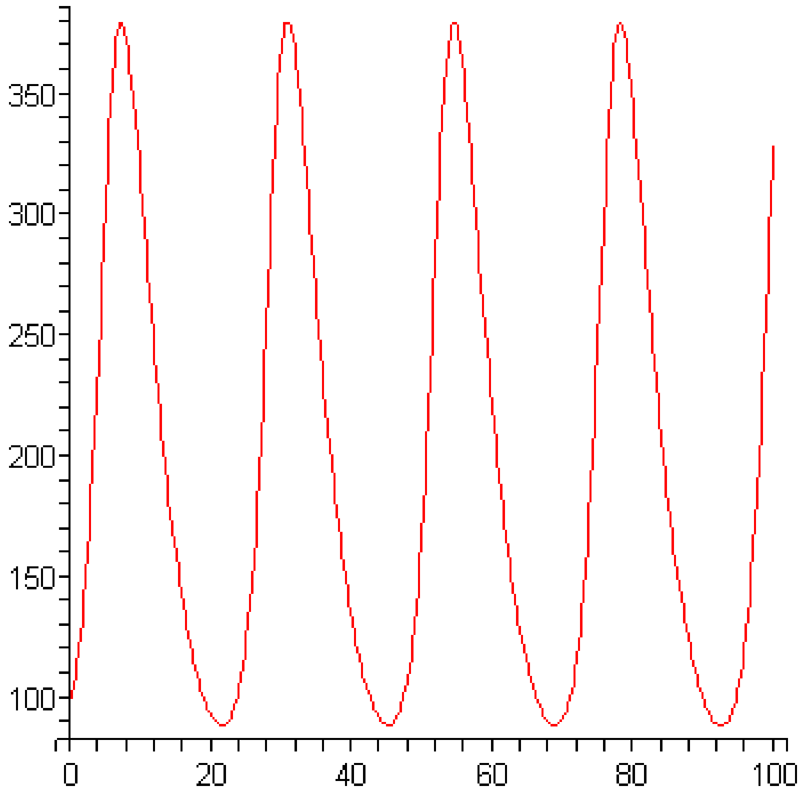
- Процесс проходит против часовой стрелки

Задание по проекту – популяции как функции времени

Популяция насекомых



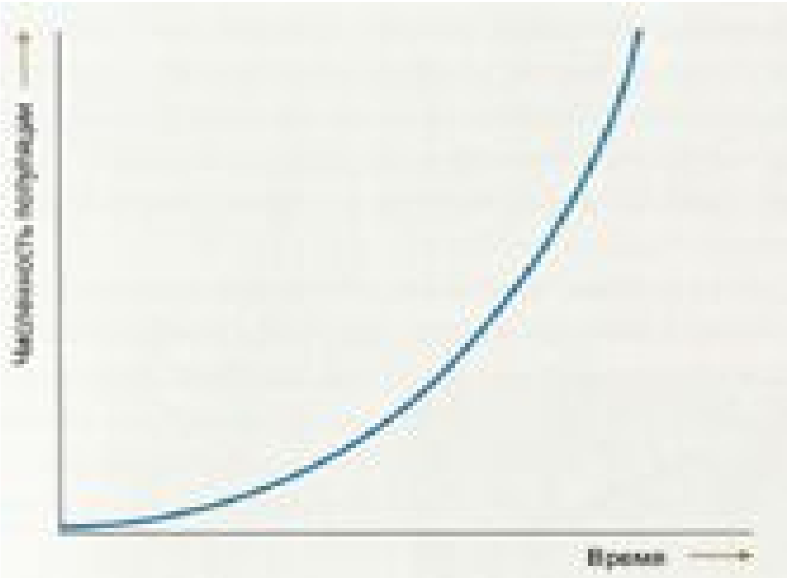
Популяция птиц



- Проведем небольшую демонстрацию популяционной динамики при помощи системы имитационного моделирования AniLogic

Усовершенствуем экспоненциальную модель роста

- Давайте вспомним самую первую модель, которую мы рассматривали – экспоненциальную модель роста популяции насекомых в отсутствии птиц.



$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t)$$

- Но никакая биологическая среда не может заполняться вечно. Когда нибудь ресурсов не хватит на всех. То есть условно можно сказать что любая конечная среда может содержать в себе какое-то ограниченное максимальное количество особей. Назовем этот параметр как емкость среды – k

- Тогда перепишем экспоненциальную модель так, чтобы она отражала этот максимальный потолок. Выражение примет вид:

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right)$$

Логистическая модель роста

- Получаем логистическую модель, которая выражает второй закон популяционной динамики, говорящий о том, что всегда существует предел экспоненциального роста, накладываемый средой.

- Действительно, если теперь популяция насекомых будет возрастать до емкости среды, то соответственно будет стремиться к нуля производная, а отсюда следут, что рост популяции прекратится.

Задание по проекту – замена основной системы уравнений

- Предлагается проанализировать модель заменив основную систему на:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = 0.4 \cdot x(t) \cdot (1 - 0.000001 \cdot x(t)) - 0.002 \cdot x(t) \cdot y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -0.2 \cdot y(t) + 0.000008 \cdot x(t) \cdot y(t) \end{cases}$$

- Данную систему можно представить:

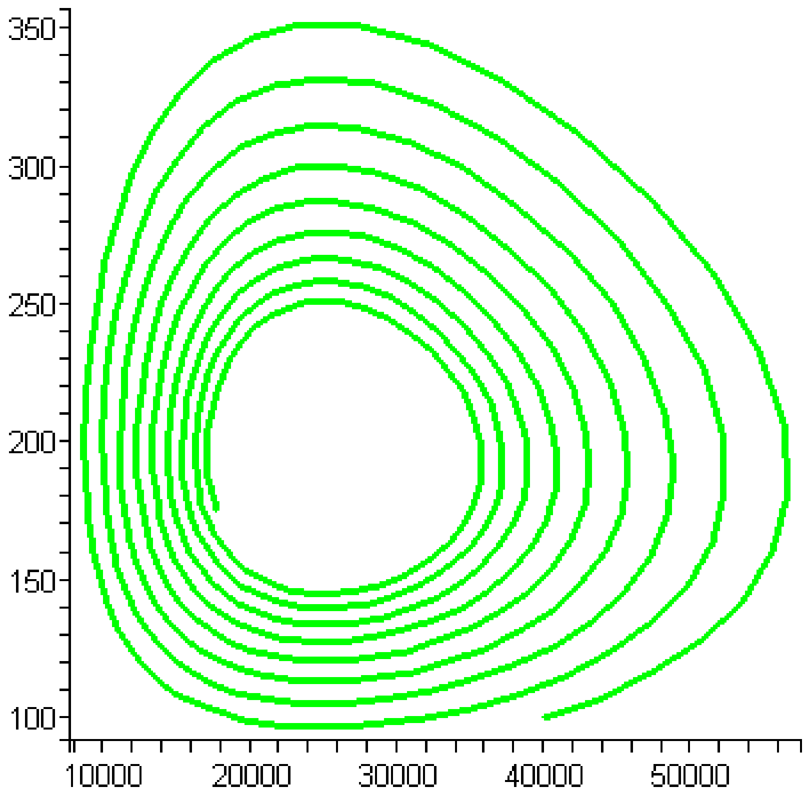
$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = 0.4 \cdot x(t) \cdot (1 - \dfrac{x(t)}{1000000}) - 0.002 \cdot x(t) \cdot y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -0.2 \cdot y(t) + 0.000008 \cdot x(t) \cdot y(t) \end{cases}$$

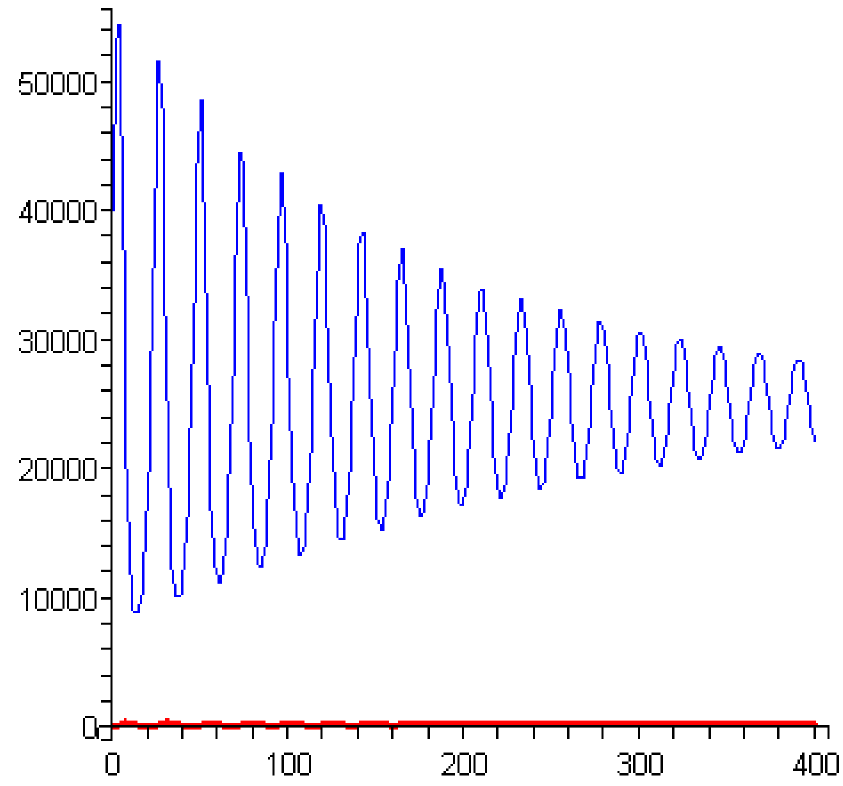
- То есть изменения касались как раз по поводу рассмотренной нами логистической модели роста. Здесь в роли емкости среды k=1000000

- Рассмотрим графики, при тех же начальных условиях что и первую модель, 100 птиц и 40000 насекомых

Задание по проекту – замена основной системы уравнений

- Продемонстрирую фазовую диаграмму (Ох – насекомые, Оу птицы) и функцию времени от насекомых и птиц одновременно.





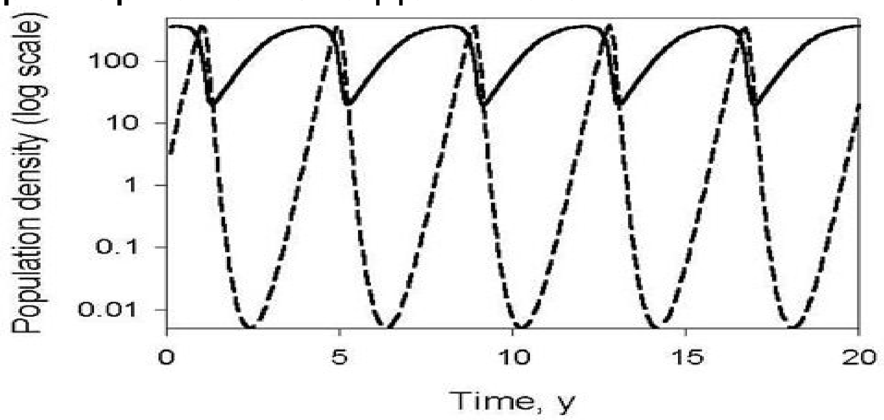
- Итак, мы наблюдаем сходимость, но сходимость куда? Как видно из графика и, эксперимента в AniLogic, система сходится к тем значениям популяций, в которых обращаются в ноль производные рассматриваемой (замененной системы). Фазовая диаграмма стремится занять стабильную точку. Понятно, что в реальности такого нет. Циклы существуют. Не хватает еще одного усовершенствования.

- Модель Розенцвайга-МакАртура – это минимальная модель, к.оторая может быть приложена к реальным экосистемам. В этом случае система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = r\cdot x(t)\cdot\left(1-\dfrac{x(t)}{k}\right) - \dfrac{\lambda\cdot x(t)\cdot y(t)}{f+x(t)} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -d\cdot y(t) + \dfrac{\gamma\cdot(\lambda\cdot x(t)\cdot y(t))}{f+x(t)} \end{cases}$$

- $\dfrac{\lambda\cdot x(t)\cdot y(t)}{f+x(t)}$ Заменяет $a\cdot x(t)$

- Тогда в системе будут колебания, но функции будут не симметричны. Вот примерно как это должно быть:



Спасибо