Федеральное Агентство по образованию Российской Федерации

ГОУ ВПО ЮЖНО-РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА (ЮРГУЭС)

Филькин Г.В.

ЛЕКЦИЯ

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

для студентов экономических специальностей очной, заочной и дистанционной форм обучения

Шахты 2006

Т р а н с п о р т н а я   з а д а ч а .

Транспортная задача является задачей линейного программирования, поэтому ее можно решать универсальный метод решения задач линейного программирования - симплекс-метод, однако на практике удобно применять более простые методы.

Пусть некоторый однородный продукт, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве a_i (i = 1,2,..., m) единиц соответственно, необходимо доставить n потребителям B_j в количестве b_j (j=1,2,...,n) единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю.

Необходимо составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы, полностью удовлетворить потребности и имеющий минимальную стоимость.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю; тогда условие задачи можно записать в виде таблицы:

B / A	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Рисунок 1

Стоимость $$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \to \min.$$

Ограничения получаем из требований, чтобы все грузы были вывезены и все потребности удовлетворены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \qquad i = 1,2,..., m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \qquad j = 1,2, ...,n.$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i=1,2,..., m; \quad j=1,2,...,n.$$

Предполагается, что $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, т.е. модель закрытая.Если модель не является закрытой, то вводят ложного поставщика или потребителя с нулевыми стоимостями перевозок так, чтобы задача стала закрытой, после чего ее решают.

Система ограничений задачи содержит mn неизвестных и $m+n$ уравнений. В общем случае система ограничений должна содержать $m+n$-1 линейно независимых уравнений, значит, невырожденный опорный план содержит $m+n$-1 положительных компонент. Клетки таблицы (рисунок 1), в которых находятся отличные от нуля перевозки, называют занятыми, остальные – незанятыми. Занятые клетки соответствуют базисным неизвестным, их количество $m+n$-1.

Опорность плана при записи условий в виде таблицы (рисунок 1) заключается в его ацикличности, т.е. в таблице нельзя построить замкнутый цикл, все вершины которого лежат в замкнутых клетках.

Циклом называется набор клеток, в котором две и только две соседние клетки расположены в одном столбце или одной строке таблицы, причём последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая.

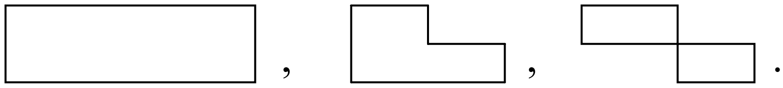
Построение циклов начинается в какой-либо занятой клетке, и переходят по столбцу или строке к другой занятой клетке, в которой делают поворот под прямым углом и движутся по строке или столбцу к следующей занятой клетке и т.д., пытаясь возвратиться к первоначальной клетке. Если такой возврат возможен, то получен цикл. Клетки, в которых происходит поворот под прямым углом, определяют вершины цикла.

Например:

	40	25	20	50
60	5	4	1 20	2 40
40	4 30	2	6	3 10
	7	3	5	4

35	10	25		

Виды циклов:



Решение задачи также как и задачи линейного программирования предполагает вначале отыскание опорного плана, а затем отыскание оптимального.

Для отыскания опорного плана рассмотрим два метода:

1) метод «северо-западного угла»
2) метод наименьшей стоимости.

Метод «северо-западного угла».

Определить опорное решение для задачи, заданной таблицей:

A \ B	40	25	20	50
60	5	4	1	2
40	4	2	6	3
35	7	3	5	4

Заполнение таблицы начинаем с клетки (1,1). Сравниваем a_1=60 и b_1=40. Выбираем min $\{a_1, b_1\}$ = 40. Это значение x_{11}=40 записываем в первую клетку. Потребности первого потребителя B_1 полностью удовлетворены. Поэтому остальные клетки первого столбца мы уже заполнять не будем. У первого поставщика остались не вывезенными 60-40=20 единиц груза.

Следующей для заполнения будет клетка (1,2) – вторая в первой строке. Заполняем её по min {25, 60-40} = 20. Таким образом, все запасы первого поставщика будут вывезены, и остальные клетки первой строки заполнять уже не нужно.

Следующей заполняется клетка (2,2) – вторая во второй строке по min {40, 25-20} = 5. Второй потребитель удовлетворён и переходим ко второй строке к третьей клетке.

$$x_{23} = \min \{40\text{-}5, 20\} = 20.$$

Третий столбец заполнен. Следующей заполняем клетку (2, 4)

$$x_{24} = \min \{45\text{-}25, 50\} = 15.$$

Последней заполняем клетку (3,4).

$$x_{34} = \min\{35, 50\text{-}15\} = 35.$$

Получаем таблицу:

A \ B	40	25	20	50
60	5 40	4 20	1	2
40	4	2 5	6 20	3 15
35	7	3	5	4 35

Заполненных клеток должно быть $m+ n - 1$, т.е. $3 + 4 - 1 = 6$. В нашем случае их действительно шесть. Этот план ацикличен, значит, является опорным. Предварительные транспортные издержки составят

$$f = 40\cdot5 + 20\cdot4 + 5\cdot2 + 20\cdot6 + 15\cdot3 + 35\cdot4 = 595.$$

При составлении первоначального плана не учитывалась стоимость перевозки единицы груза, поэтому построенный план далёк от оптимального.

Метод наименьшей стоимости.

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i или b_j. Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо строку и столбец одновременно (если $a_i = b_j$). Из оставшейся части таблицы вновь выбирают клетку с наименьшей стоимостью и процесс заполнения продолжают до тех пор, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Найдём план методом наименьших стоимостей:

A \ B	40	25	20	50
60	5	4	1 20	2 40
40	4 5	2 25	6	3 10
35	7 35	3	5	4

Начинаем заполнение с клетки со стоимостью равной 1, затем 2 и т.д.

$$x_{13} = \min\{60, 20\} = 20$$
$$x_{14} = \min\{60\text{-}20, 50\} = 40$$
$$x_{22} = \min\{40, 25\} = 25$$
$$x_{24} = \min\{40\text{-}25, 50\text{-}40\} = 10$$
$$x_{21} = \min\{40\text{-}(25+10), 40\} = 5$$
$$x_{31} = \min\{35, 40\text{-}5\} = 35.$$

Заполненных клеток шесть ($3 + 4 - 1 = m + n - 1$).
План ацикличен.

$$f = 20\cdot 1 + 40\cdot 2 + 5\cdot 4 + 25\cdot 2 + 10\cdot 3 + 35\cdot 7 = 445.$$

Метод потенциалов.

Для отыскания оптимального плана используем метод потенциалов.
Теорема.
Если план $\bar{x}^* = \left(x_{ij}^*\right)$ транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из $m+n$ чисел u_i и v_j , удовлетворяющих условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \qquad \text{для } x_{ij}^* > 0$$

$$u_i + v_j \le c_{ij}, \qquad \text{для } x_{ij}^* = 0$$

$$(i = 1,2,\ldots, m; \qquad j = 1,2,\ldots, n).$$

Числа u_i и v_j называются потенциалами соответственно поставщиков и потребителей.

Из теоремы следует, что для того чтобы первоначальный план был оптимальным, необходимо выполнение следующих условий:

а) для каждой занятой клетки сумма потенциалов должна быть равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке:

$$u_i + v_j = c_{ij};$$

б) для каждой незанятой клетки сумма потенциалов должна быть меньше или равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке:

$$u_i + v_j \le c_{ij}.$$

Если хотя бы одна незанятая клетка не удовлетворяет последнему условию $u_i + v_j \le c_{ij}$, то план не оптимален.

Алгоритм метода потенциалов.

1. Построение системы потенциалов. Для построения системы потенциалов используем условие $u_i + v_j = c_{ij}$. Заполненных клеток должно быть точно $m+ n - 1$. Если оказалось, что при составлении первоначального плана заполненных клеток меньше чем $m+ n - 1$, то добавим нужное количество занятых клеток с $x_{ij} = 0$ таким образом, чтобы при этом не был образован цикл.

Используем план, полученный методом «наименьшей стоимости»:

A \ B	40	25	20	50	
60	5	4	1 20	2 40	u_1
40	4 5	2 25	6	3 10	u_2
35	7 35	3	5	4	u_3
	v_1	v_2	v_3	v_4	

$$u_1 + v_3 = 1$$
$$u_1 + v_4 = 2$$
$$u_2 + v_1 = 4$$
$$u_2 + v_2 = 2$$
$$u_2 + v_4 = 3$$
$$u_3 + v_1 = 7$$

Система потенциалов содержит $m + n - 1$ уравнений с $m+ n$ неизвестными. Уравнений на одно меньше, чем неизвестных, поэтому система является неопределённой и одному неизвестному (обычно u_1) придают нулевое значение $u_1= 0$. Решаем систему:

$$u_1 = 0 \qquad v_1= 3$$
$$u_2 = 1 \qquad v_2= 1$$
$$u_3 = 4 \qquad v_3= 1$$
$$v_4= 2.$$

2. Проверка выполнения условия оптимальности для незанятых клеток. Просматриваем строки и для каждой незанятой клетки проверяем выполнение условия $u_i + v_j \le c_{ij}$. Если это условие выполнено для всех клеток, то план оптимален. Если для некоторых клеток $u_i + v_j > c_{ij}$, то план неоптимален. Для каждой клетки, в которой $u_i + v_j > c_{ij}$, находим $\delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$.

В нашем примере:

$$u_1 + v_1 = 0 + 3 < 5$$
$$u_1 + v_2 = 0 + 1 < 4$$
$$u_2 + v_3 = 1 + 1 < 6$$
$$u_3 + v_2 = 4 + 1 > 3 \qquad \delta_{32} = 5 - 3 = 2$$
$$u_3 + v_3 = 4 + 1 = 5$$
$$u_3 + v_4 = 4 + 2 > 4 \qquad \delta_{34} = 6 - 4 = 2$$

В двух клетках нарушено условие оптимальности.

3. Выбор клетки, в которую необходимо послать перевозку.

Загрузке подлежит в первую очередь клетка, которой соответствует $\max\delta_{ij} = \max\,(u_i + v_j - c_{ij})$.

В нашем примере $\delta_{32} = \delta_{34}$, поэтому можем взять любую из этих клеток. Например, возьмём клетку (3, 2). Нужно определить, сколько единиц груза должно быть перераспределено в неё.

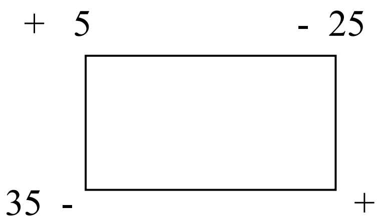
4. Построение цикла и определение величины перераспределения груза. Для определения количества единиц груза, подлежащих перераспределению, отмечаем знаком «+» незанятую клетку, которую надо загрузить. Это означает, что клетка присоединяется к занятым. В таблице занятых клеток станет $m+n$, поэтому появится цикл, все вершины которого, за исключением клетки, отмеченной знаком «+», находятся в занятых клетках, причём этот цикл единственный. Отыскиваем цикл и, начиная движение от клетки, отмеченной знаком «+», поочерёдно проставляем знаки «-» и «+». Затем находим $\theta_0 = \min x_{ij}$, где x_{ij} - перевозки, стоящие в вершинах цикла, отмеченных знаком «-». Величина θ_0 определяет, сколько единиц груза можно перераспределить по циклу. Значение θ_0 записываем в незанятую клетку, отмеченную знаком «+», двигаясь по циклу, вычитаем θ_0 из x_{ij}, которые

стоят в клетках – вершинах цикла, отмеченных знаком «-» и прибавляем к x_{ij}, соответствующим вершинам цикла с «+».

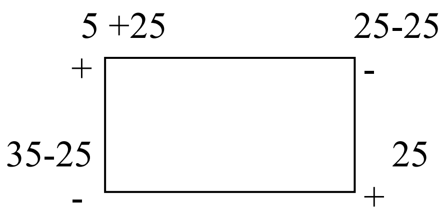
Если θ_0 соответствуют несколько минимальных перевозок, то при вычитании оставляем в соответствующих клетках нулевые перевозки в таком количестве, чтобы во вновь полученном плане занятых клеток было $m+n-1$.

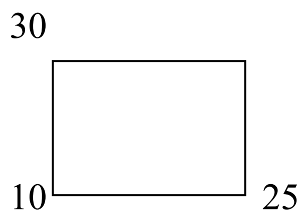
Произведём перерасчёт по циклу в нашем примере:

A \ B	40	25	20	50
60	5	4	1 20	2 40
40	4 5	2 25	6	3 10
35	7 35	3 +	5	4



$$\min\{35,25\}=25=\theta_0$$





Получаем таблицу с новым планом:

A \ B	40	25	20	50
60	5	4	1 20	2 40
40	4 30	2	6	3 10

35	7 10	3 25	5	4

Перевозки в тех клетках, которые не входили в цикл, не меняются. Полученный план снова проверяем на оптимальность и при необходимости снова производим пересчет по циклу.