

### Численные методы – вопросы к сессии (зачет)

1. Теорема о существовании и единственности  $\{LU\}$ -разложения. Связь разложения и метода Гаусса исключения неизвестных.
2. Теорема о существовании и единственности  $\{UL\}$ -разложения. Связь разложения и метода Гаусса исключения неизвестных.
3. Метод Гаусса: расчетные формулы и подсчет числа действий умножения/деления в процедуре факторизации матрицы.
4. Метод Гаусса: расчетные формулы и подсчет числа действий умножения/деления в процедурах прямой и обратной подстановки.
5. Элементарные треугольные матрицы. Теорема об алгоритме  $\{LU\}$ -разложения с замещением исходной матрицы матрицами  $L$  и  $U$ .
6. Элементарные треугольные матрицы. Теорема об алгоритме  $\{UL\}$ -разложения с замещением исходной матрицы матрицами  $U$  и  $L$ .
7. Метод Гаусса с выбором главного элемента (ГЭ): стратегии и программная реализация. Выбор ГЭ по строке и решение систем.
8. Теорема о методе Гаусса (об  $\{LU\}$ -разложении) с выбором главного элемента по столбцу активной подматрицы.
9. Теорема о методе Гаусса (об  $\{LU\}$ -разложении) с выбором главного элемента по строке активной подматрицы.
10. Вычисление определителя и обращение матрицы (два способа) с учетом выбора главного элемента.
11. Метод Гаусса-Жордана: теорема об алгоритме  $\{LU\}$ -разложения с получением  $U^{-1}$ . Подсчет числа действий умножения/деления.
12. Метод Гаусса-Жордана: теорема об алгоритме  $\{UL\}$ -разложения с получением  $L^{-1}$ . Подсчет числа действий умножения/деления.
13. Компактные схемы: вариант  $\{LU\}$ -разложения. Алгоритм и пример.
14. Компактные схемы: вариант  $\{UL\}$ -разложения. Алгоритм и пример.
15. Алгоритмы  $\{LU\}$ -разложения с исключением по столбцам и по строкам. Примеры.
16. Алгоритмы  $\{UL\}$ -разложения с исключением по столбцам и по строкам. Примеры.
17. Положительно-определенные матрицы и разложения Холецкого. Вывод алгоритмов Холецкого из алгоритмов  $\{LU\}$ -разложения.
18.  $LL^T$ -разложение положительно-определенных матриц: вывод по методу квадратичных форм.
19.  $LDL^T$ -разложение положительно-определенных матриц: вывод по методу квадратичных форм.
20.  $UU^T$ -разложение положительно-определенных матриц: вывод по методу квадратичных форм.
21.  $UDU^T$ -разложение положительно-определенных матриц: вывод по методу квадратичных форм.
22. Нормы вектора и матрицы. Норма с индексом бесконечность. Оценка для собственных значений через норму матрицы.
23. Число обусловленности системы линейных алгебраических уравнений. Свойства стандартного числа обусловленности.
24. Обращение возмущенных матриц (лемма Банаха).
25. Полная оценка относительной погрешности решения линейных систем.
26. Прямой и обратный анализы ошибок. Приемлемое решение неопределенной системы (теорема Оттля-Прагера).
27. Элементарные отражения Хаусхолдера: прямая и обратная задачи.
28. Ортогональные преобразования Хаусхолдера: приведение матрицы к верхней тре-

- угольной форме.
29. Элементарные плоские вращения Гивенса. Приведение матрицы к верхней треугольной форме вращениями Гивенса.
  30. Решение систем и обращение матрицы после приведения матрицы к верхней треугольной форме ортогональными преобразованиями (Хаусхолдера или Гивенса).
  31. Итерационные методы. Классические методы Якоби и Зейделя.
  32. Каноническая форма и разновидности итерационных методов.
  33. Определение сходимости итерационных методов, матричное неравенство  $C > 0$  и нижняя грань для  $(Cx, x)$ .
  34. Теорема о сходимости стационарного одношагового метода с симметрической положительно-определенной матрицей системы.
  35. Следствие о сходимости метода Якоби для задач со строгим диагональным преобладанием матрицы системы.
  36. Следствие о сходимости метода верхней релаксации для задач с симметрической положительно-определенной матрицей системы.
  37. Следствие о сходимости метода простой итерации для задач с симметрической положительно-определенной матрицей системы.
  38. Необходимое и достаточное условие сходимости стационарных одношаговых итерационных методов. Необходимость.
  39. Достаточное условие сходимости стационарных итерационных методов: случай полной системы собственных векторов матрицы  $SSS$ , -- переходной матрицы погрешности.
  40. Достаточное условие сходимости стационарных итерационных методов: случай неполной системы собственных векторов матрицы  $SSS$ , -- переходной матрицы погрешности.
  41. Апостериорная оценка погрешности итерационных методов.
  42. Задача линейных наименьших квадратов. Нормальные уравнения и нормальное псевдорешение.
  43. Статистическая интерпретация решения задачи линейных наименьших квадратов.
  44. Рекурсия в задаче линейных наименьших квадратов. Информационная форма.
  45. Рекурсия в задаче линейных наименьших квадратов. Ковариационная форма.
  46. Степенной метод решения проблемы собственных значений.
  47. Метод Якоби решения проблемы собственных значений.
  48. Метод Гивенса решения проблемы собственных значений.
  49. Метод Хаусхолдера решения проблемы собственных значений.
  50.  $\{QR\}$ -метод Френсиса решения проблемы собственных значений.
  51. Метод простой итерации решения одного уравнения с одним неизвестным.
  52. Метод Ньютона решения одного уравнения с одним неизвестным.
  53. Сходимость метода Ньютона решения одного уравнения с одним неизвестным.
  54. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений.