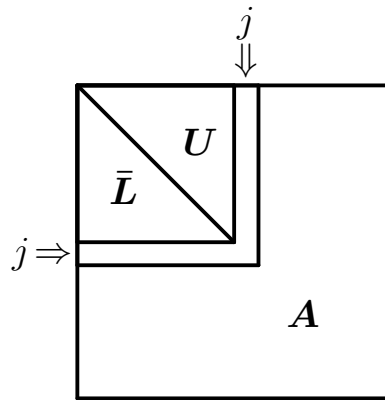


И. В. Семушин

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ



Ульяновск  
2006

# Предисловие

Курс «Численные методы» в университетах преследует следующие цели:

- заложить базовые умения и навыки в области разработки вычислительных алгоритмов решения задач, возникающих в процессе математического моделирования законов реального мира;
- обеспечить понимание основных идей численных методов, особенностей и условий их применения;
- подготовить студентов к применению этих знаний в дальнейшей учебе и практической деятельности.

При изучении данного курса значительную часть времени отводят на «Численные методы алгебры». Эту часть общего курса называют также «Численные методы – I». Когда акцент в этом курсе делают на вычислительные алгоритмы, используют термин «Вычислительная линейная алгебра». Согласно требованиям Государственного образовательного стандарта [1], к этой части численных методов относят следующие темы:

- тема 1 – методы исключения в решении систем;
- тема 2 – разложения Холецкого положительно определенных матриц;
- тема 3 – методы ортогональных преобразований;
- тема 4 – итерационные методы решения систем;
- тема 5 – методы решения нелинейных уравнений;
- тема 6 – методы решения проблемы собственных значений матриц.

В качестве дополнительных тем в часть I иногда включают линейное программирование и/или решение переопределенных систем. В данное учебное пособие включены первые три темы из приведенного списка тем. В лабораторных проектах затрагивается решение переопределенных систем, а в задачи включены вопросы по итерационным методам решения линейных систем уравнений. Линейное программирование изложено в отдельной книге [2].

Значение «Численных методов алгебры» во многих областях науки и техники трудно переоценить, — оно растет очень быстро. В связи с этим важно, чтобы студенты, готовящиеся стать специалистами в области математического моделирования, численных методов и комплексов программ, обладали истинно глубокими знаниями, т. е. знаниями, имеющими для них практическую ценность в их будущей деятельности. Такое знание достигается не схоластическим изучением теории и не решением элементарных задач в классе, но реальной проектной работой по созданию серьезных программных продуктов высокого профессионального уровня, воплощающих эти численные методы. В связи с этим данное пособие использует так называемый *проектно-ориентированный подход*, при котором студенты получают необходимый теоретический материал и закрепляют эти знания в практических лабораторных проектах. После этого итоговая проверка знаний по курсу «Численные методы – I» проводится в форме решения задач на экзамене или же методом тестирования. Последнее предполагает умение быстро отыскивать правильный ответ, решать простые задачи и анализировать алгоритмы. Надеемся, что при таком подходе к преподаванию и изучению студент лучше поймет и оценит этот важный предмет.

Ульяновск,  
декабрь 2006



И. В. Семушин

# 1

## ВВЕДЕНИЕ

### 1.1 Учебные цели студента

Мы живем в высокотехнологичном мире, в котором компьютер с каждым днем становится все более неотъемлемой частью. К тому же, наше общество все больше зависит от математики. Любая проблема решается лучше, если для нее найдена или построена подходящая (удовлетворительная, т. е. адекватная) математическая модель. При том, что для этого может потребоваться различный объем математических знаний, каждому, кто берется решать математически ориентированные проблемы, необходимо иметь навыки аналитического мышления.

Допустим, вы этим обладаете и смогли придать задаче математическую форму, т. е. дали правильную математическую постановку задачи; вопрос заключается в том, существует ли для этой задачи аналитическое решение? Действительность такова, что множество задач, для которых аналитическое решение существует и может быть найдено в конечной форме, невелико. Большинство задач требует численных методов для своего решения. Особенность же этой области знания в том, что «наилучшего» численного метода обычно не существует, так как в одних условиях лучшим будет один метод, в то время как для других условий успешнее работает другой метод. Понять и обосновать, какой же метод выбрать как лучший, можно лишь проводя вычислительные эксперименты с различными методами и для различных задач и условий. Для этого нужно уметь осознанно планировать вычислительные эксперименты, понимать и правильно программировать численные методы и эффективно использовать возможности современной вычислительной техники.

Таким образом, безусловно каждому из вас потребуются хорошая компьютерная подготовка, чтобы выжить на рынке труда и успешно функциониро-

вать среди грамотных компьютерных пользователей. Было бы образовательным преступлением получить диплом выпускника университета и не иметь этих навыков хотя бы на удовлетворительном уровне. В конце концов, для этого вы и посещаете курсы информатики, программирования и численных методов.

Курс численных методов способствует этому, давая богатый набор индивидуальных заданий. В этом курсе мы преследуем три конкретные цели:

1. Студенты научатся выводить и доказывать положения математической теории численных методов, т. е. разовьют *навыки* аналитического мышления. Эти навыки будут проверены посредством *финального экзамена*.
2. Студенты увидят, как математика и компьютеры применяются к проблемам реального мира, т. е. научатся решать задачи. Эти *умения* будут проверены посредством *семестровых контрольных работ*, которые мы рассматриваем как часть распределенного по времени экзамена.
3. Студенты приобретут реальный *опыт* разработки компьютерных программ высокого (почти профессионального) уровня и применения компьютеров посредством написания, отладки и многочисленных прогонов своих программ. Приобретенный опыт будет проверен посредством выполнения *домашних заданий на лабораторные работы*, которые по своей значимости можно трактовать как учебные программные проекты.

## 1.2 Оценка работы студента

**Выставление финальной оценки.** Для оценки того, в какой мере студент приблизился к своим целям — навыки, умения и опыт, — мы применяем следующую *систему оценок*.

- Ваша оценка есть взвешенное среднее посещаемости ( $A$ ), домашней работы ( $H$ ) и экзаменов ( $E$ ), где под «экзаменами» (см. подробнее ниже) понимается учет не только финального экзамена (во время сессии), но и контрольных работ в течение семестра:

5 % — посещаемость.

*Этот вес действует только в случае, если вы посещаете занятия. Если вы пропускаете занятия, этот вес прогрессивно возрастает (см. ниже). Вы можете получить «неудовлетворительно» исключительно в результате низкой посещаемости.*

30 % — домашняя работа.

65 % — экзамены.

Таким образом, итоговая оценка (final grade,  $FG$ ) вычисляется по правилу:

$$FG = 0.05A + 0.30H + 0.65E, \quad (1.1)$$

где каждая составляющая:

$A$  = attendance (посещаемость),

$H$  = homework (домашняя работа) и

$E$  = exams (экзамены)

выражается целым числом не выше 100 баллов.

- Эта итоговая оценка затем отображается на стандартную шкалу оценок:

86 - 100 = «отлично»,

71 - 85 = «хорошо»,

56 - 70 = «удовлетворительно»,

0 - 55 = «неудовлетворительно».

- Пример.

Студент Иван С. имеет следующие баллы:

$A = 90$ ,  $H = 87$ ,  $E = 83$ . Тогда  $0.05 \times 90 + 0.30 \times 87 + 0.65 \times 83 = 84.6$ .

Следовательно, Иван заработал «хорошо».

*Имейте в виду, что оценки зарабатываются.*

- Мы оставляем за собой право дать своего рода «плюс-минус дельта», если студент имеет оценку на границе между оценками (т. е. 85, 70 или 55). Если студент имеет 90 или выше за посещаемость ( $A \geq 90$ ), сдал все домашние задания в установленный срок и проявил хорошее прилежание, тогда мы рассматриваем возможность выставления ему следующей более высокой оценки. Если же студент не продемонстрировал указанных выше качеств, возможность повышения оценки исключается. Мы не рассматриваем возможности повышения оценки, если до граничного значения не хватает хотя бы одного балла.
- Для итоговой оценки мы используем «симметричное» округление, т. е. округляем вверх, если младшая цифра есть 5 или выше, и вниз, если она меньше пяти. При вычислении средней оценки за домашнюю работу и средней за экзамены соответствующие числа  $H$  и  $E$  округляются до

ближайшей десятой и затем они умножаются на свои весовые коэффициенты 0.05 и 0.30; после сложения по формуле (1.1) финальная оценка округляется.

### Учет посещаемости ( $A$ )

- Каждое учебное занятие, в том числе лекция, начинается с вашей росписи в явочном листе. Поставить свою роспись — ваша личная ответственность. Отсутствие росписи означает ваше отсутствие на занятии. Чтобы ваше отсутствие было расценено как уважительное, вы должны известить об этом преподавателя своевременно (т. е. в течение одной недели до или после занятия). Пожалуйста, оставьте преподавателю телефонное сообщение на рабочий телефон (секретарю кафедры) или записку.
- Ваша оценка за посещаемость будет определена по табл. 1.1.

Таблица 1.1. Влияние неуважительных пропусков на оценку

Число неуважительных пропусков <sup>a</sup>	Балл $A$	Вклад в $FG$ , вашу итоговую оценку
0	100	+5
1	90	+4.5
2	50	+2.5
3	0	+0
4	-50	-2.5
5	-100	-5
6	-150	-7.5
7	-200	-10
8	-400	-20
9	-600	-30
10	-800	-40

<sup>a</sup> Неуважительный пропуск есть пропуск занятия, который не связан с болезнью, с семейной утратой или с факультетским мероприятием.

При числе неуважительных пропусков выше десяти у вас нет шанса получить положительную итоговую оценку за весь курс.

- Вы можете иметь максимум 8 уважительных пропусков. *После этого все пропуски считаются неуважительными.*
- Для спортсмена пропуск занятия считается уважительным, если его тренер известит об этом преподавателя заранее в письменной форме. Если вы больны, позвоните на кафедру, чтобы преподавателя об этом известили. Любой такой пропуск будет неуважительным, если преподавателя не известят в течение одной недели после вашего пропуска занятия. Извещение следует делать в форме телефонного сообщения или записки секретарю кафедры. Ваше извещение должно содержать номер группы, день и время пропускаемого занятия, название предмета и, конечно, ваше имя и фамилию.

### Домашняя работа ( $H$ )

- Вам будет предложен ряд домашних заданий, которые — по нашему предположению — вы выполните и сдадите. Баллы за отдельные задания складываются и тем самым образуют  $H$ , т. е. оценку за этот вид вашей учебной работы. Любая сдача домашнего задания позже установленного срока влечет уменьшение вашей оценки  $H$  на 10 баллов. За каждое невыполненное задание в  $H$  поступает 0.
- По курсу «Численные методы» домашние задания представляют собой задания на лабораторные работы (проекты). Обычно мы предлагаем выполнить 3 таких работы за семестр, т. е. выдаем 3 задания. Максимальное количество баллов  $H$ , которое можно заработать за всю домашнюю работу, составляет 100. Эти 100 баллов мы разделяем определенным образом между общим числом выданных домашних заданий.
- Итак, каждому студенту мы предлагаем выполнить в течение семестра 3 лабораторные работы, чтобы покрыть все три темы из списка на стр. 1, включенные в данное пособие. За выполненное безупречно и в полном объеме задание по теме № 1 (это любой, по выбору студента или преподавателя, лабораторный проект №№ 1, 2, 3 или 4) студент заработает 50 баллов, причем по срокам это задание должно предшествовать всем последующим. Далее, за выполненное безупречно и в полном объеме задание по теме № 2 (это лабораторный проект № 5) студент заработает 20 баллов, а за выполненное безупречно и в полном объеме задание по теме № 3 (это лабораторный проект № 6) — 30 баллов. Заработанное



число баллов за каждое задание будет уменьшено, если защита работы не отвечает всем требованиям, изложенным в данном учебном пособии, или не демонстрирует самостоятельность выполнения.

- Преподаватель, ведущий лабораторные занятия в дисплейном классе, назначит сроки сдачи лабораторных работ и на каждом занятии всегда с готовностью поможет вам, если вы ясно формулируете те конкретные вопросы, которые у вас возникли дома. Преподаватель, ведущий семинарские (практические) занятия, поможет вам и всей аудитории, когда вы будете у доски рассказывать, как вы понимаете и как дома программируете тот или иной алгоритм.

### Экзамены ( $E$ )

- Ваша оценка за экзамены, т. е. величина  $E$  в составе финальной оценки, вычисляемой по формуле (1.1), будет определена как равномерно взвешенное среднее значение результатов  $P_{KP-1}$  и  $P_{KP-2}$  письменных контрольных работ ( $KP-1$ ) и ( $KP-2$ ) в течение семестра и результата  $P_{УЭ}$  устного экзамена ( $УЭ$ ) во время экзаменационной сессии. Это означает, что

$$E = (P_{KP-1} + P_{KP-2} + P_{УЭ}) / 3, \quad P_{KP-1}, P_{KP-2}, P_{УЭ} \in [0, 100]. \quad (1.2)$$

При том, что контрольные работы письменно проверяют ваше умение решать задачи, устный экзамен есть всеобъемлющая проверка вашего знания основных положений теории, умения доказывать эти положения и делать из них логические выводы. Эти (письменная и устная) части экзамена в совокупности покрывают весь учебный курс. Для этого мы проводим не менее двух контрольных работ за семестр.

- Все контрольные работы будут вам объявлены заранее — не позднее, чем за неделю. Если вы собираетесь пропустить контрольную работу (это должен быть уважительный пропуск), мы предпочтем, чтобы вы написали эту работу раньше назначенного срока. Если вы не сможете написать контрольную работу до назначенного срока, то примите все меры к тому, чтобы написать ее в течение недели после контрольного срока. По истечении недели после этого вы получите ноль. Вы также получите ноль за неуважительный пропуск контрольной работы.

- Мы переписываем и заменяем некоторые задания или делаем вариации в постановке экзаменационных вопросов по сравнению с теми, которые опубликованы в наших учебных пособиях, в предыдущем семестре или в типовой рабочей программе на нашем сайте. Об этом будет объявлено за две недели до контрольных работ или финального экзамена.

## 1.3 Кодекс студента

### Академическая честность

- К сожалению, всегда есть люди, не столь честные, как другие, и настолько, что мы должны пояснить, как будем действовать в этом случае.
- За любую контрольную работу, экзамен, программу или любой иной вид работы, который выполнен нечестно, вы получите ноль, и преподаватель будет беседовать с вами. Если такая проблема случится во второй раз, преподаватель направит вас к декану факультета, и вы снова заработаете ноль за этот вид работы. Если вопрос о нечестности возникнет в третий раз, то вы сразу заработаете «неудовлетворительно» за весь предмет и снова будете отправлены к декану.
- Что считается *академической нечестностью*, т. е. обманом? По общепринятому правилу, это означает найти кого-то другого, кто сделает за вас вашу работу, и выдать ее за вашу собственную. Это также включает получение и оказание посторонней помощи на экзамене или во время контрольной работы (от соседа или с помощью шпаргалки).
- *Наши экзамены — это всегда закрытая книга, закрытый конспект, закрытый сосед и открытый ум.* Если в этом правиле появятся какие-либо изменения, об этом будет объявлено заранее.
- Не пользуйтесь шпаргалками. Они приносят больше вреда, чем пользы. Ваше сознание будет раздвоено между попыткой сформулировать ответ и попыткой утаить факт пользования шпаргалкой. Обнаружить такое раздвоенное сознание не составляет никакого труда. Вы будете обескуражены еще больше самыми простыми вопросами экзаменатора.
- При выполнении домашних заданий приемлемо работать с кем-то еще, обсуждая трудные вопросы и помогая тем самым друг другу, но при

этом вы должны сами делать свою работу. Например, при написании компьютерных программ вполне нормально — обсуждать синтаксис, детали задания или получать помощь по сообщениям об ошибке. Ненормально, если вы отдаете кому-то копию вашей программы. Неприемлемо, если кто-то другой пишет программу для вас. Недопустимо копировать работу предыдущего семестра.

- В курсовых работах — вообще, в любых письменных работах — *плагиатом* является дословное копирование части чужих трудов, таких как чья-то статья (в том числе и опубликованная в Интернете), книга или энциклопедия, без использования кавычек и ссылки на источник. Обобщающие заключения и выводы, которые вы пишете, должны быть выражены вашими собственными словами.
- Нечестность, когда она появляется в домашней работе, не столь очевидна. Мы это вполне признаём. Но она так или иначе проявит себя на устном экзамене, так как ваш балл за домашнюю работу будет контрастировать с уровнем вашего ответа. Вы только навредите себе и осложните свое положение очевидной провинностью.

### **Поведение в аудитории**

- Примите все меры к тому, чтобы приходить на занятия вовремя. Если вы все же опаздываете,
  - не спрашивайте разрешения войти и не извиняйтесь за опоздание,
  - не проходите на место перед передним рядом мест,
  - тихо займите ваше место,
  - для получения любого раздаточного материала (если он есть) дождитесь конца занятия,
  - не хлопайте дверью.
- Чтобы выйти из аудитории, просите разрешения.
- Поднимайте руку и ждите, когда на вас обратят внимание, перед тем как задать вопрос.
- Не разговаривайте в аудитории.
- Уберите за собой и поставьте стул в исходное положение.

## Путь к успеху

- Приходите на занятие вовремя, принимайте в нем участие и ведите записи.
- Просматривайте задания до занятия.
- Проверяйте ваши записи после занятия.
- Вовремя выполняйте ваши задания.
- Не накапливайте задолженности по самостоятельной работе — чтению учебных материалов, по домашней работе и в целом — по учебе.
- Выполняйте рекомендации по подготовке к контрольным работам и к финальному экзамену. Убедитесь, что вы можете решать типовые задачи и доказывать теоремы, которые во время лекций были отмечены как упражнения для самостоятельной работы.
- Придерживайтесь твердой решимости добиться успеха.
- Если вам нужна помощь, получайте ее безотлагательно.
- Сохраняйте позитивное отношение к делу.

## Обратная связь

- По окончании всего курса занятий заполните анонимно лист обратной связи, который выдаст преподаватель. В нем вы можете отметить как положительные, так и отрицательные, на ваш взгляд, стороны преподавания этого предмета в текущем семестре.
- Преподаватель периодически просматривает свой сайт. Вы можете посылать через него ваши кратко сформулированные предложения, которые, по вашему мнению, помогли бы вам повысить эффективность изучения этого предмета.

*Добро пожаловать на наши занятия. Вместе мы рассчитываем на большой и продуктивный семестр !*

## 1.4 Краткое описание курса

На стр. 12 вы найдете краткое — занимающее один лист — описание данного курса.

<b>ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ</b>		
<b>Кредиты:</b> 3 <sup>a</sup> <b>Семестр:</b> 1 <sup>b</sup> <b>Обязательный:</b> ДА		
<b>Формат:</b>	Лекции	34 ч
	Семинары	0 ч
	Лабораторные работы	17 ч
	Самостоятельная работа	49 ч
<b>Преподаватель:</b> проф. И. В. Семушин		
<b>Содержание:</b>		
Этот курс излагает основы современных и классических численных методов решения алгебраических задач: линейных систем уравнений, нелинейных уравнений, аппроксимации функций и отыскания собственных значений матриц. Его программа охватывает следующие темы: методы исключения неизвестных, алгоритмы разложения Холецкого, ортогональные преобразования, итерационные методы, а также обзор алгоритмов метода наименьших квадратов и методов решения проблемы собственных значений.		
<b>Ожидаемые результаты изучения: продемонстрировать —</b>		
<b>знание и понимание:</b>	структуры погрешностей решения вычислительных задач; корректности задач; прямых и итерационных методов решения линейных систем; задачи и алгоритмов метода наименьших квадратов; проблемы собственных значений и основ ее решения.	
<b>способность:</b> (теоретические навыки)	понимать и формулировать основные численные процедуры и решать демонстрационные задачи; идентифицировать подходящие методы для конкретных задач линейной алгебры.	
<b>способность:</b> (практические навыки)	понимать реализацию и поведение численных методов и решений на практике; логически формулировать численные методы для решения задач на компьютере с применением языков программирования (Fortran 77/90, Pascal или C/C++).	
<b>способность:</b> (ключевые навыки)	изучать предмет самостоятельно; использовать литературные источники; использовать персональный компьютер для программирования; эффективно конспектировать материал и распорядиться рабочим временем.	
<b>Оценивание:</b> 5% за посещаемость (неуважительные пропуски прогрессивно штрафуются); 30% за семестровые (домашние) задания, 65% суммарно за две контрольные работы и финальный (устный) экзамен. Практическая работа: Выдаваемые индивидуальные задания включают программирование отдельных методов из числа методов, излагаемых в данном курсе.		
<b>Рекомендуемые учебные материалы:</b> Конспект лекций. В. В. Воеводин. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. — М.: Наука, 1966. А. А. Самарский, А. В. Гулин. Численные методы. — М.: Наука, 1989. <b>Дополнительное чтение:</b> Н. Н. Калиткин. Численные методы. — М.: Наука, 1978. Н. С. Бахвалов. Численные методы. — М.: Наука, 1975. <i>или:</i> Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. Численные методы. — М.: Наука, 1987.		

<sup>a</sup> Число кредитных часов (приравнивается числу аудиторных часов в неделю).<sup>b</sup> Продолжительность курса.

# Библиографический список

1. Методические материалы для проведения итоговой государственной аттестации выпускников вузов по направлению «Прикладная математика и информатика»: Учеб.-метод. сб. / Тверь, Твер. Гос. ун-т. — 2003.
2. Семушин, И. В. Практикум по методам оптимизации. Компьютерный курс: учеб. пособие для вузов / И. В. Семушин. — 3-е изд, перераб. и доп. — Ульяновск : УлГТУ, 2005.
3. Воеводин, В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы / В. В. Воеводин. — М.: Наука, 1966.
4. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: Наука, 1989.
5. Ортега, Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем / Дж. Ортега. — М.: Мир, 1991.
6. Писсанецки, С. Технология разреженных матриц / С. Писсанецки. — М.: Мир, 1988.
7. Фаддеев, Л. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Л. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. — М.: Физматгиз, 1963.
8. Воеводин, В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. — М.: Наука, 1977.
9. Ортега, Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. — М.: Наука, 1986.
10. Райс, Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение / Дж. Райс. — М.: Мир, 1984.