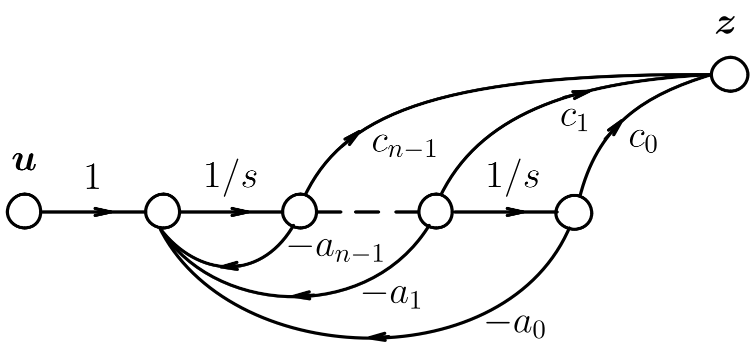
И. В. Семушин, Ю. В. Цыганова

Детерминистские модели динамических систем



Ульяновск

**Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации**

**Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Ульяновский государственный технический университет»**

И. В. Семушин, Ю. В. Цыганова

Детерминистские модели динамических систем

Ульяновск 2006

УДК 681.5.01:512 (075)
ББК 32.81 я7
С30

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор В. Р. Крашенинников
канд. физ.-мат. наук, доцент Е. В. Фолиадова

Утверждено редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Семушин, И. В.

С30 Детерминистские модели динамических систем : учеб. пособие / И. В. Семушин, Ю. В. Цыганова. — Ульяновск : УлГТУ, 2006. — 78 с.
ISBN 5-89146-983-9
ISBN 978-5-89146-983-9

Содержит теоретический и практический материал для проведения семинарских занятий со студентами, изучающими детерминистские динамические системы, т. е. системы, поведение которых можно описать системами обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений.

Для студентов, обучающихся по направлениям: 010200 Математика. Прикладная математика; 010300 Математика. Компьютерные науки; 010400 Информационные технологии; 010500 Прикладная математика и информатика; 080800 Прикладная информатика; 090102 Компьютерная безопасность и другим специальностям, в программы которых входят такие дисциплины, как «Основы моделирования», «Теория систем и системный анализ» или «Теория автоматического управления».

УДК 681.5.01:512(975)
ББК 32.81 я7

ISBN 5-89146-983-9
ISBN 978-5-89146-983-9

Оглавление

Предисловие

Предлагаемое вниманию студента учебное пособие содержит теоретический и практический материал для проведения семинарских занятий со студентами, изучающими детерминистские динамические системы, т. е. объекты, поведение которых можно описать системами дифференциальных или разностных уравнений.

Пособие состоит из введения, четырех основных разделов: «Обзор операционного исчисления», «Линейные динамические системы», «Самостоятельная работа», «Примеры решения задач», списка литературы и двух приложений.

В разделе 1 — «Обзор операционного исчисления» — дается определение преобразования Лапласа и приводятся его основные свойства. Понимание этого материала требует знания основ комплексного анализа. Для удобства студента эти необходимые сведения вынесены за пределы основного текста — в приложении A. Таблицы преобразований Лапласа — как необходимый рабочий инструмент решения множества практических задач — для удобства помещены в приложение B. Раздел 1 завершается набором практических заданий. Число таких задач по операционному исчислению значительно расширится, если учесть, что таблицы, вынесенные в приложение B, сами по себе дают обширный материал для самостоятельного вывода включенных в них формул.

Раздел 2 — «Линейные динамические системы» — содержит теоретический материал по линейным динамическим системам и также набор практических заданий. В теоретический материал включены следующие вопросы: описание системы в пространстве состояний, передаточная функция системы, стандартная управляемая модель системы, стандартная наблюдаемая модель системы, каноническая модель системы, критерии управляемости и наблюдаемости линейных непрерывных и дискретных систем, а также линеаризация нелинейных динамических систем.

В раздел 3 — «Самостоятельная работа» — вошли две контрольные работы. Варианты этих работ индивидуальны в пределах учебной группы.

В разделе 4 — «Примеры решения задач» — подробно разобраны решения некоторых задач.

Задачи из первого и второго разделов могут быть использованы при проведении семинарских занятий, а контрольные работы — для закрепления полученных студентами знаний и как проверочный материал при выставлении итоговой оценки.

Как уже отмечено, в приложение А включены краткие сведения из теории функций комплексного переменного, необходимые студентам при решении задач данного учебного пособия. В приложение В помещены таблицы преобразования Лапласа, которые содержат в общей сложности 80 соответствий, полезных для решения задач.

Заключение «приоткрывает» завесу над современными проблемами теории систем, с которыми столкнется студент в случае продолжения специализации в области математического моделирования.

Библиографический список, завершающий данное пособие, содержит десять наименований книг, где студент найдет доказательства теорем, которые в данном тексте опущены, а также множество других полезных сведений для расширенного изучения.

Ульяновск, декабрь 2006

И. В. Семушин
Ю. В. Цыганова

1

Обзор операционного исчисления

1.1 Преобразование Лапласа

Пусть функция $f(t)$ действительного переменного t определена при всех $t \in (-\infty; +\infty)$; значения функции $f(t)$ могут быть как действительными, так и комплексными. Функция $f(t)$ называется **кусочно-непрерывной**, если она непрерывна или имеет точки разрыва первого рода, причем на каждом конечном интервале оси t содержится лишь конечное число таких точек.

Определение 1.1. Функция $f(t)$, определенная для всех моментов времени $t \in (-\infty; +\infty)$, называется **функцией-оригиналом**, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

2) функция $f(t)$ кусочно-непрерывная при $t \geq 0$;

3) существуют такие действительные числа $M > 0$ и σ, что для всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}. \tag{1.1}$$

Если функция-оригинал $f(t)$ удовлетворяет условию (1.1) при некоторых $M > 0$ и σ_1, то она удовлетворяет этому условию с тем же самым M и при всех $\sigma > \sigma_1$. С другой стороны, если при некотором значении σ_2 условие (1.1) не выполнено ни при каком $M > 0$, то это условие не будет выполняться ни при каком $M > 0$ и $\sigma < \sigma_2$. Таким образом, все точки σ на числовой прямой разбиваются на две группы, образующие два луча $(-\infty; \sigma_0)$ и $(\sigma_0; +\infty)$: для любого $\sigma > \sigma_0$ условие (1.1) выполнено с некоторым $M > 0$ (зависящим, вообще говоря, от σ) и для любого $\sigma < \sigma_0$ условие (1.1) не выполняется ни при каком $M > 0$. Число σ_0, разделяющее эти два множества, называется **индексом**, или **показателем роста функции** $f(t)$.

Для определения преобразования над функциями-оригиналами введем следующие понятия.

Определение 1.2. Функция $\varphi(t)$, определенная при $t \geq 0$, называется *интегрируемой* на интервале $[0; +\infty)$, если существует предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_0^R \varphi(t)dt = \int\limits_0^\infty \varphi(t)dt, \tag{1.2}$$

т. е. если несобственный интеграл в (1.2) сходится. Функция $\varphi(t)$ называется *абсолютно интегрируемой* на множестве $[0; +\infty)$, если существует предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_0^R \mid \varphi(t) \mid dt = \int\limits_0^\infty \mid \varphi(t) \mid dt\,, \tag{1.3}$$

т. е. сходится несобственный интеграл от $\mid \varphi(t) \mid$. Справедливо следующее

Утверждение 1.1. *Если функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема на множестве $[0; +\infty)$, то она интегрируема на этом множестве.*

Другими словами, из сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty \mid \varphi(t) \mid dt$ следует сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty \varphi(t)dt$. Отметим, что обратное утверждение неверно: не всякая интегрируемая функция является также абсолютно интегрируемой.

Пусть теперь функция φ зависит от действительного переменного t и комплексного параметра s: $\varphi = \varphi(t, s)$. Если при некотором s интеграл $\int\limits_0^\infty \varphi(t, s)dt$ сходится, то значение этого интеграла обозначим через $F(s)$. Таким образом, $F(s)$ оказывается функцией, определенной на множестве тех значений s, для которых интеграл $\int\limits_0^\infty \varphi(t, s)dt$ сходится.

Определение 1.3. Интеграл $\int\limits_0^\infty \varphi(t, s)dt$ называется правильно (или равномерно) сходящимся в данной области D к функции $F(s)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число R_0, зависящее только от ε, что для всех $R > R_0$ и всех точек $s \in D$ выполнено неравенство $\left| \int\limits_0^R \varphi(t, s)dt - F(s) \right| < \varepsilon$.

Очевидно, что из равномерной сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty \varphi(t,s)dt$ в области D значений переменного s следует его сходимость в каждой точке $s \in D$. Но обратное неверно: интеграл, сходящийся в каждой точке области D, не обязательно сходится в этой области равномерно. Существенным дополнительным условием, отличающим поточечную сходимость от равномерной, является то, что число R_0 в определении равномерной сходимости не зависит от s; это число одно и то же для всех точек $s \in D$.

Определение 1.4. **Преобразованием (оператором) Лапласа функции** $f(t)$ называется правило, определяемое формулой

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \tag{1.4}$$

по которому заданной функции $f(t)$ действительного переменного t ставится в соответствие функция $F(s)$ комплексного переменного s. Функция $F(s)$ определена на множестве тех значений s, для которых интеграл (1.4) сходится. Эта функция называется **изображением** функции $f(t)$. Тот факт, что функция $F(s)$ является изображением функции $f(t)$, записывается следующим образом: $f(t) \doteqdot F(s)$ или $F(s) \doteqdot f(t)$.

Теорема 1.1 (*о существовании и аналитичности изображения*). Если $f(t)$ — функция-оригинал с индексом роста σ_0, то интеграл (1.4) сходится абсолютно для всех s в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma_0$; при этом в любой полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma_1$ с $\sigma_1 > \sigma_0$ сходимость будет равномерной. Функция-изображение $F(s)$, определяемая формулой (1.4) в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, является аналитической функцией в этой полуплоскости.[1]

Доказательство. Воспользуемся условием 3) из определения 1.1. Так как $s = \alpha + i\omega$, где α и ω — действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$, то $|e^{-st}| = e^{-\alpha t}$ и поэтому

$$\left|f(t)e^{-st}\right| \le Me^{\sigma t}e^{-\alpha t} = Me^{(\sigma-\alpha)t}.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^\infty \left|f(t)e^{-st}\right| dt \le M \int\limits_0^\infty |\ e^{(\sigma-\alpha)t}\ |\ dt = M\left.\frac{e^{(\sigma-\alpha)t}}{\sigma-\alpha}\right|_0^\infty = \frac{M}{\alpha-\sigma},$$

[1] Сведения из теории функций комплексного переменного, необходимые для понимания преобразования Лапласа, приведены для удобства студента в Приложении А.

так как, по условию теоремы, $\sigma - \alpha < 0$ и потому $e^{(\sigma-\alpha)t} \to 0$ при $t \to \infty$. С учетом утверждения 1.1 (см. стр. 8) это доказывает абсолютную сходимость интеграла (1.4). $\square$

Как правило, функция $F(s)$ оказывается определенной и аналитической в значительно большей части комплексной плоскости, чем полуплоскость $\operatorname{Re}\, s > \sigma_0$. Согласно теореме 1.1, функция $F(s)$ не имеет особых точек в этой полуплоскости; все они лежат левее прямой $\operatorname{Re}\, s = \sigma_0$ или на самой этой прямой.

Преобразование Лапласа (1.4) каждой функции-оригиналу $f(t)$ ставит в соответствие функцию-изображение $F(s)$. Оказывается, у разных функций-оригиналов изображения также должны быть разными. Более того, существует формула, называемая формулой обращения, которая позволяет по известному изображению $F(s)$ восстановить оригинал $f(t)$, причем единственным образом, если только не обращать внимания на значения, приписываемые оригиналу в точках разрыва.

Теорема 1.2 (*теорема обращения*). Если $f(t)$ — функция-оригинал с индексом роста σ_0 и $F(s)$ — ее изображение, то во всякой точке непрерывности функция $f(t)$ выражается через $F(s)$ по следующей формуле обращения:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) e^{st} ds\,, \tag{1.5}$$

где интеграл берется по любой прямой $\operatorname{Re}\, s = \sigma > \sigma_0$ и понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) e^{st} ds = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} F(s) e^{st} ds\,.$$

1.2 Основные свойства преобразования Лапласа

Обозначим через $f(t)$, $g(t)$, ... функции-оригиналы, а через $F(s)$, $G(s)$, ... — их изображения. Свойства преобразования Лапласа могут формулироваться как теоремы, многие из которых несложно доказываются, что и рекомендуется студенту сделать в качестве упражнений.

1°. **Теорема 1.3 (*поведение изображения при* $s \to \infty$).** Изображение $F(s)$ любой функции-оригинала $f(t)$ стремится к нулю, когда

$s \to \infty$ так, что при этом $\operatorname{Re} s \to +\infty$. Если, в частности, $F(s)$ — функция аналитическая в бесконечно удаленной точке ($s = \infty$), то дополнительное условие $\operatorname{Re} s \to +\infty$ не играет роли, т. е. $F(s)$ стремится к нулю при s стремящемся к бесконечности по любому закону:

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0\,.$$

2°. Теорема 1.4 (*теорема линейности*). Если $f(t) \risingdotseq F(s)$, $g(t) \risingdotseq G(s)$, то для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(s) + \beta G(s)\,. \tag{1.6}$$

3°. Теорема 1.5 (*теорема подобия*). Если $f(t) \risingdotseq F(s)$, то для любого числа $\lambda > 0$

$$f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right). \tag{1.7}$$

4°. Теорема 1.6 (*теорема запаздывания*). Если $f(t) \risingdotseq F(s)$, то для любого числа $\tau > 0$

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-s\tau} F(s)\,. \tag{1.8}$$

5°. Теорема 1.7 (*теорема смещения*). Если $f(t) \risingdotseq F(s)$, то для любого числа λ

$$e^{-\lambda t} f(t) \risingdotseq F(s+\lambda)\,. \tag{1.9}$$

6°. Теорема 1.8 (*теорема о дифференцировании оригинала*). Пусть $f(t)$ непрерывна при $t \geq 0$, $f(t)$ и $f'(t)$ являются функциями-оригиналами и $f(t) \risingdotseq F(s)$. Тогда

$$f'(t) \risingdotseq sF(s) - f(0)\,. \tag{1.10}$$

Если, кроме того, производная $(n-1)$-порядка $f^{(n-1)}(t)$ непрерывна при $t \geq 0$ и $f^{(n)}(t)$ — функция-оригинал, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\,, \tag{1.11}$$

где под значениями $f^{(k)}(0)$ понимается правый предел $\lim\limits_{t\to 0+} f^{(k)}(t)$.

Следствие 1.1. Если $f'(t)$ является оригиналом, а $F(s)$ — функция, аналитическая в бесконечности, то

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)\ . \tag{1.12}$$

Следствие 1.2. Если $f'(t)$ является оригиналом и существует предел функции $f(t)$ при $t \to \infty$, то

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)\ . \tag{1.13}$$

7°. **Теорема 1.9 (*теорема об интегрировании оригинала*).** Если $f(t)$ является функцией-оригиналом и $f(t) \risingdotseq F(s)$, то интеграл $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ также является оригиналом и

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(s)}{s}\ . \tag{1.14}$$

8°. **Теорема 1.10 (*теорема о дифференцировании изображения*).** Если дано соответствие $f(t) \risingdotseq F(s)$, то

$$-tf(t) \risingdotseq F'(s)\ . \tag{1.15}$$

9°. **Теорема 1.11 (*теорема об интегрировании изображения*).** Если $f(t)$ и $\dfrac{f(t)}{t}$ являются функциями-оригиналами и $f(t) \risingdotseq F(s)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_s^\infty F(s)ds\ . \tag{1.16}$$

10°. **Теорема 1.12 (*теорема о дифференцировании по параметру*).** Если при любом значении x оригиналу $f(t,x)$ соответствует изображение $F(t,x)$, то

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \risingdotseq \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\ . \tag{1.17}$$

Определение 1.5. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ определены и кусочно-непрерывны при $t \in (-\infty; +\infty)$. Тогда для каждого значения t существует интеграл $\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. **Сверткой функций** $f(t)$ **и** $g(t)$ называется новая функция переменной t, обозначаемая $f * g(t)$ и определяемая равенством

$$f * g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\,. \tag{1.18}$$

Свертка обладает следующими свойствами:
Свойство 1. Справедливо равенство

$$f * g(t) = g * f(t). \tag{1.19}$$

Свойство 2. Если $f(t)$ и $g(t)$ — функции-оригиналы с индексами роста σ_1 и σ_2 соответственно, то свертка $f*g(t)$ также является функцией-оригиналом, индекс роста которой не превосходит $\max(\sigma_1, \sigma_2)$.

11°. **Теорема 1.13 (*теорема умножения изображений*).** Если даны два соответствия $f(t) \doteqdot F(s)$, $g(t) \doteqdot G(s)$, то

$$f * g(t) \doteqdot F(s)G(s)\,. \tag{1.20}$$

12°. **Теорема 1.14 (*интеграл Дюамеля*).** Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — функции-оригиналы, причем производная $g'(t)$ — также функция-оригинал. Тогда справедливо соответствие, называемое интегралом (или формулой) Дюамеля:

$$sF(s)G(s) \doteqdot g(0)f(t) + \int\limits_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau. \tag{1.21}$$

1.3 Нахождение оригинала по изображению

Приведем два способа нахождения функции-оригинала $f(t)$, изображение $F(s)$ которой является дробно-рациональной функцией, у которой степень числителя строго меньше степени знаменателя. Первый способ состоит в том, что дробь $F(s)$ разлагается в сумму простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов. После этого изображение каждого слагаемого легко находится по таблице (см. Приложение В).

Второй способ нахождения оригинала по известному изображению основан на использовании теории вычетов.

Теорема 1.15 (*теорема о разложении*). Если изображение $F(s)$ является дробно-рациональной функцией, то ее оригинал $f(t)$ находится по формуле

$$f(t) = \sum_k \operatorname*{res}_{s=s_k} \left(F(s)e^{st}\right), \tag{1.22}$$

т. е. функция $f(t)$ равна сумме вычетов функции $F(s)e^{st}$, вычисленных во всех полюсах s_k функции $F(s)$.

Если изображение $F(s)$ имеет полюсы $s_1, s_2, \dots, s_m$ соответствующей кратности $n_1, n_2, \dots, n_m$, тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \lim_{s\to s_k} \left[\frac{1}{(n_k-1)!}\frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}}\{(s-s_k)^{n_k}F(s)e^{st}\}\right]. \tag{1.23}$$

1.4 Задачи

Задачи этого раздела могут быть использованы при проведении семинарских занятий и/или как домашние задания.

Задание 1. Найти изображение функции:

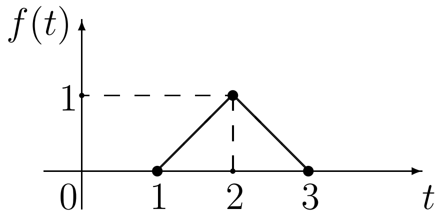
1) $\sin^2 t$.
2) $e^{-t}\sin 2t \sin 4t$.
3) $\cos^2 \omega t$.
4) $\dfrac{\sin 4t}{t}$.
5) $\sin^3 t$.
6) $t^2 \cos t$.
7) $\sin 2t \sin 4t$.
8) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$.
9) $\sin 2t \cos 3t$.
10) $t^2 \operatorname{ch} at$.

Задание 2. Найти оригинал изображения (сделать проверку, найдя изображение полученного оригинала):

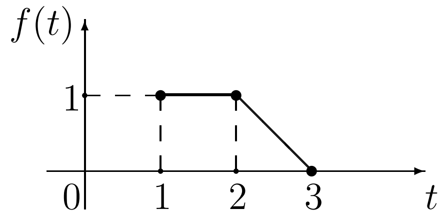
1) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+2s+5)^2}$.
2) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+16)^2}$.
3) $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$.
4) $F(s) = \dfrac{s+2}{s^3(s-1)^2}$.

Задание 3. По данному графику оригинала найти изображение.

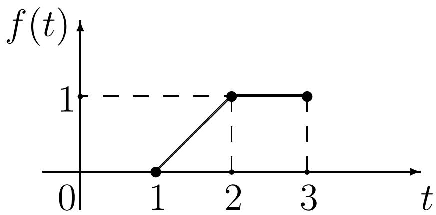
1)



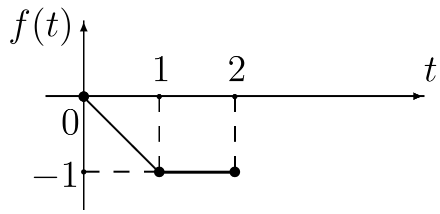
2)



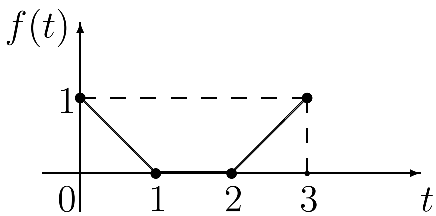
3)



4)



5)



Задание 4. Используя определение обратного преобразования Лапласа, проверить:

1) $F(s) = \dfrac{1}{s} \doteqdot \mathbf{1}(t)$. 2) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \doteqdot \sin t$.

Задание 5. Двумя способами (используя метод неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов) найти оригинал дробно-рациональной функции:

1) $F(s) = \dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)(s^2+4s+8)}$. 2) $F(s) = \dfrac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+5)}$.

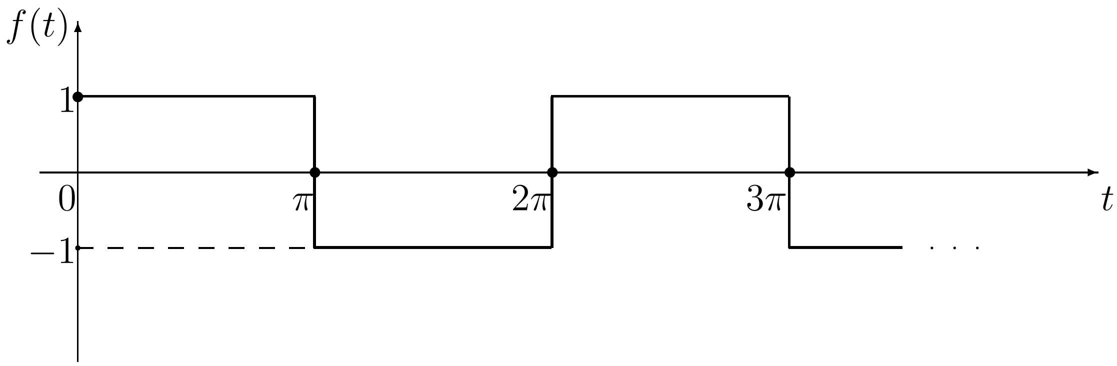
3) $F(s) = \dfrac{s+4}{(s-2)(s^2+2s+2)}$. 4) $F(s) = \dfrac{2}{s^2(s+1)}$.

5) $F(s) = \dfrac{s+10}{s^3-6s^2+10s}$. 6) $F(s) = \dfrac{2s+1}{(s+2)(s-1)^2}$.

7) $F(s) = \dfrac{2s+3}{(s-1)(s^2+4)}$. 8) $F(s) = \dfrac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2-3s+2)}$.

Задание 6. Найти изображение функции $f(t) = \begin{cases} |\sin t|, & t \geq 0\,, \\ 0, & t < 0\,. \end{cases}$

Задание 7. Найти изображение периодической функции.



2

Линейные динамические системы

2.1 Характеристики динамических систем

Рассмотрим инвариантную во времени линейную динамическую систему с одним входом и одним выходом, поведение которой описывается линейным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 z(t) = c_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + c_0 u(t)\,. \tag{2.1}$$

Предположим, $m < n$ (*условие физической реализуемости системы*). Уравнению (2.1) (при нулевых начальных условиях) соответствует передаточная функция

$$G(s) = \frac{c_m s^m + c_{m-1}s^{m-1} + \cdots + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\,, \tag{2.2}$$

что следует из применения теорем подразд. 1.2.

2.2 Модели в пространстве состояний

Рассмотрим систему (2.1) и передаточную функцию (2.2). Пусть $x(t)$ — некоторый вектор из $\mathbb{R}^n$. **Вектором состояния** $x(t)$ динамической системы называется набор переменных, задание которых в некоторый начальный момент времени определяет все будущее поведение системы. Представление системы в пространстве состояний называется **моделью системы** и задается в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Fx(t) + bu(t), \\ z(t) & = & h^T x(t), \end{array} \right. \tag{2.3}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u(t)$ — скалярное входное воздействие, $z(t)$ — наблюдаемый скалярный выходной сигнал, F — системная матрица размера $(n\times n)$, b — $(n\times 1)$-вектор передачи входного воздействия, h — $(n\times 1)$-вектор наблюдений.

Применив преобразование Лапласа к системе (2.3) при нулевых начальных условиях, запишем формулу для передаточной функции системы:

$$G(s) = h^T(Is - F)^{-1}b. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. Для линейной динамической системы с многомерным входом $u(t)\in\mathbb{R}^s$ и многомерным выходом $z(t)\in\mathbb{R}^m$ передаточная функция системы определяется по формуле:

$$G(s) = H(Is - F)^{-1}B, \tag{2.5}$$

где B — матрица передачи входного воздействия размера $(n\times s)$, H — матрица наблюдений размера $(m\times n)$.

Представление в пространстве состояний не является единственным. При переходе в другой базис можно получить другое представление системы в пространстве состояний, т. е. другую модель системы. Пусть данной модели соответствует вектор состояния $x^*(t)\in\mathbb{R}^n$ и существует невырожденное преобразование из базиса модели системы с вектором состояния $x^*(t)$ в базис системы (2.3) с вектором состояния $x(t)$, т.е. $x(t) = Tx^*(t)$. Тогда уравнения модели системы задаются в виде:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}^*(t) & = & F_*x^*(t) + b_*u(t), \\ z(t) & = & (h_*)^T x^*(t), \end{array}\right. \tag{2.6}$$

где формулы перехода из базиса модели (2.3) в базис модели (2.6) выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{rrcl} 1) & F_* & = & T^{-1}FT, \\ 2) & b_* & = & T^{-1}b, \\ 3) & h_* & = & hT. \end{array} \tag{2.7}$$

Далее рассмотрим некоторые модели системы, заданной уравнением (2.1). К числу наиболее распространенных моделей, удобных для анализа и синтеза систем, относятся

– *стандартная управляемая модель*,

– *стандартная наблюдаемая модель*,

– *каноническая модель*.

Стандартная управляемая модель

Определение 2.1. **Стандартной управляемой моделью** называется модель в пространстве состояний следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (2.8)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad (2.9)$$

где $m < n$, (2.8) — уравнение состояния, (2.9) — уравнение наблюдения, $c_0, c_1, \cdots, c_m$ и $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции (2.2).

Теорема 2.1. Стандартная управляемая модель с необходимостью и достаточностью обладает передаточной функцией (2.2).

Стандартная наблюдаемая модель

Определение 2.2. **Стандартной наблюдаемой моделью** называется модель в пространстве состояний следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t), \quad (2.10)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad (2.11)$$

где $m < n$, (2.10) — уравнение состояния, (2.11) — уравнение наблюдения, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — коэффициенты знаменателя передаточной функции (2.2), а коэффициенты $b_1, b_2, \ldots, b_n$ находятся как решение системы

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_m \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Теорема 2.2. Стандартная наблюдаемая модель с необходимостью и достаточностью обладает передаточной функцией (2.2).

Каноническая модель

Определение 2.3. **Каноническая модель** определяется через собственные значения системной матрицы F, которые являются корнями характеристического уравнения

$$\det |F - \lambda I| = 0. \tag{2.13}$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения рассмотрим случаи:

Случай 1. Все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения (2.13) — простые. Каноническая модель имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \tag{2.14}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix} x(t), \tag{2.15}$$

где коэффициенты $r_1, \ldots, r_n$ суть вычеты передаточной функции $G(s)$, т. е.

$$r_i = \operatorname*{res}_{s=\lambda_i} (G(s)) = \lim_{s \to \lambda_i} [(s - \lambda_i) G(s)], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Случай 2. Среди корней уравнения (2.13) есть пара комплексно-сопряженных корней, например, $\lambda_1 = \sigma + i\omega$, $\lambda_2 = \sigma - i\omega$. Рассмотрим подсистему

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \tag{2.16}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix} x(t). \tag{2.17}$$

Тогда каноническая модель в вещественном базисе для системы (2.16), (2.17) будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \tag{2.18}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{r_1 + r_2}{2} & \dfrac{r_1 - r_2}{2} i \end{bmatrix} x^*(t), \tag{2.19}$$

где $x(t) = Tx^*(t)$, T — невырожденная матрица перехода из базиса модели (2.18), (2.19) в базис модели (2.16), (2.17), здесь

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix}.$$

Случай 3. Среди корней уравнения (2.13) есть корень кратности k, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \lambda$, $1 < k \leq n$. Так как группе кратных корней соответствует жорданова клетка, каноническая модель будет иметь следующий вид (для $k = 3$):

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right] u(t), \tag{2.20}$$

$$z(t) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots & c_n \end{array}\right] x(t). \tag{2.21}$$

Таким образом, если каноническая модель содержит кратные полюсы, то ее можно расщепить на независимые распадающиеся части с кратными и простыми полюсами. Часть с кратными полюсами описывается жордановой клеткой и таким же столбцом (частью вектора управления), как и в стандартной управляемой модели. Неизвестные $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_n$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов из уравнения

$$G(s) = \frac{c_1}{(s-\lambda)^3} + \frac{c_2}{(s-\lambda)^2} + \frac{c_3}{s-\lambda} + \frac{c_4}{s-\lambda_4} + \ldots + \frac{c_n}{s-\lambda_n}.$$

В общем случае эти неизвестные величины могут быть найдены из следующего уравнения:

$$G(s) = \frac{c_1}{(s-\lambda)^k} + \frac{c_2}{(s-\lambda)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{(s-\lambda)^2} + \frac{c_k}{s-\lambda} + \frac{c_{k+1}}{s-\lambda_{k+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s-\lambda_n}.$$

2.3 Общее решение линейного дифференциального уравнения состояния

Линейные непрерывные системы

Пусть линейная динамическая система в непрерывном времени задана следующими уравнениями:

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.22}$$

$$z(t) = H(t)x(t), \tag{2.23}$$

где уравнение (2.22) — линейное дифференциальное уравнение состояния системы с начальным условием $x(t_0) = x_0$, уравнение (2.23) — уравнение наблюдения системы.

Определение 2.4. Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения при произвольных начальных условиях. Тогда матрица $\Phi(t,\tau) = X(t)X^{-1}(t)$ называется **переходной матрицей состояния** линейной динамической системы.

Перечислим свойства матрицы $\Phi(t,\tau)$:

1) $\Phi(t,\tau)|_{t=\tau} = I$.
2) $\dfrac{\partial\Phi(t,\tau)}{\partial t} = F(t)\Phi(t,\tau)$.
3) $\dfrac{\partial\Phi(t,\tau)}{\partial\tau} = -\Phi(t,\tau)F(\tau)$.
4) Полугрупповое свойство:
   $\forall t_1, t_2, t_3 \in [t_0, \infty] \qquad \Phi(t_3, t_1) = \Phi(t_3, t_2)\Phi(t_2, t_1)$.
5) $\det \Phi(t,\tau) \neq 0, \;\; \Phi^{-1}(t,\tau) = \Phi(\tau, t)$.

Теорема 2.3. Общее решение дифференциального уравнения состояния (2.22) имеет вид

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t,t_0)x_0$ — решение однородной системы при ненулевых начальных условиях (собственное движение системы), $\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$ — вынужденное движение системы.

Линейные инвариантные во времени непрерывные системы

Пусть линейная инвариантная во времени динамическая система задана уравнениями:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.24}$$
$$z(t) = Hx(t), \tag{2.25}$$

где уравнение (2.24) — линейное дифференциальное уравнение состояния системы с начальным условием $x(t_0) = x_0$, уравнение (2.25) — уравнение наблюдения системы, F, B, H — матрицы-константы.

Тогда переходная матрица состояния $\Phi(t,\tau) = \Phi(t-\tau) = e^{F(t-\tau)}$ представляет собой матричную экспоненту и может быть найдена через преобразование Лапласа как

$$\Phi(t) \risingdotseq \Phi(s) = (Is - F)^{-1}.$$

Линейные дискретные системы

Уравнения дискретной линейной динамической системы имеют следующий вид:

$$x(t_i) = \Phi(t_i, t_{i-1})x(t_{i-1}) + B(t_{i-1})u(t_{i-1}), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.26}$$
$$z(t_i) = H(t_i)x(t_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.27}$$

где уравнение (2.26) — линейное разностное уравнение состояния системы с начальным условием $x(t_0) = x_0$, уравнение (2.27) — дискретное уравнение наблюдения системы, $B(t_{i-1}) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)d\tau$ — матрица управления дискретной системы, $u(t_{i-1})$ — кусочно-постоянное приближение функции $u(t)$.

Линейные инвариантные во времени дискретные системы

Уравнения инвариантной во времени дискретной системы имеют следующий вид:

$$x(t_i) = \Phi(t_d)x(t_{i-1}) + Bu(t_{i-1}), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.28}$$
$$z(t_i) = Hx(t_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.29}$$

где уравнение (2.28) — линейное разностное уравнение состояния системы с начальным условием $x(t_0) = x_0$, уравнение (2.29) — дискретное уравнение наблюдения системы, t_d — период дискретизации, $\Phi(t_d)$, B, H — матрицы-константы.

2.4 Управляемость линейной динамической системы

Определение 2.5. Система называется **управляемой**, если для произвольного момента времени t_0 и начального состояния $x(t_0) = x_0$ найдется такое кусочно-непрерывное управление $u(t)$ и момент $t_1 > t_0$, что единственное решение $x(t)$ при данных начальных условиях $x(t_0) = x_0$ пройдет через заданную точку $x(t_1) = x_1$.

Определение 2.6. Система называется **полностью управляемой**, если она управляема в любые моменты времени и при любых начальных условиях.

Критерий управляемости линейных непрерывных систем

Рассмотрим линейную непрерывную систему (2.22), (2.23).

Определение 2.7. **Матрицей управляемости** линейной непрерывной системы называется матрица $W_C(t_0, t_1)$ следующего вида:

$$W_C(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_0, \tau) d\tau.$$

Теорема 2.4 (*критерий полной управляемости*). Чтобы линейная непрерывная система была полностью управляемой, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих пяти эквивалентных условий:

1) Образом $W_C(t_0, t_1)$ является все пространство $\mathbb{R}^n$.

2) $W_C(t_0, t_1)$ — невырождена.

3) $W_C(t_0, t_1) > 0$ (положительно определена).

4) $\operatorname{rank} W_C(t_0, t_1) = n$.

5) $\det W_C(t_0, t_1) \neq 0$.

Критерий управляемости для непрерывных и инвариантных во времени линейных систем

Рассмотрим линейную инвариантную во времени непрерывную систему (2.24), (2.25).

Определение 2.8. **Матрицей управляемости** линейной инвариантной во времени непрерывной системы называется матрица W_{CTI} следующего вида:

$$W_{CTI} = \left[B \;\middle|\; FB \;\middle|\; F^2B \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; F^{n-1}B \right].$$

Теорема 2.5 (*критерий полной управляемости*). Чтобы линейная инвариантная во времени непрерывная система была полностью управляемой, необходимо и достаточно выполнение условия $\operatorname{rank} W_{CTI} = n$.

Критерий управляемости линейных дискретных систем

Рассмотрим линейную дискретную систему (2.26), (2.27).

Определение 2.9. **Матрицей управляемости** линейной дискретной системы называется матрица $W_D(0, N)$ следующего вида:

$$W_D(0, N) = \sum_{i=1}^{N} \Phi(0, i) B(i-1) B^T(i-1) \Phi^T(0, i).$$

Теорема 2.6 (*критерий полной управляемости*). Чтобы линейная дискретная система была полностью управляемой, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих пяти эквивалентных условий:

1) Образом $W_D(0, N)$ является все пространство $\mathbb{R}^n$.

2) $W_D(0, N)$ — невырождена.

3) $W_D(0, N) > 0$ (положительно определена).

4) $\operatorname{rank} W_D(0, N)) = n$.

5) $\det W_D(0, N) \neq 0$.

Критерий управляемости линейных дискретных и инвариантных во времени систем

Рассмотрим линейную инвариантную во времени дискретную систему (2.28), (2.29).

Определение 2.10. **Матрицей управляемости** линейной инвариантной во времени дискретной системы называется матрица W_{DTI} следующего вида:

$$W_{DTI} = [B \mid \Phi B \mid \Phi^2 B \mid \cdots \mid \Phi^{n-1} B].$$

Теорема 2.7 (*критерий полной управляемости*). Чтобы линейная инвариантная во времени дискретная система была полностью управляемой, необходимо и достаточно выполнение условия $\operatorname{rank} W_{DTI} = n$.

2.5 Наблюдаемость линейной динамической системы

Определение 2.11. Система называется **наблюдаемой** в момент времени t_0, если для некоторого момента времени $t_1 > t_0$ по реализациям $u(t)$ и $z(t)$ можно определить состояние $x(t_0) = x_0$.

Определение 2.12. Система называется **полностью наблюдаемой**, если она наблюдаема в любой момент времени.

Критерий наблюдаемости линейных непрерывных систем

Рассмотрим линейную непрерывную систему (2.22), (2.23).

Определение 2.13. **Матрицей наблюдаемости** линейной непрерывной системы называется матрица $M_C(t_0, t_1)$ следующего вида:

$$M_C(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) H^T(\tau) H(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau.$$

Теорема 2.8 (*критерий полной наблюдаемости*). Чтобы линейная непрерывная система была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих пяти эквивалентных условий:

1) Образом $M_C(t_0, t_1)$ является все пространство $\mathbb{R}^n$.

2) $M_C(t_0, t_1)$ — невырождена.

3) $M_C(t_0, t_1) > 0$ (положительно определена).

4) rank $M_C(t_0, t_1) = n$.

5) $\det M_C(t_0, t_1) \neq 0$.

Критерий наблюдаемости линейных непрерывных инвариантных во времени систем

Рассмотрим линейную инвариантную во времени непрерывную систему (2.24), (2.25).

Определение 2.14. **Матрицей наблюдаемости** линейной инвариантной во времени непрерывной системы называется матрица M_{CTI} следующего вида:

$$M_{CTI} = [H^T \mid F^T H^T \mid (F^2)^T H^T \mid \cdots \mid (F^{n-1})^T H^T]^T.$$

Теорема 2.9 (*критерий полной наблюдаемости*). Чтобы линейная инвариантная во времени непрерывная система была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно выполнение условия rank $M_{CTI} = n$.

Критерий наблюдаемости линейных дискретных систем

Рассмотрим линейную дискретную систему (2.26), (2.27).

Определение 2.15. **Матрицей наблюдаемости** линейной дискретной системы называется матрица $M_D(0, N)$ следующего вида:

$$M_D(0, N) = \sum_{i=1}^{N} \Phi^T(i, 0) H^T(i) H(i) \Phi(i, 0).$$

Теорема 2.10 (*критерий полной наблюдаемости*). Чтобы линейная дискретная система была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих пяти эквивалентных условий:

1) Образом $M_D(0, N)$ является все пространство $\mathbb{R}^n$.

2) $M_D(0, N)$ — невырождена.

3) $M_D(0, N) > 0$ (положительно определена).

4) rank $M_D(0, N)) = n$.

5) $\det M_D(0, N) \neq 0$.

Критерий наблюдаемости линейных дискретных и инвариантных во времени систем

Рассмотрим линейную инвариантную во времени дискретную систему (2.28), (2.29).

Определение 2.16. **Матрицей наблюдаемости** линейной инвариантной во времени дискретной системы называется матрица M_{DTI} следующего вида:

$$M_{DTI} = [H^T \mid \Phi^T H^T \mid (\Phi^2)^T H^T \mid \cdots \mid (\Phi^{n-1})^T H^T]^T.$$

Теорема 2.11 (*критерий полной наблюдаемости*). Чтобы линейная инвариантная во времени дискретная система была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно выполнение условия $\operatorname{rank} M_{DTI} = n$.

2.6 Линеаризация нелинейных систем

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, поведение которой можно описать системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], & x(t) \in \mathbb{R}^n, \\ z(t) = h[x(t), u(t), t], & z(t) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{2.30}$$

где $x(t)$ — вектор состояния системы и $u(t)$ — вектор управляющего воздействия. В уравнении (2.30) $f[\cdot,\cdot,\cdot]$ — вектор-функция, определяющая уравнение состояния системы, и $h[\cdot,\cdot,\cdot]$ — вектор-функция, определяющая уравнение наблюдения системы.

Теорема 2.12 (*существование и единственность решения нелинейного дифференциального уравнения*). Пусть нелинейное дифференциальное уравнение задано в виде

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], \qquad x(t_0) = x_0, \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.31}$$

где $x(t_0) = x_0$ — начальное условие, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ — детерминированная функция времени, а вектор-функция $f[\cdot,\cdot,\cdot]$ обладает следующими свойствами:

1) f удовлетворяет условию Липшица по первому аргументу, т. е. для любых $x_1(t)$ и $x_2(t)$ найдется такая кусочно-непрерывная функция $K(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, что

$$||f[x_1(t),\cdot,\cdot] - f[x_2(t),\cdot,\cdot]|| < K(t)||x_1(t) - x_2(t)||;$$

2) f непрерывна по второму аргументу и кусочно-непрерывна по третьему аргументу.

Тогда для любого $x(t_0) = x_0$ и любой кусочно-непрерывной функции $u(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, найдется непрерывное отображение $\varphi(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ такое, что:

1) $\varphi(t_0) = x_0$,

2) $\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = f[\varphi(t), u(t), t]$, $t \in [t_0, \infty)$.

Проведем линеаризацию нелинейного дифференциального уравнения (2.31) относительно некоторого известного решения. Пусть решение $x_*(t)$ для некоторой функции $u_*(t)$ известно. Такое решение называется **номинальным**. Предположим, что от него совершены малые отклонения:

1) $x_*(t_0) \to x_*(t_0) + \Delta x_*(t_0) = x_0$,

2) $u_*(t) \to u_*(t) + \Delta u_*(t) = u(t)$,

3) $x_*(t) \to x_*(t) + \Delta x_*(t) = x(t)$.

Разложим f в ряд Тейлора относительно двух переменных x_* и u_*:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] = f[x_*(t), u_*(t), t] + \left.\frac{\partial f[\cdot,\cdot,\cdot]}{\partial x(t)}\right|_{\substack{x(t)=x_*(t)\\ u(t)=u_*(t)}} [x(t) - x_*(t)] +$$
$$+ \left.\frac{\partial f[\cdot,\cdot,\cdot]}{\partial u(t)}\right|_{\substack{x(t)=x_*(t)\\ u(t)=u_*(t)}} [u(t) - u_*(t)] + \dots\ .$$

Тогда уравнение возмущенного движения (линейное относительно отклонений $\Delta x_*(t) = x(t) - x_*(t)$ и $\Delta u_*(t) = u(t) - u_*(t)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt}[\Delta x_*(t)] \approx F(t)\Delta x_*(t) + B(t)\Delta u_*(t),$$

где

$$F(t) = \left.\frac{\partial f[\cdot,\cdot,\cdot]}{\partial x(t)}\right|_{\substack{x(t)=x_*(t)\\ u(t)=u_*(t)}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \left.\frac{\partial f[\cdot,\cdot,\cdot]}{\partial u(t)}\right|_{\substack{x(t)=x_*(t)\\ u(t)=u_*(t)}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}.$$

Из приведенного выше построения видно, что матрица $F(t)$ имеет размер $(n \times n)$, а $B(t)$ — матрица размера $(n \times p)$.

2.7 Задачи

Ниже приведен ряд практических заданий по линейным динамическим системам, которые рекомендуются для семинарских занятий и/или в качестве домашних работ.

Задание 1. Дана передаточная функция $G(s) = \dfrac{s^3 + 3s^2 + 5s + 8}{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 8s}$. Требуется:

а) Построить стандартную управляемую модель (СУМ). Начертить блок-схему модели.

б) Построить стандартную наблюдаемую модель (СНМ). Начертить блок-схему модели.

в) Построить каноническую модель (КМ). Начертить блок-схему модели.

г) Выяснить наличие свойств управляемости и наблюдаемости моделей.

д) Объяснить, что означает вырожденность (с физической точки зрения) матрицы F в системе дифференциальных уравнений, соответствующей передаточной функции $G(s)$.

Задание 2. Дана передаточная функция $G(s) = \dfrac{10(s+4)}{s^3 + 3s^2 + 2s}$. Требуется:

а) Построить СУМ. Начертить блок-схему модели.

б) Построить СНМ. Начертить блок-схему модели.

в) Построить КМ. Начертить блок-схему модели.

г) Выяснить наличие свойств управляемости и наблюдаемости моделей.

Задание 3. Дана передаточная функция $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2 + 6s + 25)}$. Требуется:

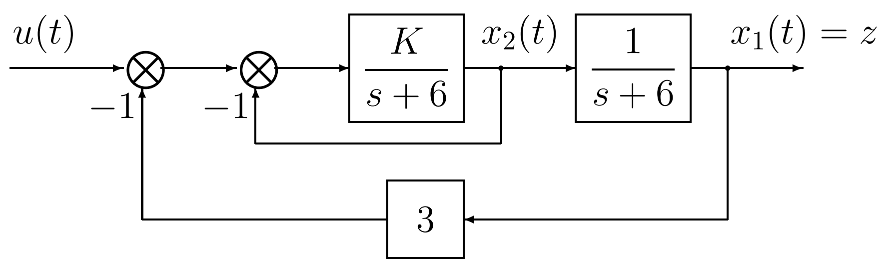
а) Построить КМ в комплексном базисе. Начертить блок-схему модели.

б) Найти матрицу преобразования T из КМ в комплексном базисе в КМ в вещественном базисе. Начертить блок-схему КМ в вещественном базисе.

в) Построить СУМ. Начертить блок-схему модели.

г) Найти матрицу преобразования T_1 из СУМ в КМ в вещественном базисе.

Задание 4. Дана блок-схема:



Требуется:

а) Записать уравнения физической модели в пространстве состояний $X = (x_1, x_2)^T$.

б) Найти передаточную функцию $G(s)$.

в) Изучить влияние параметра K на фундаментальные свойства системы:

— управляемость;

— наблюдаемость;

— устойчивость.

г) Построить КМ и начертить блок-схему (рассмотреть все случаи в зависимости от параметра K).

Задание 5. Дано описание системы в пространстве состояний:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)\,,$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)\,.$$

Требуется:

а) Начертить блок-схему.

б) Выяснить наличие свойств управляемости и наблюдаемости.

в) Найти передаточную функцию $G(s)$. Какую часть системы (наблюдаемую, управляемую) описывает эта передаточная функция? Полное или частичное описание дает $G(s)$?

г) Учитывая, что $s_1 = -1$, начертить картину размещения всех полюсов и нулей передаточной функции. Является ли система неминимально-фазовой и устойчивой?

д) Построить КМ по $G(s)$.

е) Найти матрицу преобразования T из базиса физической модели в базис КМ.

ж) Найти импульсную переходную характеристику (ИПХ), т.е. отклик $z(t)$ на импульсное входное воздействие $u(t) = \delta(t)$.

з) Найти переходную характеристику (ПХ), т. е. отклик $z(t)$ на входное воздействие $u(t) = \mathbf{1}(t)$.

Задание 6. Даны следующие три системы:

1)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \quad z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t);$$

2)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t);$$

3)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t), \qquad z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

Для каждой из систем требуется выполнить следующие пункты задания:

а) Выяснить наличие или отсутствие свойств управляемости и наблюдаемости и дать необходимые пояснения.

б) Начертить блок-схему.

в) Найти передаточную функцию $G(s)$.

Задание 7. Дана система:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\,,$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} x(t)\,.$$

Требуется:

а) Найти переходную матрицу состояния $\Phi(\tau)$.

б) Найти передаточную функцию системы $G(s)$.

в) Записать дифференциальные уравнения, соответствующие $G(s)$.

г) Найти предельное значение $z(t)$ как отклик системы на входное воздействие 1) $u(t) = \delta(t)$, 2) $u(t) = \mathbf{1}(t)$. Определить условия, при которых $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)$ существует.

д) Показать, что если $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$, то система является полностью управляемой и полностью наблюдаемой при любых параметрах a_1, a_2 и a_3.

Задание 8. Дана система:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\,.$$

Требуется:

а) Найти матрицу управляемости системы $W_\mathrm{C}(0,T)$. Является ли система полностью управляемой?

б) Найти W_CTI. Сравнить результат с п. а).

Задание 9. Пусть $\dot{x} = Fx$, где F — постоянная матрица размера 2×2. Предположим следующее: если $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, то $x(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -3e^{-3t} \end{bmatrix}$, но если $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, то $x(t) = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix}$. Найти $\Phi(\tau)$ и F.

Задание 10. Пусть $F = \mathrm{const}$. Тогда переходная матрица состояния $\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0)$ может быть получена любым из следующих способов:

а) Приближенно с помощью матричной экспоненты:

$$e^{F(t-t_0)} = I + F(t - t_0) + \frac{1}{2}F^2(t - t_0)^2 + \dots\ .$$

б) Методом преобразования Лапласа: поскольку $\Phi(t - t_0)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\Phi'(t - t_0) = F\Phi(t - t_0),\ \Phi(0) = I,$$

то

$$\Phi(t - t_0) = \mathcal{L}^{-1}\{[sI - F]^{-1}\}|_{(t-t_0)},$$

где $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}|_{(t-t_0)}$ — обратное преобразование Лапласа в точке $(t - t_0)$.

в) По теореме Гамильтона–Кэли (для F с различными собственными числами)

$$\Phi(t - t_0) = \alpha_0 I + \alpha_1 F + \alpha_2 F^2 + \dots + \alpha_{n-1}F^{n-1},$$

где $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ — n функций от $(t - t_0)$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$e^{\lambda_i(t-t_0)} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_i + \alpha_2\lambda_i^2 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_i^{n-1},$$

где $\lambda_i,\ i = 1, \dots, n$ — собственные числа матрицы F.

г) По теореме Сильвестра (для F с различными собственными числами)

$$\Phi(t - t_0) = F_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} + F_2 e^{\lambda_2(t-t_0)} + \dots + F_n e^{\lambda_n(t-t_0)},$$

где λ_i — i-е собственное число матрицы F, а F_i определяются как

$$F_i = \left[\frac{F - \lambda_1 I}{\lambda_i - \lambda_1}\right] \cdots \left[\frac{F - \lambda_{i-1} I}{\lambda_i - \lambda_{i-1}}\right] \cdot \left[\frac{F - \lambda_{i+1} I}{\lambda_i - \lambda_{i+1}}\right] \cdots \left[\frac{F - \lambda_n I}{\lambda_i - \lambda_n}\right].$$

Используя все четыре метода, найдите $\Phi(t-t_0)$, если $F = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$. Пусть $(t - t_0) = 0.1$ с. Рассмотрев в методе а) слагаемые не выше первого порядка, найдите относительную погрешность вычисления

$$\Delta\Phi = \frac{\|\bar{\Phi} - \Phi\|}{\|\Phi\|} \cdot 100\ \%\,,$$

где $\bar{\Phi}$ — вычисленное значение, Φ — точное значение.

Найдите $\Delta\Phi$, учитывая в вычислениях слагаемые не выше второго порядка.

<u>Задание 11.</u> Дана система, поведение которой описывается нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\ddot{c}(t) + c^3(t)\dot{c}^2(t) + \sin[c(t)] - t^2 c(t) = r(t),$$

где $r(t)$ — входное воздействие, $c(t)$ — выходной сигнал. Требуется:

а) Найти линеаризованное уравнение, описывающее поведение системы вблизи номинальной траектории:
   1) $c(t) = r(t) = 0$;
   2) $c(t) = t,\ r(t) = \sin t$.

б) Записать линеаризованные уравнения в пространстве состояний в непрерывном и дискретном времени, когда измерения происходят с периодом T.

3

Самостоятельная работа

3.1 Контрольная работа № 1

Варианты контрольной работы индивидуальны и определяются в зависимости от параметра N, где N — номер студента по списку группы.

Дано описание системы в пространстве состояний:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -N & -(2N+1) & -(N+2) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)\,,$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\,.$$

Требуется в соответствии со своим вариантом в срок за 1 месяц до начала зачетной недели сдать на проверку (для допуска к экзамену) письменную работу с решением следующих задач:

1. Построить эквивалентную модель в пространстве состояний, в которой отделены переменные, образующие часть 1, — полностью управляемую и наблюдаемую.

   Для этого необходимо сделать следующее:

   (a) Найти передаточную функцию системы $G(s)$.

   (b) Построить каноническую модель системы (в зависимости от N): если N — нечетно, каноническая модель строится по первому входу системы, иначе — по второму.

2. Определить, к какой категории — с точки зрения свойств управляемости и наблюдаемости — относится другая часть переменных состояния.

3. Проиллюстрировать решение по пп. 1 и 2 блок-схемой или графом модели.

3.2 Контрольная работа № 2

Дана линейная динамическая система, состоящая из двух последовательно соединенных элементов. Элементы характеризуются их передаточными функциями $G_1(s)$ и $G_2(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s+a}{(s+b)(s+c)}\,, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+a}\,.$$

Для описания системы используются следующие физические переменные: входной управляющий сигнал $u(t)$, промежуточный сигнал $y(t)$ между элементами и выходной сигнал $z(t)$. Имеются следующие схемы соединения элементов системы:

Схема 1: входной элемент – блок G_1, выходной элемент – блок G_2.

Схема 2: входной элемент – блок G_2, выходной элемент – блок G_1.

Схема 3: входной элемент – блок G_2, выходной элемент – параллельное соединение двух блоков, являющихся элементами разложения на простые дроби функции G_1.

Схема 4: входной элемент — параллельное соединение двух блоков, являющихся элементами разложения на простые дроби функции G_1, выходной элемент — блок G_2.

Задания для контрольной работы индивидуальны и определяются следующим образом. Каждое задание определяется тройкой символов (N, M, K), где N — номер студента по списку группы; M — номер схемы соединения блоков, K — номер варианта построения физической модели системы (по поводу этих вариантов см. ниже).

Для каждого задания:

1. Если N кратно 4, тогда $M = 4$; иначе $M = N \bmod 4$;

2. Если N кратно 3, тогда $K = 3$; иначе $K = N \bmod 3$.

Требуется в соответствии со своим вариантом в срок за 12 дней до начала зачетной недели сдать на проверку (для допуска к экзамену) письменную работу с решением следующих задач:

1. Построить модель состояния и модель наблюдения, использующую физические переменные системы (так называемую *физическую модель* (ФМ)). Допускаются следующие варианты построения физической модели:

   Вариант 1: На основе стандартной управляемой модели (СУМ).

Вариант 2: На основе стандартной наблюдаемой модели (СНМ).

Вариант 3: На основе канонической модели (КМ).

2. Определить $z(t)$ как общее решение соответствующего дифференциального уравнения.

3. Определить, обладает ли физическая модель свойствами полной управляемости и полной наблюдаемости. При каких условиях эти свойства, а также свойство устойчивости, могут быть утрачены?

4. Построить три математические модели, отвечающие данной системе:

   - стандартную управляемую модель,
   - стандартную наблюдаемую модель,
   - каноническую модель.

   Для каждой модели проанализировать свойства полной управляемости и полной наблюдаемости.

5. Построить эквивалентную данной системе модель в пространстве состояний, где часть, которая полностью управляема и полностью наблюдаема, отделена от остальной части системы.

6. По результатам проделанной работы сформулировать выводы, которые следует признать общезначимыми для задач построения математических моделей реальных динамических систем.

7. Дать развернутые ответы (письменно!) на следующие контрольные вопросы:

   (a) Каким образом свойства управляемости, наблюдаемости и устойчивости системы проявляются в $z(t)$?

   (b) Как найти, пользуясь общим решением $z(t)$, передаточную функцию системы?

   (c) Можно ли построить каноническую модель для не полностью управляемой системы?

   (d) Какой смысл заключен в терминах «стандартная управляемая» и «стандартная наблюдаемая» модель?

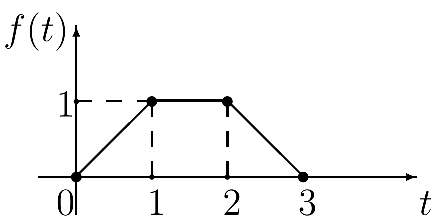
(e) Какие условия эксперимента нужно предположить, чтобы наблюдения входа $u(t)$ и выхода $z(t)$ системы с известной передаточной функцией не давали возможности обнаружения вырожденности системы, то есть наличия в системе свойств неполной управляемости или неполной наблюдаемости?

4

Примеры решения задач

4.1 Операционное исчисление

Пример 1. По данному графику оригинала найти изображение.



Решение.
1. Найдем изображения более простых оригиналов, из которых затем составим оригинал $f(t)$. Обозначим

$$f_1(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}, \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}.$$

Изображение функции $f_2(t)$ найдем непосредственно по формуле (1.4), определяющей преобразование Лапласа. Если $F_1(s) \risingdotseq f_1(s)$ и $F_2(s) \risingdotseq f_2(s)$, то

$$F_2(s) = \int\limits_0^1 e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1 = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}.$$

Изображение $F_1(s)$ тоже можно найти по формуле (1.4), интегрируя по частям. Но можно поступить иначе. Для этого стоит заметить, что функция $f_1(t) = tf_2(t)$, и затем воспользоваться теоремой о дифференцировании изображения (см. формулу (1.15)), от которой приходим к искомому выражению

$$f_1(t) = tf_2(t) \doteqdot -F_2{}'(s) = -\left(\frac{1}{s}(1-e^{-s})\right)' = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}.$$

Таким образом,

$$F_1(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}\ .$$

2. Выразим заданный оригинал $f(t)$ через $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Очевидно, что $f(t) = f_1(t)$ при $0 \le t \le 1$. На отрезке $[1;2]$ $f(t)$ совпадает с $f_2(t)$, сдвинутой на 1 вправо, т. е. $f(t) = f_2(t-1)$, $1 \le t \le 2$. При $2 \le t \le 3$ функцию $f(t)$ можно получить, если сдвинуть $f_1(t)$ на 2 единицы вправо, отразить симметрично относительно оси t (т. е. умножить на -1) и поднять на 1 вверх. Таким образом, $f(t) = -f_1(t-2) + f_2(t-2)$, $2 \le t \le 3$. В результате имеем

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t-1) - f_1(t-2) + f_2(t-2), \quad t \ge 0.$$

Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой запаздывания (формула (1.8)), получаем

$$\begin{gathered} f(t) \doteqdot F(s) = F_1(s) + e^{-s}F_2(s) - e^{-2s}F_1(s) + e^{-2s}F_2(s) = \\ = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{1}{s}e^{-3s} + \\ + \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-3s} = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s})\ . \end{gathered}$$

К этому же результату можно прийти, непосредственно применяя формулу (1.4). Для этого следует задать функцию $f(t)$ аналитически и проинтегрировать на каждом из трех участков в отдельности. Такой путь приводит к существенно более громоздким вычислениям.

Пример 2. Найти оригинал изображения $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}$ и сделать проверку, найдя изображение полученного оригинала.

Решение.

1. Разложим функцию $F(s)$ на множители, оригиналы которых известны:

$$F(s) = \frac{1}{s^2+4s+13} \cdot \frac{1}{s^2+4s+13} = \frac{1}{(s+2)^2+3^2} \cdot \frac{1}{(s+2)^2+3^2}\ .$$

По восьмой (по счету в левом столбце) формуле из табл. В.1 (см. приложение В) при $a = -2$ и $\omega = 3$ получаем $e^{-2t}\sin 3t \risingdotseq \dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}$, откуда $\dfrac{1}{(s+2)^2+3^2} \risingdotseq \dfrac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$.

Согласно теореме об умножении изображений (формула (1.20)), произведению изображений соответствует свертка оригиналов сомножителей. Поэтому

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2+3^2}\cdot\frac{1}{(s+2)^2+3^2} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \int\limits_0^t \frac{1}{3}e^{-2\tau}\sin 3\tau\cdot\frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)}\sin 3(t-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{9}e^{-2t}\int\limits_0^t \sin 3\tau\cdot\sin(3t-3\tau)d\tau = \frac{1}{18}e^{-2t}\int\limits_0^t(\cos(6\tau-3t)-\cos 3t)d\tau.$$

Сначала вынесем постоянный множитель $\dfrac{1}{9}e^{-2t}$ за знак интеграла, а затем воспользуемся формулой $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$. Вычисляя последний интеграл, имеем

$$F(s) = \frac{1}{18}e^{-2t}\int\limits_0^t(\cos(6\tau-3t)-\cos 3t)d\tau =$$

$$= \frac{1}{18}e^{-2t}\left(\frac{1}{6}\sin(6\tau-3t)\Big|_0^t - \tau\cos 3t\Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{1}{18}e^{-2t}\left(\frac{1}{6}\sin 3t+\frac{1}{6}\sin 3t - t\cos 3t\right) = \frac{1}{18}e^{-2t}\left(\frac{1}{3}\sin 3t - t\cos 3t\right).$$

Итак, $F(s) \risingdotseq f(t) = \dfrac{1}{18}e^{-2t}\left(\dfrac{1}{3}\sin 3t - t\cos 3t\right)$.

Полученный результат легко проверить, найдя изображение функции $f(t)$. Действительно, по той же (восьмой по счету в левом столбце табл. В.1) формуле имеем $e^{-2t}\sin 3t \risingdotseq \dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}$. По седьмой (по счету в правом столбце табл. В.1) формуле находим $t\cos 3t \risingdotseq \dfrac{s^2-3^2}{(s^2+3^2)^2}$. Отсюда и из теоремы смещения (см. подразд. 1.2) следует, что $e^{-2t}t\cos 3t \risingdotseq \dfrac{(s+2)^2-3^2}{((s+2)^2+3^2)^2}$.

Пользуясь линейностью преобразования Лапласа, находим окончательное выражение

$$f(t)=\frac{1}{18\cdot 3}e^{-2t}\sin 3t-\frac{1}{18}e^{-2t}\cos 3t \risingdotseq \frac{1}{18\cdot 3}\frac{3}{(s+2)^2+9}-$$
$$-\frac{1}{18}\frac{(s+2)^2-9}{((s+2)^2+9)^2}=\frac{1}{18}\frac{(s+2)^2+9-((s+2)^2-9)}{((s+2)^2+9)^2}=$$
$$=\frac{1}{18}\frac{18}{((s+2)^2+9)^2}=\frac{1}{(s^2+4s+13)^2}\ ,$$

которое совпадает с исходным изображением.

Пример 3. Двумя способами (используя метод неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов) найти оригинал дробно-рациональной функции $F(s)=\dfrac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+5)}$.

Решение.
1. С использованием метода неопределенных коэффициентов. Разложим дробно-рациональную функцию $F(s)$ в сумму простейших дробей. Так как уравнение $s^2+4s+5=0$ действительных корней не имеет, то разложение функции $F(s)$ в сумму простейших имеет вид:

$$\frac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+5)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Ms+N}{s^2+4s+5}$$

(можно было бы разложить квадратный трехчлен s^2+4s+5 на множители $(s-s_1)(s-s_2)$ с комплексными s_1 и s_2, но это менее удобно). Приводя правую часть к общему знаменателю, равному знаменателю левой части, и приравнивая числители дробей в левой и правой частях, получим

$$2s+1=A(s^2+4s+5)+(Ms+N)(s+1)\ .$$

Подставляя $s=-1$, имеем $-1=A(1-4+5)$, $-1=2A$, $A=-\dfrac{1}{2}$. При $s=0$ получаем $1=5A+N$, откуда $N=1-5A=\dfrac{7}{2}$. Приравнивая коэффициенты при s^2 в левой и правой частях равенства, имеем $0=A+M$, $M=-A=\dfrac{1}{2}$. Таким образом,

$$\frac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+5)}=-\frac{1}{2(s+1)}+\frac{s+7}{2(s^2+4s+5)}\ .$$

Для каждой простейшей дроби найдем оригинал, используя табл. В.1 оригиналов и изображений (приложение В). По третьей (по счету в левом столбце табл. В.1) формуле с $a = -1$ получаем $\dfrac{1}{s+1} \risingdotseq e^{-t}$. Так как $s^2+4s+5 = (s+2)^2+1$, то

$$\frac{s+7}{2(s^2+4s+5)} = \frac{(s+2-2)+7}{2((s+2)^2+1)} = \frac{(s+2)+5}{2((s+2)^2+1)} = \\ = \frac{s+2}{2((s+2)^2+1)} + \frac{5}{2((s+2)^2+1)}\ .$$

По девятой (в левом столбце табл. В.1) формуле с $a = -2$ и $\omega = 1$ получаем

$$\frac{s+2}{2((s+2)^2+1)} \risingdotseq e^{-2t}\cos t\ ,$$

а по восьмой формуле с теми же a и ω имеем $\dfrac{1}{2((s+2)^2+1)} \risingdotseq e^{-2t}\sin t$.

Теперь, используя свойство линейности преобразования Лапласа, найдем оригинал $f(t)$ заданной функции-изображения $F(s)$. Так как

$$F(s) = -\frac{1}{2(s+1)} + \frac{s+2}{2((s+2)^2+1)} + \frac{5}{2((s+2)^2+1)}\ ,$$

то

$$f(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos t + \frac{5}{2}e^{-2t}\sin t\ .$$

2. С помощью вычетов. Сначала найдем нули знаменателя дроби $F(s)$, являющиеся полюсами функции $F(s)$. Затем разложим знаменатель на линейные множители и определим порядки этих полюсов. Для этого решим уравнение $s^2+4s+5 = 0$:

$$D = 16 - 4\cdot 5 = -4\ ;$$
$$s_1 = \frac{-4+2i}{2} = -2+i\ ;$$
$$s_2 = \frac{-4-2i}{2} = -2-i\ .$$

Поэтому $F(s) = \dfrac{2s+1}{(s+1)(s+2-i)(s+2+i)}$. Функция $F(s)$ имеет три особые точки: $s_1 = -2+i$, $s_2 = -2-i$, $s_3 = -1$, каждая из которых является полюсом первого порядка.

Найдем вычеты функции $F(s)e^{st}$ в каждом из полюсов s_k.

$$\operatorname*{res}_{s=-1}\,(F(s)e^{st}) = \lim_{s\to-1}\frac{(s+1)(2s+1)e^{st}}{(s+1)(s+2-i)(s+2+i)} =$$

$$= \lim_{s\to-1}\frac{(2s+1)e^{st}}{(s+2-i)(s+2+i)} = \frac{-e^{-t}}{(1-i)(1+i)} = -\frac{1}{2}e^{-t}\,;$$

$$\operatorname*{res}_{s=-2+i}\,(F(s)e^{st}) = \lim_{s\to-2+i}\frac{(s+2-i)(2s+1)e^{st}}{(s+1)(s+2-i)(s+2+i)} =$$

$$= \lim_{s\to-2+i}\frac{(2s+1)e^{st}}{(s+1)(s+2+i)} = \frac{(-3+2i)e^{(-2+i)t}}{(1-i)\cdot 2i} = \frac{(-3+2i)e^{(-2+i)t}}{-2(1+i)} =$$

$$= \frac{(-3+2i)(1-i)e^{(-2+i)t}}{-2(1+i)(1-i)} = \frac{(1-5i)e^{(-2+i)t}}{4}\,;$$

$$\operatorname*{res}_{s=-2-i}\,(F(s)e^{st}) = \lim_{s\to-2-i}\frac{(2s+1)e^{st}}{(s+1)(s+2-i)} =$$

$$= \frac{(-3-2i)e^{(-2-i)t}}{(-1-i)(-2i)} = \frac{(-3-2i)(-1-i)e^{(-2-i)t}}{-2(-1+i)(-1-i)} = \frac{(1+5i)e^{(-2-i)t}}{4}\,.$$

Теперь найдем искомый оригинал по формуле (1.22):

$$f(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{(1-5i)e^{(-2+i)t}}{4} + \frac{(1+5i)e^{(-2-i)t}}{4} =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t}((1-5i)e^{it} + (1+5i)e^{-it}) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t}(e^{it} + e^{-it} - 5i(e^{it} - e^{-it})) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t}(2\cos t - 5i\cdot 2\sin t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos t + \frac{5}{2}e^{-2t}\sin t\,.$$

4.2 Линейные динамические системы

Пример 1. Дана передаточная функция $G(s) = \dfrac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+5)}$. Требуется:

а) Построить СУМ.

б) Построить СНМ.

в) Построить КМ (в комплексном и вещественном базисе).

г) Выяснить свойства управляемости и наблюдаемости всех моделей.

Решение.
а). Построим стандартную управляемую модель по уравнениям (2.8), (2.9). Перемножим скобки в знаменателе $G(s)$ и приведем подобные члены:

$$G(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+5)} = \frac{2s+1}{s^3+5s^2+9s+5} .$$

Степень знаменателя $G(s)$ $m = 3$ (размерность системы). Коэффициенты числителя $G(s)$ являются элементами матрицы H, а коэффициенты знаменателя — элементами матрицы F. Таким образом, получена стандартная управляемая модель

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) ,$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} x(t) .$$

б). Построим стандартную наблюдаемую модель по уравнениям (2.10), (2.11). Степень знаменателя $G(s)$ $m = 3$ (размерность системы). Коэффициенты знаменателя $G(s)$ являются элементами матрицы F. Чтобы определить элементы матрицы B, запишем и решим линейную систему (см. (2.12))

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad b = \left[-\frac{11}{5}, 0, 2\right]^T .$$

Таким образом, стандартная наблюдаемая модель имеет вид

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{11}{5} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) ,$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) .$$

в). Для построения канонической модели по уравнению (2.13) найдем полюсы передаточной функции $G(s)$. Решая характеристическое уравнение

$s^3+5s^2+9s+5=0$, находим $s_1=-1$, $s_2=-2+i$, $s_3=-2-i$ (все полюсы простые, случай 1). Запишем уравнение состояния канонической модели

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2+i & 0 \\ 0 & 0 & -2-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\ .$$

Для вычисления коэффициентов матрицы H найдем все вычеты:

$$\operatorname*{res}_{s=-1} G(s) = -\frac{1}{2}\,,\quad \operatorname*{res}_{s=-2+i} G(s) = \frac{1-5i}{4}\,,\quad \operatorname*{res}_{s=-2-i} G(s) = \frac{1+5i}{4}\,.$$

Запишем уравнение наблюдения

$$z(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1-5i}{4} & \frac{1+5i}{4} \end{bmatrix} x(t)\ .$$

Теперь запишем каноническую модель в вещественном базисе, используя уравнения (2.18), (2.19) (случай 2). Здесь $\sigma=-2$, $\omega=1$. Находим

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)\ ,$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} x(t)\ .$$

г). Выясним свойства управляемости и наблюдаемости всех моделей. Поскольку все модели представляют собой непрерывные инвариантные во времени линейные системы, матрицу управляемости найдем по формуле

$$W_{CTI} = [B \mid FB \mid F^2B \mid \cdots \mid F^{n-1}B]\ ,$$

а матрицу наблюдаемости — по формуле

$$M_{CTI} = [H^T \mid F^TH^T \mid (F^2)^TH^T \mid \cdots \mid (F^{n-1})^TH^T]^T\ .$$

Таким образом, для каждой из моделей имеем следующие свойства:

1) **СУМ.**

$$W_{CTI} = [B \mid FB \mid F^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 16 \end{bmatrix},\ \det W_{CTI} = -1 \neq 0\ .$$

$$M_{CTI} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -10 & -18 & -9 \end{bmatrix}, \ \det M_{CTI} = -13 \neq 0 \ .$$

Следовательно, стандартная управляемая модель является полностью управляемой и полностью наблюдаемой.

2) **СНМ.**

$$W_{CTI} = [B \mid FB \mid F^2B] = \begin{bmatrix} -\dfrac{11}{5} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -23 \end{bmatrix}, \ \det W_{CTI} = -111\frac{2}{5} \neq 0 \ .$$

$$M_{CTI} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \det M_{CTI} = 1 \neq 0 \ .$$

Следовательно, стандартная наблюдаемая модель является полностью управляемой и полностью наблюдаемой.

3) **КМ** в вещественном базисе.

$$W_{CTI} = [B \mid FB \mid F^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}, \ \det W_{CTI} = 8 \neq \ 0.$$

$$M_{CTI} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -9 \\ -2 & -15 & 15 \end{bmatrix}, \ \det M_{CTI} = \frac{3}{4} \neq \ 0.$$

Следовательно, каноническая модель также является полностью управляемой и полностью наблюдаемой.

Приложение A

Функции комплексного переменного

A.1 Комплексные числа и действия над ними

A.1.1 Определение комплексного числа

Комплексные числа (иногда называемые *мнимыми* числами) не являются числами в элементарном смысле слова, применяемыми при подсчетах и измерениях. Они составляют новый класс математических объектов, определяемый описанными ниже свойствами.

Каждому комплексному числу c можно поставить в соответствие единственную пару (a, b) действительных чисел a и b и наоборот. Сумма и произведение двух комплексных чисел $c_1 \leftrightarrow (a_1, b_1)$ и $c_2 \leftrightarrow (a_2, b_2)$ определяются следующим образом ($\leftrightarrow$ обозначает соответствие):

$$c_1 + c_2 \leftrightarrow (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{и} \quad c_1c_2 \leftrightarrow (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)\,.$$

Действительные числа a содержатся в классе комплексных чисел в качестве пар $(a, 0)$. **Мнимая единица** i, определяемая условием $i \leftrightarrow (0, 1)$, удовлетворяет соотношению

$$i^2 = -1\,. \tag{A.1}$$

Каждое комплексное число $c \leftrightarrow (a, b)$ может быть записано в виде суммы $c = a + ib$ действительного числа $a \leftrightarrow (a, 0)$ и **чисто мнимого** числа $b \leftrightarrow (0, b)$. Действительные числа $a = \mathrm{Re}\ c$ и $b = \mathrm{Im}\ c$ называются **действительной частью** и **мнимой частью** комплексного числа c. Два комплексных числа $c = a + ib$ и $\bar{c} = a - ib$, имеющие одинаковые действительные и противоположные мнимые части, называются **сопряженными** комплексными числами.

Два комплексных числа $c_1 = a_1 + ib_1$ и $c_2 = a_2 + ib_2$ равны в том и только в том случае, если соответственно равны их действительные и мнимые части, т. е. $c_1 = c_2$, лишь если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Из $c = a + ib = 0$ следует $a = b = 0$.

Сложение и умножение комплексных чисел удовлетворяют правилам сложения и умножения действительных чисел, причем

$$\left.\begin{aligned} &i^2 = -1\,, \quad i^3 = -i\,, \quad i^4 = 1\,, \\ &i^{4n+1} = i\,, \;\; i^{4n+2} = -1\,, \;\; i^{4n+3} = -i\,, \;\; i^{4n} = 1 \;\; (n = 0, 1, 2, \dots)\,; \end{aligned}\right\} \tag{A.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &c_1 \pm c_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)\,, \\ &c_1 c_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_1) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)\,, \\ &\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \; (c_2 \neq 0)\,, \\ &\overline{c_1 + c_2} = \bar{c_1} + \bar{c_2}\,, \\ &\overline{c_1 c_2} = \bar{c_1}\bar{c_2}\,, \\ &(\overline{c_1/c_2}) = \bar{c_1}/\bar{c_2} \; (c_2 \neq 0)\,, \\ &\bar{\bar{c}} = c\,, \\ &a = \mathrm{Re}\; c = \frac{c + \bar{c}}{2}\,, \\ &b = \mathrm{Im}\; c = \frac{c - \bar{c}}{2i}\,. \end{aligned}\right\} \tag{A.3}$$

Класс всех комплексных чисел содержит корни всех алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами и включает в себя действительные числа.

A.1.2 Изображение комплексных чисел на z-плоскости

Комплексное число $z = x + iy$ удобно изображать точкой $M(x, y)$ или радиусом-вектором на **комплексной плоскости** (рис. A.1). Оси Ox и Oy (в прямоугольной декартовой системе координат) называются, соответственно, **действительной** и **мнимой** осью. Абсцисса и ордината каждой точки z изображают, соответственно, действительную часть x и мнимую часть y числа z. Соответствующие полярные координаты

$$\left.\begin{aligned} &r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\bar{z}|\,, \\ &\varphi = \mathrm{Arg}\; z\,, \quad \mathrm{tg}\; \varphi = \frac{y}{x} \quad (z \neq 0) \end{aligned}\right\} \tag{A.4}$$

называются **модулем** и **аргументом** комплексного числа z. Отметим:

$$\left.\begin{aligned} &x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \\ &z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{A.5}$$

Модули комплексных чисел удовлетворяют соотношениям, принятым для абсолютных величин. Если z — действительное число, то его модуль $|z|$ равен его абсолютной величине.

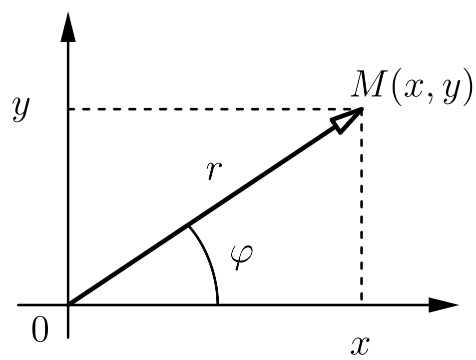


Рис. А.1. Изображение комплексных чисел точками или радиусами-векторами.

Аргумент комплексного числа z определяется с точностью до слагаемого $2k\pi$, где k — любое целое число. В качестве главного значения $\operatorname{Arg} z$ обычно выбирают значение, определенное неравенствами $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$. Главное значение аргумента z обозначают через $\arg z$. Если z — действительное положительное число, то $\arg z = 0$; если z — действительное отрицательное число, то $\arg z = \pi$; если z чисто мнимое число с положительной мнимой частью, то $\arg z = \pi/2$; если z чисто мнимое число с отрицательной мнимой частью, то $\arg z = -\pi/2$; если $z = 0$, то $\arg z$ и $\operatorname{Arg} z$ не имеют смысла.

Для любых двух множеств (действительных или комплексных) чисел $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ и $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ выполняется *неравенство Коши-Буняковского*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j\right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2 . \tag{A.6}$$

А.1.3 Представление основных операций на z-плоскости

Сумме комплексных чисел соответствует сумма соответствующих радиусов-векторов. Пусть даны два комплексных числа

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) .$$

Тогда для произведения, частного и целой степени справедливы выражения:

$$\left.\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\,, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] \quad (z_2\neq 0)\,, \\ z^n &= r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\,, \\ &\quad (n \text{ — целое число})\ (\textit{формула Муавра})\,. \end{aligned}\right\} \tag{A.7}$$

Если n — натуральное число и c — комплексное число, то $\sqrt[n]{c}$ (корень n-й степени из c) есть решение уравнения $z^n = c$. При $c\neq 0$ существует ровно n корней n-й степени из c. Они определяются формулами

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{|c|}$ — арифметический корень из положительного числа $|c|$, $\varphi = \arg c$ и $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Отметим, что

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[n]{1} &= \cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\,, \\ \sqrt[n]{-1} &= \cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\,, \\ &\quad n = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots, n-1\,. \end{aligned}\right\} \tag{A.8}$$

А.2 Функции комплексного переменного. Области в комплексной плоскости

А.2.1 Функции комплексного переменного

Задание функции $w = f(z)$ комплексного переменного $z = x+iy$ равносильно заданию двух функций $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ двух действительных переменных x и y. Комплексная функция

$$\begin{gathered} w = f(z) = u(x,y)+iv(x,y) = |w|e^{i\theta} \\ (z = x+iy = |z|e^{i\varphi}) \end{gathered} \tag{A.9}$$

каждому значению независимой комплексной переменной z из некоторой области определения ставит в соответствие одно или несколько значений зависимой комплексной переменной w.

Определения *однозначной, многозначной и ограниченной* функции комплексного переменного, а также *пределы комплексных функций и последовательностей и непрерывность комплексных функций, сходимость, абсолютная сходимость и равномерная сходимость комплексных рядов и несобственных интегралов* **аналогичны соответствующим определениями для действительного переменного** [4].

В частности, *каждый комплексный степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ *имеет действительный радиус сходимости* r_c $(0 < r_c \leqslant \infty)$ *такой, что ряд сходится равномерно и абсолютно при* $|z-a| < r_c$ *и расходится при* $|z-a| > r_c$.

А.2.2 z-плоскость и w-плоскость. Окрестности. Бесконечно удаленная точка

Значениям независимой переменной $z = x + iy$ соответствует единственная точка (x, y) *комплексной плоскости* z. Значениям $w = u + iv$ таким же образом соответствует точка (u, v) *комплексной плоскости* w. Функция $w = f(z)$ осуществляет *отображение* точек z-плоскости на соответствующие точки w-плоскости.

Определение А.1. **Окрестность** (открытая) точки $z = a$, лежащей в конечной части плоскости, определяется как совокупность точек z таких, что $|z-a| < \delta$, где $\delta > 0$.

Определение А.2. **Бесконечно удаленная точка** $(z = \infty)$ определяется как точка $\widetilde{z}$, соответствующая началу координат $(z = 0)$ при преобразовании $\widetilde{z} = 1/z$. **Окрестностью точки** $z = \infty$ является внешность любого круга достаточно большого радиуса. Если радиус этого круга равен R, а центр находится в точке $z = 0$, то множество точек, образующих внешность бесконечно удаленной точки, определяется неравенством $| z |> R$. Чем больше радиус круга, тем «меньше» окрестность бесконечно удаленной точки, являющаяся внешностью этого круга. Комплексную плоскость, дополненную бесконечно удаленной точкой, называют *расширенной* комплексной плоскостью.

Замечание А.1. В соответствии с определением, на комплексной плоскости имеется лишь *одна* бесконечно удаленная точка.

А.2.3 Кривые и контуры

Непрерывная кривая в z-плоскости есть последовательность точек $z = x + iy$ таких, что

$$z = z(t)\,, \quad \text{т. е.} \quad x = x(t)\,, \ \ y = y(t) \\ (-\infty < t_1 \leqslant t \leqslant t_2 < \infty)\,, \tag{А.10}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции действительного параметра t. Непрерывная кривая (или ее часть) есть **простая кривая** (**жорданова дуга**), если она состоит из единой ветви и не содержит кратных точек; это значит, что функции $x(t)$ и $y(t)$ однозначны и в замкнутом интервале $[t_1, t_2]$ нет таких двух *различных* значений τ_1 и τ_2, для которых справедливы оба равенства

$$x(\tau_1) = x(\tau_2) \quad \text{или} \quad y(\tau_1) = y(\tau_2)\,.$$

Простая замкнутая кривая (замкнутая жорданова кривая) есть непрерывная кривая, состоящая из единой ветви без кратных точек, кроме совпадающих начальной и конечной точек.

Простая кривая или простая замкнутая кривая называется (простым) **контуром**, если она спрямляема. Элемент расстояния между соответствующими точками z и $z + dz$ контура (А.10) есть

$$ds = |dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

А.2.4 Границы и области

Геометрия комплексной плоскости (включая определение расстояния и угла) тождественна с геометрией евклидовой плоскости точек (x, y) или векторов $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ для конечных значений x и y, кроме определения точки $z = \infty$. Точки комплексной плоскости z представляют гомеоморфное отображение точек сферы с долготой $\arg z$ и широтой $\dfrac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{|z|}{2}$ (стереографическая проекция); при этом точки $z = 0$ и $z = \infty$ соответствуют положительным полюсам. Точки каждой простой замкнутой кривой C разделяют плоскость на две связные открытые области: каждая непрерывная кривая, содержащая точки обеих областей, содержит точку их общей границы (*теорема Жордана*).

Если C не содержит точку $z = \infty$, то одна из двух областей **ограничена** (т. е. находится целиком в конечной части плоскости, где $|z|$ ограничен), а другая не ограничена; если C содержит точку $z = \infty$, то обе области не ограничены.

В более общем случае граница C некоторой области D может быть множеством непересекающихся простых кривых (многосвязная область). В этом случае **положительное направление (положительный обход)** граничной кривой определяется как оставляющее область D (внутренность граничной кривой) слева (против часовой стрелки для наружной компоненты границы). Открытое множество точек по одну сторону от граничной кривой C есть открытая область; добавляя к этому множеству точки, лежащие на самой границе, получаем замкнутую область. Если область D дополняется ее граничными точками, то получившуюся замкнутую область будем обозначать $\overline{D}$.

А.2.5 Комплексные контурные интегралы

Определение А.3.

$$\int\limits_C f(z)dz = \lim_{\max|z_i - z_{i-1}| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1}), \qquad (A.11)$$

где точки $z_0, z_1, \ldots, z_n$ расположены одна за другой вдоль контура C; $a = z_0$ — начальная точка контура, $b = z_n$ — конечная точка. Каждая из точек ζ_i лежит на участке кривой $[z_{i-1}, z_i]$ и может совпадать с одним из его концов.

Из определения интеграла (А.11) следует, что

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_C v(x,y)dx + u(x,y)dy, \qquad (A.12)$$

где действительные криволинейные интегралы берутся по тому же контуру, что и комплексный интеграл. *Свойства действительных интегралов переносятся на рассматриваемые интегралы* [4]; в частности, изменение направления интегрирования на контуре C изменяет знак интеграла.

Если вдоль контура C функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны (т.е. непрерывны функции $u[x(t), y(t)]$ и $v[x(t), y(t)]$, где $x(t)$, $y(t)$ — параметрические уравнения контура), *то интеграл* (А.11) *существует.*

Если при этом длина контура C равна L и на контуре $|f(z)| \leqslant M$, то

$$\left|\int\limits_C f(z)dz\right| \leqslant ML. \qquad (A.13)$$

Если контур C содержит точку $z = \infty$ или если $f(z)$ не ограничена на C, то интеграл (А.11) может быть определен как несобственный аналогично несобственному действительному интегралу [4].

А.3 Дифференцирование функций комплексного переменного

А.3.1 Производная функции

Определение А.4. Функция $w = f(z)$ называется **дифференцируемой** в точке $z = a$, если предел

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{А.14}$$

(производная $f(z)$ по z) существует при $z = a$ и не зависит от способа стремления Δz к нулю. Функция может быть дифференцируема в точке (например, $|z|^2$ при $z = 0$), на кривой и во всей области.

А.3.2 Условия Коши-Римана (Даламбера-Эйлера)

Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определенная в некоторой области, была дифференцируемой в точке z этой области, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в той же точке и чтобы, кроме того, выполнялись условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\textit{условия Коши-Римана}). \tag{А.15}$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{А.16}$$

При переходе к полярной системе координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$, уравнения Коши-Римана принимают следующий вид $(r \neq 0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \varphi}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,.$$

Производная $f'(z)$ равна

$$f'(z) = \frac{r}{z}\Big(\frac{\partial u}{\partial r} + i\,\frac{\partial v}{\partial r}\Big) = -\frac{i}{z}\Big(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + i\,\frac{\partial v}{\partial \varphi}\Big)\,.$$

А.3.3 Аналитические функции

Определение А.5.

(а)[1] Однозначная функция $f(z)$ называется **аналитической (регулярной, голоморфной)** в точке $z = a$, если она *дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности* точки a. Функция называется **аналитической в открытой области** D, если она *аналитическая в каждой точке этой области.*

(б) $f(z)$ называется **аналитической в бесконечности**, если функция $F(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ — аналитическая в точке $z = 0$.

$f(z)$ — **аналитическая в точке** a *тогда и только тогда, когда она представима степенным рядом* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$, *сходящимся в некоторой окрестности точки* $z = a$.

Функция $f(z)$ *— аналитическая в бесконечности тогда и только тогда, когда она может быть представлена рядом* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}$ *по отрицательным степеням* z, *сходящимся для достаточно больших значений* $|z|$.

А.3.4 Свойства аналитических функций

Пусть $f(z)$ *— аналитическая в открытой области* D. *Тогда во всей области* D:

1) *условия Коши-Римана* (А.15) *удовлетворяются* (верно и обратное утверждение);

2) $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *— сопряженные гармонические функции*;

3) *все производные функции* $f(z)$ *существуют и являются аналитическими функциями*;

4) *в односвязной области* D *интеграл* $\int\limits_a^z f(\zeta)d\zeta$ *не зависит от контура интегрирования*, если только этот контур имеет конечную длину и целиком лежит в области D; *производная интеграла есть* $f(z)$;

5) *значения* $f(z)$ *на линии или в подобласти, целиком лежащих в области* D, *определяют* $f(z)$ *единственным образом всюду в* D.

[1] Термины *дифференцируемая, аналитическая, регулярная и голоморфная* применялись в одном и том же смысле разными авторами.

Все обычные правила дифференцирования и интегрирования применимы к аналитическим функциям комплексного переменного.

Если функция $w = f(z)$ *аналитична в точке* $z = a$ *и* $f'(a) \neq 0$, *то* $f(z)$ *имеет аналитическую обратную функцию* $z(w)$, *определенную в окрестности точки* $w = f(a)$.

Если $W = F(w)$ *и* $w = f(z)$ *— обе аналитические, то* W *есть аналитическая функция от* z.

Теорема А.1 (*теорема Вейерштрасса*). *Если последовательность* (или *ряд*) *функций* $f_k(z)$, *аналитических в открытой области* D, *сходится равномерно к пределу* $f(z)$ *всюду в* D, *то* $f(z)$ *— аналитическая функция и последовательность* (или *ряд*) *производных* $f'_k(z)$ *сходится равномерно к* $f'(z)$ *всюду в* D.

Если функции $f_k(z)$ — аналитические в области D и непрерывные в $\overline{D}$, то равномерная сходимость последовательности (или ряда) $f_k(z)$ во всей замкнутой области $\overline{D}$ будет следовать из равномерной сходимости на границе этой области. При этом можно гарантировать сходимость последовательности производных только в открытой области D. [2]

А.4 Интегральные теоремы и разложения в ряды

А.4.1 Интегральные теоремы

Теорема А.2 (*интегральная теорема Коши*). Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в некоторой области, C — замкнутый контур, принадлежащий этой области вместе со своей внутренностью D . Тогда

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 0\,. \tag{A.17}$$

Интегральная теорема Коши обобщается на случай, когда производная $f'(z)$ перестает быть непрерывной на контуре C и в области D, ограниченной этим контуром.

Если функция $f(z)$ — аналитическая в односвязной области D плоскости ζ и также на контуре C, ограничивающем эту область, то справедлива

[2] В условии теоремы Вейерштрасса *последовательность* (или *ряд*) *контурных интегралов* $\int\limits_C f_k(z)dz$, *где контур* C *— конечной длины и лежит в* D, *сходится равномерно к* $\int\limits_C f(z)dz$.

интегральная формула Коши, записываемая в виде следующего выражения:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad z \in D\,. \tag{A.18}$$

Правая часть этой формулы называется *интералом Коши.* Следовательно, значения аналитической функции в любой точке $z \in D$ выражаются только через ее значения на контуре, ограничивающем ту область, где функция аналитична. Если же точка z лежит вне этой области D, то интеграл Коши равен нулю (поскольку в этом случае подынтегральная функция в (A.18) является аналитической в D). Это же справедливо и для производных функции $f(z)$, так как формально дифференцируя (A.18), получаем

$$\left.\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\,, \\ f''(z) &= \frac{2}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, d\zeta\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta\,. \end{aligned}\right\} \tag{A.19}$$

В частности,

$$\int\limits_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \pm 2k\pi i\,, \tag{A.20}$$

где k — число обходов контуром C точки z; знак «$+$» выбирается при положительных обходах (против часовой стрелки), а знак «$-$» — при отрицательных обходах (по часовой стрелке). Эти равенства свидетельствуют также, что *из аналитичности функции в некоторой точке следует существование в окрестности этой точки производных любого порядка, т. е. аналитичность всех производных* этой функции.

Интеграл вида $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$, где C — замкнутый или незамкнутый контур и $\varphi(\zeta)$ — функция, непрерывная на контуре C, называется *интегралом типа Коши.* Интеграл типа Коши представляет собой функцию $F(z)$, аналитическую в каждой области, не содержащей точек контура C. При этом

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Теорема А.3 (*теорема Морера*). *Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и равенство* (А.17) *имеет место для любого замкнутого контура C, лежащего в D, то $f(z)$ — аналитическая в этой области.*

А.4.2 Разложение в ряд Тейлора

(а) *Если $f(z)$ аналитична внутри окружности K радиуса r с центром в точке $z = a$ $(a \neq \infty)$, то существует единственный ряд по степеням $(z - a)$, равномерно сходящийся к $f(z)$ при $|z - a| \leqslant r' < r$:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k, \tag{А.21}$$

где

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\,d\zeta$$

и K' — окружность $|z - a| = r'$.

Наибольший круг $K_C(|z-a| \leqslant r_C)$, все внутренние точки которого лежат внутри области, в которой $f(z)$ аналитична, является **кругом сходимости** степенного ряда (А.21); r_C есть **радиус сходимости**.

(б) Если $M(r')$ — верхняя граница $|f(z)|$ на K', то

$$|a_n| = \frac{1}{n!}|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{M(r')}{r'^{\,n}} \text{ (\textit{неравенство Коши}).} \tag{А.22}$$

(в) Если в ряде Тейлора (А.21) отбросить все члены, стоящие за слагаемым $a_{n-1}(z - a)^{n-1}$, то *остаточный член* $R_n(z)$ равен

$$\begin{gathered} R_n(z) = \frac{(z - a)^n}{2\pi i}\int\limits_{K'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^n(\zeta - z)}\,, \\ |R_n(z)| \leqslant \left(\frac{|z - a|}{r'}\right)^n \frac{r'\,M(r')}{r' - |z - a|}\,. \end{gathered} \tag{А.23}$$

Если положить $|z - a| = kr'$, где $k < 1$, то $R_n(z) \leqslant \dfrac{k^n M(r')}{1 - k}$.

А.4.3 Разложение в ряд Лорана

(а) *Если $f(z)$ аналитична в кольце между двумя концентрическими окружностями K_1 и K_2 с центрами в точке $z = a$ $(a \neq \infty)$ и радиусами r_1* и *$r_2 < r_1$, то существует единственное разложение в ряд по положительным и отрицательным степеням $(z - a)$*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-a)^{-k} \ (r_2 < |z-a| < r_1)\,, \qquad \text{(A.24)}$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}, \quad b_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2'} (\zeta-a)^{k-1} f(\zeta) d\zeta\,,$$

K_1' — окружность $|z-a| = r_1' < r_1$ и K_2' — окружность $|z-a| = r_2' > r_2$.

Первая сумма в равенстве (А.24) *равномерно сходится для $|z-a| \leqslant r_1'$ и аналитична внутри K_1; вторая сумма* (**главная часть** *разложения для $f(z)$) равномерно сходится для $|z-a| \geqslant r_2'$ и аналитична во внешности окружности K_2.*

Случай $a = \infty$ приводится к предыдущему при помощи преобразования $\widetilde{z} = 1/z$, переводящего $z = \infty$ в начало координат.

Ряд (А.24) можно записать в виде

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,d\zeta\,,$$

где Γ — любая окружность, расположенная между K_1 и K_2.

(б) Если в первой сумме равенства (А.24) ограничиться членами по $a_{n-1}(z-a)^{n-1}$ включительно, то остаточный член $R_n(z)$ будет равен

$$\begin{gathered} R_n(z) = \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int\limits_{K_1'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)}\,, \\ |R_n(z)| \leqslant \left(\frac{|z-a|}{r_1'}\right)^n \frac{r_1'\,M(r_1')}{r_1' - |z-a|}\,. \end{gathered} \qquad \text{(A.25)}$$

Если во второй сумме равенства (А.24) в качестве последнего слагаемого взять $b_{n-1}(z-a)^{-(n-1)}$, то остаточный член $R_n^*(z)$ будет определяться в виде

$$R_n^*(z) = \frac{1}{2\pi i(z-a)^n} \int\limits_{K_2'} \frac{(\zeta-a)^n f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,,$$
$$|R_n^*(z)| \leqslant \left(\frac{r_2'}{|z-a|}\right)^n \frac{r_2'\, M(r_2')}{|r-a| - r_2'}\,. \tag{A.26}$$

$M(r_1')$ и $M(r_2')$ — верхние границы для $|f(z)|$ на K_1' и K_2' соответственно.

А.5 Нули и изолированные особые точки

А.5.1 Нули

Точки z, для которых $f(z)=0$, называются **нулями** функции $f(z)$ (корнями уравнения $f(z)=0$). Функция $f(z)$, аналитическая в точке $z=a$, имеет **нуль порядка** m, где m — целое положительное число, если в точке $z=a$ первые m коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора (А.21) равны нулю. При этом $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке a и $\varphi(a)\neq 0$.

Нули функции $f(z)$, аналитической в области D, все изолированы друг от друга (т. е. каждый нуль имеет окрестность, внутри которой $f(z)\neq 0$, исключая сам нуль), или $f(z)$ тождественно равна нулю в области D.

Теорема А.4 (*теорема Руше*). *Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — аналитические в односвязной ограниченной области D и на ее контуре C и если $|f_2(z)| < |f_1(z)| \neq 0$ на C, то функции $f_1(z)$ и $f_1(z)+f_2(z)$ имеют одинаковое число нулей в области D.*

Теорема А.5 (*основная теорема алгебры*). *Каждый многочлен степени n имеет n нулей с учетом их кратности.*

А.5.2 Особые точки однозначных аналитических функций

Особой точкой (или **особенностью**) функции $f(z)$ называется точка, в которой $f(z)$ не аналитична. Точка $z=a$ называется **изолированной особенностью** $f(z)$, если существует действительное число $\delta>0$ такое, что $f(z)$ аналитична при $0<|z-a|<\delta$, но не в самой точке $z=a$. Изолированные особенности для $z=a\neq\infty$ могут быть такими:

1. **Устранимая особенность**, если функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности $z = a$, исключая, возможно, саму точку a, т. е. когда все коэффициенты b_k разложения в ряд Лорана (А.24) функции $f(z)$ в точке a равны нулю.

2. **Полюс порядка** m ($m \in \{1, 2, \ldots\}$), если в разложении Лорана (А.24) функции $f(z)$ по степеням $(z - a)$ выполнены условия:

$$b_m \neq 0, \quad b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = 0$$

(главная часть разложения содержит лишь *конечное* число членов).
В этом случае $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$ при любом стремлении z к a. При этом функция $F(z) = 1/f(z)$ будет аналитична в некоторой окрестности точки a (если положить $F(a) = 0$) и иметь в этой точке нуль порядка m. Функцию $f(z)$ в окрестности точки a — полюса порядка m — можно представить в виде $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z-a)^m}$, где $\psi(z)$ аналитична и $\psi(a) \neq 0$.

3. **Существенно особая точка**, если в разложении Лорана (А.24) функции $f(z)$ имеется бесконечное число членов, содержащих отрицательные степени $(z - a)$; при этом не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$ при z, стремящемся к a.

А.5.3 Нули и особенности в бесконечности

Функция $f(z)$ аналитична в бесконечности, если $f(1/z)$ — аналитическая в начале координат. Для функции $f(z)$ точка $z = \infty$ есть нуль и особенность одного из типов, указанных в п. А.5.2, если $f(1/z)$ имеет соответственный характер в начале координат. Поведение $f(z)$ в бесконечности может быть исследовано с помощью разложения $f(1/z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = 0$.

А.5.4 Теоремы Вейерштрасса и Пикара

Пусть $f(z)$ — однозначная функция, имеющая изолированную особую точку при $z = a$. Тогда:

1) **Теорема А.6 (*теорема Вейерштрасса*).** *Для любого комплексного числа A (включая $A = \infty$) существует последовательность то-*

чек $z_k \to a$ *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = A$. [3]

2) **Теорема А.7 (*теорема Пикара*).** *Для любого комплексного числа* $A \neq \infty$, *за исключением, быть может, одного значения* $A = A_0$, *каждая окрестность точки* a *содержит бесконечное множество точек* z *таких, что* $f(z) = a$.

А.6 Вычеты и контурные интегралы

А.6.1 Вычеты

Пусть в точке $z = a$ функция $f(z)$ аналитична или имеет изолированную особую точку однозначного характера. Тогда **вычетом** $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z)$ функции $f(z)$ в точке a называется коэффициент при $(z-a)^{-1}$ в разложении Лорана (А.24), т. е.

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\zeta)\,d\zeta\,, \tag{А.27}$$

где C — контур, окружающий точку a и не содержащий внутри себя особенностей $f(z)$, отличных от a.

Вычет $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$ функции $f(z)$ при $z = \infty$ определяется как

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-C} f(\zeta)\,d\zeta\,, \tag{А.28}$$

где интегрирование производится в *отрицательном* направлении по контуру C (в этом случае внешность контура C остается слева), заключающему внутри себя *все* особые точки $f(z)$, лежащие в конечной части плоскости. Это значит, что $z = \infty$ является для функции $f(z)$ или правильной, или изолированной особой точкой.

Вычет $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$ равен взятому со знаком минус коэффициенту при z^{-1} в разложении Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Отметим, что

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}[-zf(z)]\,, \tag{А.29}$$

если этот предел существует.

[3] Эта теорема ранее была доказана русским математиком Ю. Сохоцким и итальянским математиком С. Казоратти.

Если $f(z)$ *или аналитична, или имеет устранимую особенность при* $z = a \neq \infty$, *то* $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = 0$. *Если* $z = a \neq \infty$ *есть полюс порядка* m, *то*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \,. \tag{A.30}$$

В частности, пусть $z = a \neq \infty$ — простой полюс и $f(z) = p(z)/q(z)$, где $p(z)$ и $q(z)$ — аналитические функции в точке a и $p(a) \neq 0$. Тогда нетрудно убедиться, что выполняются условия $q(a) = 0$, $q'(a) \neq 0$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{p(a)}{q'(a)} \,. \tag{A.31}$$

Если бесконечность — правильная точка для функции $f(z)$, то вычет $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$ может и не равняться нулю. Например, если $f(z) = 1/z$, то $z = \infty$ есть нуль, а $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

А.6.2 Теорема о вычетах

Теорема А.8 (*основная теорема о вычетах*). *Пусть однозначная функция* $f(z)$ *аналитична в области* D, *за исключением изолированных особых точек, а замкнутый контур* C *принадлежит вместе со своей внутренностью области* D, *содержит внутри себя конечное число особых точек* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *и не проходит ни через одну из них. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) \,. \tag{A.32}$$

Если функция $f(z)$ однозначна и аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением только изолированных особых точек (необходимо конечного числа, так как иначе существовала бы конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества особых точек), то сумма всех ее вычетов (включая вычет $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$) равна нулю.

А.6.3 Вычисление определенных интегралов

(а) Часто можно вычислять действительный определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$, рассматривая его как часть комплексного контурного интеграла

$\int\limits_C f(z)\,dz$ при условии, что контур C включает интервал (a,b) действительной оси. Теорема о вычетах (A.32) может помогать в таких вычислениях и может, в частности, сводить неизвестные интегралы к уже известным.

(б) Для вычисления некоторых интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ следует применить формулу (A.32) к контуру C, состоящему из интервала $(-R,R)$ действительной оси и дуги C_R окружности $|z|=R$ в верхней полуплоскости. Следующие леммы часто позволяют отбросить интегралы по дуге C_R при $R\to\infty$:

1. $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)\,dz = 0$, *если* $f(z)$ *аналитична при* $|z|>R_0$ *и* $zf(z)$ *стремится к нулю при* $|z|\to\infty$, *когда* $y\geqslant 0$; последнее, в частности, выполняется, если $f(z)<\dfrac{K}{|z|^{1+\alpha}}$, где $\alpha>0$, при всех достаточно больших значениях $|z|$.

2. ***Лемма Жордана***. *Если* $F(z)$ *аналитична в верхней полуплоскости, исключая, возможно, конечное число полюсов, и стремится к нулю при* $|z|\to\infty$, *когда* $y\geqslant 0$, *то для любого действительного положительного числа* m
$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} F(\zeta)e^{im\zeta}\,d\zeta = 0\,.$$

Метод контурного интегрирования может давать главное значение интеграла по Коши для $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, когда сам интеграл в обычном смысле не существует.

Лемма Жордана бывает особенно полезна для вычисления несобственных интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{imx}\,dx$ и, согласно формуле Эйлера, интегралов вида
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos mx\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin mx\,dx\,.$$

Эти интегралы встречаются при преобразовании Фурье и в формуле обращения для преобразования Лапласа.

Приложение B

Таблицы соответствия для преобразования Лапласа

Таблицы соответствия «оригинал-изображения» — полезный инструмент решения многих задач из области математического моделирования динамических систем и системного анализа. В то же время, изучение операционного исчисления в части, касающейся преобразования Лапласа, будет неполным, если студент не потратит время на самостоятельный вывод формул, входящих в эти таблицы. Поэтому рекомендуется выполнить предлагаемые ниже задания 1 и 2. Приобретая таким образом опыт, студент может даже пополнять эти таблицы, включая в них те формулы, которые сюда не вошли, если он выведет новые соответствия и сочтет их полезными для дальнейшего практического употребления.

Таблицы соответствия приведены ниже в этом Приложении B.

Табл. B.1 демонстрирует 24 соответствия, которые условно можно считать основными (исходными). В табл. B.2 собраны те 56 соответствий, которые типичны для анализа линейных динамических систем с постоянными параметрами (т. е. инвариантных и непрерывных во времени систем).

Задание 1. Доказать соответствия «оригинал–изображение» по Лапласу, приведенные в табл. B.1, применяя теоремы о свойствах прямого преобразования Лапласа.

Таблица B.1. Соответствия «оригинал–изображение» по Лапласу

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$e^{at}\sin(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{\omega\cos\varphi+(s-a)\sin\varphi}{(s-a)^2+\omega^2}$
$1(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$e^{at}\cos(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{(s-a)\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{(s-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	t	$\dfrac{1}{s^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$t\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$t\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{2s\omega}{(s^2-\omega^2)^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$t\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$
$e^{at}\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$	$f(t)\sin\omega t$	$\dfrac{1}{2i}[F(s-i\omega)-F(s+i\omega)]$
$e^{at}\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$	$f(t)\cos\omega t$	$\dfrac{1}{2}[F(s-i\omega)+F(s+i\omega)]$
$\dfrac{\sin\omega t}{t}$	$\operatorname{arcctg}\dfrac{s}{\omega}$	$\dfrac{1-e^{at}}{t}$	$\ln\dfrac{s-a}{s}$

Задание 2. Доказать соответствия «изображение–оригинал» по Лапласу, приведенные в табл. B.2, применяя теоремы о свойствах обратного преобразования Лапласа.

Таблица В.2. Оригиналы для дробно-рациональных изображений

№	$F(s)$	$f(t)$
1	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
2	$\dfrac{1}{1+\tau s}$	$\dfrac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$
3	$\dfrac{1}{s(s-a)}$	$\dfrac{1}{a}\left(e^{at}-1\right)$
4	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
5	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
6	$\dfrac{b+cs}{s(s-a)}$	$-\dfrac{b}{a}+\left(c+\dfrac{b}{a}\right)e^{at}$
7	$\dfrac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)e^{at}$
8	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$
9	$\dfrac{b+cs}{s^2-a^2}$	$c\,\mathrm{ch}\,at+\dfrac{b}{a}\,\mathrm{sh}\,at$
10	$\dfrac{b+cs}{s^2+a^2}$	$c\cos at+\dfrac{b}{a}\sin at$
11	$\dfrac{1}{s^2+as+b}$ если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}>0\,,$ то если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}<0\,,$ то если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}=0\,,$ то	 $\dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}e^{-at/2}\sin t\sqrt{\Delta}$ $\dfrac{1}{\sqrt{-\Delta}}e^{-at/2}\,\mathrm{sh}\,t\sqrt{-\Delta}$ $te^{-at/2}$

Продолжение 1 табл. B.2

№	$F(s)$	$f(t)$
12	$\dfrac{1}{s^2(s-a)}$	$\dfrac{1}{a^2}(e^{at}-1-at)$
13	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)^2}$	$\dfrac{e^{at}-[1+(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
14	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\dfrac{e^{at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{bt}}{(a-b)(c-b)}+$ $+\dfrac{e^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
15	$\dfrac{1}{(s-a)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2e^{at}$
16	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)^2}$	$\dfrac{ae^{at}-[a+b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
17	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\dfrac{ae^{at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{be^{bt}}{(a-b)(c-b)}+$ $+\dfrac{ce^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
18	$\dfrac{s}{(s-a)^3}$	$\left(t+\dfrac{1}{2}at^2\right)e^{at}$
19	$\dfrac{s}{s^2+as+b}$	
	если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}>$ $>0\,,$ то	$e^{-at/2}\left(\cos t\sqrt{\Delta}-\dfrac{a}{2\sqrt{\Delta}}\sin t\sqrt{\Delta}\right)$
	если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}<$ $<0\,,$ то	$e^{-at/2}\left(\operatorname{sh} t\sqrt{-\Delta}-\dfrac{a}{2\sqrt{-\Delta}}\operatorname{sh} t\sqrt{-\Delta}\right)$
	если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}=$ $=0\,,$ то	$e^{-at/2}\left(1-\dfrac{at}{2}\right)$

Продолжение 2 табл. В.2

№	*F(s)*	*f(t)*
20	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$
21	$\dfrac{1}{s(s^2-a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}(\operatorname{ch} at-1)$
22	$\dfrac{1}{(s+b)(s^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(e^{-bt}-\cos at+\dfrac{b}{a}\sin at\right)$
23	$\dfrac{(s+b)^2}{s(s^2+a^2)}$	$\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\cos at+2b\sin at$
24	$\dfrac{1}{s^4+a^4}$	$\dfrac{1}{a^3\sqrt{2}}\left(\operatorname{ch}\dfrac{at}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}-\operatorname{sh}\dfrac{at}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{at}{\sqrt{2}}\right)$
25	$\dfrac{1}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\operatorname{sh} at-\sin at)$
26	$\dfrac{s}{s^4+a^4}$	$\dfrac{1}{a^2}\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\dfrac{at}{\sqrt{2}}$
27	$\dfrac{s}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\operatorname{ch} at-\cos at)$
28	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$
29	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(at\operatorname{ch} at-\operatorname{sh} at)$
30	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{\sin bt}{b}-\dfrac{\sin at}{a}\right)$
31	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{\operatorname{sh} at}{a}-\dfrac{\operatorname{sh} bt}{b}\right)$
32	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)(s^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(\dfrac{\operatorname{sh} at}{a}-\dfrac{\sin bt}{b}\right)$
33	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t}{2a}\sin at$
34	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{t}{2a}\operatorname{sh} at$

Продолжение 3 табл. В.2

№	$F(s)$	$f(t)$
35	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{a^4}\left(1-\cos at-\dfrac{at}{2}\sin at\right)$
36	$\dfrac{1}{s(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{1}{a^4}\left(1-\operatorname{ch} at+\dfrac{at}{2}\operatorname{sh} at\right)$
37	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2b^2}+\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{\cos at}{a^2}-\dfrac{\cos bt}{b^2}\right)$
38	$\dfrac{1}{s(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2b^2}+\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{\operatorname{ch} at}{a^2}-\dfrac{\operatorname{ch} bt}{b^2}\right)$
39	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{1}{8a^5}\left[(3-a^2t^2)\sin at-3at\cos at\right]$
40	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{1}{8a^5}\left[(3+a^2t^2)\operatorname{sh} at-3at\operatorname{ch} at\right]$
41	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t}{8a^3}\left(\sin at-at\cos at\right)$
42	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{t}{8a^3}\left(at\operatorname{ch} at-\sin at\right)$
43	$\dfrac{1}{(s+a)^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
44	$\dfrac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$
45	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{(b-a)}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
46	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{(b-a)}\left[(\alpha-a)e^{-at}-(\alpha-b)e^{-bt}\right]$
47	$\dfrac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1-\dfrac{b}{(b-a)}e^{-at}+\dfrac{a}{(b-a)}e^{-bt}$
48	$\dfrac{ab(s+\alpha)}{s(s+a)(s+b)}$	$\alpha-\dfrac{b(\alpha-a)}{(b-a)}e^{-at}+\dfrac{a(\alpha-b)}{(b-a)}e^{-bt}$

Окончание табл. В.2

№	***F(s)***	***f(t)***
49	$\dfrac{s+\alpha}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega}\sin(\omega t+\varphi),\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\alpha}$
50	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{(\alpha-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{(\alpha-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+$ $+\dfrac{(\alpha-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
51	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}\left[(\alpha-a)^2+\omega^2\right]^{1/2}e^{-at}\sin(\omega t+$ $+\varphi),\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\alpha-a}$
52	$\dfrac{\omega_{\text{n}}^2}{s^2+2\zeta\omega_{\text{n}}s+\omega_{\text{n}}^2}$	$\dfrac{\omega_{\text{n}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_{\text{n}}t}\sin\omega_{\text{n}}t\sqrt{1-\zeta^2},\quad \zeta<1$
53	$\dfrac{1}{s\left[(s+a)^2+\omega^2\right]}$	$\dfrac{1}{a^2+\omega^2}+\dfrac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}}e^{-at}\sin(\omega t-$ $-\varphi),\quad \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{-a}$
54	$\dfrac{\omega_{\text{n}}^2}{s\left(s^2+2\zeta\omega_{\text{n}}s+\omega_{\text{n}}^2\right)}$	$1-$ $-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_{\text{n}}t}\sin\left(\omega_{\text{n}}t\sqrt{1-\zeta^2}+\varphi\right),$ $\varphi=\arccos\zeta,\quad \zeta<1$
55	$\dfrac{s+\alpha}{s\left[(s+a)^2+\omega^2\right]}$	$\dfrac{\alpha}{a^2+\omega^2}+$ $+\dfrac{1}{\omega}\left[\dfrac{(\alpha-a)^2+\omega^2}{a^2+\omega^2}\right]^{1/2}e^{-at}\sin(\omega t+$ $+\varphi),\quad \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\alpha-a}-\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{-a}$
56	$\dfrac{s+\alpha}{(s+c)\left[(s+a)^2+\omega^2\right]}$	$\dfrac{e^{-ct}}{(c-a)^2+\omega^2}+\dfrac{e^{-at}\sin(\omega t+\varphi)}{\omega\left[(c-a)^2+\omega^2\right]^{1/2}},$ $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{c-a}$

Заключение

Данное учебное пособие рассматривает только детерминистские модели динамических систем и при этом ограничивается анализом только самых основных свойств таких моделей. К основным изучаемым здесь свойствам моделей относятся свойства управляемости и наблюдаемости. Эти вопросы и сопутствующий им математический аппарат составляют необходимый фундамент гораздо более обширной науки, называемой, как известно, *теорией систем*. Без знания этих свойств, без владения математическими средствами их анализа, а также без умения обеспечивать эти свойства на практике невозможно решать вопросы проектирования, вопросы оптимального синтеза реальных систем. Таким образом, данное пособие дает лишь начальное представление о науке, занимающейся системами и процессами управления. Чтобы «приоткрыть» завесу над проблемами теории систем, кратко характеризуем особенности этой науки.

Прежде всего, современные системы характеризуются возрастающей сложностью и необходимостью применения различных методов, подходов и идей из различных областей знания. Не будет преувеличением сказать, что теория систем — самая междисциплинарная наука. Это означает, что теория систем вбирает в себя и использует методы многих других наук. Особенностью современного этапа развития теории систем является то, что среди используемых ею методов главенствующими являются математические методы. В этом смысле специалисты не зря говорят, что теория систем, в основном, хотя и не полностью, является областью математики.

Когда говорят о сложности систем, то имеют в виду не просто количественную характеристику, т. е. большое количество элементов и связей в системе, но, главным образом, их качественную, принципиальную особенность. Такой характеристической особенностью любой сложной системы является неопределенность, присущая ее структуре, параметрам и взаимодействиям элементов как между собой, так и с окружающей средой, в которой эта система существует и функционирует. В условиях, когда сложность рассматриваемых систем возрастает, а объем доступных данных о них либо слишком мал, либо слишком велик, представление неопределенности в математических моделях и обработка соответствующих данных составляют исключительно важную и сложную проблему. Однако до сих пор в математической теории систем нет единства взглядов на эту ситуацию. Между собой продолжают конкурировать как разрозненные и отдельные, с одной стороны, — методы теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики и основанные на них методы теории оптимальной фильтрации и параметрической идентификации, и с другой стороны, — методы теории нечетких множеств и систем, основанные на знаниях. Методы нечеткой математики и теории возможностей с трудом прокладывают себе путь в теорию систем, поскольку часто встречают скепсис и недоверие со стороны сторонников классической математики и приверженцев теории вероятностей.

Вместе с тем, чтобы справиться с проблемой неопределенности при анализе и, особенно, при синтезе систем, специалист по системам (системный аналитик) должен непредвзято относиться ко всем методам и теориям, способным помочь. Он должен хорошо ориентироваться в их возможностях и уметь осознанно выбирать и комбинировать те методы и подходы, которые приносят успех в решении конкретных задач. Задачи, которые специалисту предстоит решать в условиях априорной неопределенности и возможности непредвиденных, иногда резких изменений в свойствах самой системы и/или окружающей среды, разнообразны. Они заключаются в том, чтобы обоснованно принимать решения по ряду взаимосвязанных вопросов:

- ▹ как строить математическую модель системы;
- ▹ как планировать эксперимент для наблюдения за системой;
- ▹ как оценивать и предсказывать состояние системы;
- ▹ как вырабатывать закон управления состоянием системы и как ею управлять;
- ▹ как обнаруживать возможные нарушения в модели системы;
- ▹ как диагностировать (классифицировать, распознавать) случившиеся нарушения в системе;
- ▹ как идентифицировать обновленную (после нарушения) модель;
- ▹ как осуществлять целесообразную реорганизацию законов оценивания состояния и управления системой и, наконец,
- ▹ как обеспечивать устойчивую в вычислительном отношении и экономичную в смысле затрат реализацию вышеуказанных алгоритмов и законов функционирования системы.

Для строгого решения этих вопросов по существу, пригодны только математические методы. Следующими за детерминистскими моделями должны изучаться стохастические (вероятностные) модели, а затем — нечеткие модели.

Справедливости ради надо сказать, что — параллельно с работой специалистов (системщиков-математиков) над теоретическим решением вышеуказанных вопросов — множество обобщающих работ философского плана проводили представители других наук: физики, философы, медики, биологи и даже геологи (имеются в виду те, кто изучал строение кристаллов как сложных структур). Их работы вносили свой вклад, поскольку систематизировали взгляды и терминологию, заставляли искать единство во внешнем разнообразии систем и законов. Благодаря совместным усилиям всех специалистов, к настоящему времени теория систем и системный анализ, можно сказать, пережили пору терминологических, по большей мере, философских поисков.

Однако, теория разрослась. Она аккумулировала в себе столь большое число многообразных идей и методов, что сейчас уже наблюдается стремление выделить в этом многообразии некую объединяющую идею и таким образом, возможно, скорректировать название и академическую программу этой комплексной дисциплины. Такая идея уже заявила о себе, и она выражается простым и, кажется, удачным термином: «Инженерия данных»[1]. Этот термин имеет в виду объединение всевозможных методов извлечения информации из данных, методов обработки данных и методов их интерпретации для принятия решений по всем вышеуказанным вопросам в сложных системах с неопределенностью. Эта идея действительно оправдана, так как единственное, без чего невозможно решить любой из вопросов системного анализа и синтеза, — данные, каким-либо образом зарегистрированные и затем — обрабатываемые. Каждая задача системного анализа или синтеза требует данных и располагает своим способом — имеет свою парадигму — обработки данных с целью извлечения из них информации и ее использования в алгоритмах и законах.

Таким образом, освоение материала, отобранного для данного пособия, позволит студенту двинуться дальше и на этой основе приобрести не только широкий кругозор, но и глубокие, «системные» взгляды на всю совокупность задач и методов этой увлекательной науки.

[1] O. Wolkenhauer. *Data Engineering: Fuzzy Mathematics in Systems Theory and Data Analysis.* John Wiley and Sons, Inc., New York, 2001.

Библиографический список

1. Андриевский, Б. Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. — СПб. : Наука, 2000.

2. Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. — М. : Наука, 1965.

3. Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. — М. : Наука, 1965.

4. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1974.

5. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987.

6. Медич, Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. — М. : Энергия, 1973.

7. Острем, К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления / К. Ю. Острем. — М. : Мир, 1973.

8. Пугачев, В. С. Основы стохастической теории автоматических систем / В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, Л. Г. Евланов. — М. : Наука, 1980.

9. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. — М. : Наука, 1979.

10. Соломенцев, Е. Д. Функции комплексного переменного и их применения / Е. Д. Соломенцев. — М. : Высшая школа, 1988.

Учебное издание
Семушин Иннокентий Васильевич,
Цыганова Юлия Владимировна

Детерминистские модели динамических систем
Учебное пособие

Редактор Н. А. Евдокимова

Оригинал-макет изготовлен в системе LaTeX2ε.

Подписано в печать 27.12.2006.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 4,65.
Гарнитура Computer Modern.
Тираж 100 экз. Заказ

Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.

Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.