9

Программа курса

9.1 Общая информация

Цель – базовые умения и навыки в области разработки компьютерно ориентированных вычислительных алгоритмов решения задач, возникающих в процессе математического моделирования законов реального мира. Понимание основных идей численных методов, особенностей и условий их применения в реальных условиях.

Задачи – изучение основных методов «Вычислительной линейной алгебры», численного решения нелинейных уравнений и задач аппроксимации функций по экспериментальным данным.

Формат – 2/0/1 или 2/1/1 (т. е. в неделю часов на лекции / семинары / лабораторные работы), в зависимости от специальности, формы обучения и университета. Например, при семестре в 17 недель возможны варианты:

- специальность 01050165, очная форма обучения:
  лекции (34 час), лабораторные работы (17 час), самостоятельная работа (49 час), экзамен
- специальность 08080165, очная форма обучения:
  лекции (34 час), лабораторные работы (16 час), самостоятельная работа (50 час), зачет
- специальность 08080165, заочная форма обучения:
  лекции (17 час), лабораторные работы (8,5 час), самостоятельная работа (74,5 час), зачет
- специальность 08080165, очно-заочная форма обучения:
  лекции (34 час), практические занятия (10 час), самостоятельная работа (66 час), зачет

Пререквизиты – «Математический анализ», «Геометрия и алгебра», «Информатика», «Языки программирования и методы трансляции» и «Практикум на ЭВМ».

Кореквизиты [1] – «Практикум на ЭВМ» (17 час), зачет.

Постреквизиты – «Численные методы II», «Теория игр и исследование операций», специальные дисциплины и выпускная работа.

9.2 Рабочая программа

ЛЕКЦИИ

1. Введение (1 час). Задачи и методы вычислительной математики и их приложения в различных сферах деятельности. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Численные методы как раздел современной математики. Роль компьютерно-ориентированных численных методов в исследовании сложных математических моделей.

2. Системы линейных алгебраических уравнений (27 час).

2.1. Прямые методы решения систем (12 час). LU-разложение и методы исключения Гаусса и Жордана. Стратегии выбора главного элемента. Обращение матриц. Компактные схемы (Краут). Положительно определенные матрицы. Разложения Холесского и метод квадратного корня из матриц.

2.2. Плохая обусловленность и анализ ошибок (3 час). Нормы матриц и линейных преобразований. Обращение возмущенных матриц (лемма Банаха). Обусловленность линейных уравнений (число обусловленности и теорема об относительной ошибке). Прямой и обратный анализы ошибок. Примеры и последствия плохой обусловленности систем. Приемлемое решение неопределенной системы (теорема Оттля-Прагера).

[1] «Практикум на ЭВМ» в УлГУ поддерживает курс «Численные методы I» для специальностей «Прикладная математика и информатика» и «Математика», при этом для специальности «Математика» на него отводится 34 часа.

2.3. Методы ортогонального приведения (3 час). Ортогонализация Грама-Шмидта (обыкновенная и модифицированная). QR-разложение матриц и решение систем. Плоские вращения Гивенса. Элементарные отражения Хаусхолдера. Решение систем с применением ортогональных преобразований.

2.4. Итерационные методы решения систем. (7 час) Примеры и канонический вид итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Исследование сходимости итерационных методов. Необходимое и достаточное условие сходимости стационарных итерационных методов. Оценка скорости сходимости стационарных итерационных методов. Итерационные методы вариационного типа. Апостериорная оценка погрешности итерационных методов.

2.5. Метод наименьших квадратов (3 час). Подгонка данных, построение моделей и задача МНК. Нормальные уравнения и нормальное псевдорешение. Элементарная статистическая интерпретация решения задачи МНК. Рекурсия в решении задачи МНК. Информационная форма решения. Эффективные вычислительные схемы МНК, использующие факторизацию или ортогональное приведение матриц.

3. Проблема собственных значений (3 час). Общая характеристика проблемы. Решение полной проблемы собственных значений при помощи QR-алгоритма.

4. Корни нелинейных уравнений (3 час). Нелинейные задачи с одной переменной. Метод простой итерации. Метод Ньютона. Сходимость метода Ньютона. Методы для случая, когда производные не заданы. Метод Ньютона для систем нелинейных уравнений. Локальная сходимость метода Ньютона. Теорема Канторовича и теорема о сжимающем отображении.

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Лабораторная работа № 1: Стандартные алгоритмы LU-разложения.

Лабораторная работа № 2: Современные алгоритмы LU-разложения.

Лабораторная работа № 3: Алгоритмы окаймления в LU-разложении.

Лабораторная работа № 4: Разреженные формы LU-разложения.

Лабораторная работа № 5: Разложения Холесского.

Лабораторная работа № 6: Ортогональные преобразования.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

В зачет самостоятельной работы студента включены упражнения, представляющие собой доказательство вариантов теорем, доказанных на лекциях, решение задач, а также написание программ для лабораторных работ и чтение учебной литературы.

ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНА

1. Теорема о существовании и единственности LU-разложения. Связь разложения и метода Гаусса исключения неизвестных.

2. Теорема о существовании и единственности UL-разложения. Связь разложения и метода Гаусса исключения неизвестных.

3. Метод Гаусса: расчетные формулы и подсчет числа действий умножения/деления в процедуре факторизации матрицы.

4. Метод Гаусса: расчетные формулы и подсчет числа действий умножения/деления в процедурах прямой и обратной подстановки.

5. Элементарные треугольные матрицы. Теорема об алгоритме LU-разложения с замещением исходной матрицы матрицами L и U.

6. Элементарные треугольные матрицы. Теорема об алгоритме UL-разложения с замещением исходной матрицы матрицами U и L.

7. Метод Гаусса с выбором главного элемента (ГЭ): стратегии и программная реализация. Выбор ГЭ по строке и решение систем.

8. Теорема о методе Гаусса (об LU-разложении) с выбором главного элемента по столбцу активной подматрицы.

9. Теорема о методе Гаусса (об LU-разложении) с выбором главного элемента по строке активной подматрицы.

10. Вычисление определителя и обращение матрицы (два способа) с учетом выбора главного элемента.

11. Метод Гаусса-Жордана: теорема об алгоритме LU-разложения с получением U^{-1}. Подсчет числа действий умножения/деления.

12. Метод Гаусса-Жордана: теорема об алгоритме UL-разложения с получением L^{-1}. Подсчет числа действий умножения/деления.

13. Компактные схемы: вариант LU-разложения. Алгоритм и пример.

14. Компактные схемы: вариант UL-разложения. Алгоритм и пример.

15. Алгоритмы LU-разложения с исключением по столбцам и по строкам. Примеры.

16. Алгоритмы UL-разложения с исключением по столбцам и по строкам. Примеры.

17. Положительно-определенные матрицы и разложения Холесского. Вывод алгоритмов Холесского из алгоритмов LU-разложения.

18. LL^T-разложение положительно-определенных матриц: вывод по методу квадратичных форм.

19. LDL^T-разложение положительно-определенных матриц: вывод по методу квадратичных форм.

20. UU^T-разложение положительно-определенных матриц: вывод по методу квадратичных форм.

21. UDU^T-разложение положительно-определенных матриц: вывод по методу квадратичных форм.

22. Нормы вектора и матрицы. Норма с индексом бесконечность. Оценка для собственных значений через норму матрицы.

23. Число обусловленности системы линейных алгебраических уравнений. Свойства стандартного числа обусловленности.

24. Обращение возмущенных матриц (лемма Банаха).

25. Полная оценка относительной погрешности решения линейных систем.

26. Прямой и обратный анализы ошибок. Приемлемое решение неопределенной системы (теорема Оттля-Прагера).

27. Элементарные отражения Хаусхолдера: прямая и обратная задачи.

28. Ортогональные преобразования Хаусхолдера: приведение матрицы к верхней треугольной форме.

29. Элементарные плоские вращения Гивенса. Приведение матрицы к верхней треугольной форме вращениями Гивенса.

30. Решение систем и обращение матрицы после приведения матрицы к верхней треугольной форме ортогональными преобразованиями (Хаусхолдера или Гивенса).

31. Итерационные методы. Классические методы Якоби и Зейделя.

32. Каноническая форма и разновидности итерационных методов.

33. Определение сходимости итерационных методов, матричное неравенство $C > 0$ и нижняя грань для (Cx, x).

34. Теорема о сходимости стационарного одношагового метода с симметрической положительно-определенной матрицей системы.

35. Следствие о сходимости метода Якоби для задач со строгим диагональным преобладанием матрицы системы.

36. Следствие о сходимости метода верхней релаксации для задач с симметрической положительно-определенной матрицей системы.

37. Следствие о сходимости метода простой итерации для задач с симметрической положительно-определенной матрицей системы.

38. Необходимое и достаточное условие сходимости стационарных одношаговых итерационных методов. Необходимость.

39. Достаточное условие сходимости стационарных итерационных методов: случай полной системы собственных векторов матрицы S, – переходной матрицы погрешности.

40. Достаточное условие сходимости стационарных итерационных методов: случай неполной системы собственных векторов матрицы S, – переходной матрицы погрешности.

41. Апостериорная оценка погрешности итерационных методов.

42. Задача линейных наименьших квадратов. Нормальные уравнения и нормальное псевдорешение.

43. Элементарная статистическая интерпретация решения задачи линейных наименьших квадратов.

44. Рекурсия в решении задачи линейных наименьших квадратов. Информационная форма решения.

45. Рекурсия в решении задачи линейных наименьших квадратов. Ковариационная форма решения.

46. Степенной метод решения проблемы собственных значений.

47. Метод Якоби решения проблемы собственных значений.

48. Метод Гивенса решения проблемы собственных значений.

49. Метод Хаусхолдера решения проблемы собственных значений.

50. QR-метод Френсиса решения проблемы собственных значений.

51. Метод простой итерации решения одного уравнения с одним неизвестным.

52. Метод Ньютона решения одного уравнения с одним неизвестным.

53. Сходимость метода Ньютона решения одного уравнения с одним неизвестным.

54. Конечно-разностный метод Ньютона и метод секущих решения одного уравнения с одним неизвестным.

55. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений.

56. Локальная сходимость метода Ньютона решения систем нелинейных уравнений.

57. Теорема Канторовича и теорема о сжимающем отображении.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. — М.: Наука, 1966.

2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.

Дополнительная

К разделу 2.1:

1. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.

2. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.

3. Годунов С. К. Решение систем линейных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980.

4. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем: Пер. с англ. — М.: Мир, 1991.

5. Писсанецки С. Технология разреженных матриц: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988.

6. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.

7. Фаддеев Л. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1963.

8. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis: Translated from German. — 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993. [Оригинальное издание: J. Stoer, R. Bulirsch. Einfürung in die Numerische Mathematik, I, II. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 1976.]

К разделу 2.2:

1. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977.
2. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
3. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984.
4. Херцбергер Ю., Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления: Пер. с англ. — М.: Мир, 1987.
5. Fröberg Carl-Erik. Introduction to Numerical Analysis. — 2nd ed. Reading Massachusetts Menlo Park (California) London Don Mills (Ontario): Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
6. Golub G. H., Ortega J. M. Scientific Computing and Differential Equations. An Introduction to Numerical Methods. — San Diego New York Boston London Sydney Tokyo Toronto: Academic Press, 1992. [*Есть русский перевод*]
7. Noble B., Daniel J. W. Applied Linear Algebra. — 2nd ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1977.
8. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis: Translated from German. — 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993. [Оригинальное издание: J. Stoer, R. Bulirsch. Einfürung in die Numerische Mathematik, I, II. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 1976.]

К разделу 2.3:

1. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
3. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984.
4. Размыслов Ю. П., Ищенко С. Я. Практикум по вычислительным методам алгебры. — М.: Изд-во МГУ, 1989.

5. Семушин И. В., Куликов Г. Ю. Сборник лабораторных работ и контрольных, тестовых заданий по курсу «Вычислительная линейная алгебра». — Ульяновск: УлГТУ, 2000.

6. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis: Translated from German. — 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993. [Оригинальное издание: J. Stoer, R. Bulirsch. Einfürung in die Numerische Mathematik, I, II. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 1976.]

К разделу 2.4:

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.

К разделу 2.5:

1. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука, 1983.

2. Bierman G. J. Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation. — N.-Y.: Academic Press, 1977.

3. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis: Translated from German. — 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993. [Оригинальное издание: J. Stoer, R. Bulirsch. Einfürung in die Numerische Mathematik, I, II. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 1976.]

К разделу 3:

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1975.

2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

3. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений: Пер. с англ. — М.: Наука, 1970.

4. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis: Translated from German. — 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993. [Оригинальное издание: J. Stoer, R. Bulirsch. Einfürung in die Numerische Mathematik, I, II. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 1976.]

К разделу 4:

1. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988.

2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.

3. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis: Translated from German. — 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993. [Оригинальное издание: J. Stoer, R. Bulirsch. Einfürung in die Numerische Mathematik, I, II. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 1976.]

Составитель: профессор, д.т.н. И. В. Семушин

Рецензент: доцент, к.ф-м.н. А. В. Жарков.