

Стохастические модели, оценки и управление

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

В начале семестра студенты получают Таблицы соответствий по преобразованию Лапласа, которые они должны доказать самостоятельно. Кроме того, для самостоятельного доказательства оставлены теоремы об управляемости и наблюдаемости для дискретных систем, — рекомендуется проводить эти доказательства по аналогии с тем, как это делается на лекциях для непрерывных систем.

Задание 1. Доказать соответствия «оригинал–изображение» по Лапласу, приведенные в следующей Табл. 1, применяя теоремы о свойствах прямого преобразования Лапласа.

Таблица 1. Соответствие «оригинал–изображение» по Лапласу			
$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$e^{at} \sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi + (s - a) \sin \varphi}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$\delta(t)$	1	$e^{at} \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{(s - a) \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{(s - a)^2 + \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	t	$\frac{1}{s^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\text{ch } \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$	$t \text{ sh } \omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2 - \omega^2)^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$	$t \text{ ch } \omega t$	$\frac{s^2 + \omega^2}{(s^2 - \omega^2)^2}$

Задание 2. Доказать соответствия «изображение–оригинал» по Лапласу, приведенные в следующей Табл. 2, применяя теоремы о свойствах обратного преобразования Лапласа.

Табл. 2 помещена на стр. 2.

Задание 3. Доказать соответствия «изображение–оригинал» по Лапласу, приведенные в следующей Табл. 3, применяя теоремы о свойствах обратного преобразования Лапласа.

Табл. 3 помещена на стр. 3.

Таблица 2. Оригиналы для дробно-рациональных изображений

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{1+\tau s}$	$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a} (e^{at} - 1)$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$
$\frac{b+cs}{s(s-a)}$	$-\frac{b}{a} + \left(c + \frac{b}{a}\right) e^{at}$
$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)e^{at}$
$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$
$\frac{b+cs}{s^2+a^2}$	$c \cos at + \frac{b}{a} \sin at$
$\frac{1}{s^2+as+b}$	$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{at}{2}} \sin \sqrt{\Delta} t$
если $\Delta = b^2 - \frac{a^2}{4} > 0$, то	$\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} e^{-\frac{at}{2}} \operatorname{sh} \sqrt{-\Delta} t$
если $\Delta = b^2 - \frac{a^2}{4} < 0$, то	$te^{-\frac{at}{2}}$
если $\Delta = b^2 - \frac{a^2}{4} = 0$, то	$c \operatorname{ch} at + \frac{b}{a} \operatorname{sh} at$
$\frac{b+cs}{s^2-a^2}$	

Таблица 3. Оригиналы для дробно-рациональных изображений

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s^2(s-a)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - 1 - at)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{e^{at} - [1 + (a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{e^{at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2 e^{at}$
$\frac{s}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{ae^{at} - [a + b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
$\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{ae^{at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{be^{bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{ce^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\frac{s}{(s-a)^3}$	$\left(t + \frac{1}{2}at^2\right) e^{at}$
$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$
$\frac{1}{s(s^2 - a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(\operatorname{ch} at - 1)$
$\frac{s}{s^2 + as + b}$	$e^{-\frac{at}{2}} \left(\cos \sqrt{\Delta} t - \frac{a}{2\sqrt{\Delta}} \sin \sqrt{\Delta} t \right)$
если $\Delta = b^2 - \frac{a^2}{4} > 0$, то	$e^{-\frac{at}{2}} \left(\operatorname{sh} \sqrt{-\Delta} t - \frac{a}{2\sqrt{-\Delta}} \operatorname{sh} \sqrt{-\Delta} t \right)$
если $\Delta = b^2 - \frac{a^2}{4} < 0$, то	$e^{-\frac{at}{2}} \left(1 - \frac{at}{2} \right)$
если $\Delta = b^2 - \frac{a^2}{4} = 0$, то	