МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ. Часть 1

Практическое руководство

По специальности

010501 – Прикладная математика и информатика

ВОРОНЕЖ

2004

Утверждено научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики, протокол № 1 от 30 сентября 2004 года.

Составители: Белоусова Е.П.,
Коструб И.Д.

Практическое руководство подготовлено на кафедре нелинейных колебаний факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 3-го курса всех форм обучения факультета прикладной математики, информатики и механики.

Практическое руководтсво написано по одному из разделов курса "Методы оптимизации"и посвящено нелинейному программированию в задачах, содержащих одну переменную и приводящихся к ним. Это руководство предназначено для организации аудиторной, лабораторной и самостоятельной работы студентов.

В каждом параграфе приводятся теоретические сведения, необходимые для решения сформулированных задач.

Приводятся образцы решения задач, написания алгоритмов некоторых методов, а также задания для самостоятельной работы.

Введение

Напомним кратко известные сведения из математического анализа, позволяющие решать приведенные ниже и многие другие задачи оптимизации функций одной переменной как на отрезке, так и на всей числовой прямой.

Отыскание стационарных точек

Приведем определения локального максимума и локального минимума функции.

Пусть функция $f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности точки c. Тогда эта функция имеет в точке c **локальный максимум** (или соответственно **локальный минимум**), если существует такая окрестность точки c, что для всех точек этой окрестности значение $f(c)$ является наибольшим (или соответственно наименьшим) среди всех значений $f(x)$ этой функции.

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием **локальный экстремум.**

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке c и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x) = 0$.Точки, в которых производная $f'(x)$ функции $f(x)$ обращается в нуль, называются стационарными точками функции. Каждая стационарная точка - это точка возможного экстремума функции. Однако сделать заключение о том, что в данной стационарной точке на самом деле имеется экстремум, можно лишь на основании дополнительного исследования, для проведения которого существуют достаточные условия экстремума.

Первое достаточное условие экстремума

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c, и пусть точка c является стационарной точкой функции $f(x)$. Тогда, если в пределах указанной окрестности производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки c и отрицательна (положительна) справа от точки c, то функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (минимум). Если же в пределах указанной окрестности точки c производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки c, то экстремума в точке c нет.

Второе достаточное условие экстремума

Пусть функция $f(x)$ имеет в данной стационарной точке c конечную вторую производную. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум, если $f''(c) < 0$, и локальный минимум, если $f''(c) > 0$.

Третье достаточное условие экстремума

Существует еще одно достаточное условие локального экстремума, пригодное в случае, когда вторая производная функции в данной стационарной точке обращается в нуль.

Пусть $n \geq 1$ - некоторое нечетное число, и пусть функция $y = f(x)$ имеет производную порядка n в некоторой окрестности точки c и производную порядка $n+1$ в самой точке c. Тогда, если выполнены соотношения

$$f'(c) = f''(c) = ... = f^n(c) = 0, f^{(n+1)}(c) \neq 0,$$

то функция $y = f(x)$ имеет в точке c локальный экстремум, точнее локальный максимум при $f^{(n+1)}(c) < 0$ и локальный минимум при $f^{(n+1)}(c) > 0$.

Теорема. Пусть теперь функция $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c, за исключением, быть может, самой точки c, и непрерывна в точке c.

Тогда в пределах указанной окрестности производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки c и отрицательна (положительна) справа от точки c, то функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (минимум). Если же производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки c, то экстремума в точке c нет.

Общая схема отыскания экстремумов

Переходим к общей схеме отыскания точек локального экстремума. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и ее производная $f'(x)$ существует и непрерывна на этом интервале всюду, кроме конечного числа точек.

Кроме того, предположим, что производная $f'(x)$ обращается в нуль на интервале (a, b) не более чем в конечном числе точек. Иными словами, мы предполагаем, что на интервале (a, b) имеется лишь конечное число точек, в которых производная $f'(x)$ не существует или обращается в нуль. Обозначим эти точки символами $x_1, x_2, ..., x_n (a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b)$. В силу сделанных предположений производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак на каждом из интервалов $(a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b)$. Значит, вопрос о наличии экстремума в каждой из точек $x_1, x_2, ..., x_n$ может быть решен (в утвердительном или отрицательном смысле) при помощи, изложенной выше теоремы.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на сегменте $[a, b]$ и непрерывную на нем. И поставим задачу об отыскании глобальных максимумов и минимумов или, по-другому, об отыскании максимального и минимального значений $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Подчеркнем, что в силу теоремы Вейерштрасса [1] непрерывная функция $f(x)$ обязательно достигает в некоторой точке сегмента $[a, b]$ своего максимального (минимального) значения. Ради определенности остановимся на отыскании максимального значения $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Максимальное значение функции $f(x)$ может достигаться либо во внутренней точке x_0 сегмента $[a, b]$ (тогда она совпадает с одним из локальных максимумов функции $f(x)$), либо на одном из концов сегмента $[a, b]$. Отсюда ясно, что для нахождения максимального значения функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ нужно сравнить между собой значения $f(x)$ во всех точках локального максимума и в граничных точках сегмента a и b. Наибольшее из этих значений и будет максимальным значением $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Аналогично находится и минимальное значение $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Если желательно избежать исследования стационарных точек, то можно просто сравнить между собой значения $f(x)$ во всех стационарных точках и в граничных точках a и b. Наибольшее (наименьшее) из этих значений, очевидно, и будет максимальным (минимальным) значением функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Отметим далее, что если $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ лишь одну точку локального максимума (или лишь одну точку локального минимума), то без сравнения значения $f(x)$ в этой точке с $f(a)$ и $f(b)$ можно утверждать, что это значение является максимальным (минимальным) значением $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором сегменте $[a, b]$. Будем говорить, что эта функция имеет в граничной точке b этого сегмента краевой максимум (краевой минимум), если найдется левая полуокрестность точки b, в пределах которой значение $f(b)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех других значений этой функции.

Аналогично определяются краевой максимум и краевой минимум в граничной точке a сегмента $[a, b]$.

Краевой максимум и краевой минимум объединяются общим названием: **краевой экстремум**.

1. Примеры простейших задач оптимизации

В настоящем пункте приведем ряд примеров решения задач оптимизации функции одной переменной. Для того чтобы приступить к решению этих задач, необходимо сделать ряд предположений, позволяющих формализовать приводимые примеры.

Для формализованной задачи употребляется запись

$$f(x) \to \inf\,(\sup), \quad \text{где} \quad x \in C. \tag{1}$$

Здесь $f : X \to \overline{R}$ - функционал, X - область его определения, $C \subset X$. Все эти обозначения всегда включаются в формализацию задач. Точки $x \in C$ называются допустимыми. Если $C = X$, то задача (1) называется задачей без ограничений, в противном случае задачей с ограничениями.

Далее будем рассматривать задачи следующего вида

$$J(u) \to \inf_{u \in U}. \tag{2}$$

Задача 1. Данное положительное число A разложить на два слагаемых таким образом, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Представим заданное число A в виде суммы двух пока неизвестных нам слагаемых x и y. Тогда получаем уравнение связи

$$A = x + y, \quad \text{где} \quad A > 0. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$f(x, y) = xy$$

и поставим задачу о нахождении ее максимального значения

$$f(x,y) = xy \to \max. \tag{4}$$

Уравнение связи (3) в совокупности с ограничением (4) составляют задачу на безусловный экстремум. Сведем нашу задачу к отысканию максимума фукции одного переменного. Пусть $y = A - x$, тогда, подставляя его в условие (4), получаем

$$f(x) = x(A-x) = -x^2 + Ax \to \max. \tag{5}$$

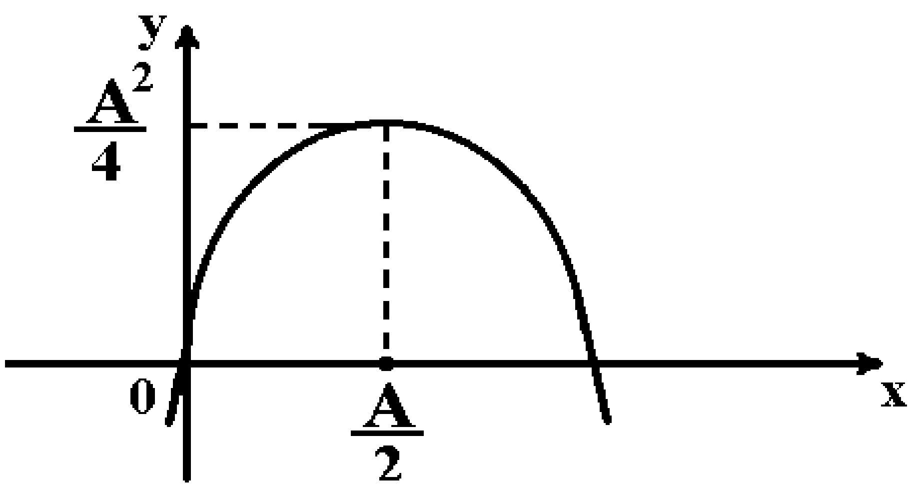

Рис. 1

Считая производную функции $f(x)$ и приравнивая ее к нулю

$$f'(x) = -2x + A = 0,$$

получаем единственную критическую точку $x^* = \frac{A}{2}$. Легко проверить, что x^* - это точка максимума функции $f(x)$, так как вторая производная $f''(x) = -2 <$ < 0. Осталось только посчитать значение функции $f(x,y)$ в точке максимума $(x^*, y^*) = \left(\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right)$. Оно равно, очевидно,

$$f\left(\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right) = \frac{A^2}{4}.$$

Проведенные рассуждения легко проиллюстрировать на рис. (1).

Задача 2. Найти кратчайшее расстояние от заданной точки с координатами $(1,2)$ на плоскости переменных (x_1, x_2) до прямой, уравнение которой имеет вид $2x_1 + 3x_2 = 1$.

Решение. Обозначим через $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ точку с заданными координатами, т.е. $x^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2) \in R^2$. Известно, что расстояние между двумя точками y и z с координатами (y_1, y_2) и (z_1, z_2) вычисляется по формуле

$$\rho(y, z) = \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}. \tag{6}$$

Наша задача заключается в том, чтобы среди всех точек, расположенных на заданной прямой, найти такую, которая вместе с точкой (x_1^0, x_2^0) доставляет минимум функции вида (6). Если точка с координатами (x_1, x_2) принадлежит прямой $2x_1 + 3x_2 = 1$, то вторая координата легко выражается через первую, т.е. $x_2 = (1 - 2x_1)/3$. Это позволяет свести функцию

$$\rho(x^0, x) = \sqrt{(x_1^0 - x_1)^2 + (x_2^0 - x_2)^2}$$

к функции одного переменного x_1, которая примет вид

$$\rho(x^0, x_1) = \sqrt{(x_1^0 - x_1)^2 + \left(x_2^0 - \left(\frac{1 - 2x_1}{3}\right)\right)^2}. \tag{7}$$

Будем искать минимум функции вида (7), где $x_1 \in R$, без каких-либо дополнительных ограничений. Как обычно, для нахождения стационарных точек посчитаем производную от функции ρ по переменной x_1. Имеем

$$\rho'_{x_1} = \frac{\frac{26}{9}x_1 + (\frac{4}{3}x_2^0 - 2x_1^0) - \frac{4}{9}}{2\sqrt{(x_1^0 - x_1)^2 + \left(x_2^0 - \left(\frac{1-2x_1}{3}\right)\right)^2}}.$$

Приравняем теперь эту производную к нулю. Получим

$$\frac{26}{9}x_1 + \left(\frac{4}{3}x_2^0 - 2x_1^0\right) - \frac{4}{9} = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{9}{26}\left(\frac{4}{9} + 2x_1^0 - \frac{4}{3}x_2^0\right).$$

Подставляя координаты заданной точки, можно посчитать теперь координаты стационарной точки. Они соответственно равны:

$$x_1^* = -\frac{1}{13}, \qquad x_2^* = \frac{5}{13}.$$

Легко проверить, что найденная нами точка является точкой минимума. Для этого в данном случае удобнее применить метод интервалов. Очевидно, что при переходе через критическую точку производная функции $\rho(x^0, x_1)$ меняет знак с минуса на плюс. Теперь осталось только посчитать значение функции $\rho(x^0, x)$ в точке (x_1^*, x_2^*). Это значение равно $\frac{\sqrt{637}}{13}$.

Задача 3. В данный шар вписать прямой конус с наибольшей боковой поверхностью.

Решение. Очевидно, что каждый шар определяется своим радиусом. Обозначим его в нашей задаче через R. Известно, что площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле

$$S_{\text{б.п.}} = \pi r L, \tag{8}$$

где r - радиус основания конуса, L - длина его образующей.

В данном случае удобно пояснять решение поставленной задачи на чертеже.

Обозначим через H длину высоты BD треугольника ABC. Тогда величину x можно представить следующим образом

$$x = H - R.$$

Наша задача на данном этапе заключается в том, чтобы представить площадь боковой поверхности конуса как функцию одного переменного, исследовать ее на максимум известным нам способом. Из треугольника AOD выразим радиус основания конуса. Он равен

$$r = \sqrt{R^2 - (H - R)^2}. \tag{9}$$

Из треугольника ABD вычислим длину образующей конуса. Получим

$$L = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{2hR}. \tag{10}$$

Подставим теперь представления (9) и (10) в функцию (8). Она примет вид функции переменной H. А именно,

$$S_{\text{б.п.}}(H) = \pi\sqrt{2HR - H^2}\sqrt{2HR}. \tag{11}$$

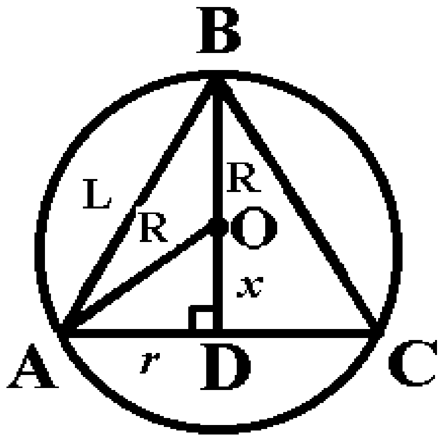

Рис. 2

Исследуем ее на экстремум. Посчитаем производную по H. Она равна

$$S'_{\text{б.п.}}(H) = \pi \frac{8HR^2 - 6H^2R}{2\sqrt{4H^2R^2 - 2H^3R}}.$$

Приравняем теперь ее к нулю и найдем критические точки. Производная $S'_{\text{б.п.}}(H)$ равна нулю, если выполняется равенство

$$8HR^2 - 6H^2R = 0.$$

Отсюда очевидно, что критическая точка имеет вид

$$H = \frac{4}{3}R.$$

Теперь проверим, является ли она точкой максимума для решаемой задачи. В этом случае снова предпочтительнее применить метод интервалов. Очевидно, что при переходе через точку $H = \frac{4}{3}R$ производная функции $S_{\text{б.п.}}$ меняет знак с плюса на минус. Поэтому единственная критическая точка является точкой максимума. Теперь легко посчитать наибольшее значение боковой поверхности вписанного конуса.

Пользуясь формулами (9) и (10), получаем

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R, \quad , L = 2\sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

Поэтому максимальное значение функции (11) равно $\frac{8}{3\sqrt{3}}\pi R^2$.

Задача 4. В данный шар вписать конус с наибольшим объемом.

Решение. При решении данной задачи будем опираться на рисунок (2), приведенный к задаче N 3. Напомним, что объем конуса вычисляется по формуле

$$V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 H. \tag{12}$$

Радиус основания вписанного конуса вычисляется по правилу (9), что снова позволяет нам представить функцию V_k как функцию одного переменного H при единственном ограничении $H > 0$. Подставим представление (9) в формулу (12). Имеем задачу

$$V_k = \frac{1}{3}\pi(2H^2R - H^3) \to max. \tag{13}$$

Производная от функции $V_k(H)$ имеет вид

$$V_k^{'}(H) = \frac{1}{3}\pi(4HR - 3H^2).$$

Приравняем ее к нулю

$$\frac{1}{3}\pi(4HR - 3H^2) = 0.$$

Решая это уравнение, получаем единственный корень

$$H = \frac{4}{3}R$$

в предположении, что $H > 0$. Несложные вычисления показывают, что это значение H является точкой максимума для функции $V_k(H)$. Осталось только посчитать требуемое в задаче максимальное значение объема вписанного конуса. Подставим $H = \frac{4}{3}R$ в функцию $V_k(H)$. Получим

$$V_k\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{1}{3}\pi R^3.$$

Задача 5. Из круглого листа вырезать такой сектор, чтобы, свернув, его можно было получить воронку наибольшей вместимости.

Решение. Будем сопровождать решение нашей задачи иллюстрациями.

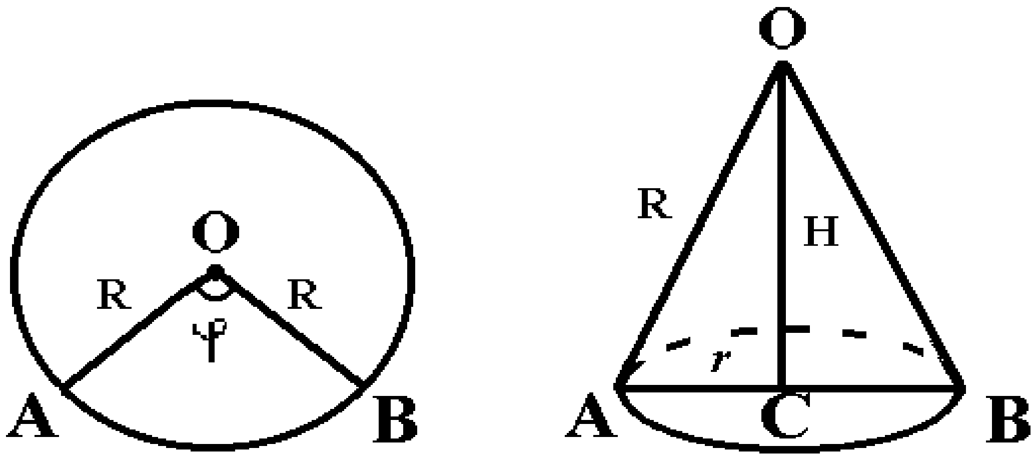

Рис. 3

Если из круглого листа заданного радиуса R вырезать сектор и свернуть его, то получим прямой конус, объем которого надо максимизировать.

Рассмотрим для удобства сечение конуса и все рассуждения будем проводить для треугольника AOB. Обозначим высоту OC треугольника AOB через H, а длину отрезка AC через r. Как и прежде, объем конуса вычисляется по формуле

$$V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 H,$$

где $r^2 = R^2 - H^2$ из треугольника AOC. Подставим это представление в формулу для объема и будем решать задачу на безусловный экстремум

$$V_k(H) = \frac{1}{3}\pi H(R^2 - H^2) = \frac{1}{3}\pi(HR^2 - H^3) \to max, \tag{14}$$

помня, что $H > 0$. Посчитаем производную

$$V_k^{'}(H) = \frac{1}{3}\pi(R^2 - 3H^2)$$

и приравняем ее к нулю. Из уравнения

$$\frac{1}{3}\pi(R^2 - 3H^2) = 0$$

получим две критические точки

$$H_1 = \frac{R}{\sqrt{3}}, \quad H_2 = -\frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Условию задачи удовлетворяет только одно значение $H = \frac{R}{\sqrt{3}}$. По знаку второй производной функции $V_k(H)$, посчитанной в точке $\frac{R}{\sqrt{3}}$, не трудно убедиться, что это точка максимума, так как

$$V_k''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\pi R < 0.$$

Значение радиуса основания конуса равно

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

Наконец, посчитаем объем конуса при определенных значениях r и H. Он равен

$$V_k = \frac{1}{3}\pi\frac{2}{3}R^2\frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{9\sqrt{3}}\pi R^3.$$

Рассмотрим теперь примеры задач, в которых необходимо найти как максимум, так и минимум функции одной переменной.

Задача 6. Найти на данной прямой такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух заданных точек была наименьшей.

Решение. Осуществим формализацию задачи.

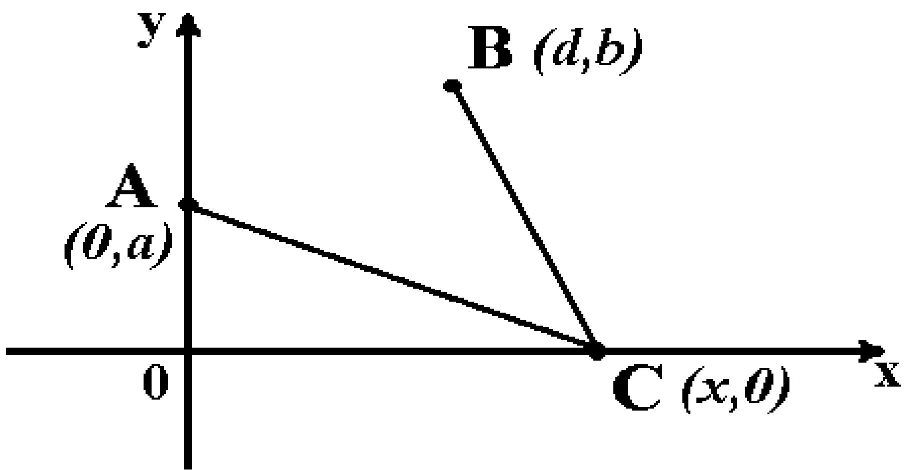

Рис. 4

Направим ось OX по заданной прямой, OY проведем через точку A. Пусть координаты точек таковы:

$$A = (0, a), \quad B = (d, b), \quad C = (x, 0).$$

Тогда мы получаем следующую задачу

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2} \to \inf, x \in R. \tag{15}$$

Рассмотрим эту задачу на прямой

$$ax + by + c = 0,$$

тогда задача (15) примет вид

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2} \to \inf.$$

Задача 7. Вписать в круг прямоугольник наибольшей площади. Это задача об отыскании максимума функции одной переменной.

Решение. Как известно, окружность описывается уравнением

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Направим оси OX и OY как на рисунке (5).

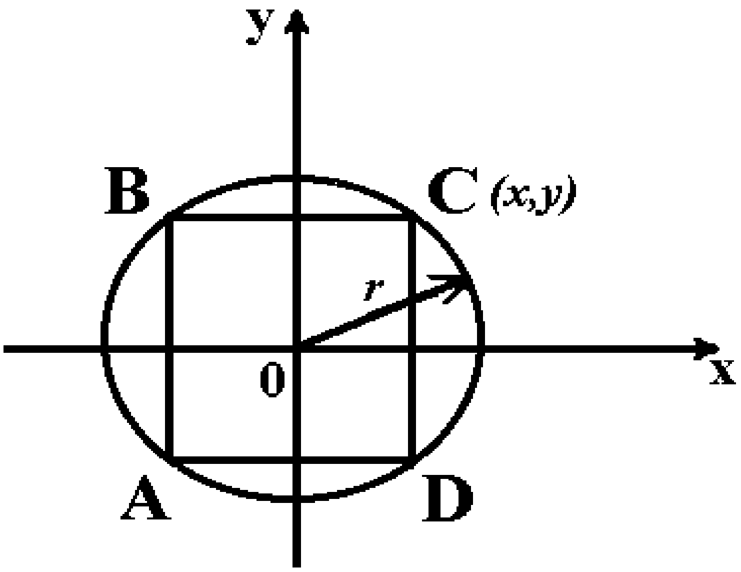

Рис. 5

Очевидно, что площадь прямоугольника $ABCD$ вычисляется по формуле

$$S_{\text{прям.}} = 4xy.$$

Получаем задачу

$$f_0(x, y) = 4xy \to \sup$$

при условиях, что координаты x, y подчинены ограничениям

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

$$f_2(x,y) = x \geq 0,$$

$$f_3(x,y) = y \geq 0.$$

Изменим два последних условия. Тогда исходная задача примет несколько иной вид. А именно

$$f(x,y) = 4xy \to \sup \tag{16}$$

при условии, что

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Задача 8. В данный треугольник вписать параллелограмм наибольшей площади.

Решение. Изобразим чертеж.

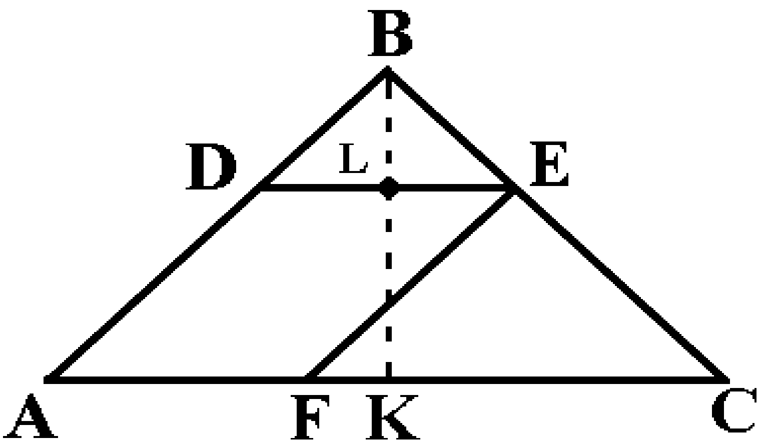

Рис. 6

Введем некоторые обозначения. Пусть сторона треугольника $AC = l$, высота $BK = H$, а длина отрезка DE равна x. Не трудно заметить, что треугольники DBE и ABC подобны. Тогда совершенно очевидно, что имеет место равенство

$$\frac{BL}{BK} = \frac{DE}{AC}.$$

Отсюда легко выразить

$$BL = BK\frac{DE}{AC} = H\frac{x}{l}.$$

Тогда

$$LK = BK - BL = H\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

После всех проведенных преобразований сформулированная задача приобретает следующий вид

$$S_{\text{пар.}} = DE \cdot LK = x \cdot H\left(1 - \frac{x}{l}\right) \to \sup \quad \text{при} \;\; 0 \le x \le l. \tag{17}$$

Приведем теперь пример решения задачи оптимизации классическим методом, изложенным во введении.

Пример. Решить задачу

$$J(u) = u \cdot h\left(1 - \frac{u}{l}\right) \to \sup,$$

если

$$0 \le u \le l.$$

Решение. Рассмотрим вместо функции $J(u)$ другую функцию $\widetilde{J}(u)$ и новую задачу

$$\widetilde{J}(u) = \frac{h}{l}(u - l) \cdot u \to \inf$$

при условиях

$$0 \le u \le l$$

и

$$\widetilde{J}(0) = \widetilde{J}(l) = 0.$$

Посчитаем производную от функции $\widetilde{J}(u)$ и приравняем ее к нулю. Получим

$$\widetilde{J}'(u) = \frac{h}{l}(2u - l) = 0.$$

Отсюда легко найти стационарную точку. Она имеет вид

$$u^* = \frac{l}{2}.$$

Так как при переходе через эту критическую точку производная меняет знак с минуса на плюс, то очевидно, что u^* - это точка минимума.

Задания для самостоятельного решения

1. $J(u) = u^3(u^2 - 1) \to \inf, \qquad$ при $\quad u \in [-1; 2]$.
2. $J(u) = \frac{1}{5}u^5 + u^3 - 4u + 2 \to \inf, \qquad$ при $\quad u \in [0; 2]$.

2. Численные методы одномерной минимизации

Рассмотрим задачу

$$J(u) \to \inf, \tag{1}$$

$$u \in U = [a, b]. \tag{2}$$

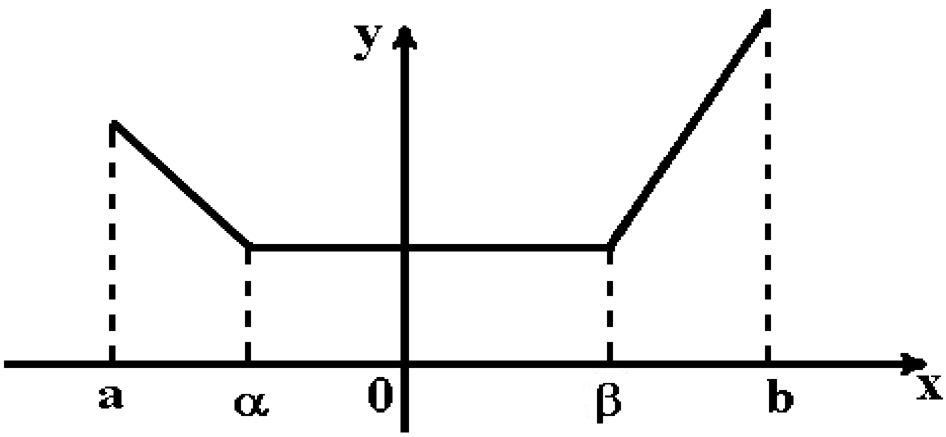

Рис. 7

Определение. Функция $J : U \to R$ называется **унимодальной** на $U = [a, b]$, если существуют числа $a \le \alpha \le \beta \le b$ такие, что на отрезке $[a, \alpha]$ функция убывает, на отрезке $[\beta, b]$ возрастает, а на отрезке $[\alpha, \beta]$ остается постоянной.

2.1. Метод деления отрезка пополам

Пусть поставлена задача (1)-(2), в которой функция $J(u)$ предполагается унимодальной.

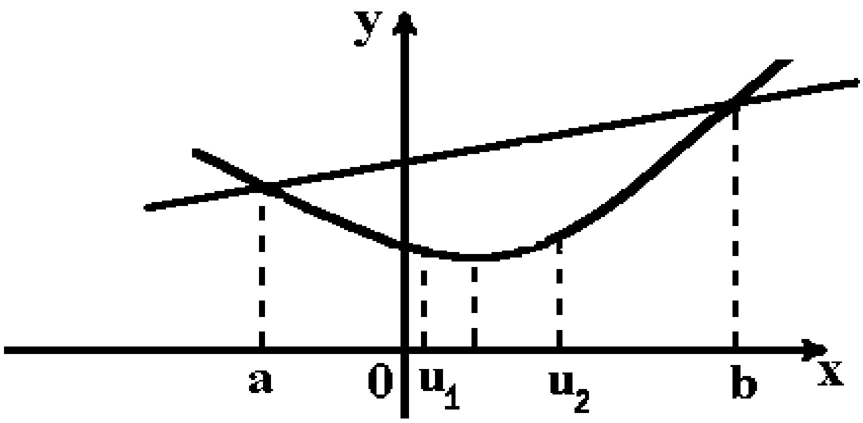

Рис. 8

Выберем число $0 < \delta < b - a$ и найдем сначала две точки

$$u_1 = \frac{b + a - \delta}{2}$$

и

$$u_2 = \frac{b + a + \delta}{2}.$$

Посчитаем в них значения функции $J(u_1)$ и $J(u_2)$. Если $J(u_1) \le J(u_2)$, то полагаем

$$a_1 = a, \quad b_1 = u_2,$$

в противном случае

$$a_1 = u_1, \quad b_1 = b.$$

Очевидно, что точка минимума находится на отрезке $[a_1, b_1]$. Посчитаем его длину. Она равна

$$b_1 - a_1 = \frac{b - a - \delta}{2} + \delta.$$

Предположим, что проделано несколько шагов алгоритма и нам известен отрезок $[a_{k-1}, b_{k-1}]$. Аналогично точкам u_1 и u_2 можно посчитать точки u_{2k-1} и u_{2k} по следующему правилу

$$u_{2k-1} = \frac{b_{k-1} + a_{k-1} - \delta}{2},$$

$$u_{2k} = \frac{b_{k-1} + a_{k-1} + \delta}{2}.$$

Если $J(u_{2k-1}) \le J(u_{2k})$, то полагаем

$$a_k = a_{k-1}, \quad b_k = u_{2k},$$

иначе

$$a_k = u_{2k-1}, \quad b_k = b_{k-1}.$$

Все описанные выше операции осуществляются до тех пор, пока длина рассматриваемого отрезка больше или равна заданного малого числа, т.е. пока справедливо неравенство

$$b_k - a_k \ge \varepsilon.$$

Чтобы вычисления были максимально точными, число δ необходимо выбирать достаточно маленьким. Если δ большое, то полагают $\delta = \frac{\delta}{2}$ и вычисления повторяют.

Пример решения задачи методом деления отрезка пополам

Пусть необходимо исследовать на минимум функцию

$$J(u) = u^3(u^2 - 1)$$

при условии, что

$$u \in [0, 1].$$

Пусть $\delta = 0.2$ и $\varepsilon = 0.2$. Тогда значения переменных u_1 и u_2 на первом шаге вычислений соответственно равны

$$u_1 = 0.4; \qquad u_2 = 0.6.$$

Целевая функция в посчитанных точках имеет значения

$$J(u_1) = J(0.4) = -0.05376, \quad J(u_2) = J(0.6) = -0.13824.$$

Так как $J(u_1) > J(u_2)$, то согласно алгоритму метода полагаем

$$a_1 = u_1 = 0.4, \quad b_1 = b = 1.$$

На втором шаге вычисляем значения точек

$$u_1^{'} = 0.6, \quad u_2^{'} = 0.8$$

и соответствующие значения функции $J(u)$. Они равны

$$J(u_1^{'}) = -0.13824, \quad J(u_2^{'}) = -0.18432.$$

Теперь очевидно, что

$$J(u_1^{'}) > J(u_2^{'}).$$

Поэтому полагаем

$$a_2 = u_1 = 0.6, \quad \text{и} \quad b_2 = b = 1.$$

Третий шаг вычислительной процедуры позволяет посчитать соответственно $u_1^{''}$ и $u_2^{''}$. Они равны

$$u_1^{''} = 0.7, \quad u_2^{''} = 0.9.$$

Значения целевой функции

$$J(u_1^{''}) = -0.17493, \quad J(u_2^{''}) = -0.13851$$

связаны соотношением

$$J(u_1^{''}) < J(u_2^{''}),$$

поэтому полагаем

$$a_3 = a_2 = 0.6, \quad \text{и} \quad b_3 = u_2^{''} = 0.9.$$

Аналогичные вычисления продолжаем осуществлять до тех пор, пока длина рассматриваемого нами отрезка не станет меньше, чем ε.

Задание для самостоятельного решения

Составить алгоритм и написать программу решения задачи минимизации некоторой функции на заданном отрезке методом деления отрезка пополам.

2.2. Метод "золотого сечения"

Будем снова рассматривать задачу (1)-(2).

Определение. Будем говорить, что точка $\bar{x}$ осуществляет "золотое сечение"отрезка $[0, A]$, если выполняется соотношение

$$\frac{A}{\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{A - \bar{x}},$$

т.е. если отношение длины отрезка к большей его части равно отношению большей части к меньшей.

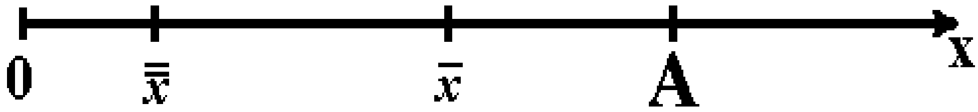

Рис. 9

Такая точка для отрезка не одна. Пусть $[a, b]$ - отрезок поиска. Можно показать, что точки u_1 и u_2, вычисляемые соответственно по формулам

$$u_1 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(b-a)+a$$

и

$$u_2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(b-a)+a,$$

осуществляют "золотое сечение"отрезка $[a, b]$. Будем считать сначала, что

$$a_1 = a, \quad b_1 = b.$$

При этом, если $J(u_1) \le J(u_2)$, то полагаем

$$a_2 = a_1, \;\; b_2 = u_2, \;\; \overline{u_2} = u_1,$$

иначе

$$a_2 = u_1, \;\; b_2 = b_1, \;\; \overline{u_2} = u_2.$$

Нетрудно посчитать длину нового отрезка $[a_2, b_2]$. Она равна

$$b_2 - a_2 = (b-a)\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Значение целевой функции в новой точке выбирается по следующему правилу

$$J(\overline{u_2}) = \min\{J(u_1), J(u_2)\}.$$

Предположим, что мы уже получили набор точек $u_1, u_2, ..., u_{n-1}, \overline{u_{n-1}}$, причем точка $\overline{u_{n-1}}$ осуществляет "золотое сечение"отрезка $[a_{n-1}, b_{n-1}]$. Посчитаем новую точку из отрезка $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ такую, что

$$u_n \neq \overline{u_{n-1}} \quad \text{и} \quad u_n < \overline{u_{n-1}}.$$

Если $J(u_n) \leq J(\overline{u_{n-1}})$, то полагаем

$$a_n = a_{n-1}, \quad b_n = \overline{u_{n-1}}, \quad \overline{u_n} = u_n,$$

иначе

$$a_n = u_n, \quad b_n = b_{n-1}, \quad \overline{u_n} = \overline{u_{n-1}}.$$

При этом длина отрезка $[a_n, b_n]$ вычисляется по формуле

$$(b_n - a_n) = (b - a)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1},$$

а значение в новой точке $\overline{u_n}$ по правилу

$$J(\overline{u_n}) = \min\{J(u_1), ..., J(u_n)\}.$$

Можно привести два критерия окончания вычислений по методу "золотого сечения", а именно

$$1. \mid b_k - a_k \mid < \varepsilon.$$

$$2. \mid J(b_k) - J(a_k) \mid < \varepsilon.$$

Пример решения задачи методом "золотого сечения"

Пусть есть задача

$$J(u) = u^3 - u \to \min,$$

при условии, что

$$u \in [0, 1].$$

Пусть $a_1 = 0, \quad$ а $\quad b_1 = 1.$

Точки "золотого сечения"соответственно равны

$$u_1 = 0.382, \quad u_2 = 0.618.$$

Целевая функция $J(u)$ в них принимает значение

$$J(u_1) = -0.326, \quad J(u_2) = -0.382.$$

Так как $J(u_1) > J(u_2)$, то полагаем

$$a_2 = u_1, \quad b_2 = a_1, \ \overline{u_2} = u_2.$$

Осуществляя последовательно все необходимые действия, получим, что

$$u_{\min} = 0.618, \quad \text{а} \quad J(u_{\min}) = -0.382.$$

Приведем алгоритм метода "золотого сечения"по шагам. Пусть функция $J : R^+ \to R^1$ выпукла и ее минимальное значение достигается в конечной точке $u^* > 0$. Алгоритм строит за конечное число шагов отрезок длины $\varepsilon > 0$, содержащий точку минимума u^*. Задаются $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и строятся точки

$$u_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.38 \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.68$$

из отрезка $[0, 1]$.

Примечание. Первые шесть шагов алгоритма вычисляют отрезок $[a_0, b_0]$, содержащий точку минимума u^*. Последующие шаги уменьшают его длину до наперед заданной величины ε.

1.Вычислить $J(\delta)$, $\quad J(0)$.

2.Если $J(\delta) \geq J(0)$, то необходимо положить $a_0 = 0, b_0 = \delta$ и перейти к пункту 7, иначе к пункту 3.

3. Положить $i = 0$, $\quad \mu_0 = 0$.

4. Положить $\mu_{i+1} = \mu_i + \delta$.

5. Вычислить $J(\mu_{i+1})$.

6. Если $J(\mu_{i+1}) \geq J(\mu_i)$, то положить $a_0 = \mu_{i-1}$, $\quad b_0 = \mu_{i+1}$ и перейти к пункту 7, иначе положить $i = i + 1$ и перейти к пункту 4.

Примечание. Теперь $u^* \in [a_0, b_0]$. Далее будем уменьшать отрезок, содержащий точку u^*.

7. Положить $j = 0$.

8. Положить $l_j = b_j - a_j$.

9. Если $l_j \leq \varepsilon$, то перейти к пункту 12, иначе перейти к пункту 10.

10. Положить $v_j = a_j + u_1 \cdot l_j, \quad w_j = a_j + u_2 \cdot l_j$.

11. Если $J(v_j) \leq J(w_j)$, то положить $a_{j+1} = a_j, \quad b_{j+1} = w_j, \quad j = j + 1$ и перейти к пункту 8, иначе положить $a_{j+1} = v_j, \quad b_{j+1} = b_j, \quad j = j + 1$ и перейти к пункту 8.

Примечание. Отметим, что $l_j = J_2^j \cdot l_o = (0.68)^j \cdot l_0$.

12. Положить $\overline{\mu} = \frac{a_j + b_j}{2}$ и остановиться.

Задание для самостоятельного решения

Написать программу решения задачи (1)-(2) методом "золотого сечения".

2.3. Метод парабол

Определение. Тройка точек u_1, u_2, u_3 является **выпуклой** для функции $J(u)$, если справедливы следующие неравенства

$$\Delta^- = J(u_1) - J(u_2) \geq 0,$$

$$\Delta^+ = J(u_3) - J(u_2) \geq 0,$$

$$\Delta^- + \Delta^+ > 0.$$

Пусть наша тройка выпукла. Тогда можно провести параболу

$$f(u) = \alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 u^2$$

через точки с координатами $(u_1, J(u_1)), \quad (u_2, J(u_2)), \quad (u_3, J(u_3))$. Причем точка w- точка минимума построенной параболы вычисляется по следующей формуле

$$w = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(J_2 - J_1)u_3^2 + (J_1 - J_3)u_2^2 + (J_3 - J_2)u_1^2}{(J_1 - J_2)u_3 + (J_3 - J_1)u_2 + (J_2 - J_3)u_1}.$$

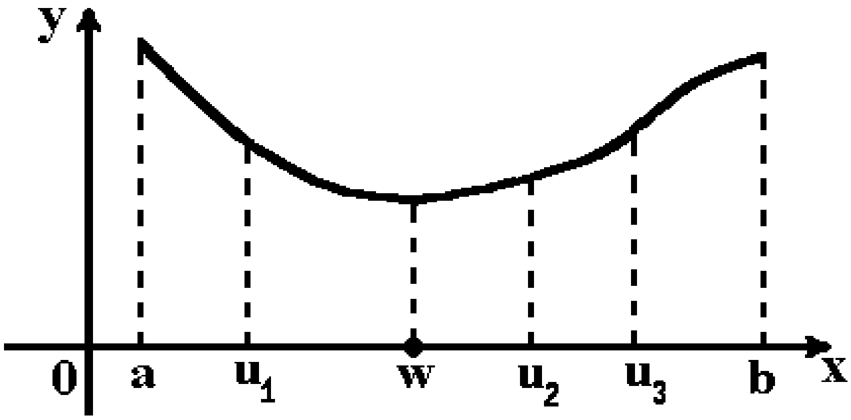

Рис. 10

Алгоритм

Пусть функция $J(u)$ унимодальна на отрезке $[a,b]$, точка $u_0 \in [a,b]$ и h положительная величина такая, что $2h \le b-a$.

1. $J_0 = J(u_0)$, $\;u_1 = u_0 + h$, $\;J_1 = J(u_1)$.

2. Если $J_1 \le J_0$, то $u_i = u_0 + h \cdot 2^i$, $\;i = 2,3,...,J_i = J(u_i)$.

Если $J_1 > J_0$, то меняем направление поиска и полагаем $u_1 = u_0 - h$. При этом $J_0 = J(u_0+h)$, $\;u_i = u_0 - h \cdot 2^i, i = 2,3,...,$ $\;J_i = J(u_i)$.

3. После вычисления новой точки $u_i = u_0 + 2^i \cdot h$ или $u_i = u_0 - 2^i \cdot h$ проверяем, принадлежит ли эта точка отрезку $[a,b]$. Если $u_i \in [a,b]$, то считаем $J(u_i)$ и проверяем, является ли тройка точек u_{i-2}, u_{i-1}, u_i выпуклой или нет. Если она не является выпуклой, то переходим к следующей точке u_{i+1}, пока не найдем $n \ge 1$ такое, что:

a)либо u_{n-2}, u_{n-1}, u_n - выпуклая тройка для функции $J(u)$, и тогда можно провести параболу и найти точку минимума w;

b) либо ни одна тройка $u_{i-2}, u_{i-1}, u_i (i = \overline{2,n})$ не является выпуклой, а точка $u_{n+1} \notin [a,b]$. Тогда $w = a$ или $w = b$(смотря к чему ближе u_{n+1}). Считаем далее $J(w)$. Точку $\overline{u_n}$ ищем среди $w, u_0, u_1, ..., u_n$ и считаем значение функции $J(u)$ в этой точке по правилу

$$J(\overline{u_n}) = \min\{J(w), J(u_0), ..., J(u_n)\}.$$

Для уточнения точки минимума можно взять в качестве u_0 точку $\overline{u_n}$, а шаг метода уменьшить вдвое, т.е. положить $h = h/2$ и процесс повторять, пока:

а) точки не станут близки друг к другу с точностью до ε;

б) значения целевой функции в посчитанных точках не станут близки друг к другу с точностью до ε.

Задание для самостоятельного решения

$J(u) = u^3 - u \to \inf$, при условии $u \in [0, 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильин В.А. Математический анализ.1: Начальный курс/ В.А. Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов.// - М., 1985. - 660 с.**
2. **Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи / В.М.Алексеев, Э.М.Галеев, В.М.Тихомиров. - М., 1984. - 288 с.**
3. **Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач/ Ф.П.Васильев. - М., 1988. - 549 с.**
4. **Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход/ Э.Полак. - М., 1974. - 376 с.**

Составители: Белоусова Елена Петровна,
Коструб Ирина Дмитриевна

Редактор Тихомирова О.А.