

О МЕТОДАХ РЕАЛИЗАЦИИ UD-ФИЛЬТРА

Аннотация. Рассматриваются эффективные в вычислительном плане реализации дискретного фильтра Калмана – *UD-алгоритмы в последовательной и матричной ортогонализованной формах*. Их преимущества: 1) устойчивость по отношению к ошибкам машинного округления; 2) отсутствие операции извлечения квадратного корня; 3) избавление от операции матричного обращения на каждой итерации алгоритма; 4) компактность и удобство записи ортогонализованной формы UD-фильтра. В работе построена новая форма расширенного ортогонализованного UD-фильтра. Для вычислений на каждом шаге работы фильтра применяется модифицированная взвешенная ортогонализация Грама-Шмидта (MWGS-ортогонализация). Особенности рассмотренных методов иллюстрированы численными примерами.

Ключевые слова: стохастические дискретные линейные системы, оптимальная дискретная фильтрация, фильтр Калмана, устойчивые реализации дискретного фильтра, UD-фильтр.

Abstract. The numerically efficient implementations of the discrete Kalman filter – UD algorithms in sequential and matrix array forms – are considered. Their benefits are: 1) the robustness of computations against roundoff errors; 2) the lack of square-root operation; 3) the disposal of matrix inverse operation on each iteration of algorithm; 4) compact and convinient orthogonal array form of the UD filter. New form of extended orthogonal array UD filter has been constructed in the article. For the process of computation the modified weighted Gram-Schmidt orthogonalization (MWGS) is implemented on each step of filter data updating. The features of considered methods are illustrated by numerical examples.

Keywords: stochastic discrete linear systems, optimal discrete filtering, Kalman filter, robust implementations of discrete filter, UD filter.

Введение

В начале 1960х гг. Рудольф Эмиль Калман [1] предложил своё знаменитое решение задачи оптимального линейного оценивания, и это решение в дальнейшем получило название *фильтр Калмана* (ФК). Первоначально ФК был построен для решения задач из области аэронавтики, однако со временем он стал применяться в

тельном плане решения задачи параметрической идентификации дискретных моделей линейных стохастических систем. Подобные методы построения адаптивных ортогонализованных фильтров разработаны в [22-24].

Приложение

Модифицированная взвешенная ортогонализация Грама-Шмидта

Алгоритм MWGS-ортогонализации был построен А. Бьёрк (A. Björck [25]). Доказано [26], что данный алгоритм эффективнее в вычислительном плане, чем классическая ортогонализация Грама-Шмидта, и точность вычислений по нему сравнима с точностью вычислений по известному алгоритму триангуляризации Хаусхолдера.

В алгоритме взвешенной ортогонализации рассматривается ортогональность m -векторов b_i и b_j относительно весовой матрицы D_w :

$$b_i^T D_w b_j = \begin{cases} \beta_i > 0, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Процесс MWGS-ортогонализации набора n линейно независимых m -векторов a_1, a_2, \dots, a_n относительно весовой матрицы D_w приводит к верхней треугольной $(n \times n)$ -матрице U такой, что $A^T = UB^T$, т. е.

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix},$$

где вектора b_i есть столбцы матрицы MWGS-преобразования B и

$$B^T D_w B = \underset{1 \leq i \leq n}{\text{Diag}}(\beta_i) = D_\beta.$$

Список литературы

1. Kalman R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Trans. of the ASME-Journal of Basic Engineering, 82 (Series D): 35-45. 1960.
2. Potter J. E. and Stern R. G. Statistical Filtering of Space Navigation Measurements // Proceedings of 1963 AIAA Guidance and Control Conference, AIAA, New York, 1963.

3. **Bierman G. J.** Factorization methods for discrete sequential estimation. N Y: Academic Press, 1977. – 255 p.
4. **Maybeck P. S.** Stochastic models, estimation and control (Volume 1). Academic Press, Inc., 1979. – 423 p.
5. **Kailath T., Sayed A. H., Hassibi B.** Linear estimation. New Jersey: Prentice Hall, 2000. – 854 p.
6. **Grewal M. S., Andrews A. P.** Kalman filtering: theory and practice. New Jersey: Prentice-Hall, 2001. – 410 p.
7. **Огарков М. А.** Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. М.: Энергоатомиздат, 1990. – 208 с.
8. Семушкин И. В., Цыганова Ю. В., Кулникова М.В. и др. Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения: коллективная монография под. ред. проф. И. В. Семушкина. – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2011. – 298 с.
9. Семушкин И. В. Вычислительные методы алгебры и оценивания: учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 366 с.
10. **Bierman G. J. and Thornton C. L.** Numerical Comparison of Kalman Filter Algorithms: Orbit Determination Case Study // Automatica. 1977. Vol. 13. P. 23-35.
11. **Фомин В. Н.** Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984. – 288 с.
12. **Льюинг Л.** Идентификация систем. Теория для пользователя / Под. ред. Я. З. Цыпкина. М: Наука, 1991. – 432 с.
13. **Саридис Дж.** Самоорганизующиеся стохастические системы управления / Под. ред. Я. З. Цыпкина. М: Наука, 1980. – 400 с.
14. **Mosca E.** Optimal, predictive and adaptive control. Prentice-Hall, Inc., 1995. – 477 p.
15. **Thornton C. L.** "Triangular Covariance Factorizations for Kalman Filtering," Ph. D. Thesis, University of California at Los Angeles, School of Engineering, 1976.
16. **Park P., Kailath T.** New square-root algorithms for Kalman filtering // IEEE Trans. Automat. Control. 1995. V. 40. No. 5. P. 895-899.
17. **Jover J. M., Kailath T.** A Parallel Architecture for Kalman Filter Measurement Update and Parameter Estimation // Automatica. 1986. V. 22. No. 1. P. 43-57.

18. Hotop H.-J. New Kalman filter algorithms based on orthogonal transformations for serial and vector computers // Parallel Computing. 1989. No. 12. P. 233-247.
19. Gentleman W. M. Least squares computations by Givens transformations without square roots // J. Inst. Math. Appl. 1973. No. 12. P. 329-336.
20. Dyer P., McReynolds S. Extension of square-root filtering to include process noise // J. Optim. Theory Appl. 1969. No. 3. P. 444-459.
21. Verhaegen M., Van Dooren P. Numerical aspects of different Kalman filter implementations // IEEE Trans. Automat. Contr. 1986. V. AC-31, No 10. P. 907-917.
22. Цыганова Ю.В. Вычисление градиента вспомогательного функционала качества в задаче параметрической идентификации стохастических систем // Автоматика и телемеханика, 2011, № 9, с. 142–160.
23. Цыганова Ю. В., Куликова М. В. Об эффективных методах параметрической идентификации линейных дискретных стохастических систем // АиТ. 2012. № 6. с. 34–51.
24. Tsyanova J. V., Kulikova M. V. State sensitivity evaluation within UD based array covariance filters // IEEE Transactions on Automatic Control. Nov. 2013. (в печати)
25. Björck Å. "Solving least squares problems by orthogonalization," BIT, Vol. 7, P. 1-21, 1967.
26. Jordan T. L. Experiments on error growth associated with some linear least-squares procedures // Math. Comp. 1968. V. 22. P. 579-588.

Список литературы на английском языке

1. Kalman R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Trans. of the ASME-Journal of Basic Engineering, 82 (Series D): 35-45, 1960.
2. Potter J. E. and Stern R. G. Statistical Filtering of Space Navigation Measurements // Proceedings of 1963 AIAA Guidance and Control Conference, AIAA, New York, 1963.
3. Bierman G. J. Factorization methods for discrete sequential estimation. NY: Academic Press, 1977. – 255 p.
4. Maybeck P. S. Stochastic models, estimation and control (Volume 1). NY: Academic

- Press, Inc., 1979. – 423 p.
5. Kailath T., Sayed A. H., Hassibi B. Linear estimation. New Jersey: Prentice Hall, 2000. – 854 p.
 6. Grewal M. S., Andrews A. P. Kalman filtering: theory and practice. New Jersey: Prentice-Hall, 2001. – 410 p.
 7. Ogarkov M. A. Metody Statisticheskogo Otsenivaniya Parametrov Sluchainykh Protsessov. – M.: Energoatomizdat, 1990. – 208 p.
 8. Semushin I. V., Tsyganova Yu. V., Kulikova M. V. and others. Adaptive Systems of Filtering, Control, and Fault Detection: Collective monograph ed. by Prof. I. V. Semushin. – Ulyanovsk: UISSU Publishers, 2011. – 298 p.
 9. Semushin I. V. Computational Methods of Algebra and Estimation: textbook. – Ulyanovsk: UISTU, 2011. – 366 p.
 10. Bierman G. J. and Thornton C. L. Numerical Comparison of Kalman Filter Algorithms: Orbit Determination Case Study // Automatica. 1977. Vol. 13. P. 23-35.
 11. Fomin V. N. Rekkurentnoe otsenivanie i adaptivnaya fil'tratsiya. M.: Nauka, 1984. – 288 p.
 12. Ljung L. System Identification. Theory for the User. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1987. – 255 p.
 13. Saridis G. N. Self-organizing control of stochastic systems. NY: M. Dekker, 1977. – 488 p.
 14. Mosca E. Optimal, predictive and adaptive control. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1995. – 477 p.
 15. Thornton C. L. "Triangular Covariance Factorizations for Kalman Filtering," Ph. D. Thesis, University of California at Los Angeles, School of Engineering, 1976.
 16. Park P., Kailath T. New square-root algorithms for Kalman filtering // IEEE Trans. Automat. Control. 1995. V. 40. No. 5. P. 895-899.
 17. Jover J. M., Kailath T. A Parallel Architecture for Kalman Filter Measurement Update and Parameter Estimation // Automatica. 1986. V. 22. No. 1. P. 43-57.
 18. Hotop H.-J. New Kalman filter algorithms based on orthogonal transformations for serial and vector computers // Parallel Computing. 1989. No. 12. P. 233-247.

19. Gentleman W. M. Least squares computations by Givens transformations without square roots // J. Inst. Math. Appl. 1973. No. 12. P. 329-336.
20. Dyer P., McReynolds S. Extension of square-root filtering to include process noise // J. Optim. Theory Appl. 1969. No. 3. P. 444-459.
21. Verhaegen M., Van Dooren P. Numerical aspects of different Kalman filter implementations // IEEE Trans. Automat. Contr. 1986. V. AC-31, No 10. P. 907-917.
22. Tsyganova Yu. V. Computing the Gradient of the Auxiliary Quality Functional in the Parametric Identification Problem for Stochastic Systems // Automation and Remote Control, 2011, Vol. 72, No. 9, pp. 1925-1940.
23. Tsyganova Yu. V., Kulikova M. V. On efficient parametric identification methods for linear discrete stochastic systems // Automation and Remote Control, 2012, Vol. 73, No. 6, pp. 962-975.
24. Tsyganova J. V., Kulikova M. V. State sensitivity evaluation within UD based array covariance filters // IEEE Transactions on Automatic Control. Nov. 2013. (in press)
25. Björck Å. "Solving least squares problems by orthogonalization," BIT, Vol. 7, P. 1-21, 1967.
26. Jordan T. L. Experiments on error growth associated with some linear least-squares procedures // Math. Comp. 1968. V. 22. P. 579-588.

Работа выполнена в рамках Государственных заданий Министерства образования и науки РФ (шифры 1.919.2011 и 6.3072.2011), поддержанная Грантом РФФИ (шифр 13-01-97035).

Цыганова Юлия Владимировна,
кандидат физико-математических
наук, доцент кафедры информацион-
ных технологий Ульяновского госу-
дарственного университета
E-mail: jvt.ulsu@gmail.com

Tsyganova Yuliya Vladimirovna,
candidate of physico-mathematical
sciences, associate professor, chair of
information technologies, Ulyanovsk
State University