Операционное исчисление

§1. Основные определения

Преобразованием Лапласа для функции $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \tag{1}$$

$f(t)$ называется оригиналом, $F(p)$ – изображением. Связь между оригиналом и изображением с помощью формулы (**??**) мы будем записывать символически

$$f(t) \to F(p).$$

Применяются также записи

$$f(t) \risingdotseq F(p),$$
$$f(t) \div F(p).$$

В выражении (**??**) оригиналом $f(t)$ может быть любая комплексная функция действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям

1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале.
2) $f(t) = 0$ при $t < 0$.
3) при $t \to +\infty$ функция $f(t)$ либо остаётся конечной, либо, если растёт по модулю, то не быстрее экспоненты, то есть существуют некоторые постоянные $M > 0$, и $s_0 > 0$ такие, что $|f(t)| \leqslant Me^{s_0 t}$ для любого t.

Изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Пример 1. Показать, что функция

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t}\sin 3t & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0 \end{cases}$$

является оригиналом.

Решение: Для того чтобы показать, что заданная функция является оригиналом, необходимо проверить, выполняются ли условия 1), 2), 3).

Условие **??**) выполняется в силу того, что существует интеграл

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{2t}\sin 3t\,dt$$

для любых конечных t_1 и t_2.

Условие **??**) выполняетя в силу задания функции ($f(t)=0$ при $t<0$).

Условие **??**) тоже выполнено, так как для любых вещественных t верна оценка $|e^{2t}\sin 3t| \leqslant e^{2t}$, поэтому в качестве M в условии **??**) можно взять любое число большее 1, а $s_0=2$.

Заметим, что простейшим оригиналом является так называемая единичная функция Хевисайда

$$\eta(t)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad t\geqslant 0,\\ 0 & \text{при} \quad t<0.\end{cases}$$

Замечание. В дальнейшем будем считать все функции $f(t)$ равными нулю при $t<0$.

Пример 2. Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(t)=e^{3t}.$$

Решение: Для функции $f(t)=e^{3t}$ имеем $s_0=3$. Значит, изображение $F(p)$ является определённой функцией и аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p>3$. Найдём $F(p)$ по формуле (**??**)

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{3t}e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-3)t}dt=\frac{1}{-(p-3)}e^{-(p-3)t}\Big|_0^{+\infty} \quad (\operatorname{Re} p=s>3).$$

Итак, $F(p)=\frac{1}{p-3}$.

Задачи для самостоятельного решения

Проверить, какие из указанных функций являются оригиналами:

1) $f(t)=b^t,\ b>0,\ b\neq 1$.
2) $f(t)=e^{(2+3i)t}$.
3) $f(t)=\dfrac{1}{t-3}$.
4) $f(t)=t^2$.
5) $f(t)=\operatorname{ch}(3-i)$.
6) $f(t)=\operatorname{tg} t$.
7) $f(t)=t^t$.
8) $f(t)=e^{-t}\cos t$.

9) $f(t) = e^{t^2}$.

10) $f(t) = e^{-t^2}$.

11) $f(t) = \dfrac{1}{t^2+2}$.

Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

12) $f(t) = t$.

13) $f(t) = \sin 3t$.

14) $f(t) = te^t$.

15) Может ли функция $\varphi(p) = \dfrac{1}{\cos p}$ служить изображением некоторого оригинала?

§2. Свойства преобразования Лапласа

2.1. Свойство линейности

Для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \to \alpha F(p) + \beta G(p),$$

где

$$f(t) \to F(p),\ g(t) \to G(p).$$

2.2. Теорема подобия

Для любого постоянного $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

2.3. Дифференцирование оригинала

Если функции $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, причём $f(t) \to F(p)$, то

$$\begin{array}{lcl}
f'(t) & \to & pF(p) - f(0), \\
f''(t) & \to & p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \\
\multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
f^{(n)}(t) & \to & p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),
\end{array}$$

где под $f^{(k)}(0)$, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ понимается $\lim\limits_{t \to 0+} f^{(k)}(t)$.

Пример 1. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции
$$f(t) = \sin^2 t.$$

Решение: Пусть
$$f(t) \to F(p).$$
Тогда
$$f'(t) \to pF(p) - f(0).$$
Учитывая, что $f(0) = 0$ и $f'(t) = 2\sin t \cos t = \sin 2t$ находим
$$\sin 2t \to \frac{2}{p^2+4},$$
следовательно
$$\frac{2}{p^2+4} = pF(p) \quad \Rightarrow \quad F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)}.$$
В результате получаем
$$\sin^2 t \to \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

2.4. Дифференцирование изображения

Дифференцирование изображения сводится к умножению на $(-t)$ оригинала
$$-tf(t) \to F'(p)$$
и
$$(-t)^n f(t) \to F^n(p), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пример 2. Найти изображение функции
$$f(t) = t^2 e^t.$$

Решение: Так как $e^t \to \frac{1}{p-1}$, то по теореме о дифференцировании изображения получаем
$$\left(\frac{1}{p-1}\right)' = -\frac{1}{(p-1)^2}, \quad te^t \to \frac{1}{(p-1)^2}.$$
Далее
$$\left[-\frac{1}{(p-1)^2}\right]' = -\frac{2!}{(p-1)^3},$$
откуда
$$t^2 e^t \to \frac{2}{(p-1)^3}.$$

2.5. Интегрирование оригинала

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p, то есть если

$$f(t) \to F(p),$$

то

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \to \frac{F(p)}{p}.$$

Пример 3. Найти изображение функции $\int_0^t e^\tau d\tau$.

Решение: Так как $e^t \to \frac{1}{p-1}$, то по теореме об интегрировании оригинала получаем

$$\int_0^t e^\tau d\tau \to \frac{\frac{1}{p-1}}{p}, \quad \int_0^t e^\tau d\tau \to \frac{1}{p(p-1)}.$$

2.6. Интегрирование изображения

Если $\int_p^{+\infty} F(p)\,dp$ сходится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \to \int_p^{+\infty} F(p)\,dp.$$

Пример 4. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

Решение: Так как $\sin t \to \frac{1}{p^2+1}$, то на основании теоремы об интегрировании изображения имеем

$$\frac{\sin t}{t} \to \int_p^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^2+1} = \operatorname{arctg}\tau\Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p.$$

2.7. Теорема смещения

Если $f(t) \to F(p)$, то для любого комплексного p_0

$$e^{p_0 t} f(t) \to F(p - p_0).$$

Пример 5. Найти изображение функции $f(t) = e^{-t}\cos 2t$.

Решение: Так как $\cos 2t \to \frac{p}{p^2+4}$, то по теореме смещения ($p_0 = -1$) имеем

$$e^{-t}\cos 2t \to \frac{p+1}{(p+1)^2+4}.$$

2.8. Теорема запаздывания

Если $f(t) \to F(p)$, то для любого положительного τ

$$f(t-\tau) \to e^{-p\tau}F(p).$$

Теорему запаздывания целесообразно использовать при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются разными аналитическими выражениями.

Пример 6. Найти изображение функции

$$f(t-1) = (t-1)^2.$$

Решение: Для функции $f(t) = t^2$ имеем

$$f(t) \to \frac{2}{p^2}.$$

По теореме запаздывания для функции $(t-1)^2$ получаем

$$(t-1)^2 \to e^{-p}\frac{2}{p^2}.$$

Здесь существенно, что ищется изображение функции $f(t-1)$, равной нулю при $t < 1$ ($t - 1 < 0$ по предположению, см. с. **??**.)

2.9. Теорема умножения Бореля (теорема о свёртке)

Пусть

$$f(t) \to F(p), \quad \varphi(t) \to \Phi(p).$$

Произведение двух изображений $F(p)$ и $\Phi(p)$ также является изображением, причём

$$\int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \to F(p)\cdot\Phi(p).$$

Интеграл в левой части называется свёрткой функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ и обозначается символом $f(t) * \varphi(t)$:

$$f(t) * \varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \varphi(t) * f(t).$$

Пример 7. Найти изображение функции

$$\psi(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)e^{\tau}d\tau.$$

Решение: Функция $\psi(t)$ является свёрткой функций

$$f(t) = t \quad \text{и} \quad \varphi(t) = e^t.$$

По теореме умножения

$$\psi(t) \to \Psi(p),$$

$$\Psi(p) = F(p)\cdot\Phi(p) = \tfrac{1}{p^2}\cdot\tfrac{1}{p-1} = \tfrac{1}{p^2(p-1)},$$

$$\int\limits_0^t (t-\tau)e^{\tau}d\tau \to \tfrac{1}{p^2(p-1)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций:

16) $f(t) = 1 + t$.
17) $f(t) = 2\sin t - \cos t$.
18) $f(t) = t + \dfrac{1}{2}e^{-t}$.

Пользуясь теоремой подобия, найти изображения следующих функций:

19) $f(t) = e^{\alpha t}$.
20) $f(t) = \sin 4t$.
21) $f(t) = \cos\omega t$.
22) $f(t) = \operatorname{sh} 3t$.

Пользуясь теоремой линейности, найти изображения следующих функций:

23) $f(t) = \sin^2 t$.
24) $f(t) = \sin mt \cdot \cos nt$.
25) $f(t) = \cos^3 t$.
26) $f(t) = \sin mt \cdot \sin nt$.
27) $f(t) = \sin^4 t$.
28) $f(t) = \cos mt \cdot \cos nt$.

Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображения следующих функций:

29) $f(t) = \cos^3 t$.
30) $f(t) = \sin^3 t$.
31) $f(t) = t\sin\omega t$.
32) $f(t) = \cos^4 t$.

33) $f(t) = t\cos\omega t$.
34) $f(t) = te^t$.
35) $f(t) = t^2\cos t$.
36) $f(t) = t(e^t \operatorname{ch} t)$.
37) $f(t) = (t+1)\sin 2t$.
38) $f(t) = t \operatorname{sh} 3t$.

Найти изображения следующих функций:

39) $f(t) = \int\limits_0^t \sin\tau\, d\tau$.
40) $f(t) = \int\limits_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau\, d\tau$.
41) $f(t) = \int\limits_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau\, d\tau$.
42) $f(t) = \int\limits_0^t \cos^2\omega\tau\, d\tau$.
43) $f(t) = \int\limits_0^t \operatorname{ch}\omega\tau\, d\tau$.
44) $f(t) = \int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.
45) $f(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$.
46) $f(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{t}$.
47) $f(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t}$.
48) $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t}$.
49) $f(t) = \dfrac{\cos t - \cos 2t}{t}$.
50) $f(t) = \dfrac{e^t - 1 - t}{t}$.
51) $f(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{t}$.
52) $f(t) = e^{2t}\sin t$.
53) $f(t) = e^t\cos nt$.
54) $f(t) = e^{-t}t^3$.
55) $f(t) = e^{-t}\operatorname{sh} t$.
56) $f(t) = te^t\cos t$.
57) $f(t) = e^{3t}\sin^2 t$.

58) $f(t) = e^{-\alpha t}\cos^2\beta t$.

59) $f(t) = \sin(t-b)$.

60) $f(t) = \cos^2(t-b)$.

61) $f(t) = e^{t-2}$.

62) $f(t) = \int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin\tau\,d\tau$.

63) $f(t) = \int\limits_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau}d\tau$.

64) $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^2\operatorname{ch}\tau\,d\tau$.

65) $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^n f(\tau)\,d\tau$.

66) $f(t) = \int\limits_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2 d\tau$.

§3. Нахождение оригинала по изображению

Для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ применяются следующие действия. Если $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ есть правильная[1] рациональная[2] дробь, то эту дробь необходимо разложить в сумму простых дробей и найти оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства пунктов **??** – **??** преобразования Лапласа.

Пример 1. Найти оригинал для функции

$$F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}.$$

Решение: Разложим $F(p)$ в сумму простых дробей.

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

[1]рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя.

[2]дробь называется рациональной, если она является отношением двух многочленов.

Методом неопределённых коэффициентов находим неизвестные коэффициенты A, B, C, D.

$$\begin{aligned} 1 &= A(p-1)(p^2+4) + Bp(p^2+4) + (Cp+D)p(p-1). \\ 1 &= A(p^3-p^2 = 4p-4) + B(p^3+4p) + C(p^3-p^2) + D(p^2-p). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B+C &= \ \ 0, \\ A+C-D &= \ \ 0, \\ 4A+4B-D &= \ \ 0, \\ 4A &= -1. \end{cases} \implies \quad \begin{matrix} A = -\frac{1}{4}, & B = \frac{1}{5}, \\ C = \frac{1}{20}, & D = -\frac{1}{5}. \end{matrix}$$

Получаем следующее выражения для $F(p)$:

$$F(p) = -\frac{1}{4p} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{20}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+4}.$$

Далее находим оригиналы для каждой из простых дробей:

$$\begin{aligned} 1 &\to \tfrac{1}{p}, \\ e^t &\to \tfrac{1}{p-1}, \\ \cos 2t &\to \tfrac{p}{p^2+4}, \\ \sin 2t &\to \tfrac{2}{p^2+4} \end{aligned}$$

и, пользуясь свойством линейности, находим

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t.$$

Пример 2. Для изображения $F(p) = \frac{e^{-p}}{p+1}$ найти оригинал $f(t)$.

Решение: $F(p) = e^{-p}\frac{1}{p+1}$, $e^{-t} \to \frac{1}{p+1}$. Множитель e^{-p} указывает на необходимость применения теоремы запаздывания при $\tau = 1$. Поэтому

$$e^{-(t-1)} \to \frac{e^{-p}}{p+1}.$$

Итак,

$$f(t) = e^{1-t}.$$

Задачи для самостоятельного решения

По данному изображению найти оригиналы:

67) $F(p) = \dfrac{2e^{-p}}{p^3}.$

68) $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2}.$

69) $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p-1}$.

70) $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{p+3}$.

71) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

72) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

73) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.

74) $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

75) $F(p) = \dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$.

76) $F(p) = \dfrac{1}{7-p+p^2}$.

77) $F(p) = \dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

78) $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

79) $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

80) $F(p) = \dfrac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$.

81) $F(p) = \dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

82) $F(p) = \dfrac{p}{p^3+1}$.

83) $F(p) = \dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

84) $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$.

85) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

86) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+1}\left(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p}\right)$.

87) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2-1} + \dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

88) $F(p) = \dfrac{e^{-\frac{p}{2}}}{p(p+1)(p^2+4)}$.

89) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2} + \dfrac{2e^{-2p}}{p^3} + \dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

90) $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{p(p^2+1)}$.

§4. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение n – го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = f(t). \tag{1}$$

Требуется найти решение $x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Пусть $x(t) \to X(p), f(t) \to F(p)$, тогда, применяя к обеим частям уравнения (**??**) преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, получим вместо дифференциального уравнения (**??**) с начальными условиями (**??**) операторное уравнение

$$\begin{aligned}(3)\quad &(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n)X(p) - \\ &\quad - a_0(p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x'_0 \ldots + x_0^{(n-1)}) - \\ &\quad - a_1(p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x'_0 \ldots + x_0^{(n-2)}) - \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad - a_{n-2}(px_0 + x'_0 - a_{n-1}x_0 = F(p).\end{aligned}$$

Из уравнения (**??**) находим

$$X(p) = \frac{F(p) + \psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}, \tag{4}$$

где

$$\psi_{n-1}(p) = a_0(p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' \ldots + x_0^{(n-1)}) +$$
$$+ a_1(p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' \ldots + x_0^{(n-2)}) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{n-2}(px_0 + x_0' - a_{n-1}x_0),$$

$$\varphi_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n.$$

Выражение (**??**) представляет собой изображение решения $x(t)$ уравнения (**??**). Находя по $X(p)$ оригинал $x(t)$, мы получим решение задачи Коши для уравнения (**??**).

Если мы имеем нулевые начальные условия, то есть

$$x_0 = x_0' = \ldots = x_0^{(n-1)} = 0,$$

то решение уравнения (**??**) примет вид

$$X(p) = \frac{F(p)}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n}.$$

Найдя оригинал этого изображения, получим решение задачи Коши уравнения (**??**) при нулевых начальных условиях.

Рассмотрим случай $n = 2$ – уравнение второго порядка.

$$a_0\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1\frac{dx(t)}{dt} + a_2x(t) = f(t)$$

с начальными условиями $x(0) = x_0, x'(0) = x_0'$.

Тогда, если $x(t) \to X(p)$, $f(t) \to F(p)$, то получаем операторное уравнение

$$(a_0p^2 + a_1p + a_2)X(p) - (a_0px_0 + a_0x_0' + a_1x_0) = F(p),$$

откуда

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0px_0 + a_0x_0' + a_1x_0}{a_0p^2 + a_1p + a_2}.$$

Находя по изображению $X(p)$ оригинал $x(t)$, мы получим решение поставленной задачи Коши.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t,$$

удовлетворяющее начальным условиям при $t = 0 : x_0 = x_0' = 0$.

Решение: Пусть $x(t) \to X(p)$. Так как $f(t) = t$, то $t \to \frac{1}{p^2}$.
Далее получаем

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & \to & pX(p) - x(0) = pX(p), \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \to & p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p). \end{array}$$

В результате получаем уравнение для изображений (операторное уравнение)

$$X(p)(p^2 + 3p + 2) = \frac{1}{p^2}$$

и его решение

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 3p + 2)}.$$

Чтобы найти для этого изображения оригинал, разложим дробь на элементарные дроби

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 3p + 2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+2},$$

где A, B, C, D – неопределённые коэффициенты.

Для нахождения коэффициентов получаем следующую систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} A + C + D & = & 0, \\ 3A + B + 2C + D & = & 0, \\ A + 3B & = & 0, \\ 2B & = & 1. \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rclrcl} A & = & -\frac{3}{2}, & B & = & \frac{1}{2}, \\ C & = & \frac{5}{2}, & D & = & -1. \end{array}$$

Тогда

$$X(p) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

и по формулам **??**, **??** и **??** таблицы изображений на с. **??** находим решение

$$x(t) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{2}e^{-t} - e^{-2t}.$$

Пример 2. Решить задачу Коши

$$x'' + x = 2\cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

Решение:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & \to & X(p), \\ x'(t) & \to & pX(p) - x(0) = pX(p), \\ x''(t) & \to & p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1, \end{array}$$

$$\cos t \to \frac{p}{p^2+1}, \quad p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1}.$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Находим оригинал для $X(p)$:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{p^2+1} & \leftarrow & \sin t, \\ \frac{2p}{(p^2+1)^2} & \leftarrow & t\sin t. \end{array}$$

Значит $X(p) \rightarrow t\sin t - \sin t = (t-1)\sin t$ и получаем решение исходного уравнения

$$x(t) = (t-1)\sin t.$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

91) $x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$
92) $x'' - 2x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
93) $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
94) $x''' + x' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
95) $x'' + 2x' = t\sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
96) $x'' + 2x' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$
97) $x''' - x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
98) $x'' - 2x' + x = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
99) $x''' + 2x'' + 5x' = 0, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 2.$
100) $x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
101) $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$
102) $x'' + 2x' + x = t^2, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
103) $x''' + x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$
104) $x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1.$
105) $x''' + x'' = t, \quad x(0) = -3, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$
106) $x'' + 2x' + 5x = 3, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
107) $x^{IV} - x'' = \cos t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = x'''(0) = 0.$
108) $x'' + x = 1, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$
109) $x'' + 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
110) $x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
111) $x'' - 2x' + 5x = 1 - t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
112) $x''' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad x''(0) = 2.$
113) $x''' + x'' = \cos t, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = x''(0) = 0.$
114) $x''' + x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 0.$
115) $x^{IV} - x'' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

116) $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$

117) $x'' - x' = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

118) $x''' + x' = \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -2, \quad x''(0) = 0.$

119) $x'' + 2x' + x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

120) $x'' - x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

121) $x'' - x = \sin t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$

122) $x''' + x = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 0.$

123) $x'' + x = 2\sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$

124) $x'' - 2x' + x = t - \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

125) $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

126) $x'' + 4x = 2\cos t \cdot \cos 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

127) $x'' + x = te^t + 4\sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

128) $x'' - x' = te^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

129) $x'' + x' = 4\sin^2 t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$

130) $x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = -2.$

131) $x'' - 3x' + 2x = e^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

132) $x'' - x' = t^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

133) $x''' + x = \dfrac{1}{2}t^2e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

134) $x'' + x = t\cos 2t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

135) $x'' + n^2x = a\sin(nt + \alpha), \quad x(0) = x'(0) = 0.$

136) $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 1 + t + t^2, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

137) $x^{IV} + 2x'' + x = t\sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

138) $x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2)x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

139) $x'' + 4x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

140) $x''' + x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

141) $x^{IV} + x''' = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \quad x'''(0) = \gamma.$

142) $x'' - 4x = \sin\dfrac{3}{2}t \cdot \sin\dfrac{1}{2}t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

143) $x^{IV} - 5x'' + 10x' - 6x = 0,\ x(0) = 1, x'(0) = 0, x''(0) = 6, x'''(0) = -14.$

144) $x'' + x' + x = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

145) $x'' + x = t\cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

146) $x''' + 3x'' - 4x = 0, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 2.$

147) $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

148) $x''' + x = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

§5. Решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операторным методом

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операторным методом производится аналогично тому, как решается одно дифференциальное уравнение.

Например, пусть дана система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\frac{d^2x_k}{dt^2}+b_{ik}\frac{dx_k}{dt}+c_{ik}x_k\right)=f_i(t)\quad (i=1,2,\ldots,n),$$

где $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}=\mathrm{const}$, при начальных условиях

$$x_k(0)=\alpha_k,\quad x_k'(0)=\beta_k.$$

Обозначая через $X_k(p)$ и $F_i(p)$ изображения функций $x_k(t)$ и $f_i(t)$ соответственно, перейдём от исходной системы к системе уравнений для изображений

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}p^2+b_{ik}p+c_{ik}\right)=F_i(p)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\left[(a_{ik}p+b_{ik})\alpha_k+a_{ik}\beta_k\right]\quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Решая эту систему как линейную алгебраическую систему уравнений относительно $X_k(p)$, найдём изображения $X_k(p)$, а затем их оригиналы $x_k(t)$ для $k=1,2,\ldots,n$. Это и будет решение задачи Коши для исходной системы дифференциальных уравнений.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x'' &= 3(y-x+z),\\ y'' &= x-y,\\ z'' &= -z \end{cases}$$

при начальных условиях

$$\begin{array}{rclrcr} x(0) &=& 0, & x'(0) &=& 0,\\ y(0) &=& 0, & y'(0) &=& -1,\\ z(0) &=& 1, & z'(0) &=& 0. \end{array}$$

Решение: Пусть

$$x(t)\to X(p),\quad y(t)\to Y(p),\quad z(t)\to Z(p).$$

Тогда исходная система уравнений при заданных начальных условиях запишется в операторной форме в следующем виде

$$\begin{cases} p^2X(p) &= 3(Y(p)-X(p)+Z(p)),\\ p^2Y(p)+1 &= X(p)-Y(p),\\ p^2Z(p)-p &= -Z(p). \end{cases}$$

Эта система уравнений относительно изображений представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Решая её относительно изображений $X(p), Y(p), Z(p)$, получим

$$\begin{aligned} X(p) &= \tfrac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)},\\ Y(p) &= \tfrac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \tfrac{1}{p^2+1},\\ Z(p) &= \tfrac{p}{p^2+1}. \end{aligned}$$

Найдём оригиналы этих изображений.

$$X(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}.$$

Представим $X(p)$ в виде суммы элементарных дробей и найдём неопределённые коэффициенты.

$$\begin{aligned} X(p) &= \tfrac{A}{p} + \tfrac{B}{p^2} + \tfrac{C}{p^2+4}.\\ 3(p-1) &= Ap(p^2+4) + B(p^2+4) + (Cp+D)p^2. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|rcl} p^3 & 0 &=& A+C,\\ p^2 & 0 &=& B+D,\\ p & 3 &=& 4A,\\ p^0 & -3 &=& 4B. \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{rcl} A &=& \frac{3}{4},\ \ B = -\frac{3}{4},\\ D &=& \frac{3}{4},\ \ C = -\frac{3}{4}. \end{array}$$

$$X(p) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{p}{p^2+4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2+4}.$$

Находя оригинал для каждого слагаемого, получим

$$x(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t.$$

Далее найдём оригинал для $Y(p)$.

$$Y(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1}, \quad \frac{1}{p^2+1} \to \sin t.$$

Обозначим

$$Y_1(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)}.$$

Представим $Y_1(p)$ в виде суммы элементарных дробей и найдём неопределённые коэффициенты.

$$Y_1(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1} + \frac{Lp+M}{p^2+4}.$$

$$\begin{aligned} 3(p-1) = Ap(p^2+1)(p^2+4) + B(p^2+1)(p^2+4) + \\ + (Cp+D)p^2(p^2+4) + (Lp+M)p^2(p^2+1). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменного p, получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} A+C+L &=& 0, \\ B+D+M &=& 0, \\ 5A+4C+L &=& 0, \\ 5B+4D+M &=& 0, \\ 4A &=& 3, \\ 4B &=& -3. \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rclrcl} A &=& \frac{3}{4}, & B &=& -\frac{3}{4}, \\ C &=& -1, & D &=& 1, \\ L &=& \frac{1}{4}, & M &=& -\frac{1}{4}. \end{array}$$

$$\begin{aligned} Y(p) = Y_1(p) - \frac{1}{p^2+1} = \\ = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2+4} - \frac{1}{p^2+1} = \\ = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2+1} + + \frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2+4}. \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}t - \cos t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

Найдём оригинал для $Z(p)$.

$$Z(p) = \frac{p}{p^2+1}, \quad \frac{p}{p^2+1} \to \cos t, \quad z(t) = \cos t.$$

Итак, получили решение поставленной задачи:

$$\begin{array}{l} x(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t, \\ y(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}t - \cos t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t, \\ z(t) = \cos t. \end{array}$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить системы уравнений при заданных начальных условиях:

149) $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$

150) $\begin{cases} x' + x = y + e^t, \\ y' + y = x + e^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

151) $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$

152) $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ y'' - 5y' + 4y - x' + x = 0, \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = y'(0) = 0,$ $y(0) = 1.$

153) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

154) $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 1,$ $y(0) = y'(0) = 0.$

155) $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

156) $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$

157) $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$

158) $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$

Таблица некоторых изображений и их оригиналов		
	Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
3	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{sh} \alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{ch} \alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-at} \sin \alpha t$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-at} \cos \alpha t$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t \sin at$
11	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t \cos at$
12	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
13	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at)$
14	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{\alpha t}$
15	$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{a}$	$\frac{\sin at}{t}$
16	$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$
17	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \sin \sqrt{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \frac{1}{2t}$
18	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \cos \sqrt{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos \frac{1}{2t}$
19	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$	$t^n f(t)$
20	$F_1(p) \cdot F_2(p)$	$\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$

Везде в таблице $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ответы

1) Да. **2)** Да. **3)** Нет. **4)** Да. **5)** Да. **6)** Нет. **7)** Нет. **8)** Да. **9)** Нет. **10)** Да. **11)** Да. **12)** $\frac{1}{p^2}$. **13)** $\frac{3}{p^2+9}$. **14)** $\frac{1}{(p-1)^2}$. **15)** Нет. **16)** $\frac{p+1}{p^2}$. **17)** $\frac{2-p}{p^2+1}$. **18)** $\frac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$. **19)** $\frac{1}{p-a}$. **20)** $\frac{4}{p^2+16}$. **21)** $\frac{p}{p^2+\omega^2}$. **22)** $\frac{3}{p^2-9}$. **23)** $\frac{2}{p(p^2+4)}$. **24)** $\frac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$. **25)** $\frac{p^2+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}$. **26)** $\frac{2mnp}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$. **27)** $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{p}+\frac{p}{p^2+16}-\frac{4p}{p^2+1}\right)$. **28)** $\frac{p(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$. **29)** $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$. **30)** $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$. **31)** $\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$. **32)** $\frac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$. **33)** $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$. **34)** $\frac{1}{(p-1)^2}$. **35)** $\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$. **36)** $\frac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$. **37)** $\frac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$. **38)** $\frac{6p}{(p^2-1)^2}$. **39)** $\frac{1}{p(p^2+1)}$. **40)** $\frac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p(p^2+\omega^2)^2}$. **41)** $\frac{4}{(p^2-1)^4}$. **42)** $\frac{p^2+2\omega^2}{p^2(p^2+4\omega^2)}$. **43)** $\frac{1}{p^2-\omega^2}$. **44)** $\frac{2}{p(p+1)^3}$. **45)** $\ln\frac{p}{p-1}$. **46)** $\ln\frac{p+1}{p}$. **47)** $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}$. **48)** $\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$. **49)** $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+4}{p^2+1}$. **50)** $\ln\frac{p}{p-1}$. **51)** $\ln\frac{p+1}{p-1}$. **52)** $\frac{1}{(p-2)^2+1}$. **53)** $\frac{p-m}{(p-2)^2+1}$. **54)** $\frac{3!}{(p+1)^4}$. **55)** $\frac{1}{(p-1)^2+1}$. **56)** $\frac{p^2-2p}{(p^2-2p+2)^2}$. **57)** $\frac{1}{2(p-3)}-\frac{1}{2}\frac{p-3}{(p-3)^2+4)}$. **58)** $\frac{1}{2(p+\alpha)}+\frac{p+\alpha}{2[(p+\alpha)^2+4\beta^2]}$. **59)** $\frac{e^{-bp}}{p^2+1}$. **60)** $\frac{e^{-bp}}{2p}+\frac{pe^{-bp}}{2(p^2+4)}$. **61)** $\frac{e^{-2p}}{p-1}$. **62)** $\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$. **63)** $\frac{p}{(p-2)(p^2+1)}$. **64)** $\frac{2}{p^2(p^2-1)}$. **65)** $\frac{n!F(p)}{p^{n+1}}$. **66)** $\frac{2}{p^3(p+2)}$. **67)** $(t-1)^2$. **68)** $t-2$. **69)** e^{t-2}. **70)** $e^{-3(t-3)}$. **71)** $e^{-2t}\sin t$. **72)** $\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)$. **73)** $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$. **74)** $\frac{1}{2}t\sin t$. **75)** $1-e^{-t}-te^{-t}$. **76)** $\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t$. **77)** $\frac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t$. **78)** $t-\sin t$. **79)** $\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t$. **80)** $\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. **81)** $e^{-t}(1-t^2)$. **82)** $\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{1}{3}e^{-t}$. **83)** $\frac{3}{5}+\frac{e^{-2t}}{5}(4\sin t-3\cos t)$. **84)** $(t-3)e^{-(t-3)}$. **85)** $e^{t-1}-1$. **86)** $\sin(t-2)+2\sin(t-3)+3\sin(t-4)$. **87)** $\operatorname{sh}(t-1)+\operatorname{ch}2(t-2)$. **88)** $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}e^{-(t-\frac{1}{2})}-\frac{1}{20}\cos 2(t-\frac{1}{2})-\frac{1}{10}\sin 2(t-\frac{1}{2})$. **89)** $(t-1)+(t-2)^2+(t-3)^3$. **90)** $1-\cos(t-\frac{1}{3})$. **91)** $\frac{1}{4}e^{t}+\frac{5}{12}e^{-3t}-\frac{2}{3}$. **92)** $\frac{1}{4}(1-e^{2t}+2te^{2t})$. **93)** $\frac{1}{8}(3e^{t}-e^{-3t}-2e^{-t})$. **94)** $t-\sin t$. **95)** $\frac{2}{25}e^{-2t}-\frac{2}{25}\cos t+\frac{14}{25}\sin t-\frac{1}{5}t\sin t-\frac{2}{5}t\cos t$. **96)** $\frac{1}{2}(e^{-t}-te^{-t}-\cos t)$. **97)** $\frac{1}{2}e^{t}-t-1+\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$. **98)** $\frac{1}{2}t^2e^{t}+te^{t}$. **99)** $\frac{3}{5}e^{-t}\sin 2t-\frac{4}{5}e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{5}$. **100)** $\frac{1}{2}(1-e^{t}\cos t+e^{t}\sin t)$. **101)** $2+\frac{1}{2}(e^{-t}-\cos t+\sin t)$. **102)** $t^2-4t+6-5e^{-t}-te^{-t}$. **103)** $2t+\frac{1}{2}(e^{-t}+\cos t-\sin t)$. **104)** $\frac{1}{2}t\sin t-\cos t+\sin t$. **105)** $\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t-4+e^{-t}$. **106)** $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t$. **107)** $\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{ch} t)-t-1$. **108)** $1-2\cos t$. **109)** $\frac{1}{2}(1-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t)$. **110)** $\frac{1}{4}t+\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t$.

111) $\frac{3}{25}-\frac{t}{5}-\frac{3}{25}e^t\cos 2t-\frac{4}{25}e^t\sin 2t$. **112)** $e^{-t}-e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$. **113)** $-1-\frac{1}{2}(\sin t+\cos t+e^{-t})$. **114)** $\frac{1}{2}e^t+\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t-1$. **115)** $\operatorname{ch} t-\frac{1}{2}t^2-1$. **116)** $2+\frac{1}{2}(e^t+\sin t-\cos t)$. **117)** $e^t(1-t+\frac{1}{2}t^2)-1$. **118)** $-\frac{3}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t$. **119)** $2e^{-t}+te^{-t}+t-2$. **120)** $\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-3\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$. **121)** $-\frac{1}{4}e^t-\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin t$. **122)** $\frac{1}{2}e^t-\frac{5}{6}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$. **123)** $\cos t-t\cos t$. **124)** $2+t-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}te^t-\frac{3}{2}e^t$. **125)** $1-\frac{22}{25}e^{-t}-\frac{6}{5}te^{-t}-\frac{3}{25}\cos 2t+\frac{4}{25}\sin 2t$. **126)** $\frac{t}{4}\sin 2t+\frac{1}{12}(\cos 2t-\cos 4t)$. **127)** $te^t-e^t+\cos t+2\sin t-2t\cos t$. **128)** $e^t(\frac{t^2}{2}-t+1)$. **129)** $2t-3+3e^{-t}-\frac{1}{5}(\sin 2t-2\cos 2t+2e^{-t})$. **130)** $4t+3-2e^t$. **131)** $e^{2t}-e^t-te^t$. **132)** $3e^t-3-2t-t^2-\frac{t^3}{3}$. **133)** $\frac{1}{4}e^t(t^2-3t+\frac{3}{2})+\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{1}{24}e^{-t}$. **134)** $\frac{4}{9}\sin 2t-\frac{5}{9}\sin t-\frac{1}{3}t\cos 2t$. **135)** $\frac{a}{2n^2}[\sin nt\cos\alpha-nt\cos(nt+\alpha)]$. **136)** $\frac{1}{6}t^2-\frac{4}{9}t+\frac{35}{54}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{4}{27}e^{-3t}$. **137)** $-\frac{t}{24}[3t\cos t+(t^2-3)\sin t]$. **138)** $\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t$. **139)** $\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$. **140)** $\frac{1}{10}e^{2t}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cos t\frac{1}{5}\sin t$. **141)** $\frac{\gamma}{2}t^2+(1-\gamma)t+(\gamma-1)+(\frac{1}{2}-\gamma)e^{-t}+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)$. **142)** $\frac{83}{80}\operatorname{ch} 2t-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{16}\cos 2t$. **143)** $e^t(\cos t+\sin t-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}e^{-3t}$. **144)** $\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{1}{3}(t-1)e^t$. **145)** $\frac{1}{4}(t^2\sin t+t\cos t-\sin t)$. **146)** $\frac{2}{9}[e^t-e^{-2t}(3t+1)]$. **147)** $1-e^{-t}(\frac{t^2}{2}+t+1)$. **148)** $1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$. **149)** $x(t)=e^t, y(t)=-e^t$. **150)** $x(t)=e^t, y(t)=e^t$. **151)** $x(t)=2(1-e^{-t}-te^{-t}), y(t)=2-t-2e^{-t}-2te^{-t}$. **152)** $x(t)=\frac{1}{4}(e^t-e^{3t}+2te^{3t}), y(t)=\frac{1}{4}(5e^t-e^{3t}-2te^{3t})$. **153)** $x(t)=e^t(\cos t-2\sin t), y(t)=e^t(\cos t+3\sin t)$. **154)** $x(t)=\frac{1}{3}(e^t+2\cos 2t+\sin 2t), y(t)=\frac{2}{3}(e^t-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t)$. **155)** $x(t)=e^t-\frac{11}{34}e^{4t}-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\sin t-\frac{1}{2}, y(t)=-\frac{2}{3}e^t+\frac{22}{51}e^{4t}+\frac{4}{17}\cos t-\frac{1}{17}\sin t$. **156)** $x(t)=-e^t, y(t)=0, z(t)=e^t$. **157)** $x(t)=\frac{2}{5}(e^{3t}-e^{-2t}), y(t)=\frac{1}{5}(3e^{3t}+2e^{-2t}), z(t)=\frac{1}{5}(3e^{3t}+2e^{-2t})$. **158)** $x(t)=2-e^{-t}, y(t)=2-e^{-t}, z(t)=2e^{-t}-2$.