Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Ульяновский государственный университет»

И. В. Семушин, Ю. В. Цыганова

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОЦЕНКИ И УПРАВЛЕНИЕ

Раздел: Детерминистские модели динамических систем

Методическое пособие по курсам

«Стохастические модели и оценки»
«Теория систем и системный анализ»
«Основы моделирования»

Ульяновск 2007

УДК 681.5.01:512
ББК В1я 731-1
С30

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор В. Р. Крашенинников
канд. физ-мат. наук, доцент М. В. Чунаева

Семушин И. В., Цыганова Ю. В.

С30 СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОЦЕНКИ И УПРАВЛЕНИЕ. Раздел: Детерминистские модели динамических систем. Методическое пособие по курсам «Стохастические модели и оценки», «Теория систем и системный анализ», «Основы моделирования». — Ульяновск: УлГУ, 2007. — 57 с.
ISBN 5-00000-000-0

Содержит теоретический и практический материал для проведения семинарских занятий со студентами, изучающими детерминистские динамические системы, т. е. системы, поведение которых можно описать системами обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений.

Для студентов, обучающихся по направлениям: 010200 Математика. Прикладная математика; 010300 Математика. Компьютерные науки; 010400 Информационные технологии; 010500 Прикладная математика и информатика; 080800 Прикладная информатика; 090102 Компьютерная безопасность и другим специальностям, в программы которых входят такие дисциплины как «Стохастические модели и оценки», «Основы моделирования», «Теория систем и системный анализ» или «Теория автоматического управления».

УДК 681.5.01:512
ББК В1я 731-1

ISBN 5-00000-000-0

Оглавление

Предисловие

Предлагаемое вниманию читателя учебное пособие содержит теоретический и практический материал для проведения семинарских занятий со студентами, изучающими детерминистские динамические системы, т. е. объекты, поведение которых можно описать системами дифференциальных или разностных уравнений.

Пособие состоит из введения, четырех основных разделов: «Обзор операционного исчисления», «Линейные динамические системы», «Самостоятельная работа», «Примеры решения задач», списка литературы и приложения.

В разделе 1 — «Обзор операционного исчисления» — дается определение преобразования Лапласа и приводятся его основные свойства. Таблицы преобразований Лапласа — как необходимый рабочий инструмент решения множества практических задач — для удобства также вынесены за пределы основного текста, — в Приложение. Раздел 1 завершается набором практических заданий. Число таких задач по операционному исчислению значительно расширится, если учесть, что таблицы, вынесенные в приложение, сами по себе дают материал для самостоятельного вывода включенных в них формул.

Раздел 2 — «Линейные динамические системы» — содержит теоретический материал по линейным динамическим системам и также набор практических заданий. В теоретический материал включены следующие вопросы: описание системы в пространстве состояний, передаточная функция системы, стандартная управляемая модель системы, стандартная наблюдаемая модель системы, каноническая модель системы, критерии управляемости и наблюдаемости линейных непрерывных и дискретных систем, а также линеаризация нелинейных динамических систем.

В раздел 3 — «Самостоятельная работа» — вошли две контрольные работы. Варианты этих работ индивидуальны в пределах учебной группы.

В разделе 4 — «Примеры решения задач» — подробно разобраны решения некоторых задач.

Как уже отмечено, в Приложение А включены таблицы соответствий для преобразования Лапласа, используемые для решения задач.

Задачи из первого и второго разделов могут быть использованы при проведении семинарских занятий, а контрольные работы — для закрепления полученных студентами знаний и как проверочный материал при выставлении итоговой оценки.

Ульяновск,	*И. В. Семушин*
декабрь 2006	*Ю. В. Цыганова*

1

Обзор операционного исчисления

1.1 Преобразование Лапласа

Пусть функция $f(t)$ действительного переменного t определена при всех $t \in (-\infty; +\infty)$; значения функции $f(t)$ могут быть как действительными, так и комплексными. Функция $f(t)$ называется **кусочно-непрерывной**, если она непрерывна или имеет точки разрыва первого рода, причем на каждом конечном интервале оси t содержится лишь конечное число таких точек.

Определение 1.1. Функция $f(t)$, определенная для всех моментов времени $t \in (-\infty; +\infty)$, называется **функцией-оригиналом**, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

2) функция $f(t)$ кусочно-непрерывная при $t \geq 0$;

3) существуют такие действительные числа $M > 0$ и σ, что для всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma t}. \tag{1.1}$$

Если функция-оригинал $f(t)$ удовлетворяет условию (1.1) при некоторых $M > 0$ и σ_1, то она удовлетворяет этому условию с тем же самым M и при всех $\sigma > \sigma_1$. С другой стороны, если при некотором значении σ_2 условие (1.1) не выполнено ни при каком $M > 0$, то это условие не будет выполняться ни при каком $M > 0$ и $\sigma < \sigma_2$. Таким образом, все точки σ на числовой прямой разбиваются на две группы, образующие два луча $(-\infty;\sigma_0)$ и $(\sigma_0;+\infty)$: для любого $\sigma>\sigma_0$ условие (1.1) выполнено с некоторым $M>0$ (зависящим, вообще говоря, от σ) и для любого $\sigma<\sigma_0$ условие (1.1) не выполняется ни при каком $M>0$. Число σ_0, разделяющее эти два множества, называется **индексом**, или **показателем роста функции** $f(t)$.

Для определения преобразования над функциями-оригиналами введем следующие понятия.

Определение 1.2. Функция $\varphi(t)$, определенная при $t\geq 0$, называется *интегрируемой* на интервале $[0;+\infty)$, если существует предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R \varphi(t)dt=\int\limits_0^\infty \varphi(t)dt \tag{1.2}$$

(т. е. если несобственный интеграл в (1.2) сходится). Функция $\varphi(t)$ называется *абсолютно интегрируемой* на множестве $[0;+\infty)$, если существует предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R \mid\varphi(t)\mid dt=\int\limits_0^\infty \mid\varphi(t)\mid dt\,, \tag{1.3}$$

т. е. сходится несобственный интеграл от $\mid\varphi(t)\mid$. Справедливо следующее

Утверждение 1.1. *Если функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема на множестве $[0;+\infty)$, то она интегрируема на этом множестве.*

Другими словами, из сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty \mid\varphi(t)\mid dt$ следует сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty \varphi(t)dt$. Отметим, что обратное утверждение неверно: не всякая интегрируемая функция является также абсолютно интегрируемой.

Пусть теперь функция φ зависит от действительного переменного t и комплексного параметра s: $\varphi=\varphi(t,s)$. Если при некотором s интеграл $\int\limits_0^\infty \varphi(t,s)dt$ сходится, то значение этого интеграла обозначим через $F(s)$. Таким образом, $F(s)$ оказывается функцией, определенной на множестве тех значений s, для которых интеграл $\int\limits_0^\infty \varphi(t,s)dt$ сходится.

Определение 1.3. Интеграл $\int\limits_0^\infty \varphi(t,s)dt$ называется правильно (или равномерно) сходящимся в данной области D к функции $F(s)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число R_0, зависящее только от ε, что для всех $R > R_0$ и всех точек $s \in D$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_0^R \varphi(t,s)dt - F(s)\right| < \varepsilon$.

Очевидно, что из равномерной сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty \varphi(t,s)dt$ в области D значений переменного s следует его сходимость в каждой точке $s \in D$. Но обратное неверно: интеграл, сходящийся в каждой точке области D, не обязательно сходится в этой области равномерно. Существенным дополнительным условием, отличающим поточечную сходимость от равномерной, является то, что число R_0 в определении равномерной сходимости не зависит от s; это число одно и то же для всех точек $s \in D$.

Определение 1.4. **Преобразованием (оператором) Лапласа функции** $f(t)$ называется правило, определяемое формулой

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \tag{1.4}$$

по которому заданной функции $f(t)$ действительного переменного t ставится в соответствие функция $F(s)$ комплексного переменного s. Функция $F(s)$ определена на множестве тех значений s, для которых интеграл (1.4) сходится. Эта функция называется **изображением** функции $f(t)$. Тот факт, что функция $F(s)$ является изображением функции $f(t)$, записывается следующим образом: $f(t) \doteqdot F(s)$ или $F(s) \doteqdot f(t)$.

Теорема 1.1 (*о существовании и аналитичности изображения*). Если $f(t)$ — функция-оригинал с индексом роста σ_0, то интеграл (1.4) сходится абсолютно для всех s в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma_0$; при этом в любой полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma_1$ с $\sigma_1 > \sigma_0$ сходимость будет равномерной. Функция-изображение $F(s)$, определяемая формулой (1.4) в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, является аналитической функцией в этой полуплоскости. [1]

[1] Сведения из теории функций комплексного переменного, необходимые для понимания преобразования Лапласа, можно найти, например, в [4], [9], [10].

Доказательство. Воспользуемся условием 3) из определения 1.1. Так как $s = \alpha + i\omega$, где α и ω — действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$, то $|e^{-st}| = e^{-\alpha t}$ и поэтому

$$\left|f(t)e^{-st}\right| \le Me^{\sigma t}e^{-\alpha t} = Me^{(\sigma-\alpha)t}\,.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^\infty \left|f(t)e^{-st}\right| dt \le M\int\limits_0^\infty \mid e^{(\sigma-\alpha)t} \mid dt = M\,\frac{e^{(\sigma-\alpha)t}}{\sigma-\alpha}\bigg|_0^\infty = \frac{M}{\alpha-\sigma}\,,$$

так как, по условию теоремы, $\sigma - \alpha < 0$ и потому $e^{(\sigma-\alpha)t} \to 0$ при $t \to \infty$. С учетом утверждения 1.1 это доказывает абсолютную сходимость интеграла (1.4). □

Как правило, функция $F(s)$ оказывается определенной и аналитической в значительно большей части комплексной плоскости, чем полуплоскость $\mathrm{Re}\, s > \sigma_0$. Согласно теореме 1.1, функция $F(s)$ не имеет особых точек в этой полуплоскости; все они лежат левее прямой $\mathrm{Re}\, s = \sigma_0$ или на самой этой прямой.

Преобразование Лапласа (1.4) каждой функции-оригиналу $f(t)$ ставит в соответствие функцию-изображение $F(s)$. Оказывается, у разных функций-оригиналов изображения также должны быть разными. Более того, существует формула, называемая формулой обращения, которая позволяет по известному изображению $F(s)$ восстановить оригинал $f(t)$, причем единственным образом, если только не обращать внимания на значения, приписываемые оригиналу в точках разрыва.

Теорема 1.2 (*теорема обращения*). Если $f(t)$ — функция-оригинал с индексом роста σ_0 и $F(s)$ — ее изображение, то во всякой точке непрерывности функция $f(t)$ выражается через $F(s)$ по следующей формуле обращения:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds\,, \tag{1.5}$$

где интеграл берется по любой прямой $\operatorname{Re} s = \sigma > \sigma_0$ и понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} F(s)e^{st}ds\,.$$

1.2 Основные свойства преобразования Лапласа

Обозначим через $f(t)$, $g(t)$, ... функции-оригиналы, а через $F(s)$, $G(s)$, ... — их изображения. Свойства преобразования Лапласа могут формулироваться как теоремы, большинство которых несложно доказываются, что и рекомендуется сделать читателю в качестве упражнений.

1°. Теорема 1.3 (*поведение изображения при* $s \to \infty$). Изображение $F(s)$ любой функции-оригинала $f(t)$ стремится к нулю, когда $s \to \infty$ так, что при этом $\operatorname{Re} s \to +\infty$. Если, в частности, $F(s)$ — функция аналитическая в бесконечно удаленной точке $(s = \infty)$, то дополнительное условие $\operatorname{Re} s \to +\infty$ не играет роли, т. е. $F(s)$ стремится к нулю при s стремящемся к бесконечности по любому закону:

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0\,.$$

2°. Теорема 1.4 (*теорема линейности*). Если $f(t) \doteqdot F(s)$, $g(t) \doteqdot G(s)$, то для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(s) + \beta G(s)\,. \tag{1.6}$$

3°. Теорема 1.5 (*теорема подобия*). Если $f(t) \doteqdot F(s)$, то для любого числа $\lambda > 0$

$$f(\lambda t) \doteqdot \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right). \tag{1.7}$$

4°. Теорема 1.6 (*теорема запаздывания*). Если $f(t) \doteqdot F(s)$, то для любого числа $\tau > 0$

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-s\tau}F(s)\,. \tag{1.8}$$

5°. Теорема 1.7 (*теорема смещения*). Если $f(t) \doteqdot F(s)$, то для любого числа λ

$$e^{-\lambda t} f(t) \doteqdot F(s+\lambda)\,. \tag{1.9}$$

6°. Теорема 1.8 (*теорема о дифференцировании оригинала*). Пусть $f(t)$ непрерывна при $t \geq 0$, $f(t)$ и $f'(t)$ являются функциями-оригиналами и $f(t) \doteqdot F(s)$. Тогда

$$f'(t) \doteqdot sF(s) - f(0)\,. \tag{1.10}$$

Если, кроме того, производная $(n-1)$-порядка $f^{(n-1)}(t)$ непрерывна при $t \geq 0$ и $f^{(n)}(t)$ — функция-оригинал, то

$$f^{(n)}(t) \doteqdot s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\,, \tag{1.11}$$

где под значениями $f^{(k)}(0)$ понимается правый предел $\lim\limits_{t\to 0+} f^{(k)}(t)$.

Следствие 1.1. Если $f'(t)$ является оригиналом, а $F(s)$ — функция, аналитическая в бесконечности, то

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)\,. \tag{1.12}$$

Следствие 1.2. Если $f'(t)$ является оригиналом и существует предел функции $f(t)$ при $t \to \infty$, то

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)\,. \tag{1.13}$$

7°. Теорема 1.9 (*теорема об интегрировании оригинала*). Если $f(t)$ является функцией-оригиналом и $f(t) \doteqdot F(s)$, то интеграл $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ также является оригиналом и

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \frac{F(s)}{s}\,. \tag{1.14}$$

8°. Теорема 1.10 (*теорема о дифференцировании изображения*). Если дано соответствие $f(t) \doteqdot F(s)$, то

$$-tf(t) \doteqdot F'(s)\,. \tag{1.15}$$

9°. Теорема 1.11 (*теорема об интегрировании изображения*). Если $f(t)$ и $\dfrac{f(t)}{t}$ являются функциями-оригиналами и $f(t) \risingdotseq F(s)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_s^\infty F(s)ds\,. \tag{1.16}$$

10°. Теорема 1.12 (*теорема о дифференцировании по параметру*). Если при любом значении x оригиналу $f(t,x)$ соответствует изображение $F(t,x)$, то

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \risingdotseq \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\,. \tag{1.17}$$

Определение 1.5. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ определены и кусочно-непрерывны при $t \in (-\infty;+\infty)$. Тогда для каждого значения t существует интеграл $\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. **Сверткой функций** $f(t)$ **и** $g(t)$ называется новая функция переменной t, обозначаемая $f*g(t)$ и определяемая равенством

$$f*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\,. \tag{1.18}$$

Свертка обладает следующими свойствами:
Свойство 1. Справедливо равенство

$$f*g(t) = g*f(t). \tag{1.19}$$

Свойство 2. Если $f(t)$ и $g(t)$ — функции-оригиналы с индексами роста σ_1 и σ_2 соответственно, то свертка $f*g(t)$ также является функцией-оригиналом, индекс роста которой не превосходит $\max(\sigma_1,\sigma_2)$.

11°. Теорема 1.13 (*теорема умножения изображений*). Если даны два соответствия $f(t) \risingdotseq F(s)$, $g(t) \risingdotseq G(s)$, то

$$f*g(t) \risingdotseq F(s)G(s)\,. \tag{1.20}$$

12°. Теорема 1.14 (*интеграл Дюамеля*). Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — функции-оригиналы, причем производная $g'(t)$ — также функция-оригинал. Тогда справедливо соответствие, называемое интегралом (или формулой) Дюамеля:

$$sF(s)G(s) \doteqdot g(0)f(t) + \int\limits_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau. \tag{1.21}$$

1.3 Нахождение оригинала по изображению

Приведем два способа нахождения функции-оригинала $f(t)$, изображение $F(s)$ которой является дробно-рациональной функцией, у которой степень числителя строго меньше степени знаменателя. Первый способ состоит в том, что дробь $F(s)$ разлагается в сумму простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов. После этого изображение каждого слагаемого легко находится по таблице (см. Приложение B).

Второй способ нахождения оригинала по известному изображению основан на использовании теории вычетов.

Теорема 1.15 (*теорема о разложении*). Если изображение $F(s)$ является дробно-рациональной функцией, то ее оригинал $f(t)$ находится по формуле

$$f(t) = \sum_k \operatorname*{res}_{s=s_k} \left(F(s)e^{st}\right), \tag{1.22}$$

т. е. функция $f(t)$ равна сумме вычетов функции $F(s)e^{st}$, вычисленных во всех полюсах s_k функции $F(s)$.

Если изображение $F(s)$ имеет полюсы $s_1, s_2, \ldots, s_m$ соответствующей кратности $n_1, n_2, \ldots, n_m$, тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \lim_{s\to s_k} \left[\frac{1}{(n_k-1)!}\frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}}\{(s-s_k)^{n_k}F(s)e^{st}\}\right]. \tag{1.23}$$

1.4 Задачи

Задачи этого раздела могут быть использованы при проведении семинарских занятий и/или как домашние задания.

Задание 1. Найти изображение функции:

1) $\sin^2 t$. 2) $e^{-t}\sin 2t \sin 4t$.

3) $\cos^2 \omega t$. 4) $\dfrac{\sin 4t}{t}$.

5) $\sin^3 t$. 6) $t^2 \cos t$.

7) $\sin 2t \sin 4t$. 8) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$.

9) $\sin 2t \cos 3t$. 10) $t^2 \operatorname{ch} at$.

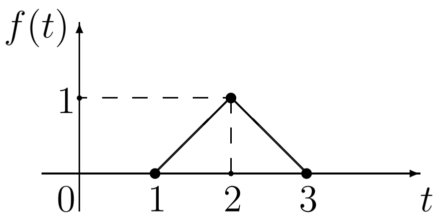
Задание 2. Найти оригинал изображения (сделать проверку, найдя изображение полученного оригинала):

1) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+2s+5)^2}$. 2) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+16)^2}$.

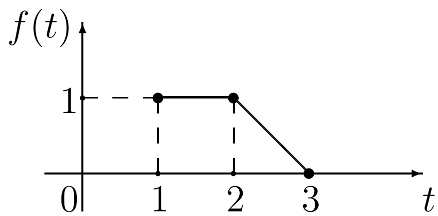
3) $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$. 4) $F(s) = \dfrac{s+2}{s^3(s-1)^2}$.

Задание 3. По данному графику оригинала найти изображение.

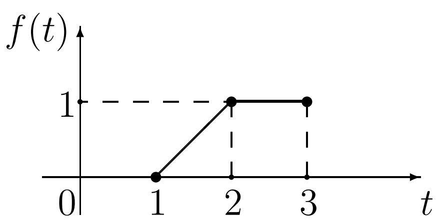
1)



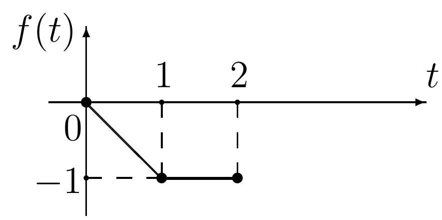
2)



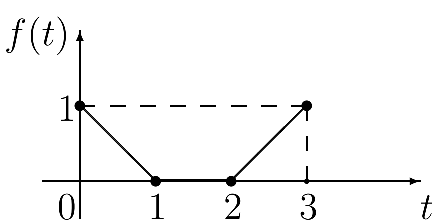
3)



4)



5)



Задание 4. Используя определение обратного преобразования Лапласа, проверить:

1) $F(s) = \dfrac{1}{s} \risingdotseq \mathbf{1}(t)\,.$ 2) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \risingdotseq \sin t\,.$

Задание 5. Двумя способами (используя метод неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов) найти оригинал дробно-рациональной функции:

1) $F(s) = \dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)(s^2+4s+8)}\,.$ 2) $F(s) = \dfrac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+5)}\,.$

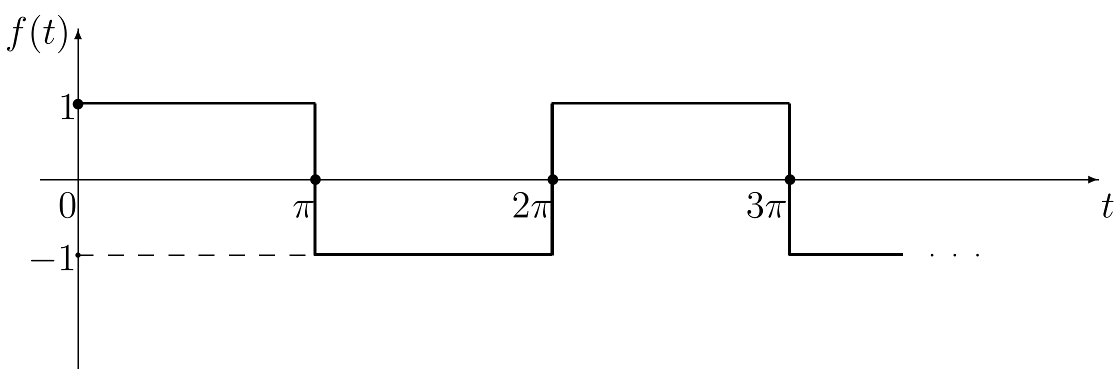
3) $F(s) = \dfrac{s+4}{(s-2)(s^2+2s+2)}\,.$ 4) $F(s) = \dfrac{2}{s^2(s+1)}\,.$

5) $F(s) = \dfrac{s+10}{s^3-6s^2+10s}\,.$ 6) $F(s) = \dfrac{2s+1}{(s+2)(s-1)^2}\,.$

7) $F(s) = \dfrac{2s+3}{(s-1)(s^2+4)}\,.$ 8) $F(s) = \dfrac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2-3s+2)}\,.$

Задание 6. Найти изображение функции $f(t) = \begin{cases} |\sin t|, & t \geq 0\,, \\ 0, & t < 0\,. \end{cases}$

Задание 7. Найти изображение периодической функции.



2

Линейные динамические системы

2.1 Характеристики динамических систем

Рассмотрим инвариантную во времени линейную динамическую систему с одним входом и одним выходом, поведение которой описывается линейным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 z(t) = c_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + c_0 u(t)\,. \qquad (2.1)$$

Предположим, $m < n$ (*условие физической реализуемости системы*). Уравнению (2.1) (при нулевых начальных условиях) соответствует передаточная функция

$$G(s) = \frac{c_m s^m + c_{m-1}s^{m-1} + \cdots + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\,, \qquad (2.2)$$

что следует из применения теорем разд. 1.2.

2.2 Модели в пространстве состояний

Рассмотрим систему (2.1) и передаточную функцию (2.2). Пусть $x(t)$ — некоторый вектор из $\mathbb{R}^n$. **Вектором состояния** $x(t)$ динамической системы называется набор переменных, задание которых в некоторый начальный момент времени определяет все будущее поведение системы. Представление системы в пространстве состояний называется **моделью системы** и задается в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Fx(t) + bu(t), \\ z(t) & = & h^T x(t), \end{array} \right. \qquad (2.3)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u(t)$ — скалярное входное воздействие, $z(t)$ — наблюдаемый скалярный выходной сигнал, F — системная матрица размера $(n \times n)$, b — $(n \times 1)$-вектор передачи входного воздействия, h — $(n \times 1)$-вектор наблюдений.

Применив преобразование Лапласа к системе (2.3) при нулевых начальных условиях, запишем формулу для передаточной функции системы:

$$G(s) = h^T (Is - F)^{-1} b. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. Для линейной динамической системы с многомерным входом $u(t) \in \mathbb{R}^s$ и многомерным выходом $z(t) \in \mathbb{R}^m$ передаточная функция системы определяется по формуле:

$$G(s) = H(Is - F)^{-1} B, \tag{2.5}$$

где B — матрица передачи входного воздействия размера $(n \times s)$, H — матрица наблюдений размера $(m \times n)$.

Представление в пространстве состояний не является единственным. При переходе в другой базис можно получить другое представление системы в пространстве состояний, т. е. другую модель системы. Пусть данной модели соответствует вектор состояния $x^*(t) \in \mathbb{R}^n$ и существует невырожденное преобразование из базиса модели системы с вектором состояния $x^*(t)$ в базис системы (2.3) с вектором состояния $x(t)$, т. е. $x(t) = Tx^*(t)$. Тогда уравнения модели системы задаются в виде:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}^*(t) & = & F_* x^*(t) + b_* u(t), \\ z(t) & = & (h_*)^T x^*(t), \end{array} \right. \tag{2.6}$$

где формулы перехода из базиса модели (2.3) в базис модели (2.6) выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{lrcl} 1) & F_* & = & T^{-1} F T, \\ 2) & b_* & = & T^{-1} b, \\ 3) & h_* & = & hT. \end{array} \tag{2.7}$$

Далее рассмотрим некоторые модели системы, заданной уравнением (2.1).

Стандартная управляемая модель

Определение 2.1. **Стандартной управляемой моделью** называется модель в пространстве состояний следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \tag{2.8}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t), \tag{2.9}$$

где $m < n$, (2.8) — уравнение состояния, (2.9) — уравнение наблюдения, $c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_m$ и $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}$ — коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции (2.2).

Теорема 2.1. Стандартная управляемая модель с необходимостью и достаточностью обладает передаточной функцией (2.2).

Стандартная наблюдаемая модель

Определение 2.2. **Стандартной наблюдаемой моделью** называется модель в пространстве состояний следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t), \tag{2.10}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t), \tag{2.11}$$

где $m < n$, (2.10) — уравнение состояния, (2.11) — уравнение наблюдения, $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}$ — коэффициенты знаменателя передаточной функции

(2.2), а коэффициенты $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ находятся как решение системы

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_m \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Теорема 2.2. Стандартная наблюдаемая модель с необходимостью и достаточностью обладает передаточной функцией (2.2).

Каноническая модель

Определение 2.3. **Каноническая модель** определяется через собственные значения системной матрицы F, которые являются корнями характеристического уравнения

$$\det|F - \lambda I| = 0. \tag{2.13}$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения рассмотрим случаи:

Случай 1. Все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения (2.13) — простые. Каноническая модель имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \tag{2.14}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix} x(t), \tag{2.15}$$

где коэффициенты $r_1, \ldots, r_n$ суть вычеты передаточной функции $G(s)$, т. е.

$$r_i = \operatorname*{res}_{s=\lambda_i}\,(G(s)) = \lim_{s\to\lambda_i}[(s-\lambda_i)G(s)], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Случай 2. Среди корней уравнения (2.13) есть пара комплексно-сопряженных корней, например, $\lambda_1 = \sigma + i\omega,\ \lambda_2 = \sigma - i\omega$. Рассмотрим подсистему:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \tag{2.16}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix} x(t). \tag{2.17}$$

Тогда каноническая модель в вещественном базисе для системы (2.16), (2.17) будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \tag{2.18}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{r_1 + r_2}{2} & \dfrac{r_1 - r_2}{2} i \end{bmatrix} x^*(t), \tag{2.19}$$

где $x(t) = Tx^*(t)$, T — невырожденная матрица перехода из базиса модели (2.18), (2.19) в базис модели (2.16), (2.17), здесь

$$T = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{i}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{i}{2} \end{bmatrix}.$$

Случай 3. Среди корней уравнения (2.13) есть корень кратности k, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda$, $1 < k \le n$. Так как группе кратных корней соответствует жорданова клетка, каноническая модель будет иметь следующий вид (для $k = 3$):

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right] u(t), \tag{2.20}$$

$$z(t) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_n \end{array}\right] x(t). \tag{2.21}$$

Таким образом, если каноническая модель содержит кратные полюсы, то ее можно расщепить на независимые распадающиеся части с кратными и простыми полюсами. Часть с кратными полюсами описывается жордановой клеткой и таким же столбцом (частью вектора управления), как и в стандартной управляемой модели. Неизвестные $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_n$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов из уравнения

$$G(s) = \frac{c_1}{(s-\lambda)^3} + \frac{c_2}{(s-\lambda)^2} + \frac{c_3}{s-\lambda} + \frac{c_4}{s-\lambda_4} + \ldots + \frac{c_n}{s-\lambda_n}.$$

В общем случае эти неизвестные величины могут быть найдены из следующего уравнения:

$$G(s) = \frac{c_1}{(s-\lambda)^k} + \frac{c_2}{(s-\lambda)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{k-1}}{(s-\lambda)^2} + \frac{c_k}{s-\lambda} + \frac{c_{k+1}}{s-\lambda_{k+1}} + \dots + \frac{c_n}{s-\lambda_n}\,.$$

2.3 Общее решение линейного дифференциального уравнения состояния

Линейные непрерывные системы

Пусть линейная динамическая система в непрерывном времени задана уравнениями:

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.22}$$

$$z(t) = H(t)x(t), \tag{2.23}$$

где уравнение (2.22) — линейное дифференциальное уравнение состояния системы с начальным условием $x(t_0) = x_0$, уравнение (2.23) — уравнение наблюдения системы.

Определение 2.4. Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения при произвольных начальных условиях. Тогда матрица $\Phi(t,\tau) = X(t)X^{-1}(t)$ называется **переходной матрицей состояния** линейной динамической системы.

Перечислим свойства матрицы $\Phi(t,\tau)$:

1) $\Phi(t,\tau)|_{t=\tau} = I$.

2) $\dfrac{\partial \Phi(t,\tau)}{\partial t} = F(t)\Phi(t,\tau)$.

3) $\dfrac{\partial \Phi(t,\tau)}{\partial \tau} = -\Phi(t,\tau)F(\tau)$.

4) Полугрупповое свойство:
$\forall t_1, t_2, t_3 \in [t_0, \infty] \qquad \Phi(t_3, t_1) = \Phi(t_3, t_2)\Phi(t_2, t_1)$.

5) $\det \Phi(t,\tau) \neq 0$, $\Phi^{-1}(t,\tau) = \Phi(\tau, t)$.

Теорема 2.3. Общее решение дифференциального уравнения состояния (2.22) имеет вид:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t, t_0)x_0$ — решение однородной системы при ненулевых начальных условиях (собственное движение системы), $\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$ — вынужденное движение системы.

Линейные инвариантные во времени непрерывные системы

Пусть линейная инвариантная во времени динамическая система задана уравнениями:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.24}$$

$$z(t) = Hx(t), \tag{2.25}$$

где уравнение (2.24) — линейное дифференциальное уравнение состояния системы с начальным условием $x(t_0) = x_0$, уравнение (2.25) — уравнение наблюдения системы, F, B, H — матрицы-константы.

Тогда переходная матрица состояния $\Phi(t, \tau) = \Phi(t - \tau) = e^{F(t-\tau)}$ представляет собой матричную экспоненту и может быть найдена через преобразование Лапласа как

$$\Phi(t) \doteqdot \Phi(s) = (Is - F)^{-1}.$$

Линейные дискретные системы

Уравнения дискретной линейной динамической системы имеют следующий вид:

$$x(t_i) = \Phi(t_i, t_{i-1})x(t_{i-1}) + B(t_{i-1})u(t_{i-1}), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.26}$$

$$z(t_i) = H(t_i)x(t_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.27}$$

где уравнение (2.26) — линейное разностное уравнение состояния системы с начальным условием $x(t_0) = x_0$, уравнение (2.27) — дискретное уравнение наблюдения системы, $B(t_{i-1}) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)d\tau$ — матрица управления дискретной системы, $u(t_{i-1})$ — кусочно-постоянное приближение функции $u(t)$.

Линейные инвариантные во времени дискретные системы

Уравнения инвариантной во времени дискретной системы имеют следующий вид:

$$x(t_i) = \Phi(t_d)x(t_{i-1}) + Bu(t_{i-1}), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.28}$$

$$z(t_i) = Hx(t_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.29}$$

где уравнение (2.28) — линейное разностное уравнение состояния системы с начальным условием $x(t_0) = x_0$, уравнение (2.29) — дискретное уравнение наблюдения системы, t_d — период дискретизации, $\Phi(t_d)$, B, H — матрицы-константы.

2.4 Управляемость линейной динамической системы

Определение 2.5. Система называется **управляемой**, если для произвольного момента времени t_0 и начального состояния $x(t_0) = x_0$ найдется такое кусочно-непрерывное управление $u(t)$ и момент $t_1 > t_0$, что единственное решение $x(t)$ при данных начальных условиях $x(t_0) = x_0$ пройдет через заданную точку $x(t_1) = x_1$.

Определение 2.6. Система называется **полностью управляемой**, если она управляема в любые моменты времени и при любых начальных условиях.

Критерий управляемости для линейных непрерывных систем

Рассмотрим линейную непрерывную систему (2.22), (2.23).

Определение 2.7. **Матрицей управляемости** линейной непрерывной системы называется матрица $W_C(t_0, t_1)$ следующего вида:

$$W_C(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0, \tau)d\tau.$$

Теорема 2.4 (***критерий полной управляемости***). Чтобы линейная непрерывная система была полностью управляемой, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих пяти эквивалентных условий:

1) Образом $W_C(t_0, t_1)$ является все пространство $\mathbb{R}^n$.

2) $W_C(t_0, t_1)$ — невырождена.

3) $W_C(t_0, t_1) > 0$ (положительно определена).

4) $\operatorname{rank} W_C(t_0, t_1) = n$.

5) $\det W_C(t_0, t_1) \neq 0$.

Критерий управляемости для линейных непрерывных и инвариантных во времени систем

Рассмотрим линейную инвариантную во времени непрерывную систему (2.24), (2.25).

Определение 2.8. **Матрицей управляемости** линейной инвариантной во времени непрерывной системы называется матрица W_{CTI} следующего вида:

$$W_{CTI} = \left[B \;\middle|\; FB \;\middle|\; F^2B \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; F^{n-1}B\right].$$

Теорема 2.5 (***критерий полной управляемости***). Чтобы линейная инвариантная во времени непрерывная система была полностью управляемой, необходимо и достаточно выполнение условия $\operatorname{rank} W_{CTI} =$ $= n$.

Критерий управляемости для линейных дискретных систем

Рассмотрим линейную дискретную систему (2.26), (2.27).

Определение 2.9. **Матрицей управляемости** линейной дискретной системы называется матрица $W_D(0, N)$ следующего вида:

$$W_D(0, N) = \sum_{i=1}^{N} \Phi(0, i) B(i-1) B^T(i-1) \Phi^T(0, i).$$

Теорема 2.6 (*критерий полной управляемости*). Чтобы линейная дискретная система была полностью управляемой, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих пяти эквивалентных условий:

1) Образом $W_D(0, N)$ является все пространство $\mathbb{R}^n$.

2) $W_D(0, N)$ — невырождена.

3) $W_D(0, N) > 0$ (положительно определена).

4) $\operatorname{rank} W_D(0, N)) = n$.

5) $\det W_D(0, N) \neq 0$.

Критерий управляемости для линейных дискретных и инвариантных во времени систем

Рассмотрим линейную инвариантную во времени дискретную систему (2.28), (2.29).

Определение 2.10. **Матрицей управляемости** линейной инвариантной во времени дискретной системы называется матрица W_{DTI} следующего вида:

$$W_{DTI} = [B \mid \Phi B \mid \Phi^2 B \mid \cdots \mid \Phi^{n-1} B].$$

Теорема 2.7 (*критерий полной управляемости*). Чтобы линейная инвариантная во времени дискретная система была полностью управляемой, необходимо и достаточно выполнение условия $\operatorname{rank} W_{DTI} = n$.

2.5 Наблюдаемость линейной динамической системы

Определение 2.11. Система называется **наблюдаемой** в момент времени t_0, если для некоторого момента времени $t_1 > t_0$ по реализациям $u(t)$ и $z(t)$ можно определить состояние $x(t_0) = x_0$.

Определение 2.12. Система называется **полностью наблюдаемой**, если она наблюдаема в любой момент времени.

Критерий наблюдаемости для линейных непрерывных систем

Рассмотрим линейную непрерывную систему (2.22), (2.23).

Определение 2.13. **Матрицей наблюдаемости** линейной непрерывной системы называется матрица $M_C(t_0, t_1)$ следующего вида:

$$M_C(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) H^T(\tau) H(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau.$$

Теорема 2.8 (***критерий полной наблюдаемости***). Чтобы линейная непрерывная система была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих пяти эквивалентных условий:

1) Образом $M_C(t_0, t_1)$ является все пространство $\mathbb{R}^n$.
2) $M_C(t_0, t_1)$ — невырождена.
3) $M_C(t_0, t_1) > 0$ (положительно определена).
4) $\operatorname{rank} M_C(t_0, t_1) = n$.
5) $\det M_C(t_0, t_1) \neq 0$.

Критерий наблюдаемости для линейных непрерывных инвариантных во времени систем

Рассмотрим линейную инвариантную во времени непрерывную систему (2.24), (2.25).

Определение 2.14. **Матрицей наблюдаемости** линейной инвариантной во времени непрерывной системы называется матрица M_{CTI} следующего вида:

$$M_{CTI} = [H^T \mid F^T H^T \mid (F^2)^T H^T \mid \cdots \mid (F^{n-1})^T H^T]^T.$$

Теорема 2.9 (***критерий полной наблюдаемости***). Чтобы линейная инвариантная во времени непрерывная система была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно выполнение условия $\operatorname{rank} M_{CTI} = n$.

Критерий наблюдаемости для линейных дискретных систем

Рассмотрим линейную дискретную систему (2.26), (2.27).

Определение 2.15. **Матрицей наблюдаемости** линейной дискретной системы называется матрица $M_D(0,N)$ следующего вида:

$$M_D(0,N) = \sum_{i=1}^{N} \Phi^T(i,0) H^T(i) H(i) \Phi(i,0).$$

Теорема 2.10 (*критерий полной наблюдаемости*). Чтобы линейная дискретная система была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих пяти эквивалентных условий:

1) Образом $M_D(0,N)$ является все пространство $\mathbb{R}^n$.

2) $M_D(0,N)$ — невырождена.

3) $M_D(0,N) > 0$ (положительно определена).

4) $\operatorname{rank} M_D(0,N)) = n$.

5) $\det M_D(0,N) \neq 0$.

Критерий наблюдаемости для линейных дискретных и инвариантных во времени систем

Рассмотрим линейную инвариантную во времени дискретную систему (2.28), (2.29).

Определение 2.16. **Матрицей наблюдаемости** линейной инвариантной во времени дискретной системы называется матрица M_{DTI} следующего вида:

$$M_{DTI} = [H^T \mid \Phi^T H^T \mid (\Phi^2)^T H^T \mid \cdots \mid (\Phi^{n-1})^T H^T]^T.$$

Теорема 2.11 (*критерий полной наблюдаемости*). Чтобы линейная инвариантная во времени дискретная система была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно выполнение условия $\operatorname{rank} M_{DTI} = n$.

2.6 Линеаризация нелинейных систем

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, поведение которой можно описать системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], & x(t) \in \mathbb{R}^n, \\ z(t) = h[x(t), u(t), t], & z(t) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{2.30}$$

где $x(t)$ — вектор состояния системы, $u(t)$ — вектор управления, $f[\cdot,\cdot,\cdot]$ — вектор-функция, определяющая уравнение состояния системы, и $h[\cdot,\cdot,\cdot]$ — вектор-функция, определяющая уравнение наблюдения системы.

Теорема 2.12 (*существование и единственность решения нелинейного дифференциального уравнения*). Пусть нелинейное дифференциальное уравнение задано в виде

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], \qquad x(t_0) = x_0, \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.31}$$

где $x(t_0) = x_0$ — начальное условие, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ — детерминированная функция времени, а вектор-функция $f[\cdot,\cdot,\cdot]$ обладает следующими свойствами:

1) f удовлетворяет условию Липшица по первому аргументу, т. е. для любых $x_1(t)$ и $x_2(t)$ найдется такая кусочно-непрерывная функция $K(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, что

$$||f[x_1(t), \cdot, \cdot] - f[x_2(t), \cdot, \cdot]|| < K(t)||x_1(t) - x_2(t)||.$$

2) f непрерывна по второму аргументу и кусочно-непрерывна по третьему аргументу.

Тогда для любого $x(t_0) = x_0$ и любой кусочно-непрерывной функции $u(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, найдется непрерывное отображение $\varphi(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ такое, что:

1) $\varphi(t_0) = x_0$,

2) $\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = f[\varphi(t), u(t), t]$, $t \in [t_0, \infty)$.

Проведем линеаризацию нелинейного дифференциального уравнения (2.31) относительно некоторого известного решения. Пусть решение $x_*(t)$ для некоторой функции $u_*(t)$ известно. Такое решение называется **номинальным**. Предположим, что от него совершены малые отклонения:

1) $x_*(t_0) \to x_*(t_0) + \Delta x_*(t_0) = x_0$,

2) $u_*(t) \to u_*(t) + \Delta u_*(t) = u(t)$,

3) $x_*(t) \to x_*(t) + \Delta x_*(t) = x(t)$.

Разложим f в ряд Тейлора относительно двух переменных x_* и u_*:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] = f[x_*(t), u_*(t), t] + \left.\frac{\partial f[\cdot,\cdot,\cdot]}{\partial x(t)}\right|_{\substack{x(t)=x_*(t)\\ u(t)=u_*(t)}} [x(t) - x_*(t)] +$$

$$+ \left.\frac{\partial f[\cdot,\cdot,\cdot]}{\partial u(t)}\right|_{\substack{x(t)=x_*(t)\\ u(t)=u_*(t)}} [u(t) - u_*(t)] + \ldots \; .$$

Тогда уравнение возмущенного движения (линейное относительно отклонений $\Delta x_*(t) = x(t) - x_*(t)$ и $\Delta u_*(t) = u(t) - u_*(t)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt}[\Delta x_*(t)] \approx F(t)\Delta x_*(t) + B(t)\Delta u_*(t),$$

где

$$F(t) = \left.\frac{\partial f[\cdot,\cdot,\cdot]}{\partial x(t)}\right|_{\substack{x(t)=x_*(t)\\ u(t)=u_*(t)}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \left.\frac{\partial f[\cdot,\cdot,\cdot]}{\partial u(t)}\right|_{\substack{x(t)=x_*(t)\\ u(t)=u_*(t)}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix},$$

$F(t)$ — матрица размера $(n \times n)$ и $B(t)$ — матрица размера $(n \times p)$.

2.7 Задачи

Ниже приведен ряд практических заданий по линейным динамическим системам, которые рекомендуются для семинарских занятий и/или в качестве домашних работ.

Задание 1. Дана передаточная функция $G(s) = \dfrac{s^3 + 3s^2 + 5s + 8}{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 8s}$. Требуется:

а) Построить стандартную управляемую модель (СУМ). Начертить блок-схему модели.

б) Построить стандартную наблюдаемую модель (СНМ). Начертить блок-схему модели.

в) Построить каноническую модель (КМ). Начертить блок-схему модели.

г) Выяснить наличие свойств управляемости и наблюдаемости моделей.

д) Объяснить, что означает вырожденность (с физической точки зрения) матрицы F в системе дифференциальных уравнений, соответствующей передаточной функции $G(s)$.

Задание 2. Дана передаточная функция $G(s) = \dfrac{10(s+4)}{s^3+3s^2+2s}$. Требуется:

а) Построить СУМ. Начертить блок-схему модели.

б) Построить СНМ. Начертить блок-схему модели.

в) Построить КМ. Начертить блок-схему модели.

г) Выяснить наличие свойств управляемости и наблюдаемости моделей.

Задание 3. Дана передаточная функция $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+6s+25)}$. Требуется:

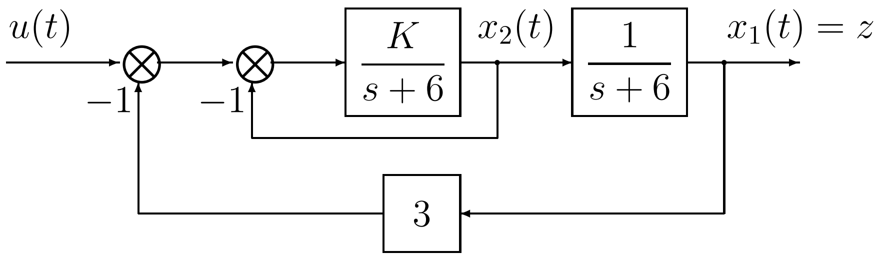
а) Построить КМ в комплексном базисе. Начертить блок-схему модели.

б) Найти матрицу преобразования T из КМ в комплексном базисе в КМ в вещественном базисе. Начертить блок-схему КМ в вещественном базисе.

в) Построить СУМ. Начертить блок-схему модели.

г) Найти матрицу преобразования T_1 из СУМ в КМ в вещественном базисе.

Задание 4. Дана блок-схема:



Требуется:

а) Записать уравнения физической модели в пространстве состояний $X = (x_1, x_2)^T$.

б) Найти передаточную функцию $G(s)$.

в) Изучить влияние параметра K на фундаментальные свойства системы:

— управляемость;

— наблюдаемость;

— устойчивость.

г) Построить КМ и начертить блок-схему (рассмотреть все случаи в зависимости от параметра K).

Задание 5. Дано описание системы в пространстве состояний:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)\,,$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)\,.$$

Требуется:

а) Начертить блок-схему.

б) Выяснить наличие свойств управляемости и наблюдаемости.

в) Найти передаточную функцию $G(s)$. Какую часть системы (наблюдаемую, управляемую) описывает эта передаточная функция? Полное или частичное описание дает $G(s)$?

г) Учитывая, что $s_1 = -1$, начертить картину размещения всех полюсов и нулей передаточной функции. Является ли система неминимально-фазовой и устойчивой?

д) Построить КМ по $G(s)$.

е) Найти матрицу преобразования T из базиса физической модели в базис КМ.

ж) Найти импульсную переходную характеристику (ИПХ), т. е. отклик $z(t)$ на импульсное входное воздействие $u(t) = \delta(t)$.

з) Найти переходную характеристику (ПХ), т. е. отклик $z(t)$ на входное воздействие $u(t) = \mathbf{1}(t)$.

Задание 6. Для каждой из систем

1)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \quad z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t);$$

2)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t);$$

3)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t), \qquad z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

выполнить следующие пункты задания:

а) Выяснить наличие или отсутствие свойств управляемости и наблюдаемости и дать необходимые пояснения.

б) Начертить блок-схему.

в) Найти передаточную функцию $G(s)$.

<u>Задание 7.</u> Дана система:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\,,$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} x(t)\,.$$

Требуется:

а) Найти переходную матрицу состояния $\Phi(\tau)$.

б) Найти передаточную функцию системы $G(s)$.

в) Записать дифференциальные уравнения, соответствующие $G(s)$.

г) Найти предельное значение $z(t)$ как отклик системы на входное воздействие 1) $u(t) = \delta(t)$, 2) $u(t) = \mathbf{1}(t)$. Определить условия, при которых $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)$ существует.

д) Показать, что если $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$, то система является полностью управляемой и полностью наблюдаемой при любых параметрах a_1, a_2 и a_3.

<u>Задание 8.</u> Дана система:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\,.$$

Требуется:

а) Найти матрицу управляемости системы $W_{\mathrm{C}}(0,T)$. Является ли система полностью управляемой?

б) Найти W_{CTI}. Сравнить результат с п. а).

Задание 9. Пусть $\dot{x} = Fx$, где F — постоянная матрица размера $2 \times \times 2$. Предположим, что если $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, то $x(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -3e^{-3t} \end{bmatrix}$, и если $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, то $x(t) = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix}$. Найти $\Phi(\tau)$ и F.

Задание 10. Пусть $F = \mathrm{const}$. Тогда переходная матрица состояния $\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0)$ может быть получена любым из следующих способов:

а) Приближенно с помощью матричной экспоненты:

$$e^{F(t-t_0)} = I + F(t - t_0) + \frac{1}{2}F^2(t - t_0)^2 + \dots \ .$$

б) Методом преобразования Лапласа: поскольку $\Phi(t-t_0)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\Phi'(t - t_0) = F\Phi(t - t_0), \ \Phi(0) = I,$$

то

$$\Phi(t - t_0) = \mathcal{L}^{-1}\{[sI - F]^{-1}\}|_{(t-t_0)},$$

где $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}|_{(t-t_0)}$ — обратное преобразование Лапласа в точке $(t - t_0)$.

в) По теореме Гамильтона–Кэли (для F с различными собственными числами)

$$\Phi(t - t_0) = \alpha_0 I + \alpha_1 F + \alpha_2 F^2 + \dots + \alpha_{n-1}F^{n-1},$$

где $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ — n функций от $(t - t_0)$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$e^{\lambda_i(t-t_0)} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_i + \alpha_2\lambda_i^2 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_i^{n-1},$$

где $\lambda_i, \ i = 1, \dots, n$ — собственные числа матрицы F.

г) По теореме Сильвестра (для F с различными собственными числами)

$$\Phi(t - t_0) = F_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} + F_2 e^{\lambda_2(t-t_0)} + \dots + F_n e^{\lambda_n(t-t_0)},$$

где λ_i — i-ое собственное число матрицы F, а F_i определяются как

$$F_i = \left[\frac{F - \lambda_1 I}{\lambda_i - \lambda_1}\right] \cdots \left[\frac{F - \lambda_{i-1} I}{\lambda_i - \lambda_{i-1}}\right] \cdot \left[\frac{F - \lambda_{i+1} I}{\lambda_i - \lambda_{i+1}}\right] \cdots \left[\frac{F - \lambda_n I}{\lambda_i - \lambda_n}\right].$$

Используя все четыре метода, найдите $\Phi(t-t_0)$, если $F = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$. Пусть $(t-t_0) = 0.1$ с. Рассмотрев в методе а) слагаемые не выше первого порядка, найдите относительную погрешность вычисления

$$\Delta\Phi = \frac{\|\bar{\Phi} - \Phi\|}{\|\Phi\|} \cdot 100\ \%\,,$$

где $\bar{\Phi}$ — вычисленное значение, Φ — точное значение.

Найдите $\Delta\Phi$, учитывая в вычислениях слагаемые не выше второго порядка.

Задание 11. Дана система, поведение которой описывается нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\ddot{c}(t) + c^3(t)\dot{c}^2(t) + \sin[c(t)] - t^2 c(t) = r(t),$$

где $r(t)$ — входное воздействие, $c(t)$ — выходной сигнал. Требуется:

а) Найти линеаризованное уравнение, описывающее поведение системы вблизи номинальной траектории:
   1) $c(t) = r(t) = 0$;
   2) $c(t) = t,\ r(t) = \sin t$.

б) Записать линеаризованные уравнения в пространстве состояний в непрерывном и дискретном времени, когда измерения происходят с периодом T.

3

Самостоятельная работа

3.1 Контрольная работа № 1

Варианты контрольной работы индивидуальны и определяются в зависимости от параметра N, где N — номер студента по списку группы.

Дано описание системы в пространстве состояний:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -N & -(2N+1) & -(N+2) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)\,,$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\,.$$

Требуется в соответствии со своим вариантом в срок за 1 месяц до начала зачетной недели сдать на проверку (для допуска к экзамену) письменную работу с решением следующих задач:

1. Построить эквивалентную модель в пространстве состояний, в которой отделены переменные, образующие часть 1, — полностью управляемую и наблюдаемую.

   Для этого необходимо сделать следующее:

   (a) Найти передаточную функцию системы $G(s)$.

   (b) Построить каноническую модель системы (в зависимости от N): если N — нечетно, каноническая модель строится по первому входу системы, иначе — по второму.

2. Определить, к какой категории — с точки зрения свойств управляемости и наблюдаемости — относится другая часть переменных состояния.

3. Проиллюстрировать решение по пп. 1 и 2 блок-схемой или графом модели.

3.2 Контрольная работа № 2

Дана линейная динамическая система, состоящая из двух последовательно соединенных элементов. Элементы характеризуются их передаточными функциями $G_1(s)$ и $G_2(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s+a}{(s+b)(s+c)}\,, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+a}\,.$$

Для описания системы используются следующие физические переменные: входной управляющий сигнал $u(t)$, промежуточный сигнал $y(t)$ между элементами и выходной сигнал $z(t)$. Имеются следующие схемы соединения элементов системы:

Схема 1: входной элемент – блок G_1, выходной элемент – блок G_2.

Схема 2: входной элемент – блок G_2, выходной элемент – блок G_1.

Схема 3: входной элемент – блок G_2, выходной элемент – параллельное соединение двух блоков, являющихся элементами разложения на простые дроби функции G_1.

Схема 4: входной элемент — параллельное соединение двух блоков, являющихся элементами разложения на простые дроби функции G_1, выходной элемент — блок G_2.

Задания для контрольной работы индивидуальны и определяются следующим образом. Каждое задание определяется тройкой (N, M, K), где N — номер студента по списку группы; M — номер схемы соединения блоков, K — номер варианта построения физической модели системы (по поводу этих вариантов см. ниже).

Для каждого задания:

1. Если N кратно 4, тогда $M = 4$; иначе $M = N \bmod 4$;

2. Если N кратно 3, тогда $K = 3$; иначе $K = N \bmod 3$.

Требуется в соответствии со своим вариантом в срок за 12 дней до начала зачетной недели сдать на проверку (для допуска к экзамену) письменную работу с решением следующих задач:

1. Построить модель состояния и модель наблюдения, использующую физические переменные системы (так называемую *физическую модель* (ФМ)). Допускаются следующие варианты построения физической модели:

   Вариант 1: На основе стандартной управляемой модели (СУМ).

   Вариант 2: На основе стандартной наблюдаемой модели (СНМ).

   Вариант 3: На основе канонической модели (КМ).

2. Определить $z(t)$ как общее решение соответствующего дифференциального уравнения.

3. Определить, обладает ли физическая модель свойствами полной управляемости и полной наблюдаемости. При каких условиях эти свойства, а также свойство устойчивости, могут быть утрачены?

4. Построить три математические модели, отвечающие данной системе:

   - стандартную управляемую модель,
   - стандартную наблюдаемую модель,
   - каноническую модель.

   Для каждой модели проанализировать свойства полной управляемости и полной наблюдаемости.

5. Построить эквивалентную данной системе модель в пространстве состояний, в которой часть, которая полностью управляема и полностью наблюдаема, отделена от остальной части системы.

6. По результатам проделанной работы сформулировать выводы, которые следует признать общезначимыми для задач построения математических моделей реальных динамических систем.

7. Дать развернутые ответы (письменно!) на следующие контрольные вопросы:

   (a) Каким образом свойства управляемости, наблюдаемости и устойчивости системы проявляются в $z(t)$?

   (b) Как найти, пользуясь общим решением $z(t)$, передаточную функцию системы?

(c) Можно ли построить каноническую модель для не полностью управляемой системы?

(d) Какой смысл заключен в терминах «стандартная управляемая» и «стандартная наблюдаемая» модель?

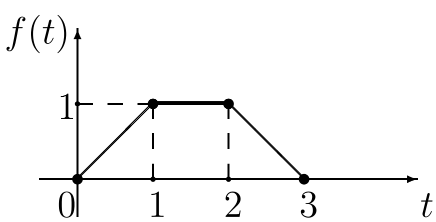
(e) Какие условия эксперимента нужно предположить, чтобы наблюдения входа $u(t)$ и выхода $z(t)$ системы с известной передаточной функцией не давали возможности обнаружения вырожденности системы, то есть наличия в системе свойств неполной управляемости или неполной наблюдаемости?

4

Примеры решения задач

4.1 Операционное исчисление

Пример 1. По данному графику оригинала найти изображение.



Решение. 1. Найдем изображения более простых оригиналов, из которых затем составим оригинал $f(t)$. Обозначим

$$f_1(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}, \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}.$$

Изображение функции $f_2(t)$ найдем непосредственно по формуле (1.4), определяющей преобразование Лапласа. Если $F_1(s) \doteqdot f_1(s)$ и $F_2(s) \doteqdot f_2(s)$, то

$$F_2(s) = \int\limits_0^1 e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1 = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}\,.$$

Изображение $F_1(s)$ тоже можно найти по формуле (1.4), интегрируя по частям. Но можно поступить иначе. Для этого стоит заметить, что

$f_1(t) = tf_2(t)$, и затем воспользоваться теоремой о дифференцировании изображения (формула (1.15)), согласно которой

$$f_1(t) = tf_2(t) \risingdotseq -F_2{}'(s) = -\left(\frac{1}{s}(1-e^{-s})\right)' = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}.$$

Итак,

$$F_1(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s} \ .$$

2. Выразим заданный оригинал $f(t)$ через $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Очевидно, что $f(t) = f_1(t)$ при $0 \le t \le 1$. На отрезке $[1;2]$ $f(t)$ совпадает с $f_2(t)$, сдвинутой на 1 вправо, т.е. $f(t) = f_2(t-1)$, $1 \le t \le 2$. При $2 \le t \le 3$ функцию $f(t)$ можно получить, если сдвинуть $f_1(t)$ на 2 единицы вправо, отразить симметрично относительно оси t (т. е. умножить на -1) и поднять на 1 вверх. Таким образом, $f(t) = -f_1(t-2) + f_2(t-2)$, $2 \le t \le 3$. Итак,

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t-1) - f_1(t-2) + f_2(t-2), \quad t \ge 0.$$

Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой запаздывания (формула (1.8)), получаем

$$\begin{gathered}f(t) \risingdotseq F(s) = F_1(s) + e^{-s}F_2(s) - e^{-2s}F_1(s) + e^{-2s}F_2(s) = \\ = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{1}{s}e^{-3s} + \\ + \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-3s} = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s}) \ .\end{gathered}$$

К этому же результату можно прийти, непосредственно применяя формулу (1.4). Для этого следует задать функцию $f(t)$ аналитически и проинтегрировать на каждом из трех участков в отдельности. Такой путь приводит к существенно более громоздким вычислениям.

Пример 2. Найти оригинал изображения $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}$ и сделать проверку, найдя изображение полученного оригинала.

Решение. 1. Разложим функцию $F(s)$ на множители, оригиналы которых известны:

$$F(s) = \frac{1}{s^2+4s+13} \cdot \frac{1}{s^2+4s+13} = \frac{1}{(s+2)^2+3^2} \cdot \frac{1}{(s+2)^2+3^2} \ .$$

По восьмой (по счету в левом столбце) формуле из табл. 1 (см. приложение В) при $a = -2$ и $\omega = 3$ получаем $e^{-2t}\sin 3t \risingdotseq \dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}$, откуда $\dfrac{1}{(s+2)^2+3^2} \risingdotseq \dfrac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$.

Согласно теореме об умножении изображений (формула (1.20)), произведению изображений соответствует свертка оригиналов сомножителей. Поэтому

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2+3^2}\cdot\frac{1}{(s+2)^2+3^2} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \int\limits_0^t \frac{1}{3}e^{-2\tau}\sin 3\tau \cdot \frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)}\sin 3(t-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{9}e^{-2t}\int\limits_0^t \sin 3\tau\cdot\sin(3t-3\tau)d\tau = \frac{1}{18}e^{-2t}\int\limits_0^t(\cos(6\tau-3t)-\cos 3t)d\tau.$$

Сначала вынесем постоянный множитель $\dfrac{1}{9}e^{-2t}$ за знак интеграла, а затем воспользуемся формулой $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$. Вычисляя последний интеграл, имеем

$$F(s) = \frac{1}{18}e^{-2t}\int\limits_0^t(\cos(6\tau-3t)-\cos 3t)d\tau =$$

$$= \frac{1}{18}e^{-2t}\left(\frac{1}{6}\sin(6\tau-3t)\Big|_0^t - \tau\cos 3t\Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{1}{18}e^{-2t}\left(\frac{1}{6}\sin 3t + \frac{1}{6}\sin 3t - t\cos 3t\right) = \frac{1}{18}e^{-2t}\left(\frac{1}{3}\sin 3t - t\cos 3t\right).$$

Итак, $F(s) \risingdotseq f(t) = \dfrac{1}{18}e^{-2t}\left(\dfrac{1}{3}\sin 3t - t\cos 3t\right)$.

Полученный результат легко проверить, найдя изображение функции $f(t)$. Действительно, по той же (восьмой по счету в левом столбце табл. 1) формуле имеем $e^{-2t}\sin 3t \risingdotseq \dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}$. По седьмой (по счету в правом столбце табл. 1) формуле находим $t\cos 3t \risingdotseq \dfrac{s^2-3^2}{(s^2+3^2)^2}$. Отсюда и из теоремы смещения (см. разд. 1.2) следует, что $e^{-2t}t\cos 3t \risingdotseq \dfrac{(s+2)^2-3^2}{((s+2)^2+3^2)^2}$. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа, имеем

$$f(t)=\frac{1}{18\cdot 3}e^{-2t}\sin 3t-\frac{1}{18}e^{-2t}\cos 3t \risingdotseq \frac{1}{18\cdot 3}\frac{3}{(s+2)^2+9}-$$
$$-\frac{1}{18}\frac{(s+2)^2-9}{((s+2)^2+9)^2}=\frac{1}{18}\frac{(s+2)^2+9-((s+2)^2-9)}{((s+2)^2+9)^2}=$$
$$=\frac{1}{18}\frac{18}{((s+2)^2+9)^2}=\frac{1}{(s^2+4s+13)^2}\,,$$

что совпадает с исходным изображением.

Пример 3. Двумя способами (используя метод неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов) найти оригинал дробно-рациональной функции $F(s)=\dfrac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+5)}$.

Решение. *1. С использованием метода неопределенных коэффициентов.* Разложим дробно-рациональную функцию $F(s)$ в сумму простейших дробей. Так как уравнение $s^2+4s+5=0$ действительных корней не имеет, то разложение функции $F(s)$ в сумму простейших имеет вид:

$$\frac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+5)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Ms+N}{s^2+4s+5}$$

(можно было бы разложить квадратный трехчлен s^2+4s+5 на множители $(s-s_1)(s-s_2)$ с комплексными s_1 и s_2, но это менее удобно). Приводя правую часть к общему знаменателю, равному знаменателю левой части, и приравнивая числители дробей в левой и правой частях, получим

$$2s+1=A(s^2+4s+5)+(Ms+N)(s+1)\,.$$

Подставляя $s=-1$, имеем $-1=A(1-4+5)$, $-1=2A$, $A=-\dfrac{1}{2}$. При $s=0$ получаем $1=5A+N$, откуда $N=1-5A=\dfrac{7}{2}$. Приравнивая коэффициенты при s^2 в левой и правой частях равенства, имеем $0=A+M$, $M=-A=\dfrac{1}{2}$. Таким образом,

$$\frac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+5)}=-\frac{1}{2(s+1)}+\frac{s+7}{2(s^2+4s+5)}\,.$$

Для каждой простейшей дроби найдем оригинал, используя табл. 1 оригиналов и изображений (см. Приложение). По третьей (по счету в левом столбце табл. 1) формуле с $a = -1$ получаем $\dfrac{1}{s+1} \doteqdot e^{-t}$. Так как $s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + 1$, то

$$\frac{s+7}{2(s^2+4s+5)} = \frac{(s+2-2)+7}{2((s+2)^2+1)} = \frac{(s+2)+5}{2((s+2)^2+1)} =$$
$$= \frac{s+2}{2((s+2)^2+1)} + \frac{5}{2((s+2)^2+1)}\,.$$

По девятой (в левом столбце табл. 1) формуле с $a = -2$ и $\omega = 1$ получаем

$$\frac{s+2}{2((s+2)^2+1)} \doteqdot e^{-2t}\cos t\,,$$

а по восьмой формуле с теми же a и ω имеем $\dfrac{1}{2((s+2)^2+1)} \doteqdot e^{-2t}\sin t$.

Теперь, используя свойство линейности преобразования Лапласа, найдем оригинал $f(t)$ заданной функции-изображения $F(s)$. Так как

$$F(s) = -\frac{1}{2(s+1)} + \frac{s+2}{2((s+2)^2+1)} + \frac{5}{2((s+2)^2+1)}\,,$$

то

$$f(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos t + \frac{5}{2}e^{-2t}\sin t\,.$$

2. С помощью вычетов. Сначала найдем нули знаменателя дроби $F(s)$, являющиеся полюсами функции $F(s)$. Затем разложим знаменатель на линейные множители и определим порядки этих полюсов. Для этого решим уравнение $s^2 + 4s + 5 = 0$:

$$D = 16 - 4\cdot 5 = -4\,;$$
$$s_1 = \frac{-4+2i}{2} = -2+i\,;$$
$$s_2 = \frac{-4-2i}{2} = -2-i\,.$$

Поэтому $F(s) = \dfrac{2s+1}{(s+1)(s+2-i)(s+2+i)}$. Функция $F(s)$ имеет три особые точки: $s_1 = -2+i$, $s_2 = -2-i$, $s_3 = -1$, каждая из которых является полюсом первого порядка.

Найдем вычеты функции $F(s)e^{st}$ в каждом из полюсов s_k.

$$\operatorname*{res}_{s=-1}(F(s)e^{st}) = \lim_{s\to-1}\frac{(s+1)(2s+1)e^{st}}{(s+1)(s+2-i)(s+2+i)} =$$

$$= \lim_{s\to-1}\frac{(2s+1)e^{st}}{(s+2-i)(s+2+i)} = \frac{-e^{-t}}{(1-i)(1+i)} = -\frac{1}{2}e^{-t}\,;$$

$$\operatorname*{res}_{s=-2+i}(F(s)e^{st}) = \lim_{s\to-2+i}\frac{(s+2-i)(2s+1)e^{st}}{(s+1)(s+2-i)(s+2+i)} =$$

$$= \lim_{s\to-2+i}\frac{(2s+1)e^{st}}{(s+1)(s+2+i)} = \frac{(-3+2i)e^{(-2+i)t}}{(1-i)\cdot 2i} = \frac{(-3+2i)e^{(-2+i)t}}{-2(1+i)} =$$

$$= \frac{(-3+2i)(1-i)e^{(-2+i)t}}{-2(1+i)(1-i)} = \frac{(1-5i)e^{(-2+i)t}}{4}\,;$$

$$\operatorname*{res}_{s=-2-i}(F(s)e^{st}) = \lim_{s\to-2-i}\frac{(2s+1)e^{st}}{(s+1)(s+2-i)} =$$

$$\frac{(-3-2i)e^{(-2-i)t}}{(-1-i)(-2i)} = \frac{(-3-2i)(-1-i)e^{(-2-i)t}}{-2(-1+i)(-1-i)} = \frac{(1+5i)e^{(-2-i)t}}{4}\,.$$

Теперь найдем искомый оригинал по формуле (1.22):

$$f(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{(1-5i)e^{(-2+i)t}}{4} + \frac{(1+5i)e^{(-2-i)t}}{4} =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t}((1-5i)e^{it} + (1+5i)e^{-it}) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t}(e^{it} + e^{-it} - 5i(e^{it} - e^{-it})) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t}(2\cos t - 5i\cdot 2\sin t) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos t + \frac{5}{2}e^{-2t}\sin t\,.$$

4.2 Линейные динамические системы

Пример 1. Дана передаточная функция $G(s) = \dfrac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+5)}$. Требуется:

а) Построить СУМ.

б) Построить СНМ.

в) Построить КМ (в комплексном и вещественном базисе).

г) Выяснить свойства управляемости и наблюдаемости всех моделей.

Решение. **а).** Построим стандартную управляемую модель по уравнениям (2.8), (2.9). Перемножим скобки в знаменателе передаточной функции и приведем подобные члены:

$$G(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s^2+4s+5)} = \frac{2s+1}{s^3+5s^2+9s+5} \ .$$

Степень знаменателя $G(s)$ $m = 3$ (размерность системы). Коэффициенты числителя $G(s)$ являются элементами матрицы H, а коэффициенты знаменателя — элементами матрицы F. Таким образом, стандартная управляемая модель имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \ ,$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} x(t) \ .$$

б). Построим стандартную наблюдаемую модель по уравнениям (2.10), (2.11). Степень знаменателя $G(s)$ $m = 3$ (размерность системы). Коэффициенты знаменателя $G(s)$ являются элементами матрицы F. Чтобы определить элементы матрицы B, запишем линейную систему (уравнение (2.12)):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} .$$

Решая систему относительно неизвестного вектора b, получим:

$$b = \left[-\frac{11}{5}, 0, 2\right]^T .$$

Таким образом, стандартная наблюдаемая модель имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{11}{5} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) ,$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) .$$

в). Для построения канонической модели по уравнению (2.13) найдем полюсы передаточной функции $G(s)$. Решая характеристическое уравнение $s^3 + 5s^2 + 9s + 5 = 0$, находим $s_1 = -1$, $s_2 = -2 + i$, $s_3 = -2 - i$. Запишем уравнение состояния канонической модели (все полюсы простые, случай 1):

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2+i & 0 \\ 0 & 0 & -2-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) .$$

Для вычисления коэффициентов матрицы H найдем вычеты: $\operatorname*{res}_{s=-1} G(s) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname*{res}_{s=-2+i} G(s) = \frac{1-5i}{4}$, $\operatorname*{res}_{s=-2-i} G(s) = \frac{1+5i}{4}$.
Запишем уравнение наблюдения:

$$z(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1-5i}{4} & \frac{1+5i}{4} \end{bmatrix} x(t) .$$

Теперь запишем каноническую модель в вещественном базисе, используя уравнения (2.18), (2.19) (случай 2). Здесь $\sigma = -2$, $\omega = 1$. Находим:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) ,$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} x(t) .$$

г). Выясним свойства управляемости и наблюдаемости всех моделей. Поскольку все модели представляют собой непрерывные инвариантные во времени линейные системы, матрицу управляемости найдем по формуле

$$W_{CTI} = \left[B \mid FB \mid F^2B \mid \cdots \mid F^{n-1}B\right],$$

а матрицу наблюдаемости — по формуле

$$M_{CTI} = \left[H^T \mid F^TH^T \mid (F^2)^TH^T \mid \cdots \mid (F^{n-1})^TH^T\right]^T.$$

Таким образом, для каждой из моделей имеем:

1) **СУМ.**

$$W_{CTI} = \left[B \mid FB \mid F^2B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 16 \end{bmatrix}, \ \det W_{CTI} = -1 \neq 0\,.$$

$$M_{CTI} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -10 & -18 & -9 \end{bmatrix}, \ \det M_{CTI} = -13 \neq 0\,.$$

Следовательно, стандартная управляемая модель является полностью управляемой и полностью наблюдаемой.

2) **СНМ.**

$$W_{CTI} = \left[B \mid FB \mid F^2B\right] = \begin{bmatrix} -\frac{11}{5} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -23 \end{bmatrix}, \ \det W_{CTI} = -111\frac{2}{5} \neq 0\,.$$

$$M_{CTI} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \det M_{CTI} = 1 \neq 0\,.$$

Следовательно, стандартная наблюдаемая модель является полностью управляемой и полностью наблюдаемой.

3) **КМ** в вещественном базисе.

$$W_{CTI} = \left[B \mid FB \mid F^2B\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}, \ \det W_{CTI} = 8 \neq 0.$$

$$M_{CTI} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -9 \\ -2 & -15 & 15 \end{bmatrix}, \ \det M_{CTI} = \frac{3}{4} \neq \ 0.$$

Следовательно, каноническая модель также является полностью управляемой и полностью наблюдаемой.

Библиографический список

1. Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. — СПб.: Наука, 2000.

2. Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1965.

3. Евграфов М. А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1965.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, 1974.

5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987.

6. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. — М.: Энергия, 1973.

7. Острем К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления. — М.: Мир, 1973.

8. Пугачев В. С., Казаков И. Е., Евланов Л. Г. Основы стохастической теории автоматических систем. — М.: Наука, 1980.

9. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1979.

10. Соломенцев Е. Д. Функции комплексного переменного и их применения. — М.: Высшая школа, 1988.

Приложение А

Таблицы соответствия для преобразования Лапласа

Таблицы соответствия «оригинал-изображения» — полезный инструмент решения многих задач из области математического моделирования динамических систем и системного анализа. В то же время, изучение операционного исчисления в части, касающейся преобразования Лапласа, будет неполным, если студент не потратит время на самостоятельный вывод формул, входящих в эти таблицы. Поэтому рекомендуется выполнить предлагаемые ниже задания 1 и 2. Приобретая таким образом опыт, студент может даже пополнять эти таблицы, включая в них те формулы, которые сюда не вошли, если он выведет новые соответствия и сочтет их полезными для дальнейшего практического употребления.

Таблицы соответствия приведены ниже в этом Приложении.

Табл. 1 демонстрирует 24 соответствия, которые условно можно считать основными (исходными). В табл. 2 собраны те 56 соответствий, которые типичны для анализа линейных динамических систем с постоянными параметрами (т. е. инвариантных и непрерывных во времени систем).

Задание 1. Доказать соответствия «оригинал–изображение» по Лапласу, приведенные в табл. 1, применяя теоремы о свойствах прямого преобразования Лапласа.

Таблица 1. Соответствия «оригинал–изображение» по Лапласу

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$e^{at}\sin(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{\omega\cos\varphi+(s-a)\sin\varphi}{(s-a)^2+\omega^2}$
$1(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$e^{at}\cos(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{(s-a)\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{(s-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	t	$\dfrac{1}{s^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$t\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$t\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{2s\omega}{(s^2-\omega^2)^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$t\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$
$e^{at}\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$	$f(t)\sin\omega t$	$\dfrac{1}{2i}[F(s-i\omega)-F(s+i\omega)]$
$e^{at}\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$	$f(t)\cos\omega t$	$\dfrac{1}{2}[F(s-i\omega)+F(s+i\omega)]$
$\dfrac{\sin\omega t}{t}$	$\operatorname{arcctg}\dfrac{s}{\omega}$	$\dfrac{1-e^{at}}{t}$	$\ln\dfrac{s-a}{s}$

Задание 2. Доказать соответствия «изображение–оригинал» по Лапласу, приведенные в табл. 2, применяя теоремы о свойствах обратного преобразования Лапласа.

Таблица 2. Оригиналы для дробно-рациональных изображений

№	***F(s)***	***f(t)***
1	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
2	$\dfrac{1}{1+\tau s}$	$\dfrac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$
3	$\dfrac{1}{s(s-a)}$	$\dfrac{1}{a}\left(e^{at}-1\right)$
4	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
5	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
6	$\dfrac{b+cs}{s(s-a)}$	$-\dfrac{b}{a}+\left(c+\dfrac{b}{a}\right)e^{at}$
7	$\dfrac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)e^{at}$
8	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$
9	$\dfrac{b+cs}{s^2-a^2}$	$c\,\mathrm{ch}\,at+\dfrac{b}{a}\,\mathrm{sh}\,at$
10	$\dfrac{b+cs}{s^2+a^2}$	$c\cos at+\dfrac{b}{a}\sin at$
11	$\dfrac{1}{s^2+as+b}$	
	если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}>0\,,$ то	$\dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}e^{-at/2}\sin t\sqrt{\Delta}$
	если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}<0\,,$ то	$\dfrac{1}{\sqrt{-\Delta}}e^{-at/2}\,\mathrm{sh}\,t\sqrt{-\Delta}$
	если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}=0\,,$ то	$te^{-at/2}$

Продолжение 1 табл. 2

№	$F(s)$	$f(t)$
12	$\dfrac{1}{s^2(s-a)}$	$\dfrac{1}{a^2}(e^{at}-1-at)$
13	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)^2}$	$\dfrac{e^{at}-[1+(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
14	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\dfrac{e^{at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{bt}}{(a-b)(c-b)}+$ $+\dfrac{e^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
15	$\dfrac{1}{(s-a)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2e^{at}$
16	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)^2}$	$\dfrac{ae^{at}-[a+b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
17	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\dfrac{ae^{at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{be^{bt}}{(a-b)(c-b)}+$ $+\dfrac{ce^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
18	$\dfrac{s}{(s-a)^3}$	$\left(t+\dfrac{1}{2}at^2\right)e^{at}$
19	$\dfrac{s}{s^2+as+b}$	
	если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}>$ $>0\,,$ то	$e^{-at/2}\left(\cos t\sqrt{\Delta}-\dfrac{a}{2\sqrt{\Delta}}\sin t\sqrt{\Delta}\right)$
	если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}<$ $<0\,,$ то	$e^{-at/2}\left(\operatorname{sh} t\sqrt{-\Delta}-\dfrac{a}{2\sqrt{-\Delta}}\operatorname{sh} t\sqrt{-\Delta}\right)$
	если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}=$ $=0\,,$ то	$e^{-at/2}\left(1-\dfrac{at}{2}\right)$

Продолжение 2 табл. 2

№	$F(s)$	$f(t)$
20	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$
21	$\dfrac{1}{s(s^2-a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}(\operatorname{ch} at-1)$
22	$\dfrac{1}{(s+b)(s^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(e^{-bt}-\cos at+\dfrac{b}{a}\sin at\right)$
23	$\dfrac{(s+b)^2}{s(s^2+a^2)}$	$\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\cos at+2b\sin at$
24	$\dfrac{1}{s^4+a^4}$	$\dfrac{1}{a^3\sqrt{2}}\left(\operatorname{ch}\dfrac{at}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}-\operatorname{sh}\dfrac{at}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{at}{\sqrt{2}}\right)$
25	$\dfrac{1}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\operatorname{sh} at-\sin at)$
26	$\dfrac{s}{s^4+a^4}$	$\dfrac{1}{a^2}\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\dfrac{at}{\sqrt{2}}$
27	$\dfrac{s}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\operatorname{ch} at-\cos at)$
28	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$
29	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(at\operatorname{ch} at-\operatorname{sh} at)$
30	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{\sin bt}{b}-\dfrac{\sin at}{a}\right)$
31	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{\operatorname{sh} at}{a}-\dfrac{\operatorname{sh} bt}{b}\right)$
32	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)(s^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(\dfrac{\operatorname{sh} at}{a}-\dfrac{\sin bt}{b}\right)$
33	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t}{2a}\sin at$
34	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{t}{2a}\operatorname{sh} at$

Продолжение 3 табл. 2

№	$F(s)$	$f(t)$
35	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{a^4}\left(1-\cos at-\dfrac{at}{2}\sin at\right)$
36	$\dfrac{1}{s(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{1}{a^4}\left(1-\operatorname{ch} at+\dfrac{at}{2}\operatorname{sh} at\right)$
37	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2b^2}+\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{\cos at}{a^2}-\dfrac{\cos bt}{b^2}\right)$
38	$\dfrac{1}{s(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2b^2}+\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{\operatorname{ch} at}{a^2}-\dfrac{\operatorname{ch} bt}{b^2}\right)$
39	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{1}{8a^5}\left[(3-a^2t^2)\sin at-3at\cos at\right]$
40	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{1}{8a^5}\left[(3+a^2t^2)\operatorname{sh} at-3at\operatorname{ch} at\right]$
41	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t}{8a^3}\left(\sin at-at\cos at\right)$
42	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{t}{8a^3}\left(at\operatorname{ch} at-\sin at\right)$
43	$\dfrac{1}{(s+a)^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
44	$\dfrac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$
45	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{(b-a)}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
46	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{(b-a)}\left[(\alpha-a)e^{-at}-(\alpha-b)e^{-bt}\right]$
47	$\dfrac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1-\dfrac{b}{(b-a)}e^{-at}+\dfrac{a}{(b-a)}e^{-bt}$
48	$\dfrac{ab(s+\alpha)}{s(s+a)(s+b)}$	$\alpha-\dfrac{b(\alpha-a)}{(b-a)}e^{-at}+\dfrac{a(\alpha-b)}{(b-a)}e^{-bt}$

Окончание табл. 2

№	*F(s)*	*f(t)*
49	$\dfrac{s+\alpha}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega}\sin(\omega t+\varphi),\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\alpha}$
50	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{(\alpha-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{(\alpha-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+$ $+\dfrac{(\alpha-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
51	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}\left[(\alpha-a)^2+\omega^2\right]^{1/2}e^{-at}\sin(\omega t+$ $+\varphi),\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\alpha-a}$
52	$\dfrac{\omega_{\text{n}}^2}{s^2+2\zeta\omega_{\text{n}}s+\omega_{\text{n}}^2}$	$\dfrac{\omega_{\text{n}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_{\text{n}}t}\sin\omega_{\text{n}}t\sqrt{1-\zeta^2},\quad \zeta<1$
53	$\dfrac{1}{s\left[(s+a)^2+\omega^2\right]}$	$\dfrac{1}{a^2+\omega^2}+\dfrac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}}e^{-at}\sin(\omega t-$ $-\varphi),\quad \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{-a}$
54	$\dfrac{\omega_{\text{n}}^2}{s\left(s^2+2\zeta\omega_{\text{n}}s+\omega_{\text{n}}^2\right)}$	$1-$ $-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_{\text{n}}t}\sin\left(\omega_{\text{n}}t\sqrt{1-\zeta^2}+\varphi\right),$ $\varphi=\arccos\zeta,\quad \zeta<1$
55	$\dfrac{s+\alpha}{s\left[(s+a)^2+\omega^2\right]}$	$\dfrac{\alpha}{a^2+\omega^2}+$ $+\dfrac{1}{\omega}\left[\dfrac{(\alpha-a)^2+\omega^2}{a^2+\omega^2}\right]^{1/2}e^{-at}\sin(\omega t+$ $+\varphi),\quad \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\alpha-a}-\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{-a}$
56	$\dfrac{s+\alpha}{(s+c)\left[(s+a)^2+\omega^2\right]}$	$\dfrac{e^{-ct}}{(c-a)^2+\omega^2}+\dfrac{e^{-at}\sin(\omega t+\varphi)}{\omega\left[(c-a)^2+\omega^2\right]^{1/2}},$ $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{c-a}$

Учебное-методическое пособие
И. В. Семушин, Ю. В. Цыганова
СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОЦЕНКИ И УПРАВЛЕНИЕ.
Раздел: Детерминистские модели динамических систем

Редактор X. X. XXXXX

Оригинал-макет изготовлен в системе LaTeX2ε.

Подписано в печать ...
Формат $60 \times 84/16$. Бумага писчая. Усл. печ. л. X,XX.
Уч.-изд. л. Y,YY. Гарнитура Computer Modern.
Тираж XX экз. Заказ ...

Ульяновский государственный университет
432700, Ульяновск, Л. Толстого, 42.