ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Методы оптимизации. Часть 2

Практикум

По специальности

010501 (010200) – Прикладная математика и информатика

Воронеж 2005

Утверждено научно-методическим советом факультета ПММ от 14.06.2005, протокол №6.

Составители: Белоусова Е.П.

Коструб И.Д.

Практикум подготовлен на кафедре нелинейных колебаний факультета ПММ Воронежского государственного университета. Рекомендуется для студентов 3-го курса дневного отделения.

Практикум написан по одному из разделов курса «Методы оптимизации» и посвящен нелинейному программированию в задачах, содержащих несколько переменных с ограничениями и без них. Предназначен практикум для организации аудиторной, лабораторной и самостоятельной работы студентов. В каждом параграфе приводятся теоретические сведения, необходимые для решения сформулированных задач. Приводятся образцы решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим функцию n переменных $f(x_1,...,x_n)$, заданную на некотором множестве пространства R^n. Известно, что если $f(x)$ дифференцируема в точке $M(x_1,...,x_n)$, то в этой точке существуют частные производные

$$\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}, i=1,...,n$$

и наоборот, если фукнция $f(x_1,...,x_n)$ имеет частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0,...,x_n^0)$, причем все эти частные производные непрерывны в самой точке M_0, то указанная функция дифференцируема в точке M_0.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке M_0 локальный максимум (локальный минимум), если найдется такая δ-окрестность точки M_0, в пределах которой значение $f(M_0)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех значений $f(x)$ этой функции.

Если функция $f(x_1,...,x_n)$ обладает в точке $M_0(x_1^0, x_2^0,...,x_n^0)$ частными производными первого порядка по всем переменным $x_1,...,x_n$ и имеет в этой точке локальный экстремум, то все частные производные первого порядка обращаются в точке M_0 в нуль, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)=0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)=0,..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)=0.$$

Точки, в которых обращаются в нуль все частные производные первого порядка функции $f(x)$, называются стационарными точками этой функции.

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ N ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД

Пусть есть задача

$$I(u) \to \inf, \tag{1}$$

$$u \in R^n. \tag{2}$$

Пусть u_* является точкой локального минимума функции $I: R^n \to R$ и функция $I(u)$ является дифференцируемой в этой точке, т.е. существует $I'(u_*)$, тогда $I'(u_*)=0$, где 0 – нулевой вектор из R^n.

Для формулировки достаточного условия безусловного экстремума введем понятие второй производной функции n переменных. Пусть есть точка u_0 из пространства R^n. Зададим некоторое приращение h. Тогда, если приращение значений функции можно записать в виде

$$I(u_0 + h) - I(u_0) = \langle I'(u_0), h\rangle + \frac{1}{2}\langle A(u_0)h, h\rangle + \omega(x_0, h), \qquad (3)$$

где квадратные скобки обозначают скалярное произведение векторов, $A(u_0)$ - симметричная матрица порядка n, $\omega(u_0, h)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega(u_0, h)|}{\|h\|} = 0,$$

то функция $I(u)$ является дважды дифференцируемой в точке u_0. Обозначим вторую производную через $I''(u_0)$. Если производная существует, то элементы ее выписываются следующим образом

$$I''(u_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 I(u_0)}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 I(u_0)}{\partial u_1 \partial u_2} \cdots & \frac{\partial^2 I(u_0)}{\partial u_1 \partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 I(u_0)}{\partial u_n \partial u_1} & \frac{\partial^2 I(u_0)}{\partial u_n \partial u_2} & \frac{\partial^2 I(u_0)}{\partial u_n^2} \end{pmatrix}.$$

Теорема: если точка $u_* \in R^n$ является стационарной точкой функции $I(u)$ и в этой точке существует вторая производная $I''(u_*)$, то для того чтобы u_* была точкой локального минимума функции $I(u)$ должно выполняться неравенство

$$I''(u_*) \geq 0. \qquad (4)$$

Если же $I''(u_*)$ является положительно определенной матрицей, т.е.

$$I''(u_*) > 0, \qquad (5)$$

то u_* - точка локального минимума функции $I(u)$.

Критерий Сильвестра: для того, чтобы симметричная матрица $I''(u_*)$ была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны.

Если точка u_* - точка минимума функции $I(u)$ и существует $I''(u_*)$, то выполняются условия

необходимость: $I'(u_*) = 0, I''(u_*) \geq 0,$

достаточность: если в некоторой точке u_* выполнены условия: $I(u_*) = 0, I''(u_*) > 0$, то u_*- точка минимума функции $I(u)$.

Пример 1. Минимизировать функцию

$$I(u) = u_1^2 - u_1 u_2 + u_2^2 - 2u_1 + u_2 \to \inf .$$

Посчитаем первые производные по каждой переменной и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial I}{\partial u_1} = 2u_1 - u_2 - 2 = 0, \frac{\partial I}{\partial u_2} = -u_1 + 2u_2 + 1 = 0 .$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 - 2 = 0 \\ -2u_1 + 4u_2 + 2 = 0 \end{cases}$$

найдем стационарную точку. Она будет иметь вид $u_* = (1{,}0)$. Составим матрицу из вторых производных:

$$\frac{\partial^2 I(u)}{\partial u_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 I(u)}{\partial u_1 \partial u_2} = -1, \quad \frac{\partial^2 I(u)}{\partial u_2 \partial u_1} = -1, \quad \frac{\partial^2 I(u)}{\partial u_2^2} = 2.$$

По критерию Сильвестра она будет положительно определена, так как последовательные главные миноры этой матрицы соответственно равны

$$\Delta_1 = 2, \Delta_2 = 3.$$

Таким образом, точка u_* является точкой минимума функции $I(u)$ и значение в этой точке равно $I(u) = -1$. Остается проверить, какой минимум реализует точка u_* - локальный или глобальный. Для этого рассмотрим произвольное приращение в точке u_*, т.е. введем в рассмотрение новую точку u по правилу

$$u = (u^* + h_1, u^* + h_2) = (1 + h_1, h_2)$$

и посчитаем в ней значение целевой функции

$$I(u) = (1 + h_1)^2 - (1 + h_1)h_2 + h_2^2 - 2(1 + h_1) + h_2 = -1 + h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2 =$$

$$-1 + h_1^2 (1 - \frac{h_2}{h_1} + (\frac{h_2}{h_1})^2) = I(u_*) + \Omega,$$

где Ω - некоторая положительная величина. Отсюда следует, что u_* - это точка глобального минимума.

Пример 2. Минимизировать функцию

$$I(u) = u_1^2 - u_2^2 - 4u_1 + 6u_2 \to \inf.$$

Посчитаем частные производные первого порядка и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial I(u)}{\partial u_1} = 2u_1 - 4 = 0, \frac{\partial I(u)}{\partial u_2} = -2u_2 + 6 = 0.$$

Стационарная точка имеет вид $u_1 = 2, u_2 = 3$. Значение функции в этой точке равно $I(u_*) = 5$. Вычислим значения вторых производных функции $I(u)$ в точке подозрительной на экстремум. Получаем

$$\frac{\partial^2 I(u)}{\partial u_1^2} = 2, \frac{\partial^2 I(u)}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 I(u)}{\partial u_2 \partial u_1} = 0, \frac{\partial^2 I(u)}{\partial_2^2} = -2.$$

Главный минор второго порядка $\Delta_2 = -4$. Отсюда следует, что точка $u_* = (2{,}3)$ не является точкой минимума. Подтвердим это. Введем в рассмотрение другую точку $\bar{u} = (2 + h_1, 3 + h_2)$ и посчитаем в ней значение минимизируемой функции. Оно равно

$$I(\bar{u}) = (2 + h_1)^2 - (3 + h_2)^2 - 4(2 + h_1) + 6(3 + h_2) = h_1^2 - h_2^2 + 5.$$

Положим $h_2 = 2h_1$. Тогда $I(\bar{u}) = -3h_1^2 + 5 < I(u^*)$. Если $h_2 = \frac{h_1}{2}$, то $I(\bar{u}) = (1 - \frac{1}{4})h_1^2 + 5 = \frac{3}{4}h_1^2 + 5 > I(u^*)$. Отсюда следует, что u^*- не является точкой локального минимума.

Пример 3. Минимизировать функцию

$$I(u) = u_1^4 + u_2^4 - (u_1 + u_2)^2 \to \inf.$$

Посчитаем частные производные целевой функции и приравняем их к нулю. Получим

$$\frac{\partial I(u)}{\partial u_1} = 4u_1^3 - 2(u_1 + u_2) = 0, \frac{\partial I(u)}{\partial u_2} = 4u_2^3 - 2(u_1 + u_2) = 0.$$

Найдем отсюда критические точки. Их будет три и они имеют следующий вид:

$$u_1 = (0,0), u_2 = (1,1), u_3 = (-1,-1).$$

Вычислим в этих точках вторые частные производные и составим в каждой из них матрицу Якоби:

$$\frac{\partial^2 I(u)}{\partial u_1^2} = 12u_1^2 - 2; \frac{\partial^2 I(u)}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 I(u)}{\partial u_2 \partial u_1} = -2; \frac{\partial^2 I(u)}{\partial u_2^2} = 12u_2^2 - 2.$$

Посчитаем значение матрицы Якоби в каждой из найденных точек. Они соответственно равны

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

у которой первый главный минор отрицательный и равный -2, а второй главный минор – нулевой. Рассмотрим поведение целевой функции в окрестности точки (0,0). Возьмем две другие точки $\bar{u} = (h, -h)$, $\tilde{u} = (h, h)$ и посчитаем в них значения функции. Они равны

$$I(\bar{u}) = 2h^4 \geq 0, I(\tilde{u}) = 2h^4 - 4h^2 = 2h^2(h^2 - 2) < 0.$$

Отсюда следует, что точка (0,0) не является точкой экстремума. Матрица Якоби в точке (1,1) имеет вид

$$A_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Оба последовательных главных минора положительны. Следовательно, исследуемая точка является точкой экстремума. Вычислим матрицу Якоби в последней точке. Она равна

$$A_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что точки (1,1) и (-1,-1) являются точками локального минимума. Посчитаем в них значение целевой функции. Оно равно

$$I(u_*) = 1 + 1 - (2^2) = -2.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти все значения параметра k, при которых точка (1,0) является точкой экстремума для функции

$$I(u) = k^3 u_1 e^{u_2} - k^2 a \ln(u_1 + \frac{a-3}{a} u_2) + ((a+b-1)k - b)u_1 + kcu_2 + 2bu_1u_2$$

при условиях: а) a=-2, b=2, c=8; б) a=3/2, b=-1/2, c=-3/2.

ЗАДАЧА НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Предположим, что поставлена задача об отыскании минимума функции I(u) при условии, что u принимает значения в некотором множестве $U \subset R^n$, т.е.

$$I(u) \to \inf, \tag{6}$$

$$u \in U \subset R^n. \tag{7}$$

Здесь множество U может задаваться различными способами. Например,

$$U = \{u \in R^n \mid g_i(u) = 0, i = 1,...,s\}, \tag{8}$$

где $g_i(u) = g_i(u_1,...,u_n), i = 1,...,s$.

Для решения задачи (6)-(8) надо выписать функцию Лагранжа

$$L(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, u) = \lambda_0 I(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(u). \tag{9}$$

Теорема: пусть u_* - точка локального минимума в задаче (6)-(8) и в окрестности этой точки функции I(u) и $g_i(u), i = 1,...,s$ являются непрерывно дифференцируемыми, тогда имеют место следующие соотношения:

1) существует набор констант $\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_s^*$ таких, что

$$\sum_{i=0}^{s} |\lambda_i^*| \neq 0,$$

2) $\lambda_0^* I'(u_*) + \sum_{i=1}^{s} g_i'(u_*) \lambda_i^* = 0$,

3) для того, чтобы $\lambda_0^* \neq 0$ достаточно, чтобы векторы $g'_{1u}(u_*), g'_{2u}(u_*), ..., g'_{su}(u_*)$ были линейно независимы.

СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

1. По исходной задаче (6)-(8) необходимо выписать функцию Лагранжа.
2. Выписать систему уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u}(\lambda_0, \lambda, u) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u}(\lambda_0, \lambda, u) = 0 \end{cases}. \qquad (10)$$

3. Рассмотрев отдельно два случая: $\lambda_0^* = 1$(если задача на минимум), $\lambda_0^* = -1$(если задача на максимум) и $\lambda_0^* = 0$, найти все стационарные точки задачи (6)-(8).
4. Проведя дополнительные исследования, установить, какие из стационарных точек являются точками локального минимума и локального максимума для задачи (6)-(8) или доказать, что решения нет.

Для задач с ограничениями типа равенств, можно не обращать внимание на тип экстремума и, убедившись, что $\lambda_0 \neq 0$, полагать λ_0 равным любой константе.

Пример 1. Минимизировать функцию

$$I(u) = 4u_1 + 3u_2 \to \inf$$

при ограничении

$$u_1^2 + u_2^2 = 1.$$

Составим функцию Лагранжа. В данном случае она имеет вид

$$L(\lambda_0, \lambda_1, u_1, u_2) = \lambda_0(4u_1 + 3u_2) + \lambda_1(u_1^2 + u_2^2 - 1).$$

Посчитаем частные производные от этой функции по соответствующим переменным:

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = 4\lambda_0 + 2\lambda_1 u_1; \frac{\partial L}{\partial u_2} = 3\lambda_0 + 2\lambda_1 u_2.$$

Составим систему вида (10), приписав в нее ограничение из условия задачи

$$\begin{cases} 4\lambda_0 + 2\lambda_1 u_1 = 0 \\ 3\lambda_0 + 2\lambda_1 u_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 = 1. \end{cases}$$

Предположим сначала, что $\lambda_0 = 0.$ Из системы сразу следует, что $\lambda_1 = 0$. Это нас не устраивает. Поэтому будем считать, что $\lambda_0 = 1.$ Тогда система приобретает вид

$$\begin{cases} 4 + 2\lambda_1 u_1 = 0 \\ 3 + 2\lambda_1 u_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 = 1 \end{cases}.$$

Отсюда $u_1=-\frac{2}{\lambda_1}$, $u_2=-\frac{3}{2\lambda_1}$. Подставляя их в третье уравнение системы, находим множитель Лагранжа из уравнения $\frac{4}{\lambda_1^2}+\frac{9}{4\lambda_1^2}=1$. Он принимает два значения $\lambda_1=\pm\frac{5}{2}$. Если $\lambda_1=-\frac{5}{2}$, то точка подозрительная на экстремум имеет вид $\hat{u}_1^*=\frac{4}{5},\hat{u}_2^*=\frac{3}{5}$. Значение функции в этой точке равно $I(\hat{u}^*)$=5. Если $\lambda_1=\frac{5}{2}$, то $\tilde{u}_1^*=-\frac{4}{5},\tilde{u}_2^*=-\frac{3}{5}$.Значение функции в этой точке равно $I(\tilde{u}^*)=-5$. Рассмотрим поведение функции $I(u)$ вблизи точки $\hat{u}^*$. Пусть $u=(\frac{4}{5}+h_1,\frac{3}{5}+h_2)$ принадлежит множеству U. Подставим ее в наше ограничение $(\frac{4}{5}+h_1)^2+(\frac{3}{5}+h_2)^2=1$. Отсюда легко заметить, что $(4h_1+3h_2)=-\frac{5}{2}(h_1^2+h_2^2)$. Подставим точку u в целевую функцию. Получим

$$I(u)=4(\frac{4}{5}+h_1)+3(\frac{3}{5}+h_2)=5+4h_1+3h_2=I(\hat{u}^*)-\frac{5}{2}(h_1^2+h_2^2)\le I(\hat{u}^*).$$

Следовательно, точка $\hat{u}^*$ доставляет наибольшее значение функции.

Пример 2. Минимизировать функцию

$$I(u)=u_1^2+u_2^2\to\inf,$$

при ограничении

$$3u_1+4u_2=1.$$

Составим функцию Лагранжа для поставленной задачи. Она имеет вид

$$L(\lambda_0,\lambda_1,u_1,u_2)=\lambda_0(u_1^2+u_2^2)+\lambda_1(3u_1+4u_2-1).$$

Частные производные соответственно равны

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}=2\lambda_0u_1+3\lambda_1;\frac{\partial L}{\partial u_2}=2\lambda_0u_2+4\lambda_1.$$

Составим систему уравнений для нахождения стационарных точек и параметров

$$\begin{cases}2\lambda_0u_1+3\lambda_1=0\\2\lambda_0u_2+4\lambda_1=0\\3u_1+4u_2=1\end{cases}.$$

Если $\lambda_0=0$, то очевидно что $\lambda_1=0$. Это решение нас не устраивает. Поэтому будем полагать $\lambda_0=1$. В этом случае система приобретает вид

$$\begin{cases} 2u_1 + 3\lambda_1 = 0 \\ 2u_2 + 4\lambda_1 = 0. \\ 3u_1 + 4u_2 = 1 \end{cases}$$

Отсюда легко посчитать, что $u_1 = -\frac{3}{2}\lambda_1, u_2 = -2\lambda_1, -\frac{9}{2}\lambda_1 - \frac{16}{2}\lambda_1 = 1.$

Поэтому $\lambda_1 = -\frac{2}{25}, u_1 = \frac{3}{25}, u_2 = \frac{4}{25}$ и оптимальная точка имеет вид $u^* = (\frac{3}{25}, \frac{4}{25})$ и значение функции в ней равно $I(u^*) = \frac{1}{25}.$ Покажем, что эта точка является точкой минимума. Для этого составим приращение $u = (\frac{3}{25} + h_1, \frac{4}{25} + h_2),$ удовлетворяющую ограничению $3(\frac{3}{25} + h_1) + 4(\frac{4}{25} + h_2) = 1.$ Отсюда очевидно, что $3h_1 + 4h_2 = 0$ и $h_2 = -\frac{3}{4}h_1.$ Посчитаем значение функции

$I(u) = (\frac{3}{25} + h_1)^2 + (\frac{4}{25} + h_2)^2 = (\frac{3}{25} + h_1)^2 + (\frac{4}{25} - \frac{3}{4}h_1)^2 = \frac{1}{125} + \frac{25}{16}h_1^2 > I(u^*).$

Пример 3. Минимизировать функцию

$$I(u) = e^{u_1 u_2} \to \inf$$

при ограничении

$$u_1 + u_2 = 1.$$

Составим функцию Лагранжа

$$L(\lambda_0, \lambda_1, u_1, u_2) = \lambda_0 e^{u_1 u_2} + \lambda_1(u_1 + u_2 - 1).$$

Частные производные имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = \lambda_0 e^{u_1 u_2} u_2 + \lambda_1; \frac{\partial L}{\partial u_2} = \lambda_0 e^{u_1 u_2} u_1 + \lambda_{1.}$$

Выпишем соответствующую систему уравнений для определения параметров и оптимальной точки:

$$\begin{cases} \lambda_0 e^{u_1 u_2} u_2 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_0 e^{u_1 u_2} u_1 + \lambda_1 = 0. \\ \quad u_2 + u_2 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $l_0 = 0$. Тогда и $l_1 = 0$. Нас это не устраивает.

Пусть $l_0 = 1$. Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} e^{u_1u_2}u_2+\lambda_1=0 \\ e^{u_1u_2}u_1+\lambda_1=0 \\ u_2+u_2=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} e^{u_1u_2}(u_2-u_1)=0 \\ e^{u_1u_2}u_1+\lambda_1=0 \\ u_2+u_2=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_1=u_2 \\ e^{u_1u_2}u_1+\lambda_1=0. \\ u_1=u_2=1/2 \end{cases}$$

Откуда: $\lambda_1=-1/2e^{1/4}$. Соответственно: $u^*=(1/2,1/2)$, $J(u^*)=e^{1/4}$.

Возьмем произвольную точку $u=(1/2+h_1,1/2+h_2)$ такую, что $1/2+h_1+1/2+h_2=1$, т.е. $h_1+h_2=0$ или $h_2=-h_1$. Значит: $u=(1/2+h_1,1/2-h_1)$. Вычислим значение целевой функции в этой точке. $J(u)=e^{(1/2+h_1)(1/2-h_1)}=e^{1/4-h_1^2}\le e^{1/4}=J(u^*)$. Получаем, что u^* доставляет целевой функции наибольшее значение.

Задания для самостоятельной работы

Минимизировать следующие функции:

1) $J(u)=u_1^2+u_2^2\to\inf$

$u_1^4+u_2^4=1.$

2) $J(u)=u_1u_2^2u_3^3\to\inf$

$u_1+u_2+u_3=1.$

3) $J(u)=u_1u_2u_3\to\inf$

$u_1^2+u_2^2+u_3^2=1$, $u_1+u_2+u_3=0$.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА В ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

Приведем достаточные условия локального условного минимума. Будем предполагать, что векторы $g'_{1u}(u_*),g'_{2u}(u_*),\dots,g'_{su}(u_*)$ являются линейно независимыми в точке u_*. Пусть $(u_*,\lambda_0^*,\lambda^*)$ - решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u_j}=0,\ j=1,\dots,n \\ g_i(u)=0, i=1,\dots,s. \end{cases} \tag{11}$$

Вектор u разобьем на две части. Одна является (n-s) – мерным вектором. В дальнейшем ее будем обозначать через $u \in R^{n-s}$, вторая является s-мерным вектором, ее мы будем обозначать через $v \in R^{s}$, т.е.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{n-s} \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_s \end{pmatrix}.$$

Так как векторы $g_{iu}(u_*, v_*), i = 1,\dots,s$ предполагаются линейно независимыми, то переменные v можно выбрать так, чтобы в окрестности точки (u_*, v_*) выполнялись условия теоремы о неявных функциях, и система уравнений $g_i(u,v) = 0, i = 1,\dots,s$ определяет неявные функции $v_i(u), i = 1,\dots,s$ в окрестности точки (u_*, v_*). Задачу (6)-(7) можно записать в виде

$$I(u,v) \to \inf, \tag{12}$$

$$g_i(u,v) = 0, i = 1,\dots,s, u \in R^{n-s}, v \in R^{s}. \tag{13}$$

Пусть функции $I, g_i, i = 1,\dots,s$ дважды непрерывно дифференцируемы. Введем обозначения

$$L_{uu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial u_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial u_{n-s}\partial u_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial u_{n-s}} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial u_{n-s}^2} \end{pmatrix}, L_{vv} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_s \partial v_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v_1 \partial v_s} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_s^2} \end{pmatrix},$$

$$L_{uv} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial v_1 \partial u_1} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_s \partial u_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v_1 \partial u_{n-s}} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial v_s \partial u_{n-s}} \end{pmatrix}, L_{vu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial v_1} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial u_{n-s} \partial v_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial v_s} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial u_{n-s} \partial v_s} \end{pmatrix},$$

$$g(u,v) = \begin{pmatrix} g_1(u,v) \\ \dots \\ g_s(u,v) \end{pmatrix}, g_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_{n-s}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_s}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_s}{\partial u_{n-s}} \end{pmatrix}, g_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial v_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_s}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial g_s}{\partial v_s} \end{pmatrix}.$$

Теорема. Пусть выполняются условия:

1. $(u_*, v_*, \lambda_0^*, \lambda^*)$ – стационарная точка функции Лагранжа.
2. Функции $I, g_i, i = 1,\dots,s$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки (u_*, v_*);
3. В точке (u_*, v_*) матрица $g_v(u_*, v_*)$ имеет обратную.

4. Матрица (размера (n-s)x(n-s))

$$D = L_{uu} - L_{uv} g_v^{-1} g_u - g_u^T (g_v^T)^{-1} L_{vu} + g_u^T (g_v^T)^{-1} L_{vv} g_v^{-1} g_u, \qquad (14)$$

вычисленная в точке $(u_*, v_*, \lambda_0^*, \lambda^*)$ положительно определенная.

Тогда точка (u_*, v_*) является точкой локального минимума задачи (6)-(8). Согласно критерию Сильвестра, симметрическая матрица является положительно определенной тогда и только тогда, когда все последовательные миноры на главной диагонали матрицы положительны.

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Минимизировать функцию

$$J(u) = u_1 u_2 u_3 \to \inf$$

при ограничениях

$$2u_1u_2 + u_2u_3 = 12,\ 2u_1 - u_2 = 8.$$

1. Выпишем функцию Лагранжа

$$L(u, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 u_1 u_2 u_3 + \lambda_1 (2u_1u_2 + u_2u_3 - 12) + \lambda_2 (2u_1 - u_2 - 8).$$

2. Найдем частные производные функции Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = \lambda_0 u_2 u_3 + 2\lambda_1 u_2 + 2\lambda_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = \lambda_0 u_1 u_3 + 2\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_3 - \lambda_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_3} = \lambda_0 u_1 u_2 + \lambda_1 u_2$$

3. Решаем систему

$$\begin{cases} \lambda_0 u_2 u_3 + 2\lambda_1 u_2 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 u_1 u_3 + 2\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_3 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 u_1 u_2 + \lambda_1 u_2 = 0 \\ 2u_1u_2 + u_2u_3 = 12 \\ 2u_1 - u_2 = 8 \end{cases}$$

Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$. Система примет вид:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 u_2 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_3 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 u_2 = 0 \\ 2u_1 u_2 + u_2 u_3 = 12 \\ 2u_1 - u_2 = 8 \end{cases}.$$

Поскольку $u_2 \neq 0$, то $\lambda_1 = 0$, а следовательно, и $\lambda_2 = 0$. Этот случай нас не устраивает.

Положим $\lambda_0 = 1$. Получим систему:

$$\begin{cases} u_2 u_3 + 2\lambda_1 u_2 + 2\lambda_2 = 0 \\ u_1 u_3 + 2\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_3 - \lambda_2 = 0 \\ u_1 u_2 + \lambda_1 u_2 = 0 \\ 2u_1 u_2 + u_2 u_3 = 12 \\ 2u_1 - u_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 u_3 + 2\lambda_1 u_2 + 2\lambda_2 = 0 \\ u_1 u_3 + 2\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_3 - \lambda_2 = 0 \\ u_2 (u_1 + \lambda_1) = 0 \\ 2u_1 u_2 + u_2 u_3 = 12 \\ 2u_1 - u_2 = 8 \end{cases}.$$

Система эквивалентна следующим двум:

$$\begin{cases} u_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ u_1 u_3 + 2\lambda_1 u_1 + u_3 = 0 \\ 0 = 12 \\ u_1 = 4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} u_2 u_3 + 2\lambda_1 u_2 + 2\lambda_2 = 0 \\ u_1 u_3 + 2\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_3 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = -u_1 \\ 2u_1 u_2 + u_2 u_3 = 12 \\ 2u_1 - u_2 = 8 \end{cases}.$$

Первая система несовместна, поэтому решаем вторую.

$$\begin{cases} u_2 u_3 - 2u_1 u_2 + 2\lambda_2 = 0 \\ u_1 u_3 - 2u_1^2 - u_1 u_3 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = -u_1 \\ 2u_1 u_2 + u_2 u_3 = 12 \\ 2u_1 - u_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 2u_1 u_2 - 2u_1 u_2 + 2\lambda_2 = 0 \\ -2u_1^2 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = -u_1 \\ 2u_1 u_2 + u_2 u_3 = 12 \\ 2u_1 - u_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 12 - 4u_1 u_2 - 4u_1^2 = 0 \\ -2u_1^2 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = -u_1 \\ 2u_1 u_2 + u_2 u_3 = 12 \\ 2u_1 - u_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 4u_1 (2u_1 - 8) - 4u_1^2 = 0 \\ -2u_1^2 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = -u_1 \\ 2u_1 u_2 + u_2 u_3 = 12 \\ 2u_1 - u_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 12-8u_1^2+32u_1-4u_1^2=0 \\ -2u_1^2-\lambda_2=0 \\ \lambda_1=-u_1 \\ 2u_1u_2+u_2u_3=12 \\ 2u_1-u_2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12u_1^2+32u_1+12=0 \\ -2u_1^2-\lambda_2=0 \\ \lambda_1=-u_1 \\ 2u_1u_2+u_2u_3=12 \\ 2u_1-u_2=8 \end{cases}.$$

Решая первое уравнение системы, находим $u_1=-1/3$ и $u_1=3$. Получаем $\lambda_0=1, u_1=-1/3, u_2=-26/3, u_3=-28/39, \lambda_1=1/3, \lambda_2=-2/9$ и $\lambda_0=1, u_1=3, u_2=-2, u_3=-12, \lambda_1=-3, \lambda_2=-18$.

Проверим, выполнено ли достаточное условие для точки $(3,-2,-12,-3,-18)$. Будем считать $u=u_1$ - независимой переменной и $v_1=u_2, v_2=u_3$ - функциями от u_1. Выпишем все матрицы, входящие в формулу для вычисления матрицы D. $L_{uu}=\dfrac{\partial^2 L}{\partial u_1^2}=0$,

$$L_{uv}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\frac{\partial L}{\partial u_1},\frac{\partial}{\partial u_3}\frac{\partial L}{\partial u_1}\right)=(u_3+2\lambda_1,u_2),$$

$$L_{vu}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial L}{\partial v}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u_1}\dfrac{\partial L}{\partial u_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1}\dfrac{\partial L}{\partial u_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_3+2\lambda_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

$$L_{vv}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 L}{\partial u_2^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_3\partial u_2}\\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_2\partial u_3} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_3^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & u_1+\lambda_1\\ u_1+\lambda_1 & 0\end{pmatrix},$$

$$g_v=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial g_1}{\partial u_3}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial g_2}{\partial u_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u_1+u_3 & u_2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ g_v^{-1}=\frac{1}{u_2}\begin{pmatrix}0 & -u_2\\ 1 & 2u_1+u_3\end{pmatrix},$$

$$g_v^T=\begin{pmatrix}2u_1+u_3 & -1\\ u_2 & 0\end{pmatrix},\ \left(g_v^T\right)^{-1}=\frac{1}{u_2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -u_2 & 2u_1+u_3\end{pmatrix},\ g_u=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u_1}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u_2\\ 2\end{pmatrix}.$$

Посчитаем произведение

$$L_{uv}g_v^{-1}g_u=(\lambda_0u_3+2\lambda_1,\lambda_0u_2)\frac{1}{u_2}\begin{pmatrix}0 & -u_2\\ 1 & 2u_1+u_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2u_2\\ 2\end{pmatrix}=-4\lambda_1+2u_2+4u_1;$$

$$g_u^T\left(g_v^T\right)^{-1}L_{vu}=(2u_2,2)\frac{1}{u_2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -u_2 & 2u_1+u_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_3+2\lambda_1\\ u_2\end{pmatrix}=2u_2-4\lambda_1+4u_1;$$

$$g_u^T\left(g_v^T\right)^{-1}L_{vv}g_v^{-1}g_u=$$

$$=(2u_2,2)\frac{1}{u_2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -u_2 & 2u_1+u_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & u_1+\lambda_1\\ u_1+\lambda_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -u_2\\ 1 & 2u_1+u_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2u_2\\ 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{4}{u_2}\left(-2u_1u_2-4u_1^2-2u_1u_3-2\lambda_1u_2-4\lambda_1u_1-2\lambda_1u_3\right)$$

Подставляя значения матриц в формулу для вычисления D, находим

$$D=4\lambda_1-2u_2-4u_1-2u_2+4\lambda_1-4u_1-\frac{4}{u_2}\left(2u_1u_2+4u_1^2+2u_1u_3+2\lambda_1u_2+4\lambda_1u_1+2\lambda_1u_3\right)$$

$$D_{(3,-2,-12,-3,-18)}=-40<0,\ D_{(-1/3,-26/3,-28/39,1/3,-2/9)}=\frac{112}{3}.$$

Следовательно, точка $u^*=(3,-2,-12)$ не доставляет минимальное значение целевой функции, а точка $u^*=(-1/3,-26/3,-28/39)$ доставляет минимальное значение целевой функции при заданных ограничениях.

Пример 2. Минимизировать функцию

$$J(u)=u_1u_2u_3\to\inf$$

при ограничениях

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2=1,\ u_1+u_2+u_3=0.$$

1. Выпишем функцию Лагранжа

$$L(u,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0u_1u_2u_3+\lambda_1(u_1^2+u_2^2+u_3^2-1)+\lambda_2(u_1+u_2+u_3).$$

2. Найдем частные производные функции Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}=\lambda_0u_2u_3+2\lambda_1u_2+\lambda_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial u_2}=\lambda_0u_1u_3+2\lambda_1u_2+\lambda_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial u_3}=\lambda_0u_1u_2+2\lambda_1u_3+\lambda_2$$

3. Решаем систему

$$\begin{cases} \lambda_0 u_2 u_3 + 2\lambda_1 u_2 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 u_1 u_3 + 2\lambda_1 u_2 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 u_1 u_2 + 2\lambda_1 u_3 + \lambda_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 u_2 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 u_2 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 u_3 + \lambda_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 u_2 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 u_3 + \lambda_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 u_1 = 0 \\ 2\lambda_1 u_3 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

Эта система эквивалентна следующей совокупности систем

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_3 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases}.$$

Первая система имеет решение, но $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, чего быть не может.

Вторая система эквивалентна следующей системе

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_3 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_2 = 0 \end{cases}.$$

Эта система несовместна. Поэтому $\lambda_0 \neq 0$.

Положим $\lambda_0 = 1$. Система примет вид

$$\begin{cases} u_2 u_3 + 2\lambda_1 u_1 + \lambda_2 = 0 \\ u_1 u_3 + 2\lambda_1 u_2 + \lambda_2 = 0 \\ u_1 u_2 + \lambda_1 u_3 + \lambda_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_2 - u_1)(u_3 - 2\lambda_1) = 0 \\ (u_3 - u_1)(u_2 - 2\lambda_1) = 0 \\ u_2 u_3 + 2\lambda_1 u_1 + \lambda_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

Система эквивалентна совокупности четырех систем

$$1.\begin{cases} u_2 = u_1 \\ u_3 = u_1 \\ u_2u_3 + 2\lambda_1 u_1 + \lambda_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \qquad 2.\begin{cases} u_3 = u_2 \\ \lambda_1 = \dfrac{u_2}{2} \\ u_2u_3 + 2\lambda_1 u_1 + \lambda_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases};$$

$$3.\begin{cases} u_1 = u_2 \\ \lambda_1 = \dfrac{u_2}{2} \\ u_2u_3 + 2\lambda_1 u_1 + \lambda_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases}; \qquad 4.\begin{cases} u_1 = u_3 \\ \lambda_1 = \dfrac{u_3}{2} \\ u_2u_3 + 2\lambda_1 u_1 + \lambda_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases}.$$

Нетрудно видеть, что первая система несовместна, вторая эквивалентна системе

$$\begin{cases} u_3 = u_2 \\ u_1 = -2u_2 \\ 6u_2^2 = 1 \\ \lambda_1 = \dfrac{u_2}{2} \\ \lambda_2 = -u_2u_3 - 2\lambda_1 u_1 \end{cases},$$

решением которой является вектор

$u_1 = \pm\dfrac{2}{\sqrt{6}}, u_2 = u_3 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6},} \lambda_1 = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = \dfrac{1}{6}$. Аналогично получаем, что решением системы 3 является вектор

$u_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}, u_2 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6},} u_3 = \pm\dfrac{2}{\sqrt{6},} \lambda_1 = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = \dfrac{1}{6}$, а системы 4 -

$u_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}, u_2 = \pm\dfrac{2}{\sqrt{6},} u_3 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6},} \lambda_1 = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = \dfrac{1}{6}$.

Проверим, выполнено ли достаточное условие для точки $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{2\sqrt{6}}, \dfrac{1}{6}\right)$. Выделим независимые и зависимые переменные. Будем считать $u = u_1$ - независимой переменной и $v_1 = u_2, v_2 = u_3$ - функциями от u_1. Для того чтобы выписать все матрицы, входящие в формулу для вычисления матрицы D (в данном случае матрица вырождается в число), посчитаем вторые частные производные функции Лагранжа

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u_1^2} = 2\lambda_1,\ \frac{\partial^2 L}{\partial u_2^2} = 2\lambda_1,\ \frac{\partial^2 L}{\partial u_3^2} = 2\lambda_1,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial u_2 \partial u_1} = u_3, \ \frac{\partial^2 L}{\partial u_3 \partial u_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial u_3} = u_2, \ \frac{\partial^2 L}{\partial u_2 \partial u_3} = \frac{\partial^2 L}{\partial u_3 \partial u_2} = u_1,$$

$(\lambda_0 = 1)$.

Поэтому

$$L_{uu}(u^*, \lambda^*) = 2\lambda_1\big|_{(u^*,\lambda^*)} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad L_{uv}(u^*, \lambda^*) = (u_2, u_3)\big|_{(u^*,\lambda^*)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1),$$

$$L_{vu}(u^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(u^*,\lambda^*)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2), \quad L_{vv}(u^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & u_1 \\ u_1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(u^*,\lambda^*)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_v(u^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} 2u_2 & 2u_3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(u^*,\lambda^*)} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_v^{-1}(u^*, \lambda^*) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -1 & -\frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

$$g_v^T(u^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{6}} & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(g_v^T\right)^{-1}(u^*, \lambda^*) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

$$g_u(u^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} 2u_2 \\ 2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(u^*,\lambda^*)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя значения матриц в формулу для вычисления D, находим

$$D = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} > 0.$$

Следовательно, точка $u^* = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ доставляет минимальное значение целевой функции при заданных ограничениях и это значение равно $-\frac{3}{\sqrt{6}}$. В остальных точках достаточное условие проверяется аналогично.

Задания для самостоятельной работы

1. Минимизировать функцию

$$I(u) = u_1 u_2 u_3 \to \inf$$

при ограничениях

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1,$$
$$u_1 + u_2 + u_3 \le 0.$$

2. Минимизировать функцию

$$I(u)=e^{u_1-u_2}-u_1-u_2\to\inf$$

при ограничениях

$$u_1+u_2\le 1, u_1\ge 0, u_2\ge 0.$$

ЗАДАЧА НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ

Поставлена задача

$$I(u)\to\min, \tag{15}$$

при условии, что

$$u\in U=\{u\in R^n \mid g_i(u)=0, i=1,\dots,s; h_j(u)\le 0, j=s+1,\dots,k\}. \tag{16}$$

Задачу (15),(16) можно свести к задаче на условный экстремум с ограничениями типа равенств. Введем новые переменные:

$$w_j, j=s+1,\dots,k; w=(w_{s+1},\dots,w_k).$$

Тогда задача примет вид

$$I(u,w)=I(u)\to\min, \tag{17}$$

$$g_i(u)=0, i=1,\dots,s, \tag{18}$$

$$h_j(u)+w_j^2=0, j=s+1,\dots,k. \tag{19}$$

Задачи (15),(16) и (17)-(19) эквивалентны в следующем смысле: если (u_*,w_*) является точкой локального экстремума для задачи (17)-(19), то u_* - точка локального экстремума для задачи (15),(16). И наоборот, если u_* - точка локального экстремума для задачи (15),(16), то существует вектор w_*, такой что точка (u_*,w_*) - точка локального экстремума для задачи (17)-(19).

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Составляем функцию Лагранжа

$$L=\lambda_0 I(u)+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i g_i(u)+\sum_{j=1}^{s_1}\mu_j h_j(u)$$

и потребуем выполнения следующих условий:

1. $\dfrac{\partial L}{\partial u}=0$ - необходимое условие экстремума;

2. $g_i(u)=0, i=1,\dots,s;$

3. $\mu_j h_j(u)=0, j=1,\dots,s_1$ - условия дополняющей нежесткости, где μ_j - некоторые числа;

4. $\lambda_0, \mu_{j\geq 0}, j = 1,...,s_1.$

Пример 1. Минимизировать функцию

$$I(u) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \to \inf \text{ ,}$$

при условиях

$$2u_1 - u_2 + u_3 \leq 5,$$
$$u_1 + u_2 + u_3 = 3.$$

Построим функцию Лагранжа. Она имеет вид

$$L = \lambda_0(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \lambda_1(u_1 + u_2 + u_3 - 3) + \mu_1(2u_1 - u_2 + u_3 - 5).$$

Посчитаем частные производные от функции Лагранжа по каждой переменной и приравняем их к нулю. Получим

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = 2\lambda_0 u_1 + \lambda_1 + 2\mu_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u_2} = 2\lambda_0 u_2 + \lambda_1 - \mu_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_3} = 2\lambda_0 u_3 + \lambda_1 + \mu_1 = 0.$$

Припишем к ним ограничения

$$u_1 + u_2 + u_3 = 3, \mu_1(2u_1 - u_2 + u_3 - 5) = 0$$

и тем самым сведем задачу с ограничениями типа неравенств к задаче с ограничениями типа равенств. Предположим сначала, что $\lambda_0 = 0$, тогда получим следующую систему для определения параметров и критических точек

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\mu_1 = 0 \\ \lambda_1 - \mu_1 = 0 \\ \lambda_1 + \mu_1 = 0 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ \mu_1(2u_1 - u_2 + u_3 - 5) = 0. \end{cases}$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Этот случай нам не подходит. Будем предполагать теперь для удобства, что $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тогда система приобретет вид

$$\begin{cases} u_1 + \lambda_1 + 2\mu_1 = 0 \\ u_2 + \lambda_1 + \mu_1 = 0 \\ u_3 + \lambda_1 + \mu_1 = 0 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 3 \\ \mu_1(2u_1 - u_2 + u_3 - 5) = 0 \end{cases} .$$

Выразим переменные u_1, u_2, u_3 и подставим их в четвертое и пятое уравнения последней системы. Получим

$$u_1 = -(\lambda_1 + 2\mu_1), u_2 = -(\lambda_1 - \mu_1), u_3 = -(\lambda_1 + \mu_1).$$

Тогда

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\mu_1 = -3 \\ \mu_1(-2\lambda_1 - 6\mu_1 - 5) = 0. \end{cases}$$

Последняя система имеет два решения. Первое: если $\mu_1 = 0,$ то

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 1. \end{cases}$$

Значение функционала равно $I(u) = 3.$ Второй случай: если значение в скобках равно нулю, т.е. $2\lambda_1 + 6\mu_1 + 5 = 0,$ то

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{4}{7} \\ \mu_1 = \dfrac{1}{2}(-3 + \dfrac{12}{7}) < 0. \end{cases}$$

Этот случай нас не устраивает.

Пример 2. Минимизировать функцию

$$I(u) = u_1 u_2 u_3 \to \inf$$

при ограничении

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \le 1.$$

Составим функцию Лагранжа. Она имеет вид

$$L = \lambda_0 u_1 u_2 u_3 + \mu_1(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 1).$$

Посчитаем частные производные по всем переменным. Получим

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = \lambda_0 u_2 u_3 + 2\mu_1 u_1$$
$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = \lambda_0 u_1 u_3 + 2\mu_1 u_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial u_3} = \lambda_0 u_1 u_2 + 2\mu_1 u_3$$

Приравняем полученные производные к нулю и добавим к этой системе условия дополняющей нежесткости

$$\begin{cases} \lambda_0 u_2 u_3 + 2\mu_1 u_1 = 0 \\ \lambda_0 u_1 u_3 + 2\mu_1 u_2 = 0 \\ \lambda_0 u_1 u_2 + 2\mu_1 u_3 = 0 \\ \mu_1\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 1\right) = 0 \end{cases}$$

Если множитель $\lambda_0 = 0$, то система приобретает вид

$$\begin{cases} \mu_1 u_1 = 0 \\ \mu_1 u_2 = 0 \\ \mu_1 u_3 = 0 \\ \mu_1(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Если $\mu_1 = 0,$ то ограничение не выполняется. Если же $\mu_1 \neq 0$, то $u_1 = u_2 = u_3 = 0.$ Это нас не устраивает. Пусть теперь $\lambda_0 = 1$, тогда исходная система будет иметь вид

$$\begin{cases} u_2 u_3 + 2\mu_1 u_1 = 0 \\ u_1 u_3 + 2\mu_1 u_2 = 0 \\ u_1 u_2 + 2\mu_1 u_3 = 0 \\ \mu_1\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 1\right) = 0 \end{cases}$$

Если $\mu_1 = 0$, то $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ и ограничение не выполнено. Рассматривая случай $\mu_1 \neq 0$ и решая соответсвующую систему, получаем точки вида $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Предлагаем проверить это самостоятельно.

Задания для самостоятельной работы

1. Минимизировать функцию

$$I(u) = u_1 u_2 u_3 \to \inf$$

при ограничениях

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1,$$
$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

2. Минимизировать функцию

$$I(u) = -u_1^2 u_2^3 u_3^4 \to \inf$$

при ограничении

$$u_1 + u_2 + u_3 = 18.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галлеев Э.М. Оптимизация: Теория . Примеры. Задачи / Э.М. Галлеев, В.М. Тихомиров. – М. : Эдиториал УРСС, 2000. – 317 с.

2. Васильев О.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях / О.В. Васильев, А.В. Аргучинцев. – М. : Физматлит, 1999. – 207 с.

3. Карманов В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М. : Физматлит, 2000. – 263 с.

4. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход / Э.Полак. – М. : Мир, 1974. – 367 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Составители: Белоусова Елена Петровна

Коструб Ирина Дмитриевна

Редактор Тихомирова Ольга Александровна