

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

**Создание в Нижегородском государственном университете
межфакультетской магистратуры "Математические модели,
методы и программное обеспечение современных
компьютерных технологий"**

**Образовательный комплекс.
Современные методы принятия
оптимальных решений**

План лабораторного практикума

Авторский коллектив

Руководитель: д.т.н., проф. Гергель В.П.

Зам. руководителя,
ответственный исполнитель: к.ф.-м.н., доц. Гришагин В.А.

Главный разработчик: к.ф.-м.н., доц. Городецкий С.Ю.

Разработчик: к.ф.-м.н., доц. Маркина М.В.

Цели и задачи лабораторного практикума

Расширенный лабораторный практикум поддерживает и развивает теоретический материал курса проведением лабораторных работ по следующим основным направлениям.

1. Изучение сходимости и эффективности одномерных алгоритмов глобального поиска.
2. Исследование процессов решения многомерных задач многоэкстремальной оптимизации.
3. Вычислительные эксперименты по практическому освоению алгоритмов поиска локально-оптимальных решений.

Выполнение каждой лабораторной работы завершается составлением отчета о проведенных исследованиях с использованием результатов расчетов и иллюстраций, полученных с помощью программных лабораторий комплекса.

Раздел 1. Изучение сходимости и эффективности одномерных алгоритмов глобального поиска

Для выполнения лабораторных работ указанного раздела используется учебно-исследовательская система АБСОЛЮТ. При использовании данной системы может быть рекомендована следующая схема проведения лабораторных занятий.

Лабораторная работа 1.1.

Общее знакомство с возможностями системы

Задание 1. *Общие принципы использования системы АБСОЛЮТ.*

Основные правила взаимодействия с системой. Организация управления при помощи манипулятора мышь. Способы получения справочной информации.

Задание 2. *Освоение способов задания минимизируемой функции.*

Выбор задачи из стандартного набора. Генерация реализаций случайной функции. Аналитическое задание в виде формульного выражения. Изменение функции при помощи графического редактора. Просмотр справочной информации по выбранным постановкам оптимизационных задач.

Задание 3. *Изучение метода полного перебора.*

Проведение вычислительных экспериментов с методом полного перебора для разных задач многоэкстремальной оптимизации. Понятие "всюду плотной" сходимости минимизирующих последовательностей. Характеристика полного перебора как метода нулевого порядка (порождаемые методом минимизирующие последовательности не зависят от результатов проводимых итераций).

Изучение графических форм комплекса АБСОЛЮТ для наблюдения за минимизирующими последовательностями:

– форма "Распределение точек испытаний и значений минимизируемой функции" и определение при ее помощи предельных точек минимизирующей последовательности;

– форма "Траектория поиска по координате и по значению функции" и оценка по этому графику стадий глобального поиска (начальное распределение точек испытаний, выделение перспективных подобластей, поиск в окрестности глобального минимума);

– форма "Плотность поиска по координате и по значению функции" и характеристика при ее помощи эффективности оптимизационных методов (равномерное распределение итерационных точек по области поиска, концентрация испытаний в окрестности глобального минимума).

Правила включения и отключения графических форм.

Задание 4. *Изучение метода случайного поиска.*

Проведение вычислительных экспериментов с методом случайного поиска. Сопоставление алгоритма с методом полного перебора. Оценка равномерности распределения точек испытаний при помощи графической формы "Плотность (гистограмма) поиска по координате".

Изучение способов управления поиском в комплексе АБСОЛЮТ. Изменение темпа показа. Пошаговый режим исполнения оптимизационных итераций.

Лабораторная работа 1.2.

Изучение характеристических алгоритмов глобального поиска

Задание 5. *Изучение метода ломаных.*

Проведение вычислительных экспериментов с методом ломаных (Пиявского). Знакомство с подходом, на основе которого разработан алгоритм. Понятие константы Липшица. Интерпретация параметра метода как оценки константы Липшица. Запуск метода для одной и той же задачи оптимизации при разных значениях параметра (равным константе Липшица, превышающим константу Липшица, задающим константу Липшица с недостатком).

Задание 6. *Изучение одношагового байесовского алгоритма.*

Проведение вычислительных экспериментов с методом Жилинскаса. Общее представление о модели минимизируемой функции, использованной при разработке алгоритма. Эвристическое правило локального уточнения. Минимизация разных задач многоэкстремальной оптимизации. Оценка ситуаций поиска, при которых поведение функции не соответствует применяемому эвристическому правилу.

Задание 7. *Изучение метода Кушнера.*

Проведение вычислительных экспериментов с методом Кушнера. Общее представление о модели минимизируемой функции, использованной при разработке алгоритма. Минимизация разных задач многоэкстремальной оптимизации при одном и том же значении параметра метода. Оценка поведения работы метода при повышении необходимой точности нахождения глобального минимума. Обеспечение сходимости метода за счет всюду плотной сходимости порождаемых алгоритмом минимизирующих последовательностей.

Изучение способов высветки минимизируемой функции в процессе поиска. Прерывание работы метода. Показ кусочно-линейной модели функции по результатам проведенных итераций поиска.

Задание 8. *Изучение правил использования механизма увеличительного стекла (лупы).*

Включение режима. Выбор кратности увеличения. Перемещение лупы. Установка увеличительного стекла на лучшую точку. Перемещение визиера. Установка лупы по визиру.

Оценка плотности распределения точек проведенных испытаний для всех ранее рассмотренных алгоритмов в интервалах различного поведения минимизируемой функции (интервалы монотонности, интервалы с точками локальных минимумов, интервалы с точками глобального экстремума). Классификация методов по свойствам сходимости порождаемых минимизирующих последовательностей ("всюду плотная" сходимость, сходимость только к точкам, обладающим свойством экстремальности, сходимость ко всем точкам глобального минимума и только к ним).

Лабораторные работы 1.3-1.4.

Изучение информационно-статистических алгоритмов многоэкстремальной оптимизации

Задание 9. *Изучение алгоритма глобального поиска.*

Проведение вычислительных экспериментов с базовым методом информационно-статистической теории многоэкстремальной оптимизации - алгоритмом глобального поиска Стронгина. Общее представление о модели минимизируемой функции, использованной при разработке метода. Констатация факта двухсторонней сходимости к предельным точкам минимизирующих последовательностей. Оценка плотности распределения точек проведенных испытаний.

Задание 10. *Изучение численной схемы оценки константы Липшица.*

Использование абсолютных значений относительных первых разностей для оценки константы Липшица. Интерпретация параметра метода как указания необходимой степени надежности поиска. Оценка влияния значения параметра на скорость сходимости метода. Минимизация задач многоэкстремальной оптимизации при разных значениях параметра.

Задание 11. *Применение алгоритма для оптимизации задач специального вида.*

Применение метода для специальных классов задач оптимизации: линейной, кусочно-линейной (модуля), квадратичной, и т.д. Оценка соответствия используемой в методе модели минимизируемой функции решаемой задачи оптимизации.

Задание 12. *Изучение монотонного алгоритма глобального поиска.*

Проведение вычислительных экспериментов с монотонным алгоритмом глобального поиска. Интерпретация применяемого в методе правила преобразования функции как средства приведения в соответствие модели минимизируемой функции, использованной при выводе алгоритма, и решаемой задачи. Сравнение базового метода и монотонного алгоритма при решении одних

и тех же экстремальных задач (в качестве контрольной задачи может быть выбрана, например, функция № 1 стандартного набора).

Задание 13. *Изучение локально-адаптивного алгоритма глобального поиска.*

Построение при помощи графического редактора функций задач с разным количеством локальных минимумов ("мало-экстремальные" задачи оптимизации, существенно многоэкстремальные функции). Численные эксперименты с локально-адаптивным алгоритмом глобального поиска. Интерпретация степени локальности как способа задания априорной информации о решаемой задаче оптимизации.

Сравнение базового метода и адаптивного алгоритма при решении одних и тех же экстремальных задач (для контрольного примера можно использовать функцию № 5 стандартного набора).

Задание 14. *Изучение смешанного алгоритма глобального поиска.*

Построение при помощи графического редактора функций задач с разными зонами притяжения для точек глобального минимума. Численные эксперименты со смешанным алгоритмом глобального поиска. Минимизация функций при разных сочетаниях локальной и глобальной компонент метода. Вариация моментов включения локальных схем. Сравнение базового метода и смешанного алгоритма при решении одних и тех же экстремальных задач (в качестве контрольных задач целесообразно использовать функции № 2 и № 3 стандартного набора).

Задание 15. *Изучение метода с локальной оценкой разностей.*

Построение при помощи графического редактора функций задач с интервалами различного поведения минимизируемой функции (плавное изменение значений функции, резкий подъем или спад и т.п.). Численные эксперименты с алгоритмом глобального поиска при локальном оценивании константы Липшица (модификация Сергеева). Поведение метода при несоответствии модели поведения функции и решаемой задачи. Сравнение базового метода и алгоритма с локальной оценкой разностей при решении одних и тех же экстремальных задач (для получения различающихся эффектов можно выбрать для решения функции № 2 и № 5 стандартного набора).

Задание 16. *Решение задач, имеющих несколько точек глобального минимума.*

Оценка сходимости информационно-статистических алгоритмов глобального поиска ко всем точкам наименьшего значения минимизируемой функции.

Задание 17. *Оценка устойчивости информационно-статистических алгоритмов.*

Проведение вычислительных экспериментов для выявления свойства инвариантности минимизируемых последовательностей, порождаемых информационно-статистическими алгоритмами глобального поиска при линейных преобразованиях минимизируемой функции. Устойчивость глобального поиска при малых вариациях решаемой задачи оптимизации.

Лабораторная работа 1.5.

Сравнение эффективности алгоритмов глобального поиска

Задание 18. *Сравнение методов полного перебора и случайного поиска.*

Выполнение минимизации нескольких задач многоэкстремальной оптимизации для сравнения методов полного перебора и случайного поиска. Выявление различий в характере "всюду плотной" сходимости минимизирующих последовательностей, порождаемых сравниваемыми методами.

Задание 19. *Сравнение методов нулевого порядка и алгоритма Кушнера.*

Сравнить один из методов нулевого порядка (полный перебор и случайный поиск) с алгоритмом Кушнера. Представление о возможности неравномерного распределения точек испытаний при "всюду плотной" сходимости минимизирующих последовательностей.

Задание 20. *Сравнение алгоритма Кушнера и метода ломаных.*

Выполнение вычислительных экспериментов для сравнения алгоритма Кушнера и метода ломаных (Пиявского). Выявление факта сходимости минимизирующих последовательностей, порождаемых методом Пиявского, только к экстремальным точкам решаемых задач оптимизации.

Задание 21. *Сравнение метода ломаных и алгоритма глобального поиска.*

Выполнение вычислительных экспериментов для сравнения метода ломаных и алгоритма глобального поиска. Оценивание по результатам проведенных вычислительных экспериментов экономичности каждого из сравниваемых методов многоэкстремальной оптимизации.

Задание 22. *Сравнение информационно- статистических алгоритмов глобального поиска.*

Выполнение вычислительных экспериментов для имеющихся в составе комплекса АБСОЛЮТ информационно- статистических алгоритмов глобального поиска (сравниваемые пары методов в этих экспериментах следует формировать выбором одного и того же алгоритма, для которого устанавливаются разные значения параметров). Оценивание влияния значений коэффициентов методов на характер сходимости порождаемых минимизирующих последовательностей. Формулирование на основе проведенных экспериментов рекомендаций по выбору величин этих параметров.

Раздел 2. Исследование процессов решения многомерных задач многоэкстремальной оптимизации

Для выполнения лабораторных работ указанного раздела используется учебно-исследовательская программная система MULTEX.

Лабораторный практикум данного раздела может быть реализован в рамках следующей схемы проведения занятий.

Лабораторная работа 2.1.

Диалоговая среда системы MULTEX

Задание 1. *Общие принципы работы с системой MULTEX.*

Основные правила взаимодействия с системой в диалоговом режиме. Способы получения справочной информации.

Задание 2. *Освоение способов формирования оптимизационной задачи.*

Освоение способов задания области поиска, минимизируемой функции и ограничений. Выбор задачи из стандартного набора. Аналитическое задание в

виде формульного выражения. Визуализация задачи и ее функционалов. Построение поверхности целевой функции.

Задание 3. *Изучение визуальных форм отображения процесса решения задачи.*

Проведение вычислительных экспериментов с методом полного перебора для стандартных задач многоэкстремальной оптимизации. Распространение свойства "всюду плотной" сходимости минимизирующих последовательностей на многомерный случай. Построение распределения точек поисковых испытаний. Динамическое построение сечений и редуцированных функций.

Лабораторная работа 2.2.

Характеристические алгоритмы глобального поиска в схеме многошаговой редукции размерности

Задание 4. *Изучение метода ломаных.*

Проведение вычислительных экспериментов с адаптивным методом ломаных (Пиявского). Конструирование на основе редактора формул и решение многоэкстремальных задач без ограничений. Оценка поведения работы метода при повышении необходимой точности нахождения глобального минимума. Оценка влияния параметра метода на надежность поиска.

Использование визуального ряда диаграмм для анализа процесса поиска. Построение диаграммы линий уровня и точек итераций для исследования структуры многошаговой схемы (оптимизация по сечениям) и многомерной сходимости метода (концентрация испытаний в окрестности глобального минимума). Визуальная оценка изменения плотности испытаний при изменении параметра метода и точности поиска. Анализ сходимости для функций с несколькими одинаковыми экстремумами.

Задание 5. *Исследование алгоритма глобального поиска АГП.*

Проведение вычислительных экспериментов с базовым информационно-статистическим алгоритмом глобального поиска – методом Стронгина. Выбор для анализа встроенных в систему сложных многоэкстремальных функций из класса функций Гришагина. Конструирование и исследование минимаксных задач.

Оценка плотности распределения точек проведенных испытаний. Анализ многомерного поиска через динамическую демонстрацию одномерной оптимизации в сечениях. Минимизация задач многоэкстремальной оптимизации при различных значениях параметра метода и точности поиска.

Лабораторная работа 2.3.

Многоэкстремальные задачи с невыпуклыми ограничениями. Индексный метод.

Задание 6. *Изучение многошаговой схемы редукции на основе индексного метода.*

Формирование многоэкстремальных задач со сложными невыпуклыми ограничениями. Конструирование ограничений с помощью редактора формул для создания допустимых областей различной конфигурации. Использование многоэкстремальных функций из класса функций Гришагина в качестве ограничений для создания несвязных областей.

Решение задач с ограничениями методом перебора, методом ломаных и информационно-статистическим алгоритмом АГП. Анализ распределения точек испытаний в допустимой и недопустимой области. Послойный просмотр диаграмм. Отключение и подключение слоев. Решение задач с различной комбинацией слоев диаграммы.

Лабораторная работа 2.4.

Сравнение эффективности многомерных алгоритмов глобального поиска.

Задание 7. Сравнение метода полного перебора и метода ломаных.

Решение нескольких задач многоэкстремальной оптимизации для сравнения алгоритма полного перебора и метода ломаных. Выявление фундаментальных различий в особенностях сходимости последовательностей испытаний, порождаемых методами, как результат распространения основных положений характеристической теории сходимости на многомерный случай ("всюду плотная" сходимость и сходимость только к экстремальным точкам). Количественное сравнение эффективности методов посредством решения методами одной и той же задачи при одинаковой точности в условии останова и сопоставления затрат на поиск (количества испытаний).

Задание 8. Сравнение методов оптимизации липшицевых функций

Выполнение вычислительных экспериментов для сопоставления эффективности метода ломаных и информационно-статистического алгоритма глобального поиска. Визуальная оценка плотностей размещения испытаний. Оценивание по результатам проведенных вычислительных экспериментов экономичности каждого из сравниваемых методов многоэкстремальной оптимизации.

Раздел 3. Модели и методы поиска локально-оптимальных решений

Для выполнения лабораторных работ по указанному разделу используется учебно-исследовательская система LocOpt. Положенный в основу лабораторного практикума теоретический материал представлен в главе 4 электронного учебника по курсу "Современные методы принятия оптимальных решений".

Лабораторная работа 3.1.

Знакомство с системой. Постановка задач и исследование простейших алгоритмов — 2 часа

Задание 1. Знакомство с назначением и интерфейсом системы LocOpt.

Изучение интерфейса и основного инструментария системы.

Задание 2. Постановка задач локальной оптимизации.

Изучение их структуры. Исследование стандартного набора функций и стандартного набора задач с использованием инструментов построения изолиний и поверхностей. Исследование влияния параметров функций и ограничений на структуру задач. Использование конструктора функций и задач для формирования собственного набора задач с заданными свойствами: овражность

функций, неположительность кривизны поверхности, не выпуклость, не односвязность области, многомерность.

Задание 3. *Исследование свойств метода наискорейшего градиентного поиска и метода Ньютона.*

Целью выполнения этого задания является анализ работы двух простейших алгоритмов оптимизации. Для градиентного метода необходимо исследовать влияние на его работу параметров одномерного поиска, а также степени «овражности» функции. Нужно сопоставить скорость убывания функции в этом методе и методе Ньютона, а также проанализировать поведение метода Ньютона на разных задачах, выделить задачи со сложным поведением этого метода, дать объяснение наблюдаемым эффектам, используя инструменты для анализа вида поверхностей и сечений функций. Требуется, в частности, изучить влияние нарушения гладкости задачи (например, из-за использования недостаточно гладкой штрафной добавки) на поведение этих методов.

Лабораторная работа 3.2.

Исследование методов решения задач без функциональных ограничений — 4 часа

Задание 4. *Исследование группы методов второго порядка.*

Изучение влияние регулировки шага и модификации матриц Гессе по положительной определенности на поведение модифицированного метода Ньютона, сопоставление со стратегией обычного метода Ньютона. Подбор стандартных и формирование своих постановок задач оптимизации, в которых наблюдается существенно различное поведение классического и модифицированного методов. Исследование вида построенных модифицированных матриц и его зависимости от параметров модификации.

Задание 5. *Исследование группы методов первого порядка.*

Исследование нескольких подгрупп методов: квазиньютоновских, сопряженных градиентов, метода растяжения пространства.

Изучение квазиньютоновских методов (методов переменной метрики) в сопоставлении с модифицированным методом Ньютона. Исследование их способности оценивать матрицу Гессе без ее вычисления, сопоставление траекторий поиска и скорость сходимости.

Сопоставление метода сопряженных градиентов с методом наискорейшего градиентного поиска, а также с методами переменной метрики.

Сравнение метода растяжения пространства с методом сопряженных градиентов и с методами переменной метрики.

Выводы на основании выполненных исследований о поисковых возможностях методов.

Задание 6. *Исследование методов прямого поиска.*

Тестирование метода Хука–Дживса и Нелдера–Мида на различных задачах, особенно задачах с криволинейными оврагами, а также многомерными нелинейными многообразиями медленного изменения функции. Исследование влияния параметров методов на их работу.

Задание 7. *Изучение влияния границ области на поведение методов.*

Построение специальных примеров с двумя и более переменными, в которых процесс поиска временно выходит на границы области, порождаемой двусторонними ограничениями на переменные, а затем покидает их. Исследование методов на этих примерах.

Задание 8. *Сопоставительное исследование лучших методов из разных групп.*

Сравнение точности решения задач, а также вычислительных затрат в методах прямого поиска и в лучших методах первого и второго порядков. Результатом должны являться общие сопоставительные выводы о возможностях методов, основанных на использовании различных моделей поведения целевой функции.

Лабораторная работа 3.3.***Исследование влияния функциональных ограничений на поведение методов локального поиска — 3 часа***

Задание 9. *Исследование влияния вводимых ограничений на структуру допустимой области.*

Построение с помощью конструктора системы LocOpt примеров задач с допустимыми областями разной структуры таким образом, чтобы оказались получены допустимые области разного типа: выпуклые, не выпуклые, с линейными границами, не односвязные и т.д. Точка глобального минимума должна находиться в разных примерах как внутри допустимой области, так и на ее границе. Объединение построенных примеров в набор задач для их дальнейшего исследования.

Задание 10. *Влияние на структуру минимизируемой функции в задаче со штрафом параметров штрафа.*

Изучение вопроса о влиянии порядка гладкости функции штрафа на точность оценивания решения при фиксированном штрафе. Исследование вопроса о работоспособности локальных методов при не дифференцируемом на границе допустимой области штрафе (основная часть исследования проводится в режиме с фиксированным штрафом).

Задание 11. *Использование методов локальной оптимизации в сочетании с методом штрафов.*

Исследование сходимости метода внешнего штрафа, влияния параметров настройки коэффициента штрафа. Изучение эффективности различных локальных методов в сочетании с методом штрафа. Подбор примеров, показывающих возможность потери решения при использовании локальных методов.

Лабораторная работа 3.4.***Решение задач со сложной структурой с использованием методов равномерного покрытия — 1 часа***

Исследование возможности решения задач поиска условного глобального минимума с помощью сочетания простых методов равномерного покрытия области, методов локальной оптимизации и метода внешнего штрафа. Оценка надежности и точности решения.

Лист регистрации изменений

Дата	Автор	Комментарии
08.12.2001	Гергель В.П., Городецкий С.Ю.	Создание документа
17.01.2002	Гергель В.П.	Корректировка формата
08.05.02	Городецкий С.Ю.	Корректировка содержания раздела 3