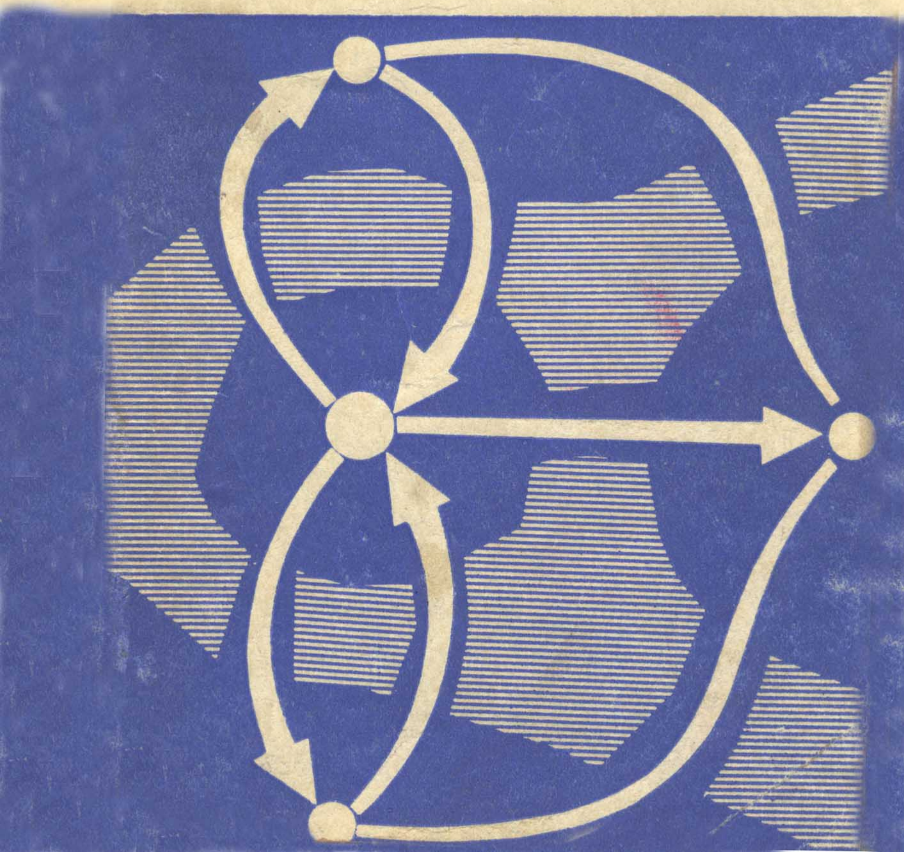
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ



NEW MATHEMATICAL LIBRARY

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP

GRAPHS AND THEIR USES

by

Oystein Ore

Yale University

RANDOM HOUSE

New York, 1963

«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
Популярная серия

О. ОРЕ

Графы и их применение

Перевод с английского
Л. И. Головиной

Под редакцией И. М. Яглома

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1965

УДК 513

Графы — сети линий, соединяющих заданные точки, — широко используются в разных разделах математики и в приложениях.

Автором книги «Графы и их применение» является видный норвежский алгебраист Ойстин Оре. Для понимания книги вполне достаточны минимальные предварительные знания, практически не превышающие курса математики 7—8 классов средней школы.

Как при изучении любой книги по математике, овладение новыми понятиями, конечно, потребует от читателя некоторых усилий и известной настойчивости. Однако это лишь доставит удовольствие истинному любителю математики.

Редакция литературы
по математическим наукам

От редактора

Издательство «Мир» начинает выпуск популярной серии «Современная математика». Книжки этой серии рассчитаны на тех, кто интересуется математикой и хочет заниматься ею самостоятельно. Специальных сведений у читателей не предполагается — достаточно знания курса математики 7—8 классов средней школы.

В последние десятилетия математика значительно изменила свой облик. Создание быстродействующих вычислительных машин и появление новых приложений математики (к экономике, биологии, лингвистике и др.) привели к смещению центров интересов. Иные разделы, ранее интересовавшие лишь узкие круги специалистов, стали очень актуальными и поэтому широко популярными. Роль других разделов потускнела.

Этот процесс не мог не отразиться и во взглядах на школьную, так называемую «элементарную» математику. Появилась необходимость изменения школьного курса математики, введения в него новых разделов.

Сейчас в ряде стран — в том числе и у нас в Советском Союзе — идет большая экспериментальная работа по перестройке преподавания математики в школе. В последние годы во всем мире виднейшие ученые стали вплотную заниматься проблемами школьного образования.

В популярную серию «Современная математика» предполагается включить переводы лучших образцов зарубежной литературы по математике для школьников. Особое внимание будет уделено новым для школы вопросам или свежему освещению привычных вопросов.

Серия открывается переводами нескольких книг из американской «Новой математической библиотеки».

Создание этой «Библиотеки» — одно из главных начинаний исследовательской группы по школьной математике (School mathematics study group), созданной Американским математическим обществом и состоящей из крупнейших ученых. «Новая математическая библиотека» получила в США весьма широкое распространение.

Первая книга популярной серии «Современная математика» принадлежит перу известного норвежского математика, ныне профессора Иельского университета в США Ойстина Оре [1]).

Учение о графах, т. е. о геометрических схемах, представляющих собой системы линий, соединяющих какие-то заданные точки, очень подходит для изложения начинающим, поскольку оно соединяет большую геометрическую наглядность с математической содержательностью и с возможностью обходиться без громоздкого аппарата. Интересна история этого своеобразного раздела математики. Зарождение теории графов в XVIII веке было связано с математическими головоломками, и довольно долго на учение о графах смотрели как на «несерьезную» тему, «прикладное» значение которой целиком связано с играми и развлечениями. В этом отношении судьбу теории графов можно сравнить с судьбой теории вероятностей, также первоначально рассматривавшейся лишь в связи с ее «применениями» к азартным играм. В начале XX века графы привлекали внимание топологов — и в первой половине нашего века теорию графов рассматривали как одну из глав топологии — весьма сложного раздела современной математики, интересующего лишь узкий круг специалистов.

Однако в дальнейшем выяснилось большое значение теории графов для решения многих важных вопросов практики, из числа которых здесь достаточно упомянуть, например, о так называемых «транспортных

---

[1]) Русскому читателю О. Оре известен как автор увлекательной биографии знаменитого норвежского математика Н. Х. Абеля (Оре О., Замечательный математик Нильс Хенрик Абель, М., Физматгиз, 1961).

задачах» (задачи о планировании наиболее рациональной системы перевозок грузов в транспортной сети) или о задачах, связанных с электрическими сетями. Все это вызвало бурный рост относящейся к теории графов литературы, среди которой особо следует отметить обстоятельную монографию «Теория графов» автора настоящей книги. Настоящую небольшую книжку можно рассматривать как адаптацию этой научной монографии для начинающих.

Книга Оре в основной своей части вполне доступна учащимся средних классов средней школы; она может быть с успехом использована в работе школьных математических кружков. Значительную заслугу автора составляет удачный подбор упражнений — совершенно элементарных, но одновременно и достаточно интересных; мы очень рекомендуем читателю не пренебрегать этими упражнениями. В конце книги содержится небольшой список дополнительной литературы, для русского издания составленный заново. Немногочисленные подстрочные примечания принадлежат переводчику и редактору книги.

И. М. Яглом

Введение

Первая работа по теории графов, принадлежащая известному швейцарскому математику Л. Эйлеру, появилась в 1736 г. Вначале теория графов казалась довольно незначительным разделом математики, так как она имела дело в основном с математическими развлечениями и головоломками. Однако дальнейшее развитие математики и особенно ее приложений дало сильный толчок развитию теории графов. Уже в XIX столетии графы использовались при построении схем электрических цепей и молекулярных схем. В настоящее время можно указать и главы чистой математики, например теория математических отношений, в которых теория графов служит естественным аппаратом; с другой стороны, эта теория находит многочисленные применения в разнообразных практических вопросах: при установлении разного рода соответствий, при решении транспортных задач, задач о потоках в сети нефтепроводов и вообще в так называемом «программировании». Теория графов теперь применяется и в таких областях, как экономика, психология и биология. Математические развлечения и головоломки тоже остаются частью теории графов, особенно если отнести к ним знаменитую проблему четырех красок, интригующую математиков и по сей день.

ВВЕДЕНИЕ

В математике теория графов рассматривается как одна из ветвей топологии; непосредственное отношение она имеет также к алгебре и к теории чисел.

В последующем изложении мы вынуждены ограничиться лишь некоторыми простейшими вопросами теории графов; мы выбрали их таким образом, чтобы дать некоторое представление, с одной стороны, о характере исследований, которые можно проводить с помощью графов, и, с другой стороны, — о некоторых конкретных задачах, которые можно решать такими методами. К счастью, при этом можно обойтись весьма скромным математическим аппаратом, что делает учение о графах вполне доступным для начинающих.

ГЛАВА I

Что такое граф?

§ 1. Спортивные состязания

Предположим, что футбольная команда вашей школы участвует в соревнованиях и играет с командами других школ. Пусть общее число команд равно шести. Вашу команду обозначим буквой A, а другие команды — буквами B, C, D, E и F. Через несколько недель после начала соревнований окажется, что некоторые из команд уже сыграли друг с другом, например

$$\begin{array}{lll} A & \text{с} & C,\ D,\ F, \\ B & \text{с} & C,\ E,\ F, \\ C & \text{с} & A,\ B, \\ D & \text{с} & A,\ E,\ F, \\ E & \text{с} & B,\ D,\ F, \\ F & \text{с} & A,\ B,\ D,\ E. \end{array}$$

Это можно изобразить при помощи такой геометрической схемы. Каждую команду представим точкой или маленьким кружочком и соединим отрезком те пары точек, которые соответствуют командам, уже игравшим друг с другом. Тогда для данного списка проведенных игр мы получим схему, изображенную на рис. 1.

Схема такого вида называется **графом**. Она состоит из нескольких точек A, B, C, D, E, F, называемых **вершинами**, и нескольких соединяющих эти точки отрезков, таких, как AC или EB, называемых **ребрами** графа.

Из рис. 1 видно, что точки пересечения некоторых ребер графа могут не являться его вершинами; это происходит потому, что мы изобразили наш граф на

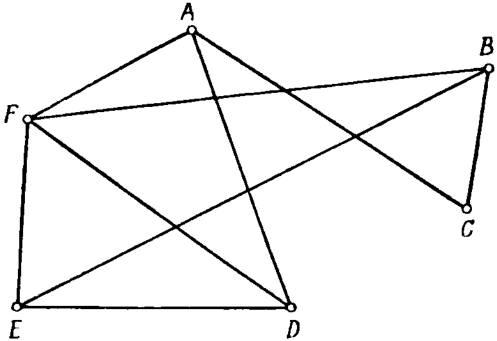


Рис. 1

плоскости. Возможно, удобнее было бы представлять себе его ребра нитями, проходящими друг над другом

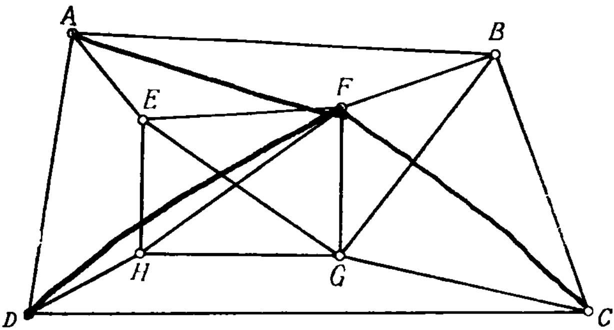


Рис. 2

в пространстве; во всяком случае, при изображении на плоскости вершины графа во избежание путаницы должны отмечаться достаточно отчетливо (например, кружочками).

Каждую совокупность игр любого турнира можно представить соответствующим графом. Наоборот, если задан некоторый граф, т. е. фигура, состоящая из точек — вершин, соединенных прямолинейными отрезками — ребрами, то его можно рассматривать как схему такого состязания. В качестве примера рассмотрим граф, изображенный на рис. 2. Его можно представлять себе как граф, соответствующий состязанию восьми команд, где команда A уже играла с командами B, E, D, команда B играла с A, F, G, C и т. д.

Упражнения

1. Начертите граф игр, сыгранных к середине сезона вашими футбольными или волейбольными командами.
2. Дайте полный список проведенных игр, соответствующий графу рис. 2.
3. Сколько ребер и сколько вершин имеют графы рис. 1 и 2?

§ 2. Нуль-граф и полный граф

Существуют некоторые специальные графы, встречающиеся во многих приложениях теории графов. Будем пока опять рассматривать граф как наглядную схему, иллюстрирующую ход спортивных состязаний. До начала сезона, пока еще никакие игры не проводились, на графе нет никаких ребер. Такой граф состоит из одних изолированных вершин, т. е. из вершин, не соединенных никакими ребрами. Граф такого вида мы будем называть нуль-графом. На рис. 3 приведены такие графы для случаев, когда число команд, или вершин, равно 1, 2, 3, 4 и 5. Эти нуль-графы обычно обозначаются символами O_1, O_2, O_3 и т. д., так что O_n — это нуль-граф с n вершинами, не имеющий ребер.

Рассмотрим другой крайний случай. Предположим, что по окончании сезона каждая команда сыграла по одному разу с каждой из остальных команд. Тогда на соответствующем графе *каждая* пара вершин будет соединена ребром. Такой граф называется полным графом. На рис. 4 изображены полные графы с числом вершин $n=1, 2, 3, 4, 5$. Мы обозначаем

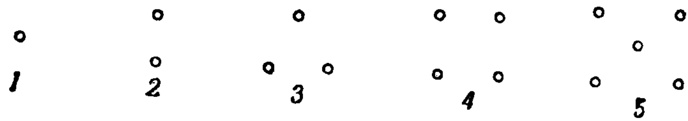


Рис. 3

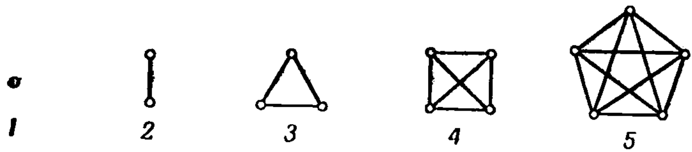


Рис. 4

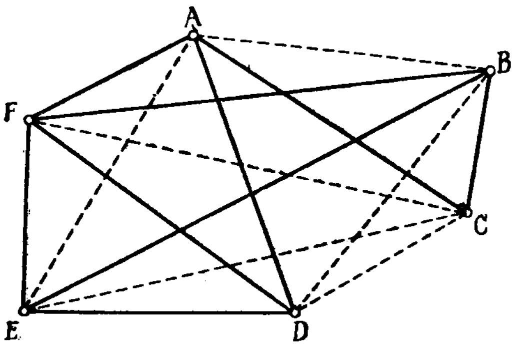


Рис. 5

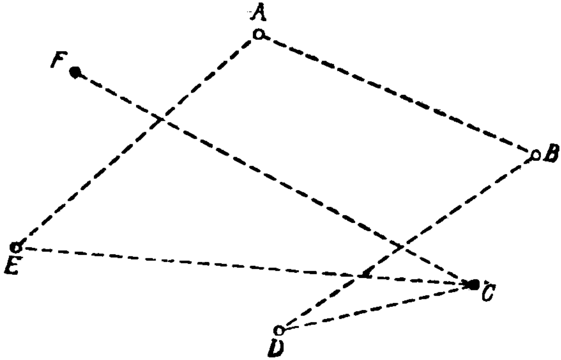


Рис. 6

эти полные графы соответственно через U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, так что граф U_n состоит из n вершин и ребер, соединяющих всевозможные пары этих вершин. Этот граф можно представлять себе как n-угольник, в котором проведены все диагонали.

Имея некоторый граф, например граф G, изображенный на рис. 1, мы всегда можем превратить его в полный граф с теми же самыми вершинами, добавив недостающие ребра (т. е. ребра, соответствующие играм, которые только еще будут сыграны). На рис. 5 мы сделали это для графа рис. 1 (еще не состоявшиеся игры изображены пунктиром).

Можно также отдельно начертить граф, соответствующий пока еще не сыгранным, будущим играм. Для графа G при этом получится граф, изображенный на рис. 6.

Этот новый граф мы называем **дополнением** графа G; принято обозначать его через $\overline{G}$. Взяв дополнение графа $\overline{G}$, мы снова получим граф G. Ребра обоих графов G и $\overline{G}$ вместе составляют полный граф с теми же вершинами.

Упражнения

1. Начертите дополнение графа, изображенного на рис. 2.
2. Чему равно число ребер полного графа U_n?

§ 3. Изоморфные графы

Заметим, что граф G (рис. 1) можно изображать по-разному.

Во-первых, совсем не обязательно изображать его ребра прямолинейными. Мы можем провести любые линии, соединяющие те же самые вершины, что и раньше. Так, граф G можно представить в виде, изображенном на рис. 7.

Во-вторых, мы можем произвольно располагать вершины на плоскости. Например, вершины графа G можно расположить так, как показано на рис. 8.

Если рассматривать три графа, изображенные на рис. 1, 7 и 8, как графы, описывающие ход спортивного турнира, то они будут содержать в точности одну и ту же информацию относительно того, какие именно команды уже играли друг с другом; в некотором

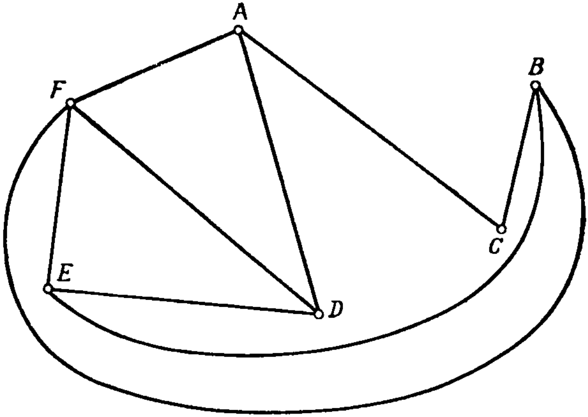


Рис. 7

смысле это *один и тот же граф*. Мы будем говорить, что два графа — обозначим их G_1 и G_2 — ***изоморфны***,

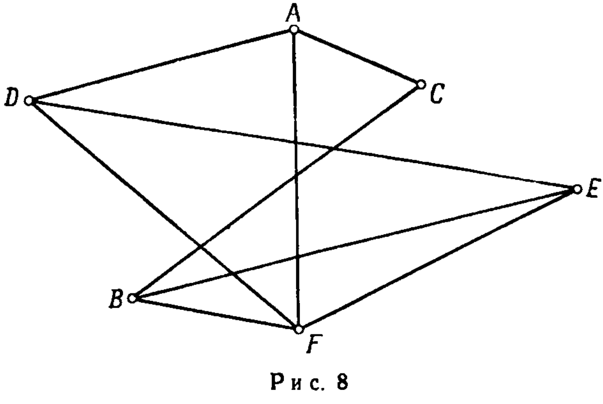


Рис. 8

если они отвечают одному и тому же списку проведенных игр. Иными словами, если графы G_1 и G_2 изоморфны, то они имеют одно и то же число вершин и для любых двух вершин графа G_1, скажем B_1 и C_1, соединенных ребром, соответствующие им вершины B_2 и C_2 графа G_2 тоже соединены ребром, и обратно.

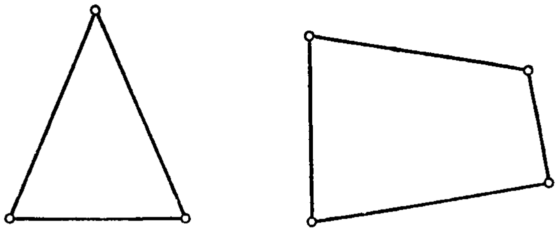


Рис. 9

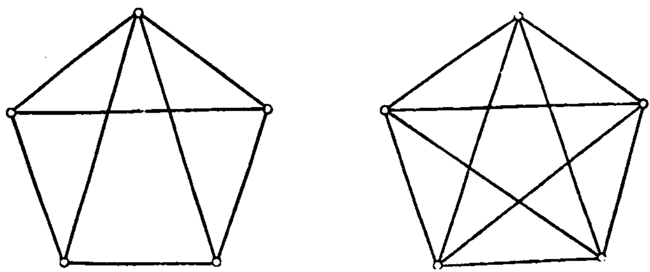


Рис. 10

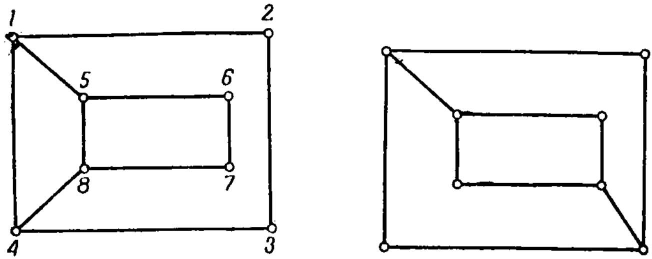


Рис. 11

Согласно этому определению, три графа на рис. 1, 7 и 8 изоморфны (т. е. имеют одно и то же строение), хотя они и выглядят по-разному. (Термин «изоморфный» часто используется в математике; он состоит из греческих слов ἴσος — равный, одинаковый и μορφή — вид, форма.)

Нередко приходится решать вопрос о том, являются ли два данных графа изоморфными. Иногда сразу ясно, что это не так. Например, графы, изображенные на рис. 9, не могут быть изоморфными, потому что они имеют неодинаковое число вершин. Не могут быть изоморфными и графы рис. 10, так как у них неодинаковое число ребер.

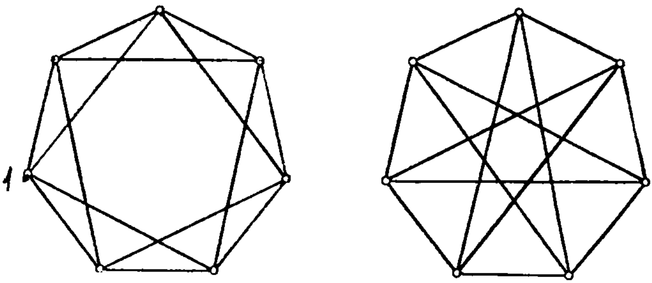


Рис. 12

Однако для того, чтобы показать, что не изоморфны графы, изображенные на рис. 11, требуется уже несколько более тонкое рассуждение. Так, можно заметить, что на первом графе имеется последовательность из восьми смежных ребер (т. е. ребер, попарно имеющих общую вершину):

$$(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,8),\ (8,7),\ (7,6),\ (6,5),\ (5,1),$$

возвращающаяся к исходной вершине, в то время как на втором графе такой последовательности нет. Значит, как бы мы ни обозначили вершины второго графа, мы не сможем для каждой пары соединенных ребром вершин одного графа указать во втором соответствующую пару вершин, тоже соединенных ребром.. (Докажите это!)

Если сразу не видно, как доказать, что два графа не изоморфны, то вопрос об их изоморфности может оказаться довольно трудным. В качестве примера рассмотрим два графа, изображенных на рис. 12; эти графы на самом деле изоморфны.

Упражнения

1. Покажите, что графы, изображенные на рис. 1, 2, 6, не изоморфны между собой.
2. Укажите еще одну причину, в силу которой два графа рис. 11 не могут быть изоморфными.
3. Обозначьте вершины двух графов рис. 12 так, чтобы изоморфность этих графов стала очевидной.

§ 4. Плоские графы

Для многих целей безразлично, как именно изображен граф, т. е. изоморфные графы, доставляющие одну и ту же информацию, могут рассматриваться как один граф. Так будет, например, в том случае, с которого мы начали изложение, — когда граф играет роль своеобразного списка уже проведенных игр. Однако в других случаях существенно то обстоятельство, что граф может быть начерчен некоторым специальным образом. Сравним два изоморфных графа, изображенные на рис. 1 и 7. На первом из них ребра пересекаются в пяти точках, не являющихся вершинами графа, на втором все точки пересечения ребер графа служат его вершинами.

Граф, который можно начертить таким образом, чтобы его ребра пересекались только в вершинах, называется *плоским графом*. Так, граф G, изображенный на рис. 1, является плоским, потому что существует изоморфный ему граф (рис. 7), все ребра которого пересекаются только в вершинах.

Плоский граф можно рассматривать как карту дорог, соединяющих между собой различные станции или деревни. Так, на карте, изображенной на рис. 13, мы видим 7 станций: A, B, ..., G, причем некоторые из них соединены друг с другом дорогами: AG, BC, FE и т. д., и обратно, каждую карту дорог можно рассматривать как плоский граф. План любого города (см., например, рис. 14) тоже является плоским

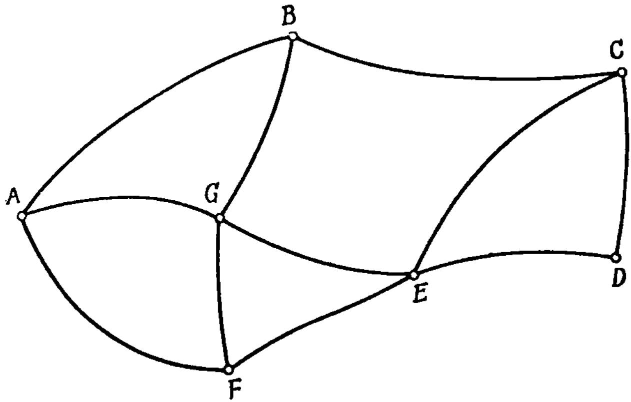


Рис. 13

графом, где улицы служат ребрами, а площади и уличные перекрестки — вершинами.

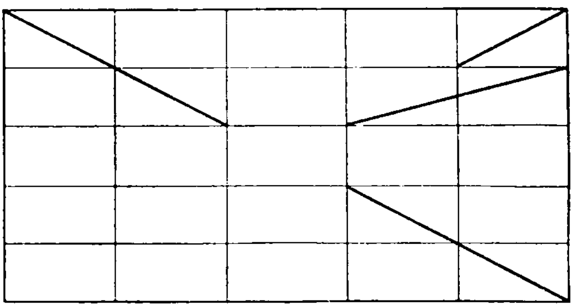


Рис. 14

Впрочем, современная техника изменила многие наши представления, и, чтобы не отстать от современных требований, мы должны признать, что и карта дорог в настоящее время уже не всегда представляется плоским графом. К сети дорог теперь часто добавляются линии, проходящие на разных уровнях, так что в месте пересечения двух дорог пассажир не может перейти с одной линии на другую (рис. 15).

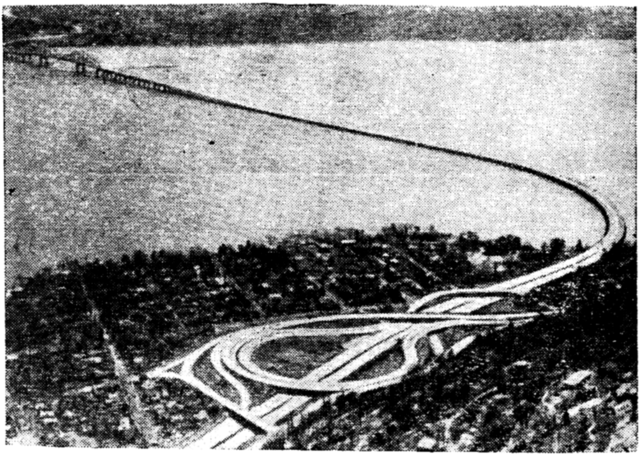


Рис. 15

Иными словами, ребра графа такой карты пересекаются в точках, которые нельзя считать вершинами графа.

Упражнения

1. Нарисуйте плоский граф, отвечающий сети дорог некоторой окрестности того места, где вы живете.
2. Сделайте то же самое, использовав план вашего или ближайшего к вам города.

§ 5. Одна задача о плоских графах

Рассмотрим теперь два примера применения графов для решения задач. В обоих случаях дело сводится к тому, чтобы выяснить, можно ли некоторый граф изобразить на плоскости так, чтобы его ребра не имели лишних точек пересечения. В качестве первого примера рассмотрим одну очень старую головоломку («Задача о трех домах и трех колодцах»).

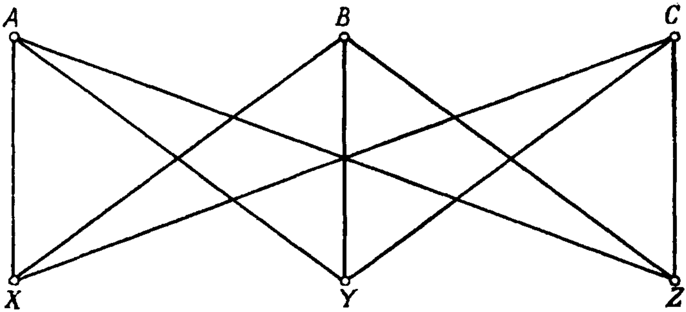


Рис. 16

На одном участке земли были построены три дома и вырыты три колодца для их обитателей. Природа

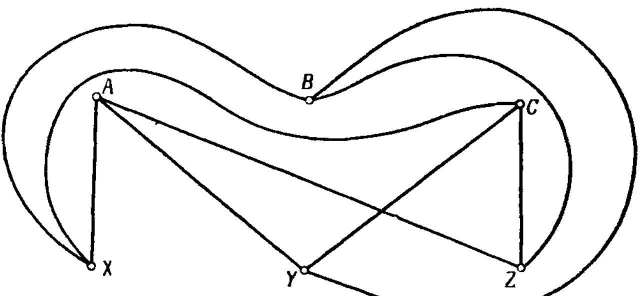


Рис. 17

страны и ее климат таковы, что колодцы часто пересыхают, поэтому важно, чтобы от каждого из домов имелся доступ к каждому из трех колодцев. Спустя некоторое время обитатели домов A, B и C серьезно поссорились друг с другом и решили проложить дорожки к трем колодцам X, Y, Z так, чтобы по пути к колодцам и обратно им не приходилось встречать друг друга.

На рис. 16 изображен граф, отвечающий естественному расположению дорожек, когда все они прямолинейны. Эти дорожки, или ребра графа, пересекаются во многих точках, отличных от точек расположения домов A, B, C и колодцев X, Y, Z. Число лишних точек пересечения можно свести к 1, если провести дорожки так, как указано на рис. 17.

Вопрос, который мы хотим поставить, состоит в следующем: является ли соответствующий граф плоским, т. е. можно ли провести дорожки так, чтобы они не пересекались нигде, кроме вершин графа A, B, C, X, Y, Z. Сколько ни пытайтесь, вы не найдете нужного решения. Однако наша неспособность решить задачу посредством проб и повторных попыток не дает еще математического доказательства того, что это вообще невозможно сделать. Строгое же доказательство основано на следующей теореме.

Теорема Жордана о кривых. *Пусть $\mathscr{K}$ — непрерывная замкнутая линия на плоскости* (она может быть

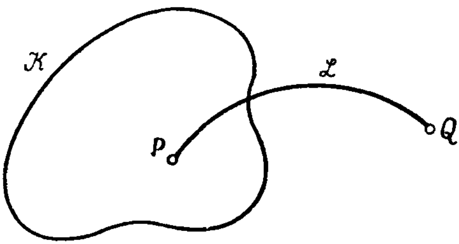


Рис. 18

многоугольником, окружностью, эллипсом или какой-либо кривой гораздо более сложного вида). *Линия $\mathscr{K}$ делит плоскость на внешнюю и внутреннюю области так, что любая непрерывная кривая $\mathscr{L}$, соединяющая произвольную точку P внутренней области с некоторой точкой Q внешней области, пересекает $\mathscr{K}$* (см. рис. 18).

Вы чувствуете, вероятно, что утверждение теоремы Жордана совершенно очевидно; интуитивные геометрические представления убеждают вас в ее справедливости. Однако доказать эту теорему совсем не просто; основная трудность заключается в точном определении понятия «кривой». Мы опустим здесь это определение, так же как и доказательство теоремы Жордана [1]). Вы можете принять эту теорему за очевидный факт.

Из теоремы Жордана вытекает тот, тоже интуитивно очевидный, факт, что если любые две точки

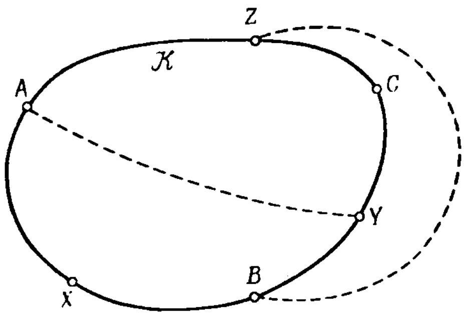


Рис. 19

замкнутой линии $\mathcal{K}$, скажем A и Y, соединить кривой AY, не имеющей с $\mathcal{K}$ общих точек, отличных от A и Y, то вся эта кривая, за исключением ее концов, лежит либо вне $\mathcal{K}$, либо внутри $\mathcal{K}$ (см. рис. 19).

---

[1]) Теорема Жордана является довольно сложной даже и в том более простом случае, когда линия $\mathcal{K}$ представляет собой многоугольник и определение ее не составляет труда. См. по этому поводу книгу: Курант Р. и Роббинс Г., Что такое математика, Гостехиздат, М.—Л., 1947, стр. 326—328 и 353—355, где проведено полное доказательство этой теоремы для случая многоугольников, а также (более сложные) книги: Александров А. Д., Выпуклые многогранники, Гостехиздат, М.—Л., 1950, стр. 69—72, и Гильберт Д., Основания геометрии, Гостехиздат, М. — Л., 1948, стр. 409—419 прибавлений редактора книги П. К. Рашевского. Относительно общего случая см. журнал «Успехи математических наук», т. 5, вып. 5, 1950, статьи: Вольперт Э. И., Элементарное доказательство теоремы Жордана, стр. 168—172, и Филиппов А. Ф., Элементарное доказательство теоремы Жордана, стр. 173—176.

Пусть теперь на замкнутой линии $\mathscr{K}$ имеются четыре точки, расположенные в порядке A, B, Y, Z, и проведены линии AY и BZ, не пересекающиеся между собой. Тогда непременно одна из них, скажем AY, лежит внутри $\mathscr{K}$, а другая (BZ) вне $\mathscr{K}$ (рис. 19). Это можно доказать с помощью теоремы Жордана, но вы можете (так же как и саму теорему Жордана) принять это без доказательства.

Пусть, наконец, на линии $\mathscr{K}$ имеется шесть точек, расположенных в порядке

$$A,\ X,\ B,\ Y,\ C,\ Z$$

(рис. 19). Тогда три соединяющие их кривые

$$AY,\ BZ,\ CX$$

не могут не пересекаться.

Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что эти три кривые должны быть расположены в двух областях — внутренней и внешней по отношению к $\mathscr{K}$; по крайней мере две из них попадут в одну и ту же область и, значит, обязательно пересекутся.

Это рассуждение непосредственно применимо к нашей задаче о трех враждующих соседях и их колодцах. Предположим, что граф рис. 16 плоский. Начертив непересекающиеся ребра

$$AX,\ XB,\ BY,\ YC,\ CZ,\ ZA$$

этого графа, мы получим на плоскости замкнутую кривую. Но тогда, как мы только что объяснили, ребра

$$AY,\ BZ,\ CX$$

уже нельзя будет провести так, чтобы они не пересекались[1].

Этот пример, иллюстрирующий понятие графа, вряд ли покажется вам особенно важным. Однако никогда не следует пренебрегать подобными головоломками. Нередко они оказывались теми зернами, из которых впоследствии вырастают большие математические теории. Можно напомнить также, что обилие

[1]) Другое доказательство дано в подстрочном примечании на стр. 136.

символов и формул не всегда служит признаком глубины математической идеи.

Укажем еще одно приложение плоских графов к важной задаче практики. В дополнение к перечисленным выше представлениям графа укажем еще, что его можно рассматривать как схему электрической сети, где ребрами служат провода, соединяющие различные пункты. Один из наиболее эффективных способов массового производства стандартных электрических схем для радио- и телевизионных приемников состоит в том, что схема наносится печатным способом в виде металлической фольги на бумажную или пластмассовую основу. Однако для того, чтобы это было осуществимо, граф рассматриваемой сети проводов должен иметь плоское представление; ведь пересечение двух ребер привело бы к короткому замыканию в системе.

Упражнения

Каждый из четырех соседей соединил свой дом с тремя другими домами при помощи непересекающихся дорожек. Пятый человек построил свой дом поблизости.

1. Докажите, что соединить его дом непересекающимися дорожками со всеми остальными домами невозможно.
2. Покажите, что с тремя домами соединить его дом можно.

§ 6. Число ребер графа

Когда мы ввели понятие графа как своего рода списка уже проведенных игр, мы предполагали, что каждые две команды играют друг с другом, самое большее, по одному разу. Может, однако, случиться, что каждые две команды играют между собой и по нескольку игр, как это бывает, например, в бейсболе[1]). Мы можем отразить это на графе, соединяя соответствующие пары вершин *несколькими* ребрами (рис. 20, *а*). В этом случае говорят, что граф имеет кратные ребра.

[1]) Аналогично этому проводится, скажем, первенство СССР по футболу, где каждая команда играет с другой два раза.

Вместо того чтобы на самом деле проводить несколько ребер между одними и теми же вершинами A и B, можно провести всего одно ребро, приписав ему **кратность**, показывающую сколько раз надо считать это ребро (рис. 20, *б*). На карте дорог, конечно, проводят каждую дорогу в отдельности.

В каждой неизолированной вершине A некоторого графа G имеется одно или несколько ребер, для которых A служит концом; все эти ребра называются

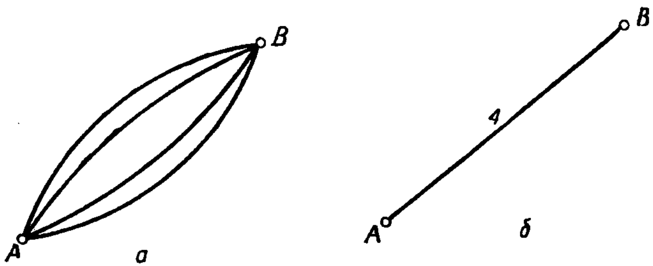


Рис. 20

инцидентными вершине A. Число таких ребер обычно обозначают через $\rho(A)$ и называют **степенью вершины** A. Так, для графа, изображенного на рис. 1, степени вершин таковы:

$$\rho(A)=\rho(B)=\rho(D)=\rho(E)=3; \quad \rho(F)=4, \quad \rho(C)=2.$$

Довольно часто приходится находить *число ребер* графа. Их можно, конечно, пересчитать непосредственно, но проще сосчитать число ребер в каждой вершине отдельно и сложить все эти числа. При этом каждое ребро будет сосчитано дважды — соответственно двум вершинам, которые оно соединяет, поэтому общее число ребер графа будет равно половине этой суммы. Так, например, число ребер графа рис. 1 равно

$$\frac{1}{2}[\rho(A)+\rho(B)+\rho(C)+\rho(D)+\rho(E)+\rho(F)]=9,$$

что можно проверить и непосредственно.

Чтобы сформулировать соответствующий результат в общем виде, предположим, что некоторый граф G имеет n вершин

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

степени которых соответственно равны

$$\rho(A_1), \ \rho(A_2), \ \ldots, \ \rho(A_n).$$

Тогда число N ребер графа G, как показывает наше рассуждение, равно

$$N = \frac{1}{2}[\rho(A_1) + \rho(A_2) + \ldots + \rho(A_n)]. \qquad (1)$$

Из этой формулы видно, что для любого графа сумма степеней всех его вершин

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(A_i) = \rho(A_1) + \rho(A_2) + \ldots + \rho(A_n) \qquad (2)$$

является числом *четным,* поскольку она равна удвоенному числу ребер.

На графе можно различать два типа вершин: *нечетные вершины* A', степени $\rho(A')$ которых нечетны, и *четные вершины* A'', имеющие четные степени $\rho(A'')$. Так, в случае графа рис. 1 вершины A, B, D, E являются нечетными, а вершины C и F четны. Если вершины расположить в алфавитном порядке, то сумма (2) будет равна

$$3+3+2+3+3+4=18.$$

Эта сумма четна, так как число ее нечетных слагаемых равно четырем. Вообще, для того чтобы узнать, будет ли сумма целых чисел четной или нечетной, мы можем не рассматривать четные слагаемые; сумма будет четной или нечетной в зависимости от четности или нечетности числа ее нечетных слагаемых. А так как сумма (2) всегда является четной, мы приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Число нечетных вершин любого графа четно.*

Это утверждение справедливо и в случае, когда граф вовсе не содержит нечетных вершин, так как 0 является числом четным.

§ 6. ЧИСЛО РЕБЕР ГРАФА

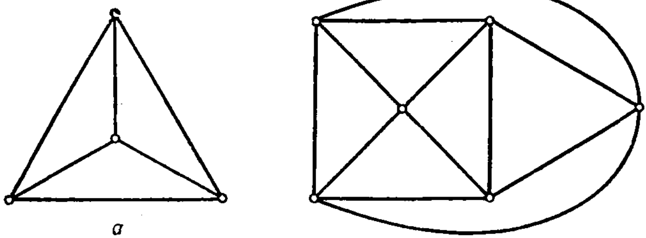
Бывают графы, у которых степени всех вершин одинаковы:

$$\rho(A_1)=\rho(A_2)= \ldots =\rho(A_n)=r.$$

Такой граф называется **однородным графом степени** r; в силу формулы (1) число его ребер равно

$$N=\frac{1}{2}nr,$$

где n — число вершин этого графа. Графы, изображенные на рис. 21, *а, б,* являются однородными; степени их равны трем и четырем.



а *б*

Рис. 21

В полном графе U_n с n вершинами из каждой вершины выходит $n-1$ ребер, ведущих к каждой из остальных $n-1$ вершин; таким образом, U_n является однородным графом степени $n-1$. Нуль-граф O_n тоже является однородным по той простой причине, что для каждой его вершины $\rho(A)=0$.

Упражнения

1 Проверьте формулу (1) для графов рис. 2 и 6.

2 Проверьте, что на каждом из этих графов число нечетных вершин четно.

ГЛАВА II

Связные графы

§ 1. Компоненты

Предположим снова, что мы имеем граф G, не обязательно плоский, который мы сейчас будем представлять себе как карту дорог. Мы начнем наш путь по графу G из некоторой вершины A, следуя сначала вдоль ребра, или дороги, AB до некоторой станции B,

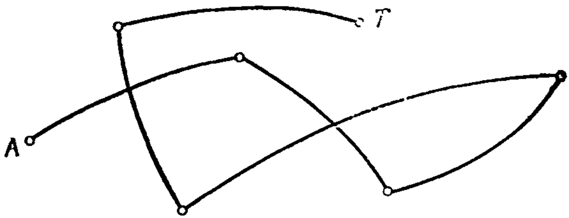


Рис. 22

затем от B к C по другой соединяющей их дороге BC и т. д. Мы не будем налагать на это странствование никаких ограничений, позволяя проходить через одну и ту же вершину несколько раз и даже использовать по нескольку раз одни и те же дороги.

Если вершина T графа такова, что мы можем дойти до нее таким образом, то говорят, что T **связана** с A в нашем графе. Это означает, что имеются дороги, ведущие из A в T. Если при этом мы пройдем какую-либо вершину два или большее число раз, то мы сможем исключить из нашего пути некоторую замкнутую линию и пройти от A к T более коротким путем. Линия на графе, не проходящая ни через одну из вершин более одного раза, называется **дугой**; так, путь, изображенный на рис. 22, представляет собой дугу. Если путь, быть может проходящий даже по нескольку раз через одни и те же вершины, не содержит одних и тех же ребер, то он называется **цепью** (рис. 23). Дуга представляет собой цепь, все вершины которой различны, ее называют также **элементарной цепью**. Если цепь замкнута, т. е. начинается и оканчивается в одной и той же вершине,

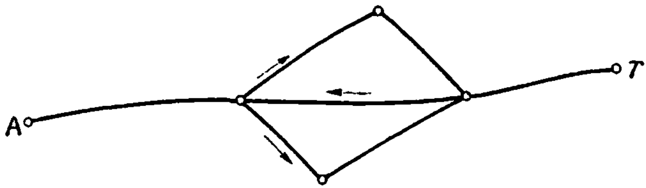


Рис. 23

то она называется **циклом**. Цикл, все вершины которого различны, называется **простым**, или **элементарным**, циклом. Таким образом, цикл может пересекать самого себя в отдельных вершинах, в то время как при обходе элементарного цикла только начальная вершина снова появляется в качестве конечной точки.

Поясним эти понятия на графе рис. 1. Последовательность ребер

$$AFDEFB$$

представляет собой цепь; последовательность

$$ADFEB$$

— дугу, или элементарную цепь. Последовательность

$$AFEDFBCA$$

является циклом, а

$$ACBFEDA$$

— простым, или элементарным, циклом.

Если каждую вершину графа можно соединить с любой другой его вершиной некоторой цепью, то граф называется **связным**. Все рассмотренные выше графы, за исключением нуль-графов, были связными. У несвязного графа не все вершины можно соединить цепями с данной вершиной A. Те вершины, которые можно соединить с вершиной A, и все инцидентные им ребра образуют **связную компоненту** вершины A. Таким образом, весь граф распадается на связные компоненты, не соединенные между собой ни ребрами, ни цепями.

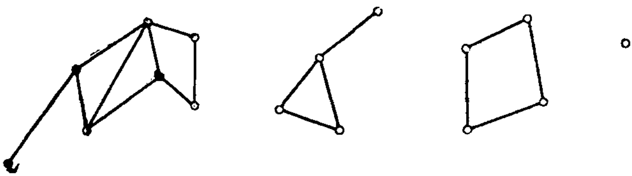


Рис. 24

На рис. 24 изображен граф, состоящий из четырех связных компонент, одна из которых представляет собой изолированную вершину. Этот граф может соответствовать, например, карте дорог группы островов, где каждый остров имеет связную систему дорог. В теории графов обычно предполагают, что рассматриваемый граф является связным, так как иначе можно отдельно изучать свойства каждой из его связных компонент.

§ 2. Задача о кёнигсбергских мостах

Теория графов является одной из немногих областей математики, дата рождения которых может быть указана. Первая работа о графах, принадлежащая швейцарскому математику Леонарду Эйлеру (1707—1783), появилась в 1736 г. в публикациях Петербургской Академии наук. Эйлер является одной из колоритнейших фигур в истории науки. В 1727 г., когда ему едва исполнилось 20 лет, он был приглашен в Российскую Академию наук. Он уже изучил теологию, восточные языки и медицину, прежде чем целиком посвятил себя занятиям математикой, физикой и астрономией. Он добился блестящих успехов во всех этих областях и написал огромное количество работ. К тому времени, когда он написал работу о графах, он потерял зрение на один глаз, а к старости совершенно ослеп, но даже это не остановило потока

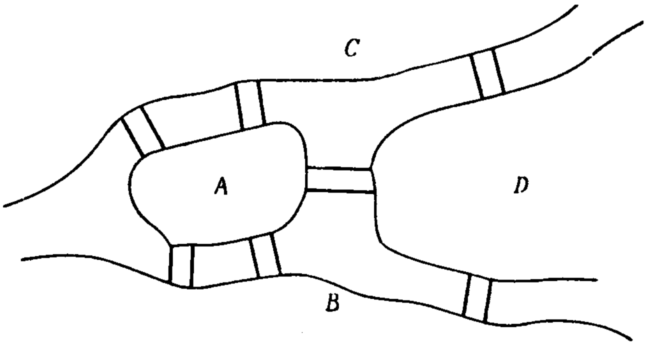


Рис. 25

его работ. Уже довольно давно швейцарские математики, в частности математики его родного города Базеля, начали издавать полное собрание сочинений Эйлера, из которого пока опубликовано 50 томов. Первоначально предполагалось, что общее число томов будет близко к 100, но теперь уже думают, что оно окажется ближе к 200.

Эйлер начал свою работу о графах с рассмотрения одной головоломки — так называемой «задачи о кёнигсбергских мостах». Город Кёнигсберг (ныне Калининград) расположен на берегах реки Прегель (Преголи) и двух островах. Различные части города были соединены семью мостами. По воскресеньям горожане совершали прогулки по городу. Вопрос заключался в том, можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя в точности один раз по каждому мосту?

Схематическая карта Кёнигсберга изображена на рис. 25. Четыре части города обозначены буквами A, B, C и D. Так как нас интересуют только переходы по мостам, мы можем считать A, B, C, D вершинами некоторого графа, ребра которого отвечают соответствующим мостам. Этот граф изображен на рис. 26.

Эйлер показал, что этот граф не представляет собой единого цикла; иными словами, с какой бы вершины мы ни начали обход, мы не сможем обойти весь граф и вернуться обратно, не проходя никакого ребра дважды. Ведь если бы такой цикл существовал, то в каждой вершине графа было бы столько же входящих в нее ребер, сколько и выходящих из нее, т. е. в каждой вершине графа было бы четное число ребер. Однако это условие очевидно не выполнено для графа, представляющего карту Кёнигсберга.

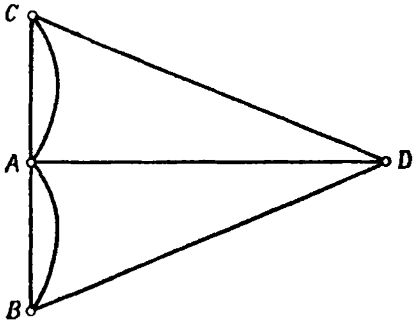


Рис. 26

§ 3. Эйлеровы графы

Изложив решение задачи о кёнигсбергских мостах, Эйлер в своей работе перешел к следующей общей проблеме теории графов: *на каких графах можно найти цикл $\mathscr{P}$, содержащий все ребра графа, причем каждое ребро в точности по одному разу?* Такой цикл мы будем называть *эйлеровой линией*, а граф, обладающий эйлеровой линией, — *эйлеровым графом*.

Для того чтобы граф имел эйлерову линию, он должен быть связным. Как и в задаче о кёнигсбергских мостах, ясно, что каждая эйлерова линия должна входить в каждую вершину и выходить из нее одно и то же число раз, т. е. степени всех вершин графа должны быть четными. Мы получили два необходимых условия для того, чтобы на графе имелась эйлерова линия, — связность и четность степеней всех его вершин.

Эйлер доказал, что эти условия являются также и достаточными.

Теорема 1. *Связный граф, степени всех вершин которого четны, обладает эйлеровой линией.*

Доказательство. Предположим, что мы начинаем цепь $\mathfrak{Z}$ из некоторой вершины A и продолжаем ее настолько далеко, насколько это возможно, проходя каждый раз по ребру, еще не пройденному ранее. Ввиду конечности числа ребер этот процесс когда-нибудь закончится. Но так как в каждой вершине — четное число ребер, то из каждой вершины, за исключением начальной, будет возможен и выход. Следовательно, цепь $\mathfrak{Z}$ должна кончаться в вершине A (см. рис. 27).

Если $\mathfrak{Z}$ проходит через все вершины графа, то мы уже получили требуемую эйлерову линию. Если это не так, найдется вершина B, принадлежащая $\mathfrak{Z}$ и инцидентная некоторому ребру, не входящему в цепь $\mathfrak{Z}$. Так как $\mathfrak{Z}$ имеет в вершине B четное число ребер, то число ребер, выходящих из B и не принадлежащих $\mathfrak{Z}$, также четно; это верно и относительно всех других вершин.

Теперь мы начнем новую цепь $\mathscr{R}$ из вершины B, используя на этот раз только ребра, не принадлежащие $\mathfrak{Z}$. Ясно, что эта цепь должна оканчиваться в точке B. А тогда мы можем получить больший цикл, начинающийся в A: сначала следуем по $\mathfrak{Z}$ от A к B, затем пройдем по циклу $\mathscr{R}$ и, вернувшись в B, пройдем оставшуюся часть $\mathfrak{Z}$ обратно к точке A (см. рис. 27). Если мы еще не обошли весь граф, мы можем снова расширить этот путь — и так до тех пор, пока мы не получим требуемую эйлерову линию.

Задачи на проведение эйлеровых линий, т. е. задачи о воспроизведении изображенных линий без повторений и без отрыва карандаша от бумаги, являются излюбленной темой математических развлечений.

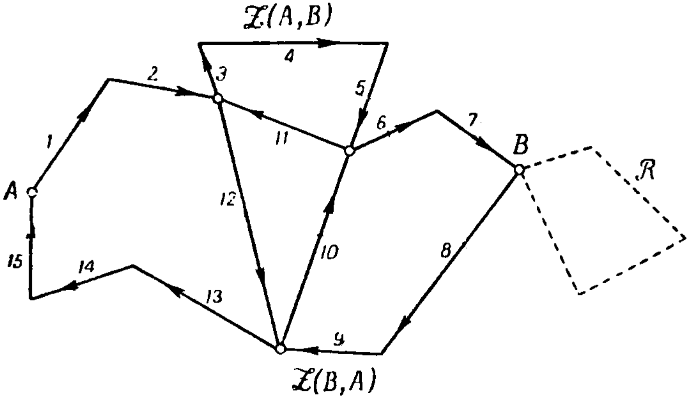


Рис. 27

До сих пор мы говорили о цикле, проходящем по всем ребрам графа в точности по одному разу; можно поставить задачу и об отыскании цепи, обладающей тем же свойством. Предположим, что на графе имеется цепь $\mathfrak{Z}(A, B)$, начинающаяся в вершине A, оканчивающаяся в некоторой другой вершине B и проходящая по всем ребрам в точности по одному разу. Эта цепь, начинаясь в вершине A, возможно, в дальнейшем снова заходит в A, и даже не один раз. Если эта цепь не оканчивается в A, то вершина A должна быть нечетной. По аналогичной причине нечетной будет и вершина B, в то время как все остальные вершины графа четны. Это приводит нас к следующей теореме.

Теорема 2. *Для того чтобы на связном графе имелась цепь $\mathfrak{Z}(A, B)$, содержащая все его ребра в точности по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы A и B были единственными нечетными вершинами этого графа.*

Для доказательства достаточно добавить к графу новое ребро AB; тогда все его вершины станут четными. Новый граф, согласно предыдущей теореме, обладает некоторой эйлеровой линией $\mathscr{P}$; если ребро AB удалить из $\mathscr{P}$, останется искомая цепь $\mathfrak{Z}(A, B)$. В качестве примера можно указать цепь $FCDBAEC$ графа, изображенного на рис. 6. Этот граф имеет в точности две нечетные вершины F и C.

Математики всегда пытаются обобщать найденные результаты. Попытаемся и мы определить для произвольного графа наименьшее число цепей, таких, что никакие две из них не имеют общих ребер и все они вместе покрывают весь граф. Ясно, что если на графе имеется такое семейство цепей, то каждая нечетная вершина должна быть либо начальной, либо конечной точкой по крайней мере одной из них, иначе эта вершина была бы четной. Как мы видели в гл. I, число нечетных вершин графа четно, скажем равно $2k$. Значит, каждое семейство покрывающих граф цепей $\mathfrak{Z}$ должно состоять по меньшей мере из k цепей. Мы покажем теперь, что существование $2k$ нечетных вершин является и достаточным условием существования k таких цепей.

Теорема 3. *На любом связном графе с $2k$ нечетными вершинами имеется семейство из k цепей, которые в совокупности содержат все ребра графа в точности по одному разу.*

Доказательство. Обозначим нечетные вершины графа, взятые в некотором порядке, через

$$A_1, A_2, \ldots, A_k; \; B_1, B_2, \ldots, B_k.$$

Если мы добавим к нашему графу k ребер

$$A_1B_1, \quad A_2B_2, \quad \ldots, \quad A_kB_k,$$

то все его вершины станут четными и на нем найдется эйлерова линия $\mathscr{P}$. При удалении добавленных ребер линия $\mathscr{P}$ распадется на k отдельных цепей, содержащих все ребра графа.

В качестве примера возьмем граф, изображенный на рис. 1. Он имеет четыре нечетные вершины A, B, D, E и покрывается двумя цепями

$$EBFA, \quad BCADFED.$$

Упражнения

1. Определите, сколько цепей необходимо для покрытия каждого из графов, изображенных на рис. 28.

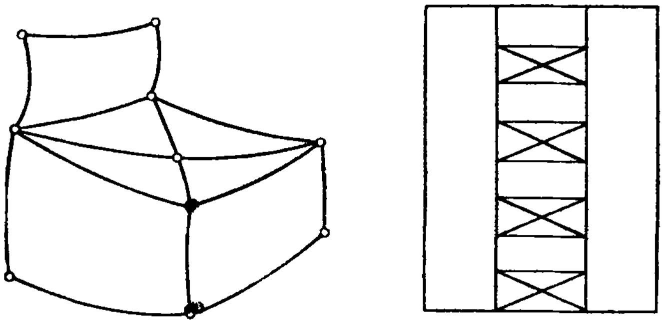


Рис. 28

2. Сделайте то же самое для всех графов, рассмотренных выше.
3. Для полных графов с четырьмя и пятью вершинами найдите покрывающие их цепи. Попытайтесь обобщить полученные результаты.

§ 4. Отыскание правильного пути

Эйлеровым графом должен был бы быть и план любой выставки: вдоль ее помещений можно было бы тогда расставить знаки, показывающие, как именно посетители должны двигаться, чтобы осмотреть каждый экспонат в точности по одному разу.

Но предположим, что, как это обычно бывает, экспонаты расположены по обеим сторонам всех проходящих по территории выставки путей. Оказывается, что тогда, каков бы ни был соответствующий граф (если только он является связным), можно провести посетителя таким образом, чтобы каждый путь был пройден им дважды — по одному разу в каждом направлении.

Для доказательства мы дадим общее правило построения цепи, проходящей вдоль всех ребер графа в точности по одному разу в каждом направлении. Мы начнем эту цепь из произвольной вершины A_0 и пойдем вдоль некоторого ребра $E_0 = (A_0, A_1)$, отметив это ребро маленькой стрелкой, поставленной в точке A_1 и указывающей выбранное нами направление. Затем перейдем последовательно к другим вершинам. Одни и те же вершины можно посещать и по нескольку раз. Каждый раз, попадая в какую-то вершину, мы будем ставить на соответствующем ребре стрелку, указывающую направление прибытия. Кроме того, попадая в какую-то вершину впервые, мы как-нибудь особо отметим входящее ребро, так чтобы потом его можно было отличить от остальных.

Выходя из вершины, мы всегда будем выбирать еще неиспользованное направление: либо ребро, по которому мы совсем не проходили, либо ребро, отмеченное стрелкой, указывающей на то, что мы по нему прибыли. При этом условимся, что только тогда, когда у нас нет выбора, мы используем для выхода ребро, по которому впервые пришли в эту вершину.

Мы продолжаем этот извилистый путь до тех пор, пока это вообще возможно. В каждой вершине имеется одинаковое число возможностей для входа и для выхода. Поэтому процесс может окончиться только в начальной вершине A_0. Остается проверить, что во всех вершинах все ребра будут пройдены в обоих направлениях.

В точке A_0 это ясно — все выходящие ребра здесь будут использованы, так как в противном случае мы могли бы двигаться дальше, поэтому и все входящие ребра тоже будут использованы, так как их число равно числу выходящих ребер. В частности, ребро $\mathscr{E}_0 = (A_0, A_1)$ будет пройдено в обоих направлениях. Но это означает, что все ребра, инцидентные A_1, тоже будут пройдены в обоих направлениях, так как первое входящее в A_1 ребро A_0A_1, по условию, должно использоваться в качестве выходящего лишь в последнюю очередь. То же самое рассуждение применимо и к следующему ребру $\mathscr{E}_1 = (A_1, A_2)$ и к следующей вершине A_2 и т. д. Следовательно, во всех вершинах, которые будут достигнуты, все ребра окажутся пройденными в обоих направлениях. Поскольку наш граф является связным, это означает, что он будет пройден весь целиком.

Этот способ обходить все ребра графа можно использовать для многих целей, например для отыскания пути, позволяющего выбраться из лабиринта, или, скажем, из разветвленной пещеры, если вы в ней случайно заблудились.

Упражнения

1. Примените изложенный здесь прием к графам, рассмотренным в § 1, гл. I.

§ 5. Гамильтоновы линии

В 1859 г. известный ирландский математик сэр Уильям Роуэн Гамильтон выпустил в продажу своеобразную головоломку. Ее основной частью был правильный додекаэдр, сделанный из дерева (рис. 29). Это один из так называемых *правильных многогранников*: его гранями служат 12 правильных пятиугольников, причем в каждой из 20 его вершин сходится по три ребра.

Каждая вершина гамильтонова додекаэдра была помечена названием одного из крупных городов — Брюссель, Кантон, Дели, Франкфурт и т. д. Задача состояла в нахождении пути вдоль ребер додекаэдра, проходящего через каждый город в точности по одному разу; чтобы сделать задачу более интересной, порядок прохождения нескольких первых городов устанавливался заранее. Для того чтобы легче было запомнить, какие переходы уже сделаны, в каждую вершину додекаэдра был вколот гвоздь с большой шляпкой, так что вокруг этих гвоздей могла виться веревка, указывающая пройденный путь. Однако такой додекаэдр был слишком громоздким, и Гамильтон предложил другой вариант своей игры, где многогранник заменялся плоским графом, изоморфным графу, образованному ребрами додекаэдра (рис. 30).

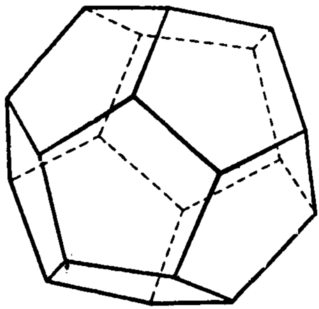


Рис. 29

По-видимому, эта задача о путешествии по додекаэдру не имела сколько-нибудь широкого успеха, но математики сохранили память об этой головоломке: **гамильтоновой линией** на графе и сейчас называется цикл, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу. Он не покрывает, вообще говоря, всех ребер: ведь в каждой вершине он проходит в точности по двум ребрам. Цикл, изображенный на рис. 30, является гамильтоновой линией для додекаэдра.

Как мы видим, имеется известная аналогия между эйлеровыми и гамильтоновыми линиями. Первая проходит один раз по каждому ребру, вторая — через каждую вершину. Несмотря на такое сходство, это задачи совершенно различной степени трудности. Для эйлерова графа достаточно проверить, являются ли все его вершины четными. Для гамильтоновых линий до сих пор не найдено еще такого общего критерия, что, конечно, достойно сожаления, так как во многих вопросах теории графов важно, существуют ли на определенных графах гамильтоновы линии.

«Задача о странствующем торговце» напоминает задачу о разыскании гамильтоновых линий — и снова мы не знаем никакого общего метода ее решения. Предположим, что странствующий торговец, прежде

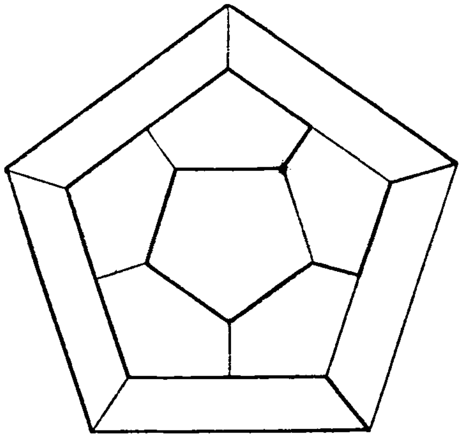


Рис. 30

чем вернуться домой, должен посетить несколько городов. Естественно, он заинтересован в том, чтобы сделать это как можно быстрее, или же в том, чтобы сделать это с наименьшими затратами. Всегда можно, конечно, решить эту задачу посредством последовательных испытаний, находя необходимое время, расстояние или стоимость для различных возможных порядков обхода городов. Однако для большого числа городов это становится почти невозможным. Тем не менее для некоторых достаточно громоздких примеров это сосчитано. Так, например, найдена кратчайшая циклическая аэролиния, проходящая по всем главным городам Соединенных Штатов.

Упражнения

1. Имеются ли гамильтоновы линии на графах, изображенных на рис. 1 и 2.
2. Торговец, живущий в городе A_1, собирается посетить города A_2, A_3, A_4. Расстояния между городами таковы:

$$A_1A_2=120,\quad A_1A_3=140,\quad A_1A_4=180,$$
$$A_2A_3=70,\quad A_2A_4=100,\quad A_3A_4=110.$$

Найти кратчайший циклический путь из A_1, проходящий через три других города.

§ 6. Головоломки и графы

В предыдущем параграфе мы занимались отысканием на графе пути из одного места в другое. Такую задачу можно рассматривать как род игры, и хотя это кажется совершенно наивным развлечением, на самом деле в этом и состоит главное содержание многих головоломок и некоторых игр.

Воспользуемся очень старой «задачей о перевозчике» для того, чтобы показать, что именно мы имеем в виду. Перевозчику (*П*) было поручено перевезти через реку волка (*В*), козу (*К*) и мешок капусты (*к*). Его маленькая лодка за один раз могла перевезти только что-нибудь одно. Кроме того, нельзя было оставлять волка наедине с козой или козу — с капустой. Как он должен был поступить?

Мы рассмотрим все возможные здесь случаи. В первый рейс, очевидно, можно взять только козу: при этом группа *П, В, К, к* в исходной точке заменяется группой *В, к*.

Затем перевозчик возвращается назад один; мы получаем *П, В, к*. Во второй рейс он может перевезти либо *В*, либо *к*, оставляя соответственно *к* или *В*. В обоих случаях он должен перевезти *К* обратно, и в исходной точке окажутся *П, К, В* или *П, К, к*, что допустимо. В следующую поездку он перевозит *В* (или *к*), оставляя только *К*. Наконец, он возвращается один и перевозит *К*.

Таким образом, в этом предельно простом случае допустимы лишь перемещения, указанные на рис. 31. Это показывает, что решение может быть получено двумя способами; каждый из них определяется некоторой цепью, соединяющей начальное положение *П*, *В*, *К*, *к* с конечным положением «пусто».

Совершенно аналогична этой и задача «о трех ревнивых мужьях»: три супружеские пары в воскресенье подошли к реке, где они нашли маленькую лодку,

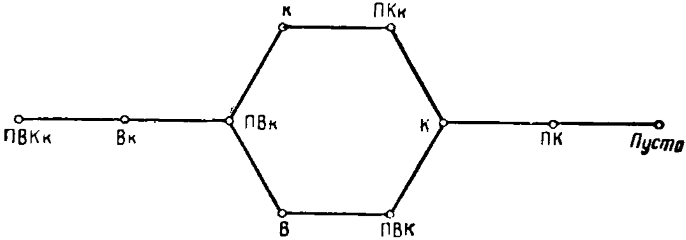


Рис. 31

которая не может поднять более двух человек одновременно. Переправа осложняется тем обстоятельством, что все мужья очень ревнивы и ни один из них не может допустить, чтобы его жена оставалась без него в компании, где есть какой-нибудь другой мужчина.

Мы предоставляем читателю начертить граф допустимых перемещений и показать, как тут может быть осуществлена переправа.

Как мы видели на предыдущих примерах, граф можно представлять себе и как некоторую игру. Вершины его являются различными положениями в этой игре, а ребра соответствуют движениям (ходам), допускаемым правилами игры. Обычно задача состоит в том, чтобы установить возможность прохождения вдоль ребер графа от одного заданного положения к другому. На языке теории графов эту задачу можно сформулировать так: принадлежат ли два данных положения одной и той же связной компоненте графа?

63	22	15	40	1	42	59	18
14	39	64	21	60	17	2	43
37	62	23	16	41	4	19	58
24	13	38	61	20	57	44	3
11	36	25	52	29	46	5	56
26	51	12	33	8	55	30	45
35	10	49	28	53	32	47	6
50	27	34	9	48	7	54	31

Рис. 32

2	3	4	3	2
3	4	6	4	3
4	6	8	6	4
3	4	6	4	3
2	3	4	3	2

Рис. 33

В качестве следующего простого примера рассмотрим игру, состоящую в перемещении шахматного коня по доске согласно обычным правилам. Так как на шахматной доске 64 клетки, соответствующий граф имеет 64 вершины. Нетрудно видеть, что конем можно достичь любого поля из любого начального положения, так что граф этой игры является связным.

В некоторых из наиболее ранних рукописей о шахматах встречается следующий вопрос: можно ли пройти конем из некоторого произвольного начального положения по всей доске и вернуться в исходное положение так, чтобы побывать на каждом поле в точности по одному разу? Это очевидно равносильно задаче о нахождении на нашем графе гамильтоновой линии. Существует много решений этой задачи. Одно из них представлено на рис. 32.

На шахматной доске имеется большое число допустимых движений коня. Можно поставить вопрос о том, существует ли цикл, содержащий все эти перемещения в точности по одному разу. Это соответствует построению эйлеровой линии на нашем графе. Согласно общему результату, для решения поставленного вопроса надо выяснить, являются ли степени всех вершин графа четными. На рис. 33 для каждого поля указано число возможных ходов коня с этого поля, т. е. степени всех вершин соответствующего графа. Мы видим, что имеется 8 полей нечетной степени; значит, этот граф не имеет эйлеровой линии.

Упражнения

1. Сколько ходов коня возможно на шахматной доске?
2. Решите соответствующие задачи для короля.
3. Проверьте, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце на рис. 32 одна и та же и равна 260.

ГЛАВА III

Деревья

§ 1. Деревья и леса

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов; такой граф, в частности, не имеет и кратных ребер. Из определения дерева вытекает также, что для каждой пары его вершин существует

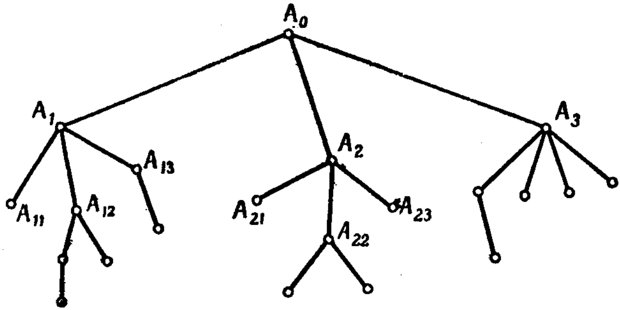


Рис. 34

единственная соединяющая их цепь. Если граф, вообще говоря не связный, не содержит циклов, то каждая его связная компонента будет деревом; пользуясь терминологией, принятой в ботанике, такой граф можно назвать **лесом**.

Для того чтобы построить дерево, выберем какую-нибудь вершину A_0. Из A_0 проведем ребра в соседние вершины A_1, $A_2, \ldots$, из них проведем ребра к их соседям A_{11}, A_{12}, ..., A_{21}, A_{22}, ... и т. д., как показано на рис. 34. Первоначально выбранная вершина A_0 называется **корнем** дерева; каждая вершина дерева может служить его корнем.

Поскольку на дереве не имеется циклов, различные цепи (или ветви), выходящие из A_0, будут изолированы друг от друга, как ветви настоящего дерева. Каждая ветвь такого графа должна иметь *последнее*, или *конечное, ребро с конечной вершиной*, из которой уже не выходит ни одного нового ребра.

Согласно этому замечанию, дерево можно построить, последовательно добавляя ребра в его вершинах. Это дает возможность сосчитать число ребер дерева. Простейшее дерево имеет только одно ребро; точнее говоря, оно состоит из двух вершин и одного ребра. Каждый раз, когда мы добавляем еще одно ребро в конце ветви, прибавляется также и вершина, следовательно, справедлива

Теорема 1. *Дерево с n вершинами имеет $n—1$ ребер.*

Вместо одного дерева рассмотрим теперь лес, состоящий из k связных компонент, каждая из кото-

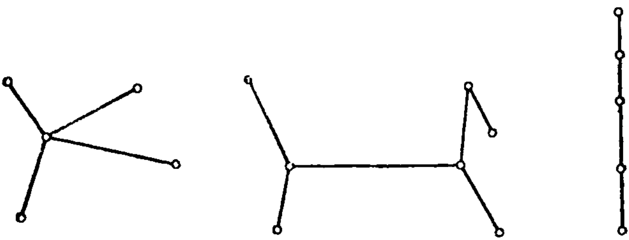


Рис. 35

рых является деревом (рис. 35). Для каждой из компонент число ребер на единицу меньше числа вершин. Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Лес, состоящий из k компонент и имеющий n вершин, содержит $n — k$ ребер.*

Деревья имеют многочисленные применения. Здесь мы упомянем лишь, что каждый процесс сортировки может быть представлен в виде некоторого дерева. Так, например, рис. 34 можно представлять себе как описание процесса сортировки почты. Первоначальная пачка писем обозначена A_0. Почта внутри страны может быть обозначена через A_1, почта в Европу — через A_2, почта на Дальний Восток — через A_3 и т. д. Местная почта A_1 делится на восточную, западную, центральную, почта в Европу A_2 делится по странам и т. д.

Процесс сортировки перфокарт может быть представлен таким же графом, только здесь дерево обычно имеет вполне определенный вид, так как отверстия

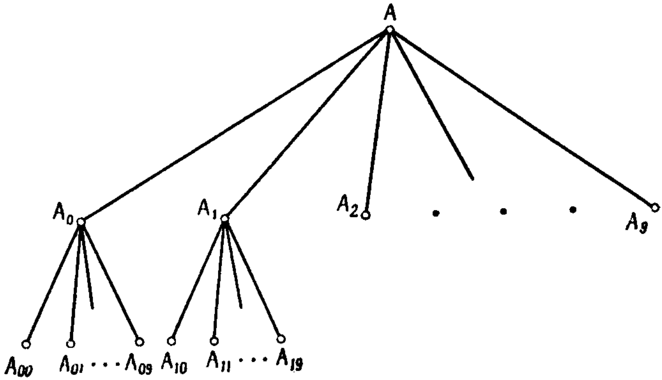


Рис. 36

на перфокарте расположены правильными колонками, в каждой из которых обычно бывает 10 мест. Следовательно, при распределении перфокарт по отверстиям в первой колонке имеется 10 возможностей: $A_0, A_1, \ldots, A_9$, в каждой из них — снова по 10 возможностей: $A_{00}, A_{01}, \ldots, A_{09}$ и т. д. (рис. 36). Этот процесс можно рассматривать как процесс разбиения целых чисел на группы в зависимости от их первой, второй и т. д. цифры. Впрочем, каждое дерево можно представлять себе как некоторую весьма общую числовую систему.

§ 2. Циклы и деревья

Нашу новую задачу мы сформулируем в сельскохозяйственных терминах. На рис. 37 изображена карта полей некоторой фермы. Предположим, что это карта нескольких рисовых полей, расположенных на острове; поля окружены земляными плотинами, которые в свою очередь окружены водами озера.

Как обычно при возделывании риса, мы хотим иметь возможность заливать поля водой, открывая отверстия в некоторых из стенок. Для того чтобы оросить все поля, необходимо, очевидно, сломать по крайней мере одну стенку в каждом цикле карты, т. е. сделать так, чтобы стенки, оставшиеся несломанными, образовали граф без циклов. Вопрос состоит в том, чтобы выяснить, сколько именно стен придется сломать.

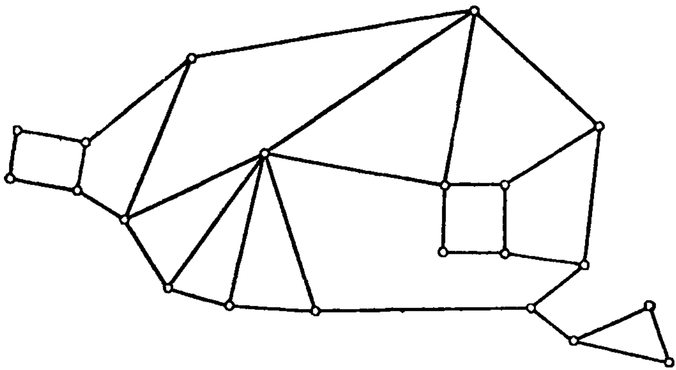


Рис. 37

Это приводит к следующей общей задаче относительно графов: *каково наименьшее число ребер, которые надо удалить из данного связного графа, чтобы на нем не осталось ни одного цикла.*

Предположим, что прежде всего мы удалили ребро $\mathscr{E}=(A, B)$, принадлежащее некоторому циклу на графе. При этом граф останется связным, так как вместо того, чтобы проходить от A к B по $\mathscr{E}$, мы можем пройти от A к B по оставшейся части соответствующего цикла. Если после удаления ребра $\mathscr{E}$ на графе останутся еще циклы, мы отбросим таким же образом другое ребро. Продолжая этот процесс, мы придем в конце концов к связному графу без циклов, т. е. к дереву $\mathcal{T}$.

А теперь уже легко подсчитать, сколько ребер нам пришлось удалить. Дерево $\mathcal{T}$ содержит то же самое число n вершин, что и первоначальный граф G. В силу теоремы 1 из § 1 число его ребер равно $n-1$. Следовательно, если вначале на графе G было N ребер, то нам пришлось удалить в точности

$$\gamma = N - n + 1$$

ребер. Это число называется *циклическим порядком*, или *цикломатическим числом*, графа; оно равно уве-

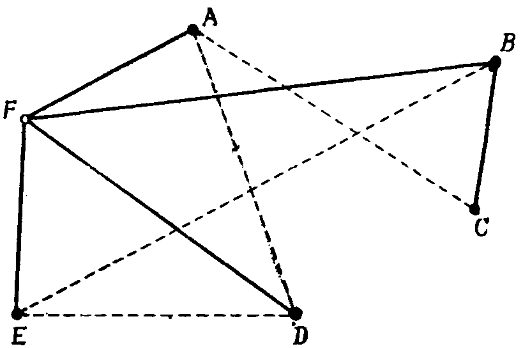


Рис. 38

личенной на единицу разности между числом ребер и числом вершин графа G.

Итак, для того чтобы превратить граф G в дерево, надо удалить по крайней мере γ ребер. Для того чтобы превратить граф G в лес, состоящий из нескольких деревьев, нам придется удалить из него больше чем γ ребер, так как (в силу теоремы 2 из § 1) число ребер леса, содержащего n вершин, меньше, чем число ребер дерева с n вершинами.

Проиллюстрируем это превращение графа в дерево на рис. 1 (стр. 12). Удалим сначала ребро ED, принадлежащее циклу EFD, затем ребро AD, принадлежащее циклу DFA, и, наконец, ребра AC и BE, Остается дерево, изображенное на рис. 38. Всего мы удалили

$$\gamma = 9 - 6 + 1 = 4 \text{ ребра}.$$

Упражнения

1. Проверьте результаты этого параграфа на графах рис. 2 и 37.
2. Чему равно цикломатическое число полного графа?

§ 3. Задача о соединении городов

Мы вернемся теперь к имеющей большое практическое значение задаче о средствах сообщения, поставив ее сначала в форме вопроса о проведении дорог. Имеется несколько городов $A, B, C, \ldots$, которые нужно соединить между собой сетью шоссейных или железных дорог. Для каждой пары городов A, B известна стоимость $c(A, B)$ строительства соединяющей их дороги. Задача состоит в том, чтобы построить *самую дешевую* из возможных сетей дорог. Вместо того чтобы говорить о сети железных дорог, можно было бы говорить об электрических линиях, или о водных путях, или о нефтепроводах и т. п.

В том частном случае, когда имеется всего три города A, B, C, достаточно построить одну из соединяющих линий

$$ABC, \quad ACB, \quad BAC,$$

причем если BC — самая дорогая линия, то именно ее и надо исключить, построив дорогу BAC.

Рассмотрим теперь общий случай. Граф наиболее дешевой соединяющей сети должен быть деревом, так как если бы он содержал цикл, можно было бы удалить одно из звеньев этого цикла и города все еще остались бы соединенными. Следовательно, для соединения n городов нужно построить $n - 1$ дорог.

Мы покажем, что сеть минимальной стоимости можно построить, пользуясь следующим простым *правилом экономичности*. Прежде всего соединяем два города с наиболее дешевым соединяющим звеном $\mathscr{E}_1$. На каждом из следующих шагов добавляем самое дешевое из звеньев $\mathscr{E}_i$, при присоединии которого к уже построенным ребрам не образуется никакого цикла; если имеется несколько звеньев одной и той же стоимости, выбираем любое из них. Каждое дерево $\mathscr{T}$, построенное таким образом, мы будем называть *экономичным деревом*. Его стоимость равна

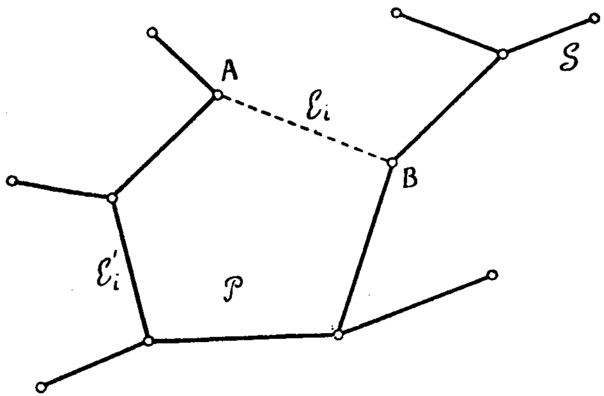


Рис. 39

сумме стоимостей отдельных звеньев:

$$c(\mathscr{T}) = c(\mathscr{E}_1) + c(\mathscr{E}_2) + \dots + c(\mathscr{E}_{n-1}).$$

Нам надо доказать, что никакое другое дерево $\mathscr{S}$, соединяющее те же вершины, не может оказаться дешевле экономичного дерева $\mathscr{T}$. Пусть $\mathscr{S}$ — самое дешевое дерево, соединяющее наши вершины, а $\mathscr{T}$ — любое экономичное дерево. Предположим, что ребра $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, ... экономичного дерева $\mathscr{T}$ занумерованы в том порядке, в котором они присоединялись при построении $\mathscr{T}$. Если самое дешевое дерево $\mathscr{S}$ не совпадает с $\mathscr{T}$ то $\mathscr{T}$ имеет по меньшей мере одно ребро, не принадлежащее $\mathscr{S}$. Пусть $\mathscr{E}_i = (A, B)$ — первое такое ребро, и пусть $\mathscr{P}(A, B)$ — цепь графа $\mathscr{S}$, соединяющая вершины A и B (рис. 39). Если ребро $\mathscr{E}_i$ добавить к $\mathscr{S}$, то граф

$\mathcal{S}+\mathcal{E}_i$ будет содержать цикл $\mathcal{C}=\mathcal{E}_i+\mathcal{P}(A, B)$, а так как $\mathcal{T}$ не имеет циклов, то цикл $\mathcal{C}$ должен содержать по крайней мере одно ребро, не принадлежащее $\mathcal{T}$. Удалив это ребро $\mathcal{E}'_i$, мы получим дерево

$$\mathcal{S}'=\mathcal{S}+\mathcal{E}_i-\mathcal{E}'_i$$

с тем же самым числом вершин, что и $\mathcal{S}$, причем его стоимость равна

$$c(\mathcal{S}')=c(\mathcal{S})+c(\mathcal{E}_i)-c(\mathcal{E}'_i).$$

Так как $\mathcal{S}$ имеет наименьшую возможную стоимость, то

$$c(\mathcal{E}_i)\geqslant c(\mathcal{E}'_i).$$

Но $\mathcal{E}_i$ было звеном наименьшей стоимости, при добавлении которого к $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_{i-1}$ не получается циклов. Так как при добавлении ребра $\mathcal{E}'_i$ к этим ребрам мы тоже не получим никакого цикла, то

$$c(\mathcal{E}_i)=c(\mathcal{E}'_i),$$

и, следовательно, $\mathcal{S}'$ тоже имеет минимальную стоимость:

$$c(\mathcal{S})=c(\mathcal{S}').$$

Таким образом, мы нашли другое дерево $\mathcal{S}'$ минимальной стоимости, имеющее с экономичным деревом $\mathcal{T}$ одним общим ребром больше, чем $\mathcal{S}$. Мы можем повторять эту операцию до тех пор, пока окончательно получим соединяющее дерево минимальной стоимости, совпадающее с $\mathcal{T}$. Таким образом, $\mathcal{T}$, а также все другие экономичные деревья действительно имеют минимальную стоимость.

Упражнения

1. Возьмите на плоскости шесть точек. Найдите дерево наименьшей общей длины, ребра которого соединяют эти вершины.

§ 4. Улицы и площади

Изменение названий улиц и площадей всегда было излюбленным времяпрепровождением городских властей во всем мире — иногда в большей, иногда в меньшей степени. Предположим, что «отцы города», желая добиться большей систематичности в названиях улиц и площадей своего города, потребовали, чтобы каждая улица была длиной в один квартал и носила название одного из смежных с ней уличных перекрестков; так, например, на одном из концов улицы Вашингтона должна находиться площадь Вашингтона.

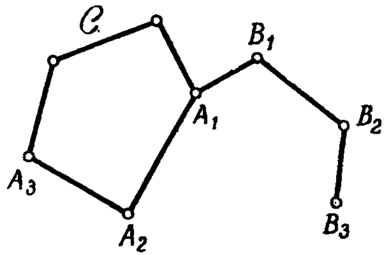


Рис. 40

Мы конечно, хотим поставить соответствующий вопрос для произвольного графа. Дан связный граф. В каком случае можно однозначным образом поставить в соответствие каждому ребру одну из его вершин?

Прежде всего покажем, что это всегда можно сделать, если рассматриваемый граф является деревом. После того как мы выбрали произвольную точку A_0 дерева в качестве его корня (рис. 34), мы поставим в соответствие ребру A_0A_1 вершину A_1, ребру A_0B_1 — вершину B_1, ребру A_0C_1 — вершину C_1. Далее, ребру A_1A_2 мы поставим в соответствие вершину A_2 и т. д. Так каждому ребру $A_{i-1}A_i$ будет поставлена в соответствие вершина A_i, более удаленная от A_0.

Предположим теперь, что на графе имеется цикл $\mathcal{C}$ (рис. 40). Каждому ребру цикла $\mathcal{C}$ должна соответствовать одна из его конечных вершин, т. е. одна из вершин цикла $\mathcal{C}$. Если, например, ребру A_1A_2 соответствует вершина A_2, то ребру A_2A_3 должна соответствовать вершина A_3 и т. д. Никакому ребру, не принадлежащему $\mathcal{C}$, не может соответствовать вершина из $\mathcal{C}$.

Следовательно, каждому ребру A_1B_1, имеющему с циклом $\mathcal{C}$ общую вершину A_1, должна соответствовать вершина B_1, ребру B_1B_2 — вершина B_2 и т. д. Такая цепь $A_1B_1B_2B_3$ ... не может вернуться к $\mathcal{C}$, так как все вершины цикла $\mathcal{C}$ уже поставлены в соответствие ребрам того же цикла. По аналогичной причине такая цепь не может вернуться и к одной из своих вершин.

Мы видим, таким образом, что часть графа, которой можно достигнуть из точки A_1 на пути, начинающемся ребром A_1B_1, должна быть деревом $\mathcal{T}_1$ с корнем A_1; то же самое справедливо и для всех других вершин A_i цикла $\mathcal{C}$. Но мы только что видели, что каждому ребру дерева $\mathcal{T}_1$ можно поставить в соответствие одну из его конечных точек — более удаленную от корня A_1. Так как ребрам цикла $\mathcal{C}$ соответствуют его же вершины A_i, мы приходим к следующему результату.

Для того чтобы можно было поставить в соответствие каждому ребру связного графа одну и только одну из его конечных вершин, необходимо и достаточно, чтобы этот граф либо являлся деревом, либо состоял из единственного цикла $\mathcal{C}$ с деревьями, вырастающими из его вершин (рис. 41). Согласно теореме 1 из § 1, число вершин дерева на единицу больше числа его ребер; если граф представляет собой цикл или цикл с деревьями, растущими из его вершин, то число его ребер равно числу вершин. Таким образом, лишь при этих условиях мы можем рассчитывать на установление требуемого соответствия между ребрами и вершинами.

Дерево рис. 34 или граф рис. 41 могут представлять карту улиц только очень маленьких городов, где нет обычных городских кварталов или где имеется лишь один центральный жилой массив, к которому подходят улицы, идущие от окраин.

И вот, заметив, не без гордости за свой город, что он слишком велик для применения такого метода, члены городского совета решили заменить его следующим правилом: улицы и площади должны быть названы так, чтобы из каждой площади исходила улица с тем же названием; например, на площади Вашингтона непременно должна начинаться улица Вашингтона.

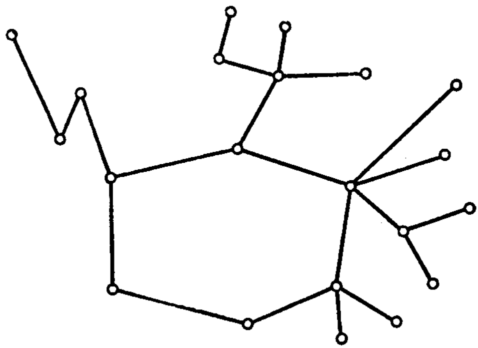


Рис. 41

На языке теории графов это означает, что для каждой вершины графа надо однозначно указать соответствующее ей ребро, выходящее из этой вершины. Бывают случаи, когда это сделать невозможно: для дерева, например, по теореме 1 из § 1, число вершин на единицу больше числа ребер. Однако даже и в этом случае наше условие может быть почти полностью выполнено. Посмотрим на дерево, изображенное на рис. 34. Можно каждой его вершине поставить в соответствие то ребро, которое ведет от нее к корню A_0. Тем самым каждой вершине, за исключением корня, будет поставлено в соответствие исходящее из нее ребро.

Деревья в этом отношении представляют собой исключение; вообще же имеет место следующая теорема.

В связном графе, не являющемся деревом, каждой вершине можно поставить в соответствие смежное с ней ребро.

Доказательство. Связный граф, имеющий n вершин, содержит по крайней мере $n-1$ ребер, а если он не является деревом, то число его ребер больше чем $n-1$. Но каждый граф можно превратить в дерево, удаляя из него некоторые ребра (см. § 2). Пусть $\mathcal{E}_0 = (A_0, B_0)$ — одно из удаляемых ребер, когда граф приводится к дереву $\mathcal{T}$; выберем точку A_0 за корень этого дерева. Каждой вершине дерева, за исключением A_0, можно поставить в соответствие смежное с ней ребро; после этого ребро $\mathcal{E}_0$ графа можно отнести к вершине A_0 — тогда каждой вершине графа будет поставлено в соответствие смежное с ней ребро.

Интересно отметить, что, как видно из наших рассуждений, всегда можно либо все вершины графа поставить в соответствие смежным с ним ребрам, либо, наоборот, все ребра поставить в соответствие смежным с ними вершинам. В каких случаях возможно и то и другое? Если число вершин графа равно числу его ребер. Такой граф не может быть деревом; он должен иметь вид, изображенный на рис. 41, т. е. должен иметь только один цикл $\mathcal{C}$[1]. В этом случае действительно имеется соответствие обоих видов: ребер — вершинам и вершин — ребрам. Ребра цикла $\mathcal{C}$ ставятся в соответствие вершинам тоже из $\mathcal{C}$: каждая вершина, не принадлежащая $\mathcal{C}$, — тому из смежных с ней ребер, которое ближе к $\mathcal{C}$.

Упражнения

1. Установите соответствие между вершинами и смежными с ними ребрами для графов рис. 1 и 2 (стр. 12).

[1] Так как его цикломатическое число равно 1.

ГЛАВА IV

Установление соответствий

§ 1. Задача о назначении на должности

Пусть имеется несколько различных вакантных должностей и группа лиц, стремящихся их занять, причем каждый из претендентов обладает достаточной квалификацией для нескольких, но, вообще говоря, не всех имеющихся должностей. Вопрос состоит в следующем: можно ли предоставить каждому из этих людей одну из тех должностей, для которых он подходит?

Мы можем снова проиллюстрировать эту задачу при помощи некоторого графа, имеющего в этом случае довольно специальный вид. Как мы уже сказали, имеется группа лиц, которую мы обозначим через M, и некоторое множество мест, или должностей, P. Мы построим граф, проводя ребра (m, p), соединяющие каждого человека m из множества M с теми должностями p из множества P, которые он может занять. На этом графе не будет ребер, соединяющих между собой две вершины из множества M или две вершины из множества P, поэтому такой граф имеет вид, изображенный на рис. 42. Граф, множество вершин которого распадается на два множества M и P, такие, что никакие две вершины из одного и того же множества не соединены между собой ребрами, называется *двудольным графом*.

Ясно, что мы не можем рассчитывать всегда найти подходящую работу для каждого претендента: для этого, во всяком случае, необходимо, чтобы число мест было не меньше числа людей. Но и последнее условие еще не является достаточным. Пусть, например, группа претендентов состоит из двух плотников и человека, который может работать и плотником и водопроводчиком, и для них имеется четыре должности — одно место плотника и три места водопроводчиков. Тогда, очевидно, один из плотников останется без работы, хотя в этом случае мест больше, чем лиц, желающих их занять, и хотя среди этих лиц имеются представители обеих требуемых профессий.

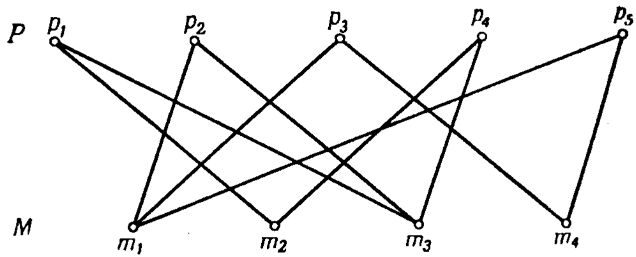


Рис. 42

Предположим, что общее число лиц, желающих получить работу, равно N. Ясно, что для разрешимости задачи о назначениях на должности должно выполняться следующее условие.

Какую бы группу из k человек, $k=1, 2, \ldots, N$, мы ни взяли, должно найтись по крайней мере k должностей, каждую из которых может занять хоть один из наших k претендентов (т. е. такие k работ, что с каждой из них справится наша группа k лиц).

Так, например, если один из людей является плотником, а другой — одновременно и плотником и водопроводчиком и если имеются два места водопроводчика, то наше условие выполняется при $k=2$, но не выполняется при $k=1$, и поэтому указанные лица не могут быть одновременно устроены на работу.

Выделенное курсивом условие мы для краткости будем называть **условием разнообразия**. Наша основная цель — доказать *достаточность* этого условия.

Теорема 1. *Если условие разнообразия выполнено, то каждому человеку можно предоставить подходящую для него работу.*

Эту теорему доказать не очень просто. Разумеется, она очевидна при $N=1$; если имеется один человек, годный хоть для одной работы, он может получить именно ее. При $N=2$ условие разнообразия гарантирует, что найдутся по крайней мере две работы, для каждой из которых пригоден хоть один из наших двух лиц, и что, кроме того, такая неприятность, как в приводимом выше примере с плотником и водопроводчиком, здесь произойти не может, так как при этом каждый человек может выполнять *хотя бы одну* работу. И в этом случае оба человека могут быть устроены.

Мы видим, что теорема верна при $N=1$ и $N=2$. Естественно попытаться доказать ее в общем случае методом математической индукции: мы предположим, что наше утверждение справедливо, если число людей не превосходит $N-1$, и докажем, что в таком случае оно верно и для N человек.

Если условие разнообразия выполнено, оно может выполняться с запасом или в обрез, а именно может случиться, что каждая группа из k человек ($k=1, 2, \ldots, N-1$) вместе может выполнять больше чем k работ (условие выполняется с запасом), или может быть так, что для некоторого k_0 ($k_0=1, 2, \ldots, N-1$) имеется группа из k_0 людей, вместе пригодных в точности для k_0 работ (условие выполняется в обрез). Мы покажем, что в каждом из этих случаев можно предоставить соответствующую работу каждому из N человек.

Если условие разнообразия выполняется с запасом, выберем одного кого-нибудь из этих N человек и поставим его на одну из работ, к которой он пригоден. Среди оставшихся $N-1$ людей каждые k человек (для любого k) вместе могут выполнять по крайней мере k работ, так как среди имевшихся вначале работ было по крайней мере $k+1$ работ, которые эти люди вместе могли выполнять, произведенное же назначение на место изъяло, самое большее, одну годную для них работу. По предположению индукции каждый из этих $N-1$ человек может быть обеспечен подходящей ему работой.

Если условие разнообразия выполняется в обрез, рассмотрим какую-нибудь группу A_0 из k_0 человек ($k_0<N$), вместе годных в точности для k_0 работ. В силу условия разнообразия для каждых k из этих людей (при $k=1, 2, \ldots, k_0$) найдется не менее чем k подходящих работ. По предположению индукции k_0

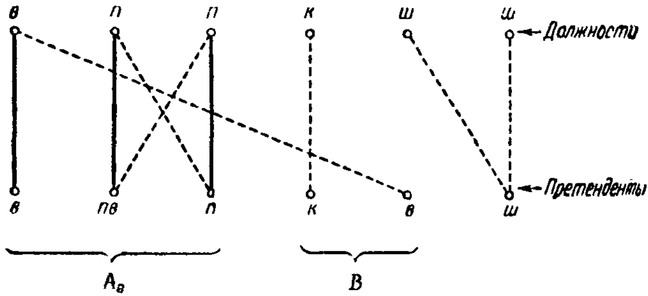


Рис. 43

человек множества A_0 могут быть обеспечены работой. Рассмотрим теперь группу из $N-k_0$ оставшихся лиц. Мы должны показать, что условие разнообразия остается справедливым для них с учетом лишь оставшихся работ, т. е. что для каждой группы B, состоящей из k из этих лиц (при $k=1, 2, \ldots, N-k_0$), найдется еще по крайней мере k свободных мест, каждое из которых они могут занять. Для того чтобы убедиться в этом, предположим, что люди из некоторой группы B вместе могут выполнять лишь k' работ, где $k'<k$. Тогда люди из группы A_0+B, состоящей из k_0+k человек, входящих в группы A_0 и B, первоначально должны были бы быть пригодными лишь для k_0+k' работ, что противоречит предположению о справедливости условия разнообразия. Следовательно, для оставшегося множества $N-k_0$ лиц условие разнообразия выполняется, и по предположению индукции эти

люди тоже могут быть устроены на подходящие им должности; тем самым теорема полностью доказана.

На рис. 43 изображен граф для случая $N=6$. Первые три вершины на нижней линии представляют группу A_0 (при $k_0=3$) из троих людей, являющихся соответственно водопроводчиком (в), плотником и водопроводчиком (пв) одновременно и плотником (п), а ребра идут к соответствующим должностям (вершинам на верхней линии). Оставшиеся три вершины ($N-k_0=3$) представляют троих людей, готовых работать соответственно каменщиком (к), водопроводчиком (в) и штукатуром (ш). Заметим, что условие разнообразия не справедливо для группы B, состоящей из каменщика и водопроводчика, так как среди оставшихся вакантных мест нет места водопроводчика, а есть только место каменщика. Ясно, что условие разнообразия не справедливо также и для множества A_0+B из пяти человек, так как имеются лишь четыре подходящие им должности.

§ 2. Другие формулировки

Введя двудольный граф, как на рис. 42, мы рассматривали одно множество его вершин M как множество лиц, желающих получить работу, а другое множество P — как множество соответствующих мест работы. Предположим теперь, что мы можем предоставить подходящую работу каждому из этих лиц. На языке теории графов это означает, что из каждой вершины M выходит определенное ребро, причем никакие два из этих ребер не ведут в одну и ту же вершину из P. В этом случае говорят, что имеется *отображение* множества вершин M в множество вершин P (рис. 44). Мы видели, что для существования такого отображения M в P необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие разнообразия, т. е. чтобы каждые k вершин из M были соединены ребрами по крайней мере с k различными вершинами из P. Если P и M имеют одно и то же число вершин, то такое отображение является взаимно однозначным соответствием между множествами M и P; соответствующие друг другу вершины соединены ребрами графа (рис. 45).

Эта задача установления на графе некоторого соответствия между его вершинами может иметь и

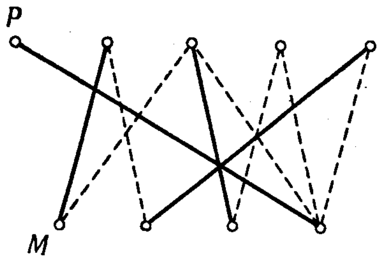


Рис. 44

много иных формулировок. Предположим, например, что у нас имеется группа из k юношей и k девушек. Некоторые из них уже знакомы друг с другом, и возникает вопрос: в каком случае можно разбить этих молодых людей на пары для танцев таким образом, чтобы все юноши танцевали со знакомыми девушками?

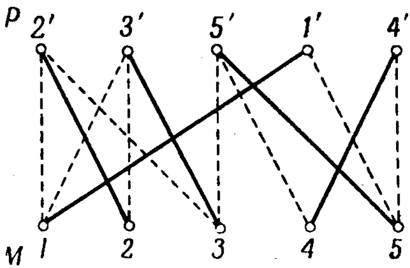


Рис. 45

Можно также обратить эту задачу и поставить ее следующим образом: в маленькой деревне имеется одинаковое число взрослых юношей и девушек; обычаем не допускается, чтобы юноша женился на близкой родственнице — сестре, сводной сестре или двоюродной сестре. При каком условии для каждого юноши найдется невеста из этой же деревни? По-прежнему мы можем изобразить все возможности женитьбы для каждого лица при помощи некоторого двудольного графа — в этом случае его вершины будут соединены ребрами лишь тогда, когда соответствующие лица не состоят между собой в родстве.

А вот еще один вариант этой задачи. В вашей школе имеется несколько кружков, мы можем назвать их

$$C: \quad C_1, C_2, \ldots, C_N.$$

Естественно, что каждый из этих кружков должен иметь старосту. Для того чтобы исключить перегрузку учащихся, было поставлено условие, чтобы ни один ученик не являлся старостой более чем одного кружка. Снова возникает вопрос: при каком условии это возможно? Ясно, что это возможно не всегда; если число кружков в сравнительно небольшой школе слишком велико, этому условию удовлетворить нельзя.

Чтобы решить эту задачу, мы по-прежнему обратимся к двудольному графу. В этом случае одно множество вершин графа будет состоять из N кружков, а другое множество вершин P — это множество всех учеников школы. Мы проводим ребро от кружка C_i к ученику p в том случае, если p является членом C_i. При этом условие разнообразия превращается в следующее: каждая группа из k кружков (при $k = 1, 2, \ldots, N$) должна включать по меньшей мере k различных учеников. Согласно доказанной нами теореме, это — то условие, при котором кружки могут иметь различных старост.

Поставив задачу таким образом, мы привели ее к теореме, опубликованной в 1935 г. английским математиком Филиппом Холлом. Дано некоторое число N множеств C_i, каждое из которых состоит из элементов p; совокупность всех p обозначим через P. Мы хотим поставить в соответствие каждому множеству C_i один из его элементов p_i таким образом, чтобы различным множествам были поставлены в соответствие различные элементы из P. Это возможно только в том случае, когда выполнено следующее условие каждые k множеств C_i (при $k=1, 2, \ldots, N$) вместе должны содержать по крайней мере k различных элементов из P.

Вернемся еще раз к формулировке нашей задачи, связанной с имеющимися в школе кружками. Если число кружков слишком велико, не всегда легко доказать справедливость условия разнообразия. Поэтому естественно поставить следующий вопрос: можно ли указать какое-нибудь простое правило формиро-

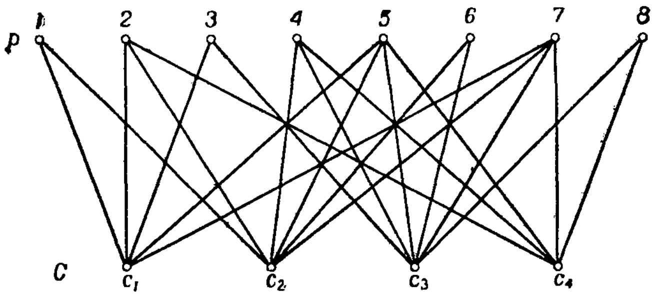


Рис. 46

вания кружков, гарантирующее возможность выбора для них различных старост?

Это действительно осуществимо. Для того чтобы показать, что мы имеем в виду, предположим, что каждый кружок состоит по крайней мере из пяти учеников. Тогда на соответствующем графе из каждой вершины множества C будет исходить по меньшей мере 5 ребер. Для группы из k кружков будет иметься не менее $5k$ ребер, идущих из соответствующих вершин C к вершинам из P (см. рис. 46, где $k=4$). Теперь, если мы потребуем, чтобы каждый ученик участвовал не более чем в пяти кружках, это будет означать, что ребра от k кружков должны идти по крайней мере к k вершинам из P, и, следовательно, условие разнообразия будет выполнено.

Это рассуждение является совершенно общим, так что мы можем сформулировать следующий результат.

Потребуем, чтобы в каждом кружке участвовало по крайней мере t учеников и чтобы, кроме того, ни один ученик не состоял более чем в t кружках. Тогда всегда можно найти для этих кружков различных старост.

Упражнения

1. Приведите пример такого множества кружков, в которых нельзя было бы выбрать различных старост.
2. Сколько кружков из трех участников можно образовать в классе из 12 учеников? Могут ли все эти кружки иметь различных старост?
3. Укажите отображение M в P для графа, изображенного на рис. 42.

§ 3. Круговые соответствия

Во всех состязаниях приходится сталкиваться с вопросом о том, каким образом объединять в пары отдельных участников. Иногда задача оказывается простой; например, если условиться, что после каждого тура все потерпевшие поражение выбывают из игры, то из оставшихся участников образуются новые пары, причем возможно (когда число игроков нечетно), что один из них окажется свободным от игры.

Эта задача несколько сложнее в случае «кругового турнира», подобного обычным шахматным турнирам. Здесь каждый из участников должен играть с каждым из остальных, и важно заранее приготовить турнирную таблицу.

Эту ситуацию снова удобно изобразить с помощью графа. Предположим, что имеется N игроков, так что каждый из них играет $N-1$ игр с остальными участниками. Каждая игра по-прежнему представляется ребром (A, B), соединяющим двух игроков, т. е. две вершины A и B графа. Вся совокупность игр представится тогда полным графом, имеющим N вершин; на рис. 47 изображен такой граф для $N=6$.

В каждом туре игроки как-то объединяются в пары. Предположим пока, что N четно, и это можно сделать. На графе такое объединение в пары соответствует выбору $\frac{1}{2}N$ несмежных ребер, по одному для каждой из N вершин. Для следующего тура можно выбрать новое множество из $\frac{1}{2}N$ ребер и т. д. до тех пор, пока все игры не будут сыграны. На рис. 47

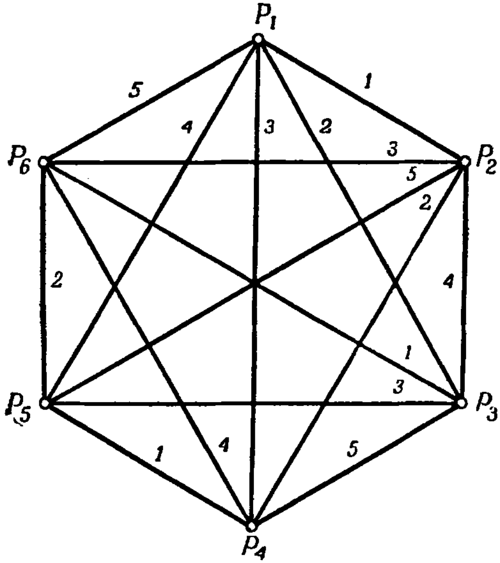


Рис. 47

ребра помечены следующим образом: те, на которых стоит число 1, относятся к парам, встречающимся в первом туре, те, на которых стоит цифра 2, — к парам, встречающимся во втором туре, и т. д.

При большом числе игроков фактическое составление такой таблицы для всех туров сразу становится довольно трудоемким, если не указан какой-нибудь систематический метод. Многие справочники по проведению турниров содержат пространные таблицы объединения игроков в пары для разных чисел игроков ($N=6$, 8, 10, 12 и т. д.). При составлении таблицы достаточно предполагать по-прежнему, что число игроков N четно. Если оно окажется нечетным, то всегда можно добавить фиктивного игрока F, договорившись, что тот, кто должен играть с F, в этом туре свободен от игры.

1	2	3	4	5	6	·	·	·	·	N
2	$\cancel{2}1$	N	$N-1$	$N-2$	$N-3$	·	·	·	4	3
3	4	$\cancel{3}1$	2	N	$N-1$	·	·	·	6	5
4	6	5	$\cancel{4}1$	3	2	N	·	·	8	7
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$\frac{1}{2}N+1$	N	$N-1$	$N-2$	·	·	·	·	·	3	2
$\frac{1}{2}N+2$	3	2	N	$N-1$	·	·	·	·	5	4
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
N	$N-1$	$N-2$	·	·	·	·	·	·	2	$\cancel{N}1$

Рис. 48

Опишем простой и вполне общий метод построения турнирной таблицы для четного числа игроков N. Обозначим игроков числами 1, 2, ..., N и запишем эти числа в их естественном порядке в первой строке квадратной таблицы. В следующей строке этой таблицы мы хотим поставить номера противников этих игроков в первом туре матча. Аналогично в третьей строке мы выпишем номера противников тех же игроков 1, 2, ..., N во втором туре и т. д. до тех пор, пока все игроки не сыграют друг с другом. Ясно, что наша таблица должна быть такой, чтобы все возможные пары игроков встретились в ней в точности по одному разу. Способ сделать это показан в таблице на рис. 48. Чтобы установить противника j-го игрока в k-м туре, достаточно взглянуть на пересечение j-го столбца и $(k+1)$-й строки этой таблицы.

Таблица устроена следующим образом.

В первой строке, как уже было сказано, перечислены игроки от 1 до N; эти же числа мы поставили и в первом столбце. Теперь на оставшиеся $N-1$ мест каждой строки мы ставим числа от 2 до N в циклическом порядке по убыванию. Первые $\frac{1}{2}N$ строк начинаются с четных чисел 2, 4, ..., N и выглядят так:

$$\begin{array}{cccccccccc}
2 & N & N-1 & . & . & . & . & . & 4 & 3 \\
4 & 3 & 2 & N & N-1 & . & . & . & 6 & 5 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
N & N-1 & N-2 & . & . & . & . & . & 3 & 2
\end{array}$$

Остальные строки начинаются с нечетных чисел 3, 5, ..., $N-1$ и имеют вид

$$\begin{array}{ccccccccccc}
3 & 2 & N & N-1 & . & . & . & . & . & 5 & 4 \\
5 & 4 & 3 & 2 & N & N-1 & . & . & . & 7 & 6 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
N-1 & N-2 & . & . & . & . & . & . & . & 2 & N
\end{array}$$

Заметим, что в этой таблице отсутствует число 1; с другой стороны, так как никто не играет против самого себя, то число, стоящее вверху столбца, никогда не должно в этом столбце повторяться. Мы устраним оба эти недочета, если заменим все числа, стоящие на главной диагонали, единицами, как показано на рис. 48. Теперь каждый игрок найдет под своим номером номера игроков, с которыми он играет в различных турах. Например, игрок 4 играет с игроком $N-1$ в первом туре, с игроком 2 во втором туре, с игроком 1 в третьем туре, с игроком 6 в четвертом туре и т. д. и, наконец, с игроком $N-3$ в $(N-1)$-м туре.

Упражнения

1. Постройте турнирную таблицу для $N = 6, 8, 10$.
2. Докажите, что приведенная выше таблица действительно может служить графиком турнира; для этого придется проверить, что:

а) каждый из игроков в этом турнире играет по одной партии с каждым из остальных игроков;

б) каждый из игроков в разных турах имеет разных противников;

в) если в некотором туре игрок j встречается с игроком k, то в таблице в качестве противника k в этом туре должен быть указан j.

ГЛАВА V

Ориентированные графы

§ 1. Снова спортивные состязания

В первой главе, вводя понятие графа, мы рассматривали в качестве примера состязания спортивных команд. Мы соединяли две команды, скажем A и C,

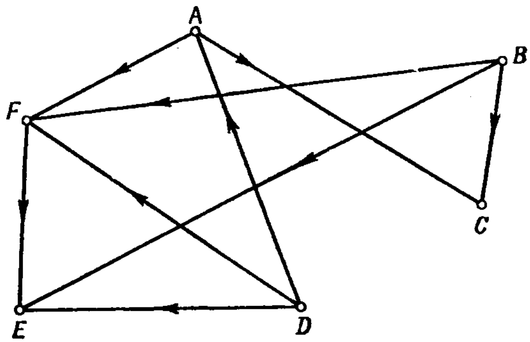


Рис. 49

ребром AC в том случае, когда эти команды уже играли друг с другом (см. рис. 1 на стр. 12). Однако такой граф не дает ответа на один весьма существенный вопрос: кто именно выиграл игру?

Этот недостаток легко может быть устранен. Если команда A выиграла у C, условимся ставить на ребре AC стрелку, направленную от A к C. Предположим, что нам известны результаты всех уже сыгранных игр, и добавим к графу рис. 1 соответствующие стрелки; пусть при этом получится граф, изображенный на рис. 49. На этом графе показано, что команда

A выиграла у C, команда F проиграла D, а B выиграла все игры — с C, E, F и т. д.

Граф G, на котором указано направление каждого его ребра, называется ориентированным графом. Такой граф, как мы видели, может содержать информацию о результатах соревнования между командами или отдельными игроками. Обратно, каждый ориентированный граф можно рассматривать как геометрическое представление результатов некоторого состязания.

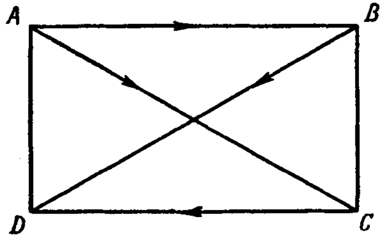


Рис. 50

Мы обошли молчанием один вопрос: а что, если какая-то игра окончилась вничью? Ничейные результаты служат помехой при счете очков в любом турнире. Часто, например при игре в теннис или в сквош[1]), правила игры формулируются так, что ничейные результаты вообще невозможны. В других играх, таких, как гольф или футбол, игроки и команды, для того чтобы избежать ничейного результата, играют дополнительные туры. Если же ничейные результаты неизбежны, мы можем отразить их на графе, оставляя соответствующие ребра неориентированными. При этом мы получим так называемый смешанный граф, на котором имеются как ориентированные, так и неориентированные ребра. Как мы увидим далее, графы такого вида встречаются и в других вопросах.

В качестве примера смешанного графа рассмотрим граф, изображенный на рис. 50; на этом графе

[1]) Игра в мяч, похожая на теннис.

указаны результаты игр четырех команд A, B, C и D; команда A выиграла у B и C и сыграла вничью с D; B проиграла A, сыграла вничью с C и выиграла у D; C проиграла A, выиграла у D и сыграла вничью с B; D сыграла вничью с A и проиграла B и C.

§ 2. Одностороннее движение

Карта любой сети дорог или улиц дает нам несколько специальный, но зато наглядный пример графа. На современном плане города должны быть

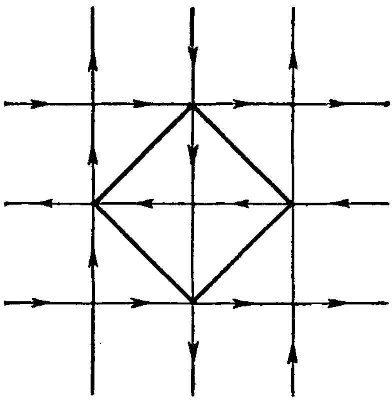


Рис. 51

показаны не только относительное расположение улиц и их пересечения, но также и то, на каких улицах имеется двусторонний поток транспорта, а на каких — одностороннее движение, причем в последнем случае должно быть указано и направление движения. При этом снова получается ориентированный или, чаще, смешанный граф, если одностороннее движение установлено не на всех улицах города (рис. 51). Впрочем, в последнем случае можно сделать граф ориентированным с помощью приема, который часто используется в теории графов и состоит в замене каждого неориентированного ребра двумя ориентированными ребрами, соединяющими те же самые вершины и имеющими противоположные направления.

При рассмотрении одностороннего движения в городе возникают вопросы, интересные и для общей теории графов. Предположим, что в городе решено ввести новые правила движения, согласно которым движение по каждой улице становится односторонним. Это было бы, конечно, неприемлемо, если бы оказалось, что при этом не всегда можно проехать из одного места в другое. Спрашивается, при каком условии улицы города можно ориентировать таким образом, чтобы из любого пункта можно было проехать в любой другой, не нарушая правил движения по улицам. Соответствующая задача на языке теории графов формулируется следующим образом: при каком условии ребра графа G можно ориентировать так, чтобы для любой пары его вершин нашлась соединяющая их ориентированная цепь?

Ясно, что такой граф должен быть связным. Однако этого недостаточно.

Ребро $\mathscr{E}=(A, B)$ графа мы будем называть *связывающим ребром*, или *перешейком*, если оно является единственным путем от A к B или обратно. *Связывающее* ребро делит все вершины графа на два множества: те, в которые можно прийти из A, не проходя по ребру $\mathscr{E}$, и те, в которые можно прийти из B, не проходя по $\mathscr{E}$. Граф в этом случае состоит из двух частей G_1 и G_2, соединенных только ребром $\mathscr{E}$ (рис. 52).

На карте города *связывающее* ребро — единственная магистраль, соединяющая отдельные части города. Оно может быть единственным мостом через реку или единственным железнодорожным тоннелем. Ясно, что если бы на такой магистрали было установлено одностороннее движение, то из одной части города в другую не было бы проезда.

Выше (§ 1 гл. III) мы называли *конечным ребром* такое ребро $\mathscr{E}=(A, B)$, один из концов которого, например A, не принадлежит никакому другому ребру графа (рис. 53). Такое ребро $\mathscr{E}$ тоже должно рассматриваться как связывающее, так как, кроме $\mathcal{E}$, нет пути, соединяющего A с B. Можно считать, что граф G_1 рис. 52 как бы «стянут» в одну вершину A. На плане города конечное ребро соответствует тупику; на нем тоже нельзя установить одностороннее движение, не блокируя этим въезд в A или выезд из A.

Если ребро $\mathcal{E}_1 = (A_1, B_1)$ не является связывающим, то найдется и другой путь, соединяющий A_1 и B_1 и не проходящий по $\mathcal{E}_1$ (рис. 54). Поэтому такое ребро

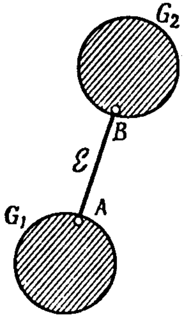


Рис. 52

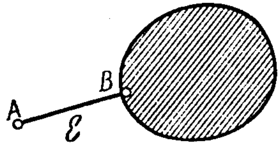


Рис. 53

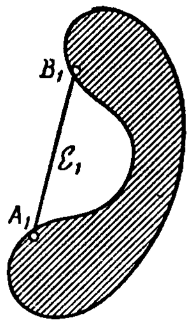


Рис. 54

$\mathcal{E}_1$ называется **циклическим ребром**. Итак, на графе имеются ребра двух типов — циклические и связывающие.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если G — неориентированный связный граф, то всегда можно так ориентировать циклические ребра из G, оставив связывающие ребра неориентированными, чтобы любую пару вершин этого графа можно было соединить ориентированной цепью.*

Для плана города это утверждение можно сформулировать следующим образом: если оставить двустороннее движение только на мостах (при условии, что данный мост является единственным мостом через реку) и на тупиках, то на всех остальных улицах можно установить одностороннее движение таким образом, чтобы транспорт обеспечивал связь всех частей города.

Мы можем доказать эту теорему, указав способ соответствующего ориентирования графа. Начнем с того, что выберем в G произвольное ребро $\mathscr{E}=(A, B)$. Если $\mathscr{E}$ — связывающее ребро, оно останется двусторонним, и тогда можно будет перейти от B к A и обратно вдоль $\mathscr{E}$ (рис. 55). Если $\mathscr{E}$ — циклическое ребро, то оно входит в некоторый цикл $\mathscr{C}$ и тогда на всех ребрах цикла $\mathscr{C}$ можно установить

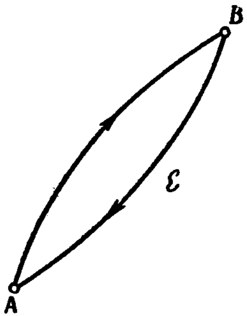


Рис. 55

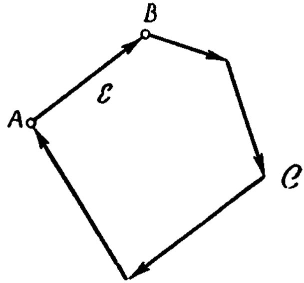


Рис. 56

циклическую ориентацию; ясно, что из любой вершины $\mathscr{C}$ можно перейти к любой другой, следуя указанным на ребрах направлениям (рис. 56).

Этот процесс можно продолжить. Предположим, что мы уже ориентировали некоторую часть H рассматриваемого графа G так, что из любой вершины графа H можно пройти в любую другую его вершину с соблюдением правил одностороннего движения. Так как граф G является связным, то либо H совпадает со всем графом G, либо найдется ребро $\mathscr{E}=(A, B)$, «касающееся» H, т. е. такое, что оно не принадлежит H, но одна из его вершин, скажем A, принадлежит H.

Если $\mathscr{E}$ — связывающее ребро AB, то, как мы уже условились, оно остается двусторонним. Тогда для любой вершины X графа H можно найти ориентированную цепь $\mathscr{R}$, соединяющую X с A, а значит (через ребро $\mathscr{E}$), и с B. Обратно, от вершины B через ребро $\mathscr{E}$ можно перейти к A, а затем — по ориентированной цепи $\mathscr{Z}$ — от A к X (рис. 57). Присоединяя $\mathscr{E}$ к H, мы получим уже бо́льшую часть графа G, обладающую требуемым свойством.

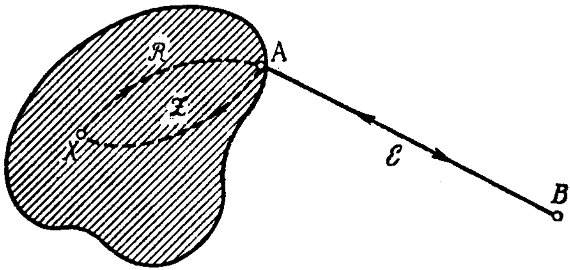


Рис. 57

Если же ребро $\mathscr{E} = (A, B)$ является циклическим, оно принадлежит некоторому циклу $\mathscr{C}$. Мы установим направление на $\mathscr{C}$ от A к B и далее вдоль $\mathscr{C}$ до первой вершины D из $\mathscr{C}$, принадлежащей H (рис. 58).

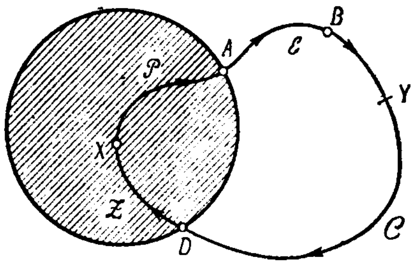


Рис. 58

Все эти ребра мы присоединим к H. Пусть X — произвольная вершина из H, а Y — любая вершина из $\mathscr{C}$; можно найти ориентированную цепь $\mathscr{P}$, принадлежащую H и соединяющую X с A, а затем вдоль $\mathscr{C}$ пройти к вершине Y из $\mathscr{C}$. Обратно, от Y можно пройти вдоль $\mathscr{C}$ к вершине D, а от нее — принадлежащей H

ориентированной цепью $\mathfrak{Z}$ — от D к X. Поэтому ориентированный граф, полученный добавлением к H указанных ребер цикла $\mathfrak{C}$, также удовлетворяет требуемым условиям: то, что от любой из добавленных вершин цикла $\mathfrak{C}$ можно пройти к любой другой из этих вершин с соблюдением условий, связанных с ориентацией ребер, очевидно (рис. 58). Продолжая этот процесс, мы в конце концов ориентируем требуемым образом исходный граф G.

Установление на улицах города одностороннего движения позволяет сильно увеличить скорость движения транспорта; однако оно ставит настоящие головоломки перед водителем, который хочет объехать на машине незнакомый ему город. В случае двустороннего уличного движения для этого можно было бы воспользоваться, например, способом, изложенным в § 4 гл. II. Но там было существенно, что по каждому ребру можно пройти в обоих направлениях. Если на улицах везде или частично установлено одностороннее движение, то задача становится намного более сложной, даже если сделано необходимое предположение о существовании по крайней мере одной ориентированной цепи, соединяющей любую пару вершин графа.

Общая проблема такова: каким способом можно двигаться по графу вдоль указанных направлений, чтобы в конечном счете пройти по всем его ребрам? Для этого, конечно, надо иметь хорошую память, а еще лучше предварительно составить набросок графа, образованного сетью улиц.

Мы отправляемся из некоторой точки a_0 по одной из выходящих из нее улиц. Проходя перекресток, мы отмечаем на рисунке, по какой улице мы сюда пришли и на какую новую улицу переходим; для дальнейшего полезно отметить также и другие улицы, выходящие на этот перекресток, вместе с их направлениями. Через некоторое время мы вернемся к одному из перекрестков a_1, на котором мы уже побывали раньше (рис. 59).

Посмотрим на план, составленный нами заранее. Если мы уже обошли все улицы города, то наша задача решена. В противном случае найдется еще не пройденная улица (c, d). По предположению, существует ориентированная цепь, соединяющая a_1 с c; мы пойдем по ней, а затем пройдем улицу (c, d).

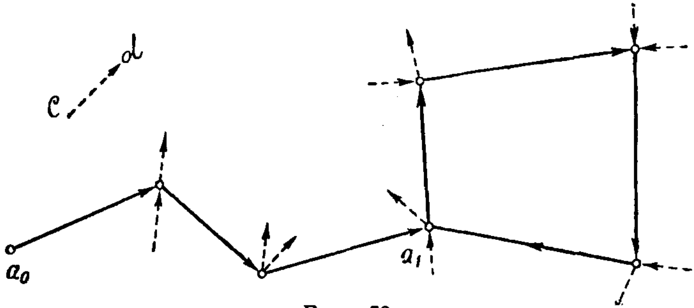


Рис. 59

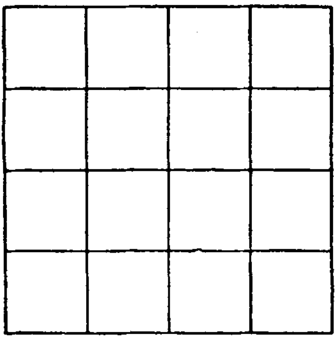


Рис. 60

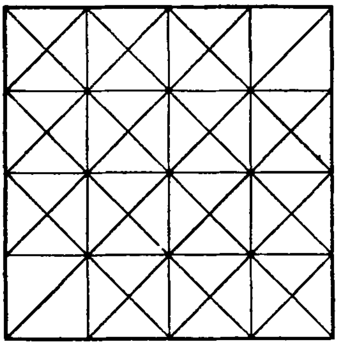


Рис. 61

(Разумеется, удобнее всего начинать с не пройденных ранее улиц, выходящих из a_1.) Ясно, что, поступая и далее таким же образом, мы в конце концов обойдем все улицы города.

Упражнения

1. Используя введенный в этом параграфе метод, ориентируйте графы рис. 14 и 37.
2. Сделайте то же самое для планов городов, изображенных на рис. 60 и 61.

§ 3. Степени вершин

В § 6 гл. I мы подсчитывали число ребер неориентированного графа; **степенью** $\rho(A)$ вершины A мы назвали число ребер, для которых A служит одним из концов. В каждой вершине A ориентированного графа имеются ребра двух типов: выходящие из A и входящие в A. Соответственно мы имеем в каждой вершине две степени: число $\rho(A)$ выходящих и число $\rho^*(A)$ входящих ребер. Так, например, для графа, изображенного на рис. 62,

$$\rho(A)=3, \qquad \rho^*(A)=2.$$

Каждое ориентированное ребро $\mathscr{E}=(A, B)$ имеет начальную вершину A и конечную вершину B. Следовательно, общее число N ребер графа можно найти, подсчитывая либо общее число выходящих из каждой вершины ребер, либо общее число входящих ребер. Это означает, что для ориентированного графа G, имеющего n вершин

$$A_1, \ A_2, \ \ldots, \ A_n,$$

общее число N ребер равно одной из сумм

$$N=\rho(A_1)+\rho(A_2)+\ldots+\rho(A_n)=$$
$$=\rho^*(A_1)+\rho^*(A_2)+\ldots+\rho^*(A_n).$$

В качестве примера рассмотрим граф, изображенный на рис. 49. Здесь

$$\rho(B)=\rho(D)=3, \ \ \rho(A)=2, \ \ \rho(F)=1, \ \ \rho(C)=\rho(E)=0$$

и

$$\rho^*(E)=\rho^*(F)=3, \ \ \rho^*(C)=2, \ \ \rho^*(A)=1, \ \ \rho^*(B)=\rho^*(D)=0.$$

В обоих случаях сумма равна 9.

Имеются различные типы ориентированных графов, для которых степени вершин обладают какими-либо специальными свойствами. Упомянем некоторые из них. Граф называется **однородным графом степени** r, если степени всех его вершин равны одному и тому же числу r: для каждой вершины A

$$\rho(A) = \rho^*(A) = r.$$

Простым примером может служить цикл (рис. 63); здесь для каждой вершины A

$$\rho(A) = \rho^*(A) = 1,$$

и граф является однородным степени 1.

Рассмотрим еще граф кругового турнира, когда каждая команда должна играть с каждой из остальных. Предположим сначала, что число команд, участвующих в состязании, четно, так что все команды

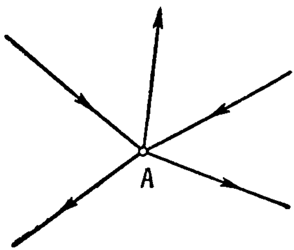


Рис. 62

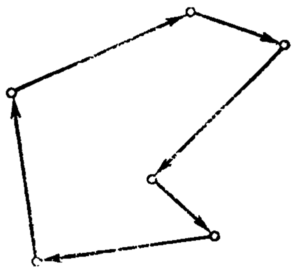


Рис. 63

заняты в каждом туре. Тогда после k туров каждая команда сыграет с k другими. Соответствующий граф в каждой вершине будет иметь k ребер, причем некоторые ребра будут входящими, означая поражение, другие выходящими, означая победу (мы считаем, что возможность ничьих исключена). Следовательно, для каждой вершины A такого графа

$$\rho(A) + \rho^*(A) = k. \tag{1}$$

Если число команд нечетно, то в каждом туре одна из команд свободна от игры. Для команд, игравших в каждом туре, остается справедливым равенство (1), а для k команд B, пропустивших по одному туру, получается равенство

$$\rho(B) + \rho^*(B) = k - 1. \tag{2}$$

Упражнения

1. Постройте графы, отвечающие положению в турнире с пятью участниками после двух и трех туров.
2. Как изменятся соотношения (1) и (2), если допустить возможность ничьих?
3. Постройте однородные ориентированные графы степени $r=2$ с числом вершин $n = 5, 6, 7, 8$.

§ 4. Генеалогические графы

Рисуя чье-либо родословное дерево, можно воспользоваться ориентированным графом, чтобы показать на нем родственные отношения. Ориентированное ребро (A, B), проводимое от члена семьи A к члену семьи B, указывает на то, что B является сыном или дочерью A. Биологи систематически пользуются такого рода схемами для описания результатов генетических экспериментов над животными, обозначая ориентированным ребром (A, B) то обстоятельство, что B является непосредственным потомком A.

Такие *генеалогические графы* обладают некоторыми почти очевидными специальными свойствами. Одно из них состоит в том, что так как каждый индивидуум имеет двух родителей, отца и мать, то у каждой вершины должно быть два входящих ребра, т. е.

$$\rho^*(B) = 2. \qquad (3$$

Таким образом, основная ячейка генеалогического графа состоит из двух ребер, как на рис. 64, где B является непосредственным потомком двух индивидуумов — отца О и матери M.

Здесь можно заметить, что родословные деревья (подобно обычным деревьям) не простираются до небес. Так как наши знания ограниченны, неизбежно наступит момент, когда нам неизвестны один или оба родителя. Поэтому равенство (3) правильнее было бы заменить неравенством

$$\rho^*(B) \leqslant 2. \qquad (4)$$

Всякое родственное отношение представляется некоторой определенной конфигурацией на генеалогическом графе. Так, например, рис. 65 показывает, что B_1, B_2, B_3 являются братьями или сестрами, так как все они — дети одних и тех же родителей О и М.

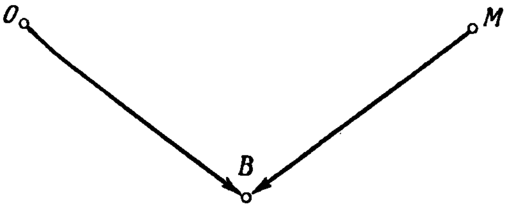


Рис. 64

Аналогично из рис. 66 видно, что B_4 является сводным братом или сводной сестрой по отношению к B_1, B_2, B_3, так как у них одна и та же мать М, но разные отцы О и O_1.

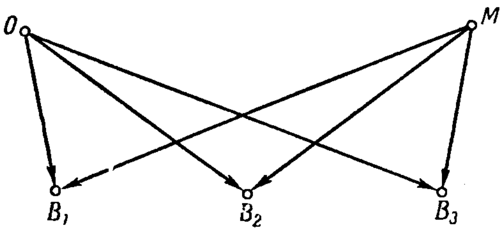


Рис. 65

Мы пришли теперь к интересному вопросу. Предположим, что у нас имеется ориентированный граф специального типа — в каждую его вершину входит не более двух ребер, т. е. что условие (4) выполнено. Спрашивается, можно ли считать этот граф генеалогическим графом, т. е., иными словами, можно ли разделить его вершины, или отвечающих этим вершинам индивидуумов, на два класса — класс О (отцов) и класс М (матерей) — таким образом, что для каждой вершины два входящих в нее ребра всегда образуют фигуру, изображенную на рис. 64.

Пример (рис. 67) показывает, что это не всегда возможно. Предположим, что A_1 относится к классу О. Тогда так как его ребенок B_1 является также ребенком A_2, то A_2 относится к классу М. Так как A_2 и A_3 имеют ребенка B_3, то A_3 также должно относиться к

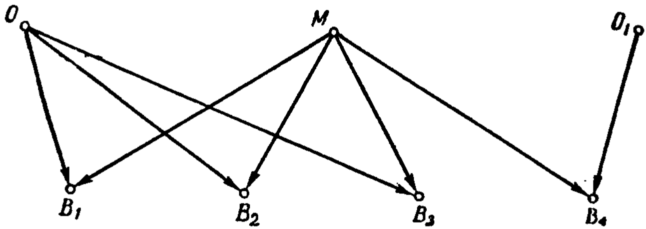


Рис. 66

классу О. Однако это противоречит тому, что, в соответствии с графом, B_2 является ребенком A_1 и A_3, каждый из которых относится к классу О. Аналогичное противоречие получится и в том случае, если предположить, что A_1 относится к классу М.

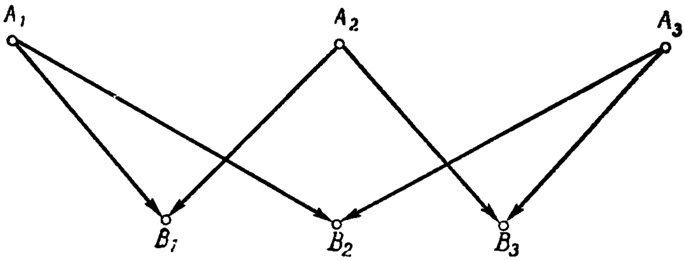


Рис. 67

Для того чтобы выяснить причину этого затруднения, отправимся из некоторой вершины A_1, которую мы будем относить к классу О. Если A_1 является одним из родителей B_1, то другой его родитель A_2 относится к классу М. Если A_2, кроме того, является родителем B_2, то другой родитель последнего A_3

относится к классу О и т. д. Так мы получим «чередующуюся» последовательность

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \tag{5}$$

индивидуумов, попеременно относящихся к классам О и М. На нашем графе они связаны последовательностью ребер

$$(A_1, B_1), (B_1, A_2), (A_2, B_2), (B_2, A_3), \ldots,$$

в которой каждые два соседних ребра проходятся в противоположных направлениях (рис. 68).

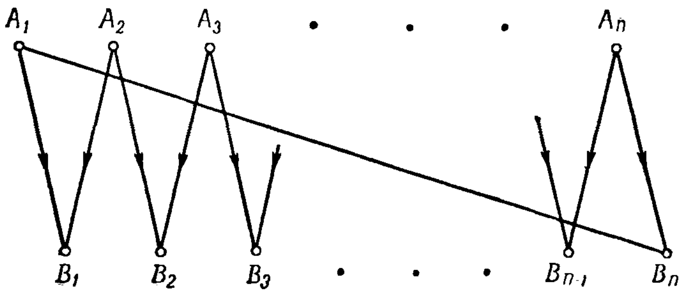


Рис. 68

Предположим теперь, что A_1 и A_n являются родителями B_n, как на рис. 68. Это дает «чередующийся» цикл

$$(A_1, B_1), (A_2, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_n, B_n), (A_1, B_n). \tag{6}$$

Тогда ясно, что вершины A_1 и A_n должны относиться к разным классам, а значит, n должно быть четным. Это приводит нас к следующему результату.

Условие родства. *Пусть G — ориентированный граф, для которого условие* (4) *выполнено. Если можно разделить вершины графа G на два класса: класс «матерей»* М *и «отцов»* О *с соблюдением указанных выше условий, то каждая последовательность* (5) *родителей A_i в любом «чередующемся» цикле должна состоять из четного числа членов.* Эквивалентное этому условие состоит в том, что число ребер каждого «чередующегося» цикла (6) кратно четырем.

Если условие родства выполнено, то каждую вершину графа можно отнести к одному из указанных классов. Начнем с вершины A_1 и отнесем ее к произвольному классу (О или М). Если A_1 не имеет детей или если эти дети не имеют других известных нам родителей, то из определения класса A_1 не вытекает никаких следствий. Если же A_1 имеет детей, образуем всевозможные «чередующиеся» цепи, которые начинаются в A_1. Этим будет однозначно определен класс для любого из родителей в последовательности (5). Действительно, если бы получились две чередующиеся цепи, ведущие от A_1 к A_n и относящие A_n к двум различным классам О и М, то можно было бы пройти от A_1 к A_n по первой цепи и вернуться к A_1 по второй, а это привело бы к «чередующемуся» циклу с нечетным числом вершин, что противоречит условию родства.

На этом первом этапе будет определен класс еще не всех вершин графа. На следующем шаге мы выберем некоторую вершину A_1', не связанную с A_1 никакой чередующейся цепью, и отнесем A_1' к произвольному классу, продолжая предыдущее построение. Затем в качестве исходной точки выберем третью вершину A_1'', не связанную с A_1 и A_1', и т. д. до тех пор, пока не будет определен класс каждой из вершин. Такой способ определения класса, очевидно, никогда не приведет к противоречию, состоящему в том, что какой-нибудь индивидуум имеет родителей из одного и того же класса. При этом не имеет значения, что обычно вершины графа можно разбить на классы несколькими способами.

После того как мы нашли условие, позволяющее непротиворечивым образом разбить все вершины графа на два класса, естественно задать вопрос, может ли граф, удовлетворяющий этому условию, отображать результаты некоторого генетического эксперимента. Нетрудно видеть, что для этого придется наложить на граф еще одно дополнительное ограничение.

Предположим, что мы имеем последовательность индивидуумов

$$D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n, \tag{7}$$

где каждый D_i является потомком предыдущего. На графе это дает ориентированную цепь (рис. 69). Рождения этих особей (7) должны и по времени происходить в том же порядке; следовательно, не может случиться, чтобы D_n оказался родителем D_1 (рис. 69), т. е. наш граф не должен содержать никакого ориентированного цикла; такие графы называются **ациклическими**.

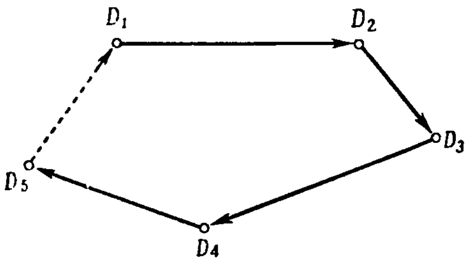


Рис. 69

Итак, мы нашли три условия, необходимые для того, чтобы некоторый ориентированный граф мог описывать генетический эксперимент.

1. *Для всех A справедливо неравенство $\rho^*(A) \leqslant 2$, т. е. никакая вершина не имеет более двух входящих ребер.*

2. *Число ребер каждого «чередующегося» цикла кратно четырем.*

3. *Граф является ациклическим.*

Обратно, если выполнены эти условия и все вершины соответствующим образом разбиты на классы, то весь граф можно рассматривать как описание некоторого генетического эксперимента: ребро (A_0, B) указывает на то, что B является непосредственным потомком A_0; другим родителем B является некоторая (хотя, возможно, и неизвестная нам) особь другого класса.

Наши три условия можно, следовательно, рассматривать как условия, которым подчиняется общая генетическая схема. На обычном языке это совершенно очевидные истины:

1. *Каждое существо имеет, самое большее, двух родителей.*

2. *Один из родителей является отцом, а второй — матерью.*

3. *Никто не может быть своим собственным потомком.*

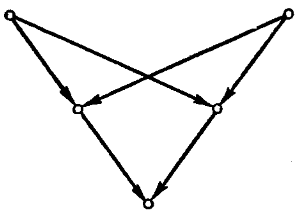


Рис. 70

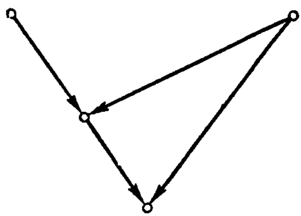


Рис. 71

В заключение сделаем еще одно замечание относительно генеалогических графов. Мы рассматривали наш граф как представление результатов произвольного генетического эксперимента. Если речь идет о человеке, мы должны исключить из нашего родословного дерева еще некоторые специальные конфигурации. Так, например, поскольку никто не может жениться на сестре или выйти замуж за брата, на нашем графе невозможны конфигурации такого вида, как на рис. 70. Так как никто не может вступить в брак со своим родителем, не может быть и конфигураций такого вида, как на рис. 71, и т. д.

Упражнения

1. Начертите граф, показывающий, что два индивидуума являются: а) двоюродными братьями (или сестрами, или братом и сестрой); б) тетей (или дядей) и племянником (или племянницей).

2. Определите всеми возможными способами классы вершин графа, изображенного на рис. 72.

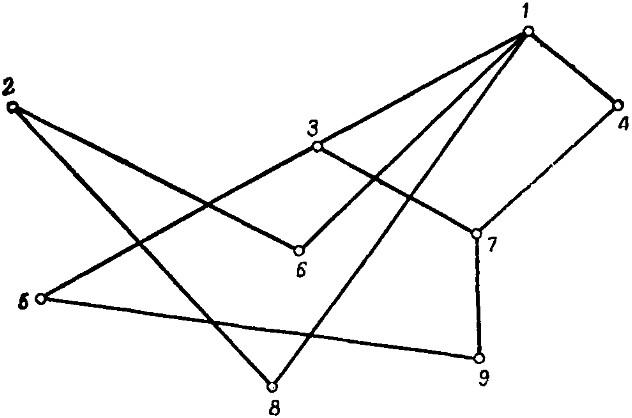


Рис. 72

3. Начертите конфигурацию, которая исключается из родословного дерева наложением запретов на браки: а) между сводными братом и сестрой; б) между дедушкой и внучкой; в) дяди или тети с племянником или племянницей.

ГЛАВА VI

Игры и головоломки

§ 1. Головоломки и ориентированные графы

Выше (§ 6 гл. II) мы уже показали, как многие головоломки могут быть изложены на языке теории графов. При этом различные положения соответствуют вершинам графа; ребра графа отвечают возможным переходам из одного положения в другое. Решение головоломки сводится к нахождению цепи, ведущей из заданного начального положения к одному или, быть может, нескольким конечным, или выигрышным, положениям.

Для таких головоломок мы использовали неориентированные графы. Это было основано на молчаливом предположении, что перемещения из одного положения в другое возможны в обоих направлениях. Это действительно было так для головоломок о перевозчике, о трех ревнивых мужьях и о передвижениях коня на шахматной доске.

Но для многих головоломок такие перемещения возможны только в одном направлении, и в этих случаях мы вынуждены пользоваться ориентированными графами. Если отдельные перемещения возможны в обоих направлениях, то соответствующие вершины соединяются двумя противоположно ориентированными ребрами; в этом случае можно также воспользоваться смешанным графом, оставив соответствующие ребра неориентированными. Для того чтобы решить такую головоломку, нужно найти ориентированную цепь, ведущую из начального положения на графе в требуемое конечное положение.

В качестве примера рассмотрим одну известную старинную головоломку. Некто имеет три кувшина A, B, C объемом соответственно 8, 5 и 3 литра. Кувшин A наполнен вином, и владелец хочет разделить вино на две равные части, переливая его из одного кувшина в другой, т. е. не используя никакой другой посуды, кроме самих этих кувшинов.

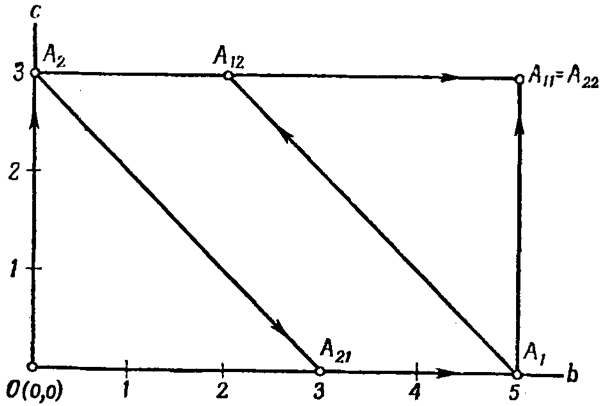


Рис. 73

Для графического решения этой головоломки мы воспользуемся следующей схемой. Каждому распределению вина по кувшинам B и C мы сопоставим пару чисел (b, c), где b — количество вина в кувшине B, а c — его количество в кувшине C. Вначале (b, c) имеет значение $(0, 0)$, а требуемому окончательному распределению соответствует значение $(4, 0)$ — кувшины A и B должны содержать вина поровну, а кувшин C должен быть пустым.

Так как каждую пару вещественных чисел (b, c) можно представить точкой на плоскости с координатами b, c, то всевозможные распределения вина по кувшинам мы можем представлять себе как точки, которые и будут вершинами нашего графа. Из формулировки задачи ясно, что мы не можем налить в кувшины B и C точно какие-то дробные части литра, поэтому в лучшем случае b может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, а c — значения 0, 1, 2, 3. Следовательно, всего имеется $6 \times 4 = 24$ возможных различных пар (b, c), т. е. наш граф содержит 24 вершины. В том случае, когда, разливая вино по кувшинам, можно заменить данное распределение (b_0, c_0) новым распределением (b_1, c_1), мы соединяем вершину (b_0, c_0) с вершиной (b_1, c_1) ориентированным ребром. В нашем

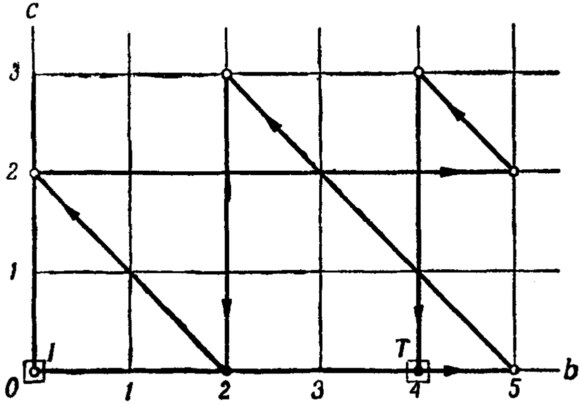


Рис. 74

примере из исходного положения $O(0, 0)$ выходят ребра OA_1 и OA_2 (рис. 73). Выходя из A_1, можно достигнуть вершин A_{11} (5, 3) и A_{12} (2, 3); выходя из A_2 — вершин A_{21} (3, 0) и A_{22} (5, 3). Затем мы можем перечислить все вершины, достижимые из этих с соблюдением правил игры, и далее продолжать таким же образом. Если конечная вершина T (4, 0) вообще может быть достигнута, то этот метод в конце концов к ней приведет. На самом деле существует много цепей, идущих от O к T, и мы можем поставить себе целью выбрать «лучшее» решение (в том смысле, чтобы на переливание вина было затрачено как можно меньше времени), определяя цепь, ведущую от O к T и содержащую наименьшее возможное число ребер.

В то время как из некоторой начальной вершины O к заданной вершине T можно прийти многими путями, имеются, вообще говоря, и такие вершины U, которых нельзя достигнуть из O описанным способом. В нашем примере такими недостижимыми вершинами U являются

$$U: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2).$$

Иными словами, из 24 вершин, первоначально включенных в число отвечающих «возможным» распределениям вина, 8 вообще не могут быть достигнуты и только для 16 приводящее к цели переливание вина возможно.

Заметим, что наше решение этой головоломки о кувшинах (рис. 74) не является достаточно хорошей иллюстрацией метода ориентированных графов, так как все эти переливания, как очень легко проверить, обратимы. Однако если мы начнем с другого распределения вина, имея, скажем, в начальный момент по одному литру вина в каждом из кувшинов B и C, т. е. с вершины $(1, 1)$, то все ребра будут направлены от $(1, 1)$.

Упражнения

1. Покажите, что, повторяя переливания, никогда нельзя перейти от одного из распределений множества U к другому.
2. Изобразите на рис. 74 точки множества U. На что указывает их размещение?
3. Решите ту же задачу для кувшинов какого-нибудь другого объема, например $A=12$, $B=7$, $C=4$.

§ 2. Теория игр

Решая головоломку, человек имеет дело с трудностями, присущими самой задаче, в то время как в игре он выступает против другого человека. Так как мы уже приступили к задачам из области математических развлечений, сделаем еще некоторые общие замечания относительно игр. Теория игр с двумя участниками в последние годы стала важной областью математических исследований. Она применяется ко многим задачам прикладного характера, например в технике и в экономике, где теория игр используется для решения вопросов, связанных с нахождением наиболее эффективного или наиболее экономичного способа выполнения каких-либо сложных заданий.

Здесь мы не можем изучать общую теорию игр. Мы только покажем, как можно использовать ориентированные графы для определения стратегии в такой игре, где ходы зависят лишь от воли играющих, но не от случая. Превосходным примером игр такого рода могут служить шахматы или шашки, и даже наивная игра «крестики и нолики» принадлежит к этой категории.

В подобных играх мы имеем, как обычно, некоторые положения, соответствующие вершинам, и некоторые переходы от одного положения к другому, соответствующие ориентированным ребрам. В каждом положении мы должны также знать, кто из двух игроков A_1^* и A_2^* имеет право сделать ход. Поэтому естественно разделить все положения на две группы, скажем A_1 и A_2, так чтобы каждый ход был представлен ориентированным ребром, идущим от A_1 к A_2 или от A_2 к A_1. Одно и то же положение может принадлежать одновременно и к A_1 и к A_2.

Игра тогда состоит фактически в том, что игрок A_1^* делает ход вдоль некоторого ребра в новое положение из множества A_2, а A_2^* возвращается обратно в A_1. Мы можем считать, что это — игра с единственной фигурой, которая движется вдоль ориентированных ребер взад и вперед между двумя множествами. В каждом положении каждый игрок, по-видимому, знает, какой ход он хочет сделать. Следовательно, мы можем даже совсем отказаться от игроков, считая, что каждый из них записал в некоторую книгу свою стратегию, т. е. указал, какой ход он выбрал бы при заданных условиях. Таким образом, вся игра определена, если известен ее граф, т. е. допустимые в игре ходы и стратегия играющих.

Для того чтобы выиграть игру, A_1^* должен двигаться из некоторого начального положения по ориентированной цепи, частично определяемой игроком A_2^*, до некоторого выигрышного положения B_{A_1} в множестве A_2; аналогично, для того чтобы выиграл A_2^*, его последним ходом должно быть перемещение в некоторое выигрышное положение B_{A_2} в множестве A_1.

Ничья может получиться в одном из следующих двух случаев. С одной стороны, могут быть некоторые конечные положения в множестве A_1 или A_2 — их можно назвать ничейными, — из которых не выходит ни одного ребра. В шахматах такое положение называется «патом». Другой тип ничьих — когда игра может «продолжаться до бесконечности»; чаще всего это связано с повторением некоторых ходов. Для того чтобы исключить это, можно потребовать, чтобы игра оканчивалась после некоторого числа повторений одних и тех же ходов. В шахматах игра оканчивается вничью после того, как одна и та же последовательность ходов повторена три раза; игра также лимитируется правилом, чтобы в течение 50 ходов какая-нибудь фигура была взята или какая-нибудь пешка была передвинута.

Теперь мы имеем совершенно ясную картину игры. Остается лишь один существенный вопрос: при каких условиях A_1^* (или A_2^*) может, играя должным образом, наверняка выиграть? На этот вопрос также можно ответить с помощью графа. Лучший способ разобраться в этом — идти назад от конечных выигрышных положений для A_1^*. Эти же положения являются проигрышными для A_2^*, поэтому обозначим совокупность таких положений через $\Pi_0(A_2)$. В множестве A_1 имеются некоторые положения с ребрами, или ходами, ведущими в $\Pi_0(A_2)$. Из таких положений A_1^* может выиграть одним ходом; мы обозначим это множество $B_1(A_1)$. Далее, обозначим через $\Pi_1(A_2)$ совокупность положений, либо принадлежащих $\Pi_0(A_2)$, либо таких, что из них возможно перемещение лишь в $B_1(A_1)$. Если игрок A_2^* попадает в такое положение, он либо уже проиграл, либо не может избежать проигрыша в течение одного хода. Мы можем, следовательно, рассматривать и это большее множество $\Pi_1(A_2)$ как множество проигрышных положений для A_2^* (рис. 75).

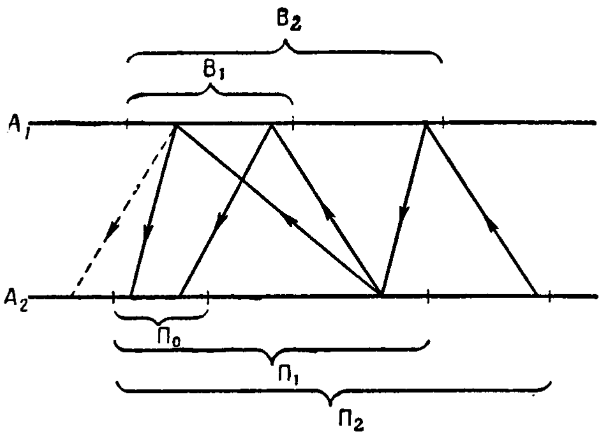


Рис. 75

Этот процесс расширения множества проигрышных положений для A_2^* можно продолжить. Мы получим тогда некоторое множество[1]) $B_2(A_1) \supseteq B_1(A_1)$ вершин из A_1 с ребрами, ведущими к $\Pi_1(A_2)$. Из таких положений A_1^* может выиграть, самое большее, за два хода. Далее, мы получим множество $\Pi_2(A_2)$ положений, из которых все ребра идут к $B_2(A_1)$ и в которых A_2^* не может избежать поражения, самое большее, в два хода. Повторение этого рассуждения приводит к двум последовательностям множеств соответственно в A_1 и A_2:

$$B_1(A_1) \subseteq B_2(A_1) \subseteq \ldots,$$
$$\Pi_0(A_2) \subseteq \Pi_1(A_2) \subseteq \ldots,$$

[1]) По поводу символа $\subseteq$ см. ниже, стр. 121.

таких, что если A_1^* попадает в положение из множества $B_k(A_1)$, он может выиграть через k ходов или раньше. Значит, если начальное положение для A_1^* принадлежит некоторому множеству $B_k(A_1)$, то A_1^* всегда может выиграть, если же это не так, то A_2^* должен стараться помешать A_1^* попасть в такое положение. Выигрышные положения для A_2^* можно найти таким же образом, а в остальных случаях всегда можно добиться ничьей.

В принципе все это рассуждение прекрасно: оно показывает, как совсем небольшое знакомство с теорией графов позволяет проанализировать все положения игры. Если бы это было всегда осуществимо и практически, все такие игры с двумя игроками стали бы тривиальными и каждый игрок всегда знал бы, какой ход является плохим и какой хорошим. К счастью, совершенно невероятно, чтобы, например, нашу любимую игру в шахматы ожидала столь печальная участь. Число положений в шахматах настолько велико, что даже наши самые мощные вычислительные машины вряд ли смогут уронить репутацию шахмат как лучшей интеллектуальной игры. Опыт крупных турниров указывает на то, что играющий белыми, по-видимому, имеет некоторое преимущество, но вопрос о том, является ли это положение выигрышным в том смысле, что некоторый сверхъестественный мозг всегда может привести белые фигуры к победе, вероятно, навсегда останется нерешенным.

В заключение рассмотрим в качестве примера две простые игры. Первая из них состоит в следующем. На столе лежит кучка спичек. Игроки A_1^* и A_2^* по очереди берут из нее по нескольку спичек, скажем от 1 до 5. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Игрок A_1^* может достичь выигрышного положения 0 из положений $B_1(A_1)$, когда остается 1, 2, 3, 4 или 5 спичек. Только в одном случае — когда имеется 6 спичек — A_2^* вынужден перейти в $B_1(A_1)$. Это число 6 в свою очередь может быть достигнуто игроком A_1^* в тех случаях, когда остается 7, 8, 9, 10 или

11 спичек. Следовательно, множество $B_2(A_1)$ состоит из всех чисел от 1 до 11, за исключением 6, а множество $\Pi_2(A_2)$ состоит из чисел 0, 6, 12. Продолжая это рассуждение, находим, что A_1^* может выиграть из всех положений, когда число спичек не делится на 6. После каждого своего хода он должен оставить число спичек, делящееся на 6. Если число спичек в первоначальной кучке делилось на 6 и если A_1^* делает первый ход, то A_2^* всегда может выиграть точно таким же образом.

Наш второй пример — старинная китайская игра «ним». В простейшей форме она состоит в следующем. На столе лежат три кучки фишек. Каждый ход заключается в том, что игрок выбирает кучку и берет из нее по крайней мере одну фишку; он может даже взять их все. Здесь снова выигрывает тот, кто возьмет последнюю фишку. В этом случае мы дадим описание только всех выигрышных положений. Кстати, это будет упражнением на представление чисел в двоичной системе счисления. Вы, вероятно, уже знакомы с разложением целых чисел по степеням двойки. Первые несколько представлений таковы:

$$\begin{aligned}
1 &= (1),\\
2 &= (1,\ 0) = 1\cdot 2+0,\\
3 &= (1,\ 1) = 1\cdot 2+1,\\
4 &= (1,\ 0,\ 0) = 1\cdot 2^2+0\cdot 2+0,\\
5 &= (1,\ 0,\ 1) = 1\cdot 2^2+0\cdot 2+1,\\
6 &= (1,\ 1,\ 0) = 1\cdot 2^2+1\cdot 2+0,\\
7 &= (1,\ 1,\ 1) = 1\cdot 2^2+1\cdot 2+1,\\
8 &= (1,\ 0,\ 0,\ 0) = 1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2+0,\\
9 &= (1,\ 0,\ 0,\ 1) = 1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2+1,\\
10 &= (1,\ 0,\ 1,\ 0) = 1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2+0.
\end{aligned}$$

Менее привычно так называемое «поразрядное сложение», которое можно производить над этими «двоичными числами». Для того чтобы показать, как это делается, рассмотрим два примера:

$$\begin{array}{cccc} 1&0&1&1\\ &1&0&1\\ &1&1&0\\ 1&1&0&0\\ \hline 0&1&0&0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} 1&1&1&1\\ &1&1&0\\ &&1&1\\ \hline 1&0&1&0 \end{array}$$

Как обычное сложение, это сложение выполняется по столбцам, но сумма считается равной нулю, если в соответствующем столбце число единиц четно, и единице, если их число нечетно. Как видите, это сложение отличается от обычного сложения в двоичной системе счисления.

Вернемся теперь к игре «ним». Для каждого положения найдем поразрядную сумму трех чисел, показывающих, сколько фишек в каждой кучке. Если эти числа равны, например, 13, 12, 7 или 14, 11, 5, то соответствующие суммы будут иметь вид

$$\begin{array}{cccc} 1&1&0&1\\ 1&1&0&0\\ &1&1&1\\ \hline 0&1&1&0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} 1&1&1&0\\ 1&0&1&1\\ &1&0&1\\ \hline 0&0&0&0 \end{array}$$

Назовем *нулевым* такое положение, для которого поразрядная сумма, как во втором примере, состоит из одних нулей; остальные положения мы будем называть *регулярными*. Выигрышными положениями для A_1^* являются все регулярные положения; проигрывает он в нулевых положениях.

Доказать это просто. Если A_1^* находится в регулярном положении, он может взять несколько фишек так, чтобы A_2^* досталось нулевое положение. Для этого можно выбрать кучку, число фишек которой имеет единицу в том столбце, где стоит первая единица суммы; из этой кучки можно взять несколько фишек так, чтобы новая поразрядная сумма была равна нулю. Так, в нашем первом примере мы можем выбрать кучку, в которой $13=(1, 1, 0, 1)$ фишек, и взять 2 фишки, оставив $11=(1, 0, 1, 1)$. В этом частном случае мы могли бы также брать фишки из каждой из остальных двух кучек, заменяя 12 числом $10=(1, 0, 1, 0)$ или 7 числом $1=(0, 0, 1)$.

Если A_1^* переведет A_2^* в нулевое положение, то что бы ни делал A_2^*, он вернет A_1^* снова в регулярное положение; действительно, какое бы число фишек ни взял A_2^*, он изменит в одном из чисел хотя бы одну из цифр; следовательно, изменится и соответствующая цифра в поразрядной сумме. Игра закончится, если A_1^* переведет A_2^* в наименьшее нулевое положение, когда все кучки пустые. Как видите, эта игра несколько напоминает ту, которую мы рассматривали в первом примере.

Ясно, что тот же метод применим и в том случае, когда имеется более трех кучек. Заметим, что при рассмотрении игры «ним» мы не начинали с пустого положения, чтобы, двигаясь назад, найти все выигрышные положения. Это можно было бы сделать и, конечно, с тем же самым результатом. Однако легче было использовать известное решение и только проверить его правильность.

Упражнения

1. Сыграйте в игру «ним» с одним из ваших друзей.
2. Определите первые выигрышные и проигрышные множества $В_1(A_1)$, $В_2(A_1)$, $П_1(A_2)$, $П_2(A_2)$ в игре «ним».
3. Рассмотрите такую игру. Имеются две кучки спичек, и каждый играющий может взять либо одну спичку из одной кучки, либо по одной из каждой кучки. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Найти множества $В_1(A_1)$, $В_2(A_1)$, $П_1(A_2)$, $П_2(A_2)$. Можете ли вы указать общее правило определения выигрышных положений?

§ 3. Парадокс спортивных обозревателей

После окончания футбольного сезона, когда вновь и вновь обсуждаются все происшествия во время игр, особенности команд и игроков, до тех пор пока эта тема полностью себя не исчерпает, почти всегда находится ловкий журналист, преподносящий своим читателям тот поразительный факт, что сильнейшей командой на самом деле оказалась не великолепная команда «Руки вверх» (Р), а скорее унылый спортивный клуб «Пожалейте меня» (П).

В подтверждение этого приводится последовательность игр, в которых П выиграла у А, А — у Б и т. д. до тех пор, пока Р не окажется в самом конце этого ряда.

Для того чтобы выяснить, при каком условии такая ориентированная элементарная цепь действительно может быть найдена, рассмотрим случай, когда имеется n команд или игроков

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n, \tag{1}$$

каждый из которых играет со всеми остальными. Для простоты предположим, что ничейные результаты исключены. Соответствующий граф будет в этом случае полным (см. § 2 гл. I), т. е. каждые две его вершины будут соединены некоторым ориентированным ребром. Наш первый результат таков.

Теорема 1. *В полном ориентированном графе всегда найдется ориентированная элементарная цепь, проходящая через все его вершины.*

Доказательство. Достаточно показать, что если мы имеем ориентированную элементарную цепь

$$\mathscr{P} = (A_1,\ A_2),\ (A_2,\ A_3),\ \ldots,\ (A_{k-1},\ A_k), \tag{2}$$

проходящую только через некоторые из вершин (1), то мы всегда сможем найти ориентированную элементарную цепь, содержащую на одну вершину больше. Итак, добавим к $\mathscr{P}$ произвольную вершину A_{k+1} и рассмотрим различные возможные ориентации ребер, соединяющих A_{k+1} с вершинами из $\mathscr{P}$.

Если найдется ребро, направленное от A_k к A_{k+1}, мы можем просто продолжить $\mathscr{P}$ до A_{k+1}. Предположим поэтому, что ребро (A_{k+1}, A_k) направлено от A_{k+1} (рис. 76), и рассмотрим последовательно ребра, соединяющие A_{k+1} с $A_{k-1}, A_{k-2}, \ldots, A_1$. Предположим, что по крайней мере одно из них направлено к A_{k+1}, и

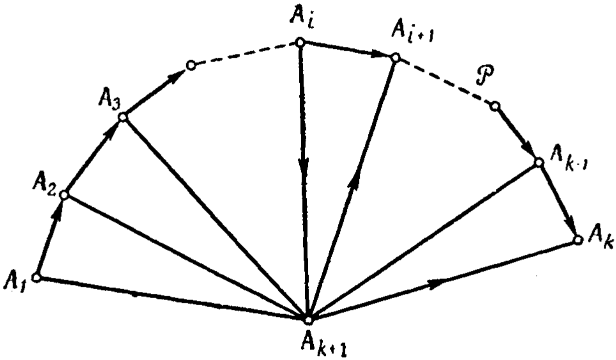


Рис. 76

пусть (A_i, A_{k+1}) — первое такое ребро в последовательности (A_{k+1}, A_{k-1}), (A_{k+1}, A_{k-2}), ..., (A_{k+1}, A_{i+1}), (A_i, A_{k+1}). Тогда мы имеем пару смежных ребер

$$(A_i, A_{k+1}), \quad (A_{k+1}, A_{i+1}), \tag{3}$$

причем первое из них направлено от A_i к A_{k+1}, а второе — от A_{k+1} к A_{i+1}. Это дает ориентированную элементарную цепь

$$A_1, \ldots, A_i, A_{k+1}, A_{i+1}, \ldots, A_k.$$

Остается рассмотреть случай, когда *все* ребра направлены от A_{k+1} к $\mathscr{P}$. В этом случае мы можем начать элементарную цепь с ребра (A_{k+1}, A_1) и продолжить ее по $\mathscr{P}$. Заметим, что это единственный случай, когда приходится менять начальную вершину цепи.

Этот результат показывает, что после окончания турнира всегда можно расположить противников в ориентированную цепь победителей. Теорема не вполне объясняет, однако, что мы имели ввиду, говоря о парадоксе спортивных обозревателей. Ведь здесь требовалось взять некоторую фиксированную вершину A_1 и провести ориентированную цепь от нее через все остальные вершины. Возможность этого не вытекает из предшествующего рассуждения, так как при продолжении цепи $\mathscr{P}$ могло случиться, что нам пришлось бы изменить ее начальную вершину.

На самом деле не всегда можно провести такую цепь. Это очевидно, например, если A_1 — «побитая команда», т. е. такая команда, которая имела в турнире одни только поражения. В более общем случае

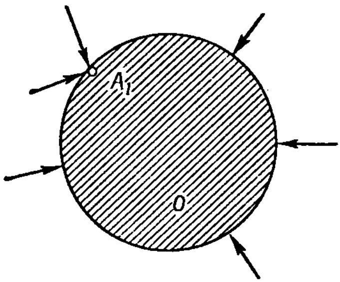


Рис. 77

такая цепь из A_1 не может быть найдена и тогда, когда A_1 принадлежит к «побитой группе» O, члены которой конкурировали, так сказать, только друг с другом, поскольку ни один из членов этой группы не мог одержать победу над противником, к ней не принадлежащим. На соответствующем графе (рис. 77) имеются только ориентированные ребра, направленные к O, и ни одно из них не направлено от O. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если A_1 не принадлежит ни к какой «побитой группе», то всегда найдется ориентированная цепь, начинающаяся в A_1 и проходящая через все вершины графа.*

Доказательство. Мы построим из A_1 элементарную цепь $\mathscr{P}$, такую же, как (2), и продолжим ее настолько далеко, насколько это возможно. Из доказательства теоремы 1 видно, что цепь $\mathscr{P}$ можно продолжить, не меняя начальной вершины A_1, до любой вершины A_{k+1}, для которой найдется ориентированное ребро, выходящее из $\mathscr{P}$. Значит, в том случае, когда $\mathscr{P}$ не может быть продолжена, ее вершины образуют «побитую группу». Однако по условию A_1 не принадлежит к такой группе, и, следовательно, цепь $\mathscr{P}$ должна пройти через все вершины графа.

На самом деле справедливо даже следующее утверждение.

Теорема 3. *На ориентированном полном графе, не содержащем «побитых групп», имеется ориентированный цикл, проходящий через все вершины графа.*

Доказательство. Если $\mathscr{P}$ есть элементарная цепь, проходящая через все вершины графа в конечную точку A_n, то непременно найдутся ребра, выходящие из

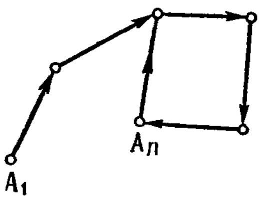


Рис. 78

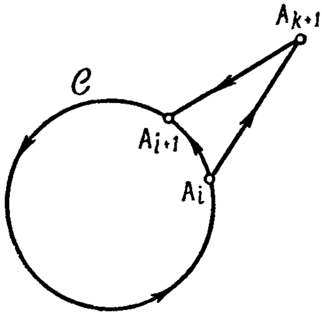


Рис. 79

A_n, так как A_n не является «побитой командой». Такое ребро (A_n, A_i) должно вести к одной из предыдущих вершин A_i на $\mathscr{P}$, а это уже дает некоторый ориентированный цикл (рис. 78).

Предположим, что такой ориентированный цикл

$$\mathscr{C}=(A_1, A_2), \ldots, (A_{k-1}, A_k), (A_k, A_1)$$

содержит не все вершины графа, и пусть A_{k+1} — такая вершина, что между $\mathscr{C}$ и A_{k+1} есть ребра обоих направлений. Тогда, как на рис. 79, найдутся *смежные* ребра, соединяющие A_{k+1} с $\mathcal{C}$ и противоположно ориентированные; в этом случае можно расширить $\mathcal{C}$, заменяя ребро (A_i, A_{i+1}) ребрами (A_i, A_{k+1}) и (A_{k+1}, A_{i+1}) (рис. 79).

Остается рассмотреть случай, когда вершины, не принадлежащие $\mathcal{C}$, распадаются на два класса: вершины M, из которых все ребра направлены к $\mathcal{C}$, и вершины N, все ребра которых направлены от $\mathcal{C}$. При

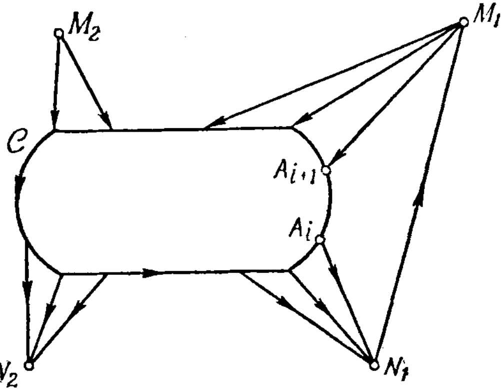


Рис. 80

этом должны существовать вершины обоих типов, так как если бы не нашлось вершин M, то множество $\{N\}$ всех вершин N образовало бы «побитую группу», а если бы не было вершин N, то такую группу образовали бы вершины из $\mathcal{C}$ (рис. 80).

Вершины множества $\{M\}$ соединены ребрами с вершинами из $\{N\}$. Точнее, должно найтись по меньшей мере одно ребро (N_1, M_1), направленное от некоторой вершины N_1 множества $\{N\}$ к некоторой вершине M_1 множества $\{M\}$, так как в противном случае множество $\{N\}$ было бы «побитым». Но тогда снова можно расширить $\mathcal{C}$, заменяя ребро (A_i, A_{i+1}) тремя ребрами

$$(A_i, N_1), \quad (N_1, M_1), \quad (M_1, A_{i+1}).$$

Так мы можем постепенно расширять цикл $\mathcal{C}$ до тех пор, пока в него не войдут все вершины графа.

Упражнения

1. Рассмотрите таблицу результатов какого-нибудь кругового шахматного турнира. Найдите ориентированную элементарную цепь, проходящую через все вершины соответствующего графа. Выясните, имеются ли какие-нибудь «побитые группы»; если нет, попытайтесь найти ориентированный цикл, проходящий через все вершины графа.
2. Как изменятся предыдущие рассуждения, если считать возможными также и ничьи?

ГЛАВА VII

Отношения

§ 1. Отношения и графы

До сих пор мы рассматривали различные «практические» приложения графов — к некоторым задачам, возникающим в повседневной жизни, а также к играм и головоломкам. Мы подобрали материал так, чтобы он был связан только с общеизвестными и простыми понятиями. В этой главе мы постараемся показать, что графы тесно связаны с некоторыми основными понятиями математики, представляя собой фактически лишь другой способ описания этих понятий.

Всякая математическая система имеет дело с множеством каких-то объектов, или элементов. Например, такими элементами являются числа более или менее общей природы: мы можем рассматривать множество натуральных (целых положительных) чисел, положительных чисел, рациональных чисел, вещественных чисел, комплексных чисел. В алгебре мы имеем дело с элементами, которые можно складывать, вычитать, перемножать и т. д. В геометрии мы обычно рассматриваем определенные множества точек или совокупности точек специального вида, такие, как прямые линии, окружности, плоскости и т. д. В логике мы изучаем свойства различного рода утверждений.

Для того чтобы построить математическую теорию, нам нужны не только сами эти элементы, но также и *отношения* между ними. Приведем несколько примеров. Для чисел имеет смысл понятие равенства: $a=b$. Если числа a и b различны, мы пишем $a\neq b$. Запись $a>b$ означает, что a больше, чем b, аналогично $a \geqslant b$

означает, что a либо больше, либо равно b. Если a и b — целые числа и b делится на a, мы пишем $a|b$.

В геометрии две фигуры, скажем два треугольника, могут быть равными (это отношение записывается так: $A=B$) или одна фигура может содержать внутри себя другую (в этом случае мы пишем $A\supset B$). Две прямые могут быть параллельными ($A\|B$) или взаимно перпендикулярными (пересекаться под прямым углом, $A\perp B$). В логике одно утверждение или предложение может вытекать из другого ($A\to B$). В теории множеств отношение $a\in S$ между элементом a и множеством S означает, что элемент a принадлежит множеству S.

Все эти отношения касаются двух объектов, поэтому они часто называются **бинарными отношениями**, или, для краткости, просто **отношениями**. Имеются и другие типы отношений, например **тернарные отношения**, касающиеся трех объектов. В качестве примера такого отношения укажем следующее: точка A лежит между точками B и C.

Ввиду важности понятия отношения в математике необходимо ввести для него общее определение. Для общего (бинарного) отношения, обозначаемого символом R, мы пишем

$$aRb \tag{1}$$

и говорим, что *b находится в отношении R к a*. Это значит, что b принадлежит некоторому специальному множеству P_a, определяемому этим отношением для каждого a. Так, например, отношение $a>b$ означает, что b принадлежит множеству всех чисел, меньших чем a. Для целых чисел a и b отношение $a|b$, или a является делителем b, означает, что b принадлежит множеству всех целых чисел, кратных a. Таким образом, запись (1) является лишь другим способом выражения того факта, что b принадлежит множеству R_a, которое отношение R сопоставляет элементу a.

Вернемся теперь к графам. Фактически каждый ориентированный граф G определяет некоторое отношение в множестве его вершин. Это отношение можно записать в виде

$$aGb; \tag{2}$$

оно означает, что на графе имеется ориентированное ребро, идущее от a к b. Соответствующее множество $R_a = G_a$ состоит из всех таких вершин b графа G, к которым идут ребра от a. Таким образом, сказать: на графе G имеется ребро (a, b) — это все равно что сказать: имеет место отношение (2).

Это могло бы склонить нас рассматривать теорию графов как некоторую специальную часть теории отношений. Однако на самом деле две эти теории в некотором смысле эквивалентны. Предположим, что в множестве S определено некоторое отношение R, которое каждому элементу a из S относит некоторое

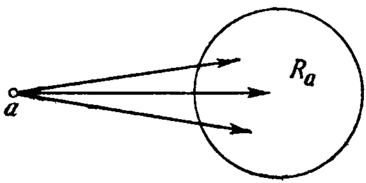


Рис. 81

множество R_a. Тогда можно построить граф G отношения R, просто проводя ребра из вершины a к каждой вершине из R_a (рис. 81).

Итак, теория отношений и теория графов отличаются только подходами, но не содержанием; почему же в таком случае математики рассматривают их раздельно? Это объясняется отчасти привычкой и традициями, подобно тому как в аналитической геометрии говорят о прямой линии, а в алгебре то же самое понятие рассматривается как линейное уравнение с двумя неизвестными. Однако на самом деле имеется небольшое различие в методах этих теорий. Оно состоит в том, что теория отношений имеет дело главным образом с бесконечными множествами R_a; в качестве примера приведем отношение $a > b$ для вещественных чисел. На соответствующем графе должно было бы быть бесконечно много вершин и в каждой вершине — бесконечно много ребер. При изучении таких графов наша геометрическая интуиция почти не может нам помочь. Когда выше мы рассматривали некоторые вопросы теории графов, наше положение очень облегчалось возможностью наглядно представлять себе граф как совокупность конечного числа вершин и соединяющих их ребер. Однако для многих типов отношений предшествующие рассуждения потеряют свою убедительность; в действительности они могут даже оказаться неверными для графов с бесконечным множеством вершин и ребер — и уж, во всяком случае, здесь пришлось бы давать совершенно новые доказательства.

Упражнения

1. Перечислите какие-нибудь отношения, отличные от упомянутых выше. Попытайтесь самостоятельно придумать какие-нибудь новые примеры.
2. Для множества чисел 2, 3, 4, 5, 6 начертите графы и перечислите множества R_x для каждого из следующих отношений:

$$\text{а) } x > y, \quad \text{б) } x \neq y, \quad \text{в) } x \mid y.$$

§ 2. Специальные условия

Новые точки зрения обычно приводят и к новым заключениям. Нам придется ввести в теорию графов некоторые основные положения теории отношений, чтобы сделать параллелизм между обеими теориями более полным.

Пусть дано некоторое отношение R. Может случиться, что какой-то элемент a находится в этом отношении к самому себе:

$$aRa. \tag{3}$$

Так, например, каждая прямая A считается параллельной самой себе: $A \| A$ [1]), каждое число удовлетворяет условию $a \geqslant a$ и т. д. На графах же у нас до сих

[1]) В русской учебной литературе совершенно естественное отношение $A \| A$ часто, к сожалению, затушевывается.

пор не был предусмотрен этот случай. Ему должно соответствовать ребро (a, a), конечные точки которого совпадают. Такое ребро называется **петлей** (рис. 82).

Отношение R, для которого условие (3) выполняется *при любом* a, называется **рефлексивным**; соответствующий граф в каждой вершине имеет петлю. В качестве примера рефлексивных отношений можно указать уже названное выше отношение параллельности $A \| B$ для прямых или отношение $a \geqslant b$ для чисел.

Если условие (3) не выполняется *ни для одного* элемента, то R называется **антирефлексивным отношением**. На соответствующем графе ни одна

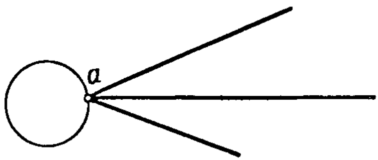


Рис. 82

вершина не имеет петли. В качестве примера можно указать отношение перпендикулярности для прямых: $A \perp B$.

Для каждого отношения R можно определить **обратное отношение** R^*, считая, что bR^*a в том и только в том случае, когда aRb. Так, например, для отношения $a | b$, т. е. a является делителем b, обратным служит отношение

$$b \,|^*\, a,$$

означающее, что b кратно a. Часто для отношения R^* вводится специальный символ; так, для отношения a больше, чем b, $a > b$, обратным является отношение $b < a$, т. е. b меньше, чем a; отношение $a \in A$, a есть элемент множества A, имеет в качестве обратного $A \supset a$, т. е. A содержит a.

Из определения обратного отношения видно, что если на графе G, соответствующем R, имеется ребро (a, b), то на графе G^*, соответствующем R^*, должно быть ребро (b, a). Иными словами, граф G^* является **обратным** для G, т. е. графом с теми же ребрами, что и G, но противоположно ориентированными.

Может случиться, что для некоторой пары элементов a и b и некоторого отношения R мы имеем одновременно

$$aRb \quad \text{и} \quad bRa \tag{4}$$

На соответствующем графе должны быть два противоположно ориентированных ребра (a, b) и (b, a). Такую пару ребер можно заменить одним неориентированным ребром, так же как и в случае улиц с двусторонним движением.

Для некоторых отношений одно из условий (4) всегда влечет за собой другое. Такие отношения называются **симметрическими**. В качестве примера можно указать отношение параллельности $A \parallel B$, отношение перпендикулярности $A \perp B$ и отношение равенства $A = B$. В соответствии с только что сделанным замечанием можно сказать, что

Симметрическому отношению соответствует граф с неориентированными ребрами; обратно, граф с неориентированными ребрами определяет некоторое симметрическое отношение.

Существуют и такие отношения R, для которых из выполнения одного из условий (4) вытекает, что второе заведомо не имеет места. В качестве примера приведем отношение $a > b$. Такие отношения называются **антисимметрическими**. Их графы не имеют неориентированных или противоположно ориентированных ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин; кроме того, на них нет и петель, т. е. эти отношения антирефлексивны.

Имеется еще одно свойство, играющее важную роль в теории отношений. Мы говорим, что отношение R **транзитивно**, если из двух условий

$$aRb \quad \text{и} \quad bRc$$

вытекает, что

$$aRc.$$

Примером служат отношения параллельности $A \parallel B$, равенства $a = b$, отношения a больше, чем b: $a > b$; а

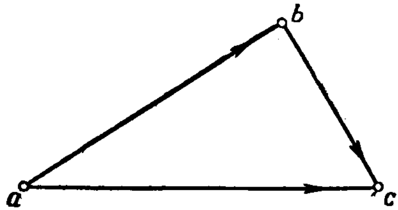


Рис. 83

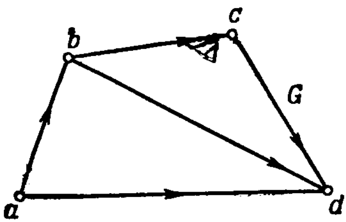


Рис. 84

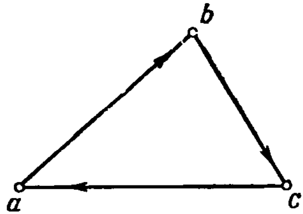


Рис. 85

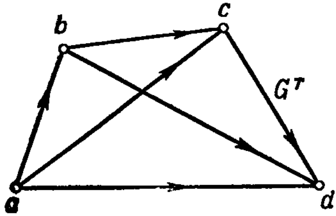


Рис. 86

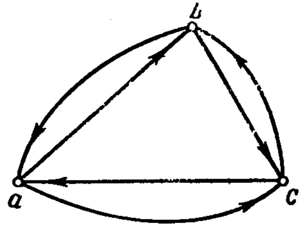


Рис. 87

является делителем $b: a|b$. С другой стороны, отношения $A \perp B$ и $a \neq b$ не являются транзитивными.

Граф транзитивного отношения обладает следующим характеристическим свойством: для каждой пары ребер

$$(a, b), \quad (b, c) \tag{5}$$

имеется *замыкающее ребро* (a, c) (рис. 83). Применяя это свойство повторно, мы приходим к заключению, что если на таком графе есть ориентированная цепь, идущая от вершины x к другой вершине y, то есть также и ориентированное ребро (x, y).

Предположим, наконец, что у нас имеется граф G с ориентированными ребрами, не являющийся транзитивным. Например, граф рис. 84 не имеет ребра между вершинами a и c, а граф рис. 85 имеет ребро (c, a) в то время как замыкающим для ребер (a, b) и (b, c) должно бы быть ребро (a, c). Во всех случаях ориентированный граф G можно сделать транзитивным, добавляя к нему ориентированные ребра до тех пор, пока не будет присоединена замыкающая для каждой пары его последовательных ребер. Полученный так новый граф G^T называется транзитивным замыканием графа G. На рис. 86 и 87 показаны транзитивные замыкания соответственно графов рис. 84 и 85. Заметим, что после присоединения к графу рис. 85 замыкающих ребер (a, c) — для (a, b) и (b, c), (c, b) — для (c, a) и (a, b) и (b, a) — для (b, c) и (c, a), полученное транзитивное замыкание окажется графом некоторого симметрического отношения.

Упражнения

1. Приведите примеры других отношений, обладающих упомянутыми выше свойствами.
2. Рассмотрите семейные отношения:
   а) A является потомком B;
   б) A и B имеют общего предка.
3. Образуйте транзитивные замыкания графов, изображенных на рис. 49 и 50.

§ 3. Отношения эквивалентности

Среди многих видов математических отношений *отношения эквивалентности* играют особенно важную роль. Отношение эквивалентности, обычно обозначаемое символом $\sim$, характеризуется следующими тремя свойствами:

1°. *Рефлексивностью*: $a \sim a$;

2°. *Симметричностью*: из $a \sim b$ вытекает $b \sim a$;

3°. *Транзитивностью*: из $a \sim b$ и $b \sim c$ вытекает $a \sim c$.

Пример, немедленно приходящий на ум, — отношение равенства: $a=b$. Действительно, отношение эквивалентности обладает свойствами, аналогичными свойствам равенства, и во многих случаях эквивалентность рассматривается как своего рода равенство; хорошим примером может служить конгруэнтность геометрических фигур, которая недаром часто тоже называется равенством.

В теории чисел используется отношение эквивалентности другого типа, которое называется сравнимостью. Если a, b и m — три целых числа, то запись

$$a \equiv b \pmod{m} \tag{6}$$

означает, что разность $a-b$ делится на m или, иными словами, что для некоторого целого k

$$a = b + km. \tag{7}$$

В теории чисел отношение (6) выражают словами: число a сравнимо с b по модулю m. В качестве примеров приведем сравнения

$$11 \equiv 2 \pmod{3},$$

$$-7 \equiv 19 \pmod{13}.$$

Для единообразия запись (6) используется иногда и в тех случаях, когда обычно применяются другие термины. Так, например, сравнения

$$b \equiv 0 \pmod{2}, \qquad c \equiv 1 \pmod{2}$$

означают соответственно, что b является четным, а c — нечетным числом. Аналогично сравнение

$$a \equiv 0 \pmod{m}$$

означает, что a делится на m.

Доказать, что отношение сравнимости чисел (6) удовлетворяет трем условиям, которым должно удовлетворять отношение эквивалентности, очень просто:

1) $a \equiv a \pmod{m}$, так как $a = a + 0 \cdot m$;

2) если $a \equiv b \pmod{m}$, то, согласно (7), $a = b + km$, откуда $b = a + (-k)m$, так что $b \equiv a \pmod{m}$;

3) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то по формуле (7)

$$a = b + km, \quad b = c + lm$$

и, следовательно,

$$a = c + lm + km = c + (l + k)m,$$

т. е. $a \equiv c \pmod{m}$.

При $m = 0$ сравнение (6) в силу условия (7) сводится к обычному равенству.

Отношение эквивалентности, как мы сейчас увидим, можно истолковать и другим способом. Прежде всего заметим, что оно всегда определено для элементов некоторого множества S; два элемента из S либо эквивалентны, либо не эквивалентны между собой. Так, сравнение (6) рассматривается на множестве S всех целых чисел. Отношение параллельности $A \| B$ является отношением эквивалентности, определенным на множестве всех прямых плоскости или пространства.

Предположим, что для элементов некоторого множества S определено какое-то отношение эквивалентности: $a \sim b$. Рассмотрим все элементы b, эквивалентные a. Они образуют множество B_a, являющееся частью S. Такие множества B_a соответствуют введенным выше для отношения общего вида множествам R_a, но в этом случае мы будем называть их **классами**

эквивалентности, отвечающими рассматриваемому отношению эквивалентности.

Каковы свойства этих классов? Так как отношение эквивалентности рефлексивно, $a \sim a$, то класс B_a элемента a содержит сам элемент a. Предположим теперь, что элемент b принадлежит B_a, т. е. что $a \sim b$, а элемент c принадлежит классу B_b элемента b, т. е. $b \sim c$ (рис. 88). Ввиду транзитивности отношения эквивалентности отсюда вытекает, что $a \sim c$, т. е. c принадлежит классу B_a. Это означает, что весь класс

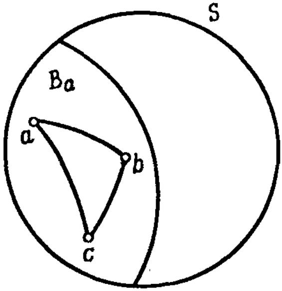


Рис. 88

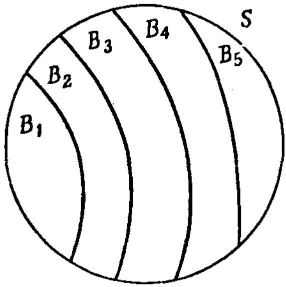


Рис. 89

эквивалентности B_b целиком содержится в B_a. Но если $a \sim b$, то и $b \sim a$ (так как отношение эквивалентности симметрично), а значит, и B_a содержится в B_b. Таким образом, если $a \sim b$, то $B_a = B_b$.

Возьмем теперь в множестве S два не эквивалентных между собой элемента a и b; мы будем обозначать это, перечеркивая знак эквивалентности: $a \not\sim b$. В этом случае классы B_a и B_b **не пересекаются**, т. е. не имеют общих элементов. Действительно, если бы какой-то элемент c принадлежал одновременно и B_a и B_b, то мы имели бы

$$a \sim c \quad \text{и} \quad b \sim c;$$

но тогда $a \sim b$, что противоречит предположению.

Так как каждый элемент принадлежит в точности одному классу, мы получаем разбиение всего множества S на непересекающиеся классы эквивалентности (рис. 89). Каждый такой класс состоит из всех эквивалентных друг другу элементов.

В качестве примера рассмотрим сначала совокупность S всех прямых на плоскости и отношение $A \| B$; здесь каждый класс эквивалентности состоит из всех прямых, имеющих одно и то же *направление*.

Вот еще один пример. Теоретико-числовое отношение сравнимости чисел (6) делит все целые числа на классы эквивалентности; они называются классами вычетов по модулю m. Каждый класс состоит соответственно из чисел

$$B_0 = \{km\}, \quad B_1 = \{1 + km\},$$
$$B_2 = \{2 + km\}, \quad \ldots, \quad B_{m-1} = \{m - 1 + km\}.$$

Иными словами, B_r состоит из всех чисел, дающих при делении на m остаток r. Для $m=2$ это — разделение всех целых чисел на четные и нечетные; если $m=3$, получаются числа трех типов:

$$3k, \quad 3k+1, \quad 3k+2.$$

Мы видим, что каждое отношение эквивалентности определяет некоторое разбиение всех элементов множества S на непересекающиеся классы, как показано на рис. 89. Предположим теперь, что, обратно, нам дано некоторое разбиение множества S на непересекающиеся множества B_i. Тогда мы можем определить на множестве S некоторое отношение эквивалентности, полагая просто, что $a \sim b$ в том и только в том случае, когда a и b принадлежат одному и тому же множеству B_i. Ясно, что три условия, которым должно подчиняться отношение эквивалентности, будут выполнены. Отсюда видно, что отношение эквивалентности и разбиение множества S на непересекающиеся части — это две стороны одного и того же вопроса. Каждое отношение эквивалентности приводит к разбиению множества на непересекающиеся части; обратно, каждое такое разбиение однозначно определяет некоторое отношение эквивалентности.

Приведем еще один — не математический — пример. Будем говорить, что двое людей имеют одно и то же подданство, если они являются гражданами одного и того же государства; обратно, по подданству все человечество делится на классы (за исключением людей, не имеющих гражданства; каждый из них составляет особый класс).

Вспомним, наконец, о третьем аспекте отношения эквивалентности: его графе. Обозначим множество вершин графа через S; все вершины, принадлежащие классу B_i, соединены между собой ребрами, так что для каждого множества B_i вершин мы имеем полный

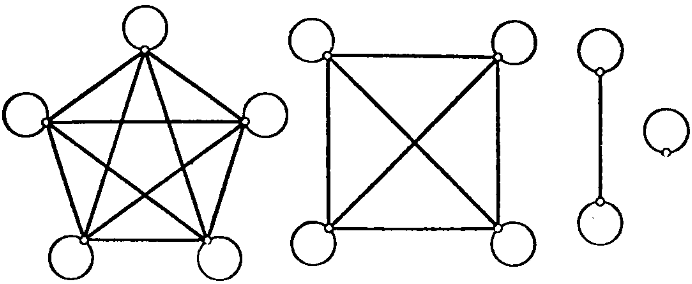


Рис. 90

граф G_i; кроме того, в каждой вершине такого графа есть петля. Не существует ребер, соединяющих вершины из двух различных классов, так что граф G рассматриваемого отношения R содержит графы G_i в качестве своих связных компонент.

На рис. 90 изображен граф отношения эквивалентности для множества, состоящего из 12 элементов; соответствующие классы состоят здесь из 5, 4, 2 и 1 элементов.

Упражнения

1. Найдите другие примеры отношений эквивалентности.
2. Докажите, что сравнения (6) можно почленно складывать, вычитать и перемножать:

   Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}, \quad ac \equiv bd \pmod{m}.$$

3. Назовем два вещественных (или комплексных) числа соответствующими друг другу, если они равны по абсолютной величине (по модулю). Показать, что это отношение является отношением эквивалентности, и определить элементы каждого из классов.

§ 4. Частичная упорядоченность

Для того чтобы дать пример еще одного важного математического отношения, рассмотрим множество S каких-нибудь элементов. Эти элементы могут быть, например, числами, точками или даже людьми, объединенными по каким-то признакам. Внутри этого множества S мы рассмотрим некоторое семейство меньших множеств, или подмножеств, A, B, ... Если S состоит, скажем, из всех вещественных чисел, то каждое подмножество такого семейства может состоять, например, из чисел некоторого интервала; если S — множество точек плоскости, то множества A, B, ... могут состоять из всех точек данных линий или фигур.

Для каждой пары таких подмножеств может выполняться или не выполняться **отношение включения** $A \supseteq B$, означающее, что все элементы множества B содержатся в A. Два этих множества могут состоять из одних и тех же элементов; в этом случае $A = B$. Непосредственно видно, что для этого отношения включения выполняются следующие три условия:

1°. *Рефлексивность*: $A \supseteq A$.

2°. *Транзитивность*: если $A \supseteq B$ и $B \supseteq C$, то $A \supseteq C$.

3°. *Тождественность*: если $A \supseteq B$ и $B \supseteq A$, то $A = B$.

Вместо отношения $A \supseteq B$ часто используется отношение **строгого включения**, обозначаемое $A \supset B$. Оно выражает по-прежнему, что B является частью, или подмножеством, множества A, но возможность совпадения $A = B$ в этом случае исключена, так что B является **собственным подмножеством** A.

Отношение строгого включения обладает следующими свойствами:

1°. *Антирефлексивность*: отношение $A \supset A$ никогда не имеет места.

2°. *Транзитивность*: если $A \supset B$ и $B \supset C$, то $A \supset C$.

Бинарное отношение $a \geqslant b$, вводимое в множестве каких угодно элементов a, b, ... и удовлетворяющее условиям, наложенным на отношение включения, называется отношением **частичной упорядоченности**. Оно удовлетворяет, следовательно, таким аксиомам:

1) $a \geqslant a$;

2) если $a \geqslant b$ и $b \geqslant c$, то $a \geqslant c$;

3) если $a \geqslant b$ и $b \geqslant a$, то $a = b$.

В различных областях математики в качестве знака включения применяется и остроконечный символ $a \geqslant b$ и закругленный $a \supseteq b$; именно в последнем виде он обычно используется как знак включения множеств.

На самом деле частичная упорядоченность и отношение включения для множеств — это только различные выражения одной и той же ситуации. При частичной упорядоченности каждому элементу a соответствует множество R_a, состоящее из всех таких элементов b, что $a \geqslant b$. Так как это отношение рефлексивно, то a принадлежит R_a. Два разных элемента a и b определяют разные множества R_a и R_b; действительно, если $R_a = R_b$, то одновременно $a \geqslant b$ и $b \geqslant a$, значит, $a = b$. Далее, как мы сейчас покажем, отношение $a \geqslant b$ выполняется в том и только в том случае, когда для соответствующих множеств имеет место отношение включения $R_a \supseteq R_b$. Действительно, если $a \geqslant b$, то для каждого элемента c из R_b выполняется отношение $b \geqslant c$ и, следовательно, $a \geqslant c$, т. е. $R_a \supseteq R_b$. С другой стороны, если $R_a \supseteq R_b$ то $a \geqslant b$, так как b принадлежит R_b.

Точно так же отношением $a > b$ вводится **строгая частичная упорядоченность**, удовлетворяющая следующим условиям:

1) отношение $a > a$ невозможно;

2) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Как и выше, доказывается, что отношение $a > b$ выполняется в том и только в том случае, когда для соответствующих множеств имеет место строгое включение $R_a \supset R_b$. Символ $>$ здесь используется в несколько более общем смысле, чем обычное «больше чем» для чисел.

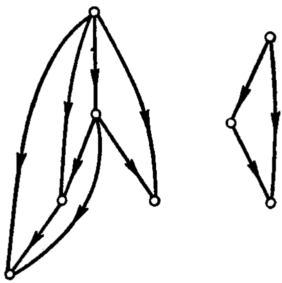


Рис. 91

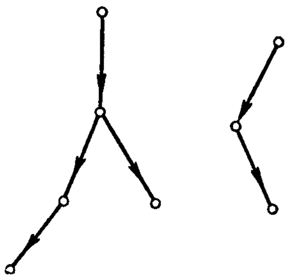


Рис. 92

Рассмотрим теперь граф G отношения частичной упорядоченности, в частности для случая, когда число вершин конечно. Нет необходимости слишком тщательно различать понятия частичной упорядоченности и строгой частичной упорядоченности; единственное различие между соответствующими графами состоит в том, что на первом есть петли, а на втором их нет. Если $a > b$, на графе G имеется ориентированное ребро (a, b). На рис. 91 изображен граф, отвечающий отношению строгой частичной упорядоченности в множестве 8 элементов — вершин графа.

Поспешим заметить, что обычно граф частичной упорядоченности изображается в несколько ином виде. Так, на приведенном выше графе для любых двух ребер (a, b) и (b, c) имеется также ребро (a, c), поэтому можно упростить нашу схему, опуская все такие замыкающие ребра. Вообще, какова бы ни была ориентированная цепь $A(a, b)$, идущая от a к b, на графе должно быть, строго говоря, также и ребро (a, b); но так как существование таких замыкающих ребер непосредственно вытекает из существования соответствующих ориентированных цепей, то такие ребра можно считать лишними и отбрасывать. Изменив таким образом граф рис. 91, мы получим намного более простой граф, изображенный на рис. 92.

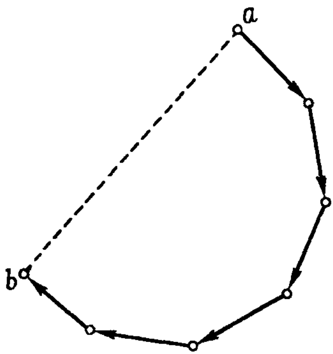


Рис. 93

Граф частичной упорядоченности, из которого удалены все петли и все лишние ребра, называется **базисным графом** соответствующего отношения. Если $A(a, b)$ — ориентированная цепь на базисном графе, то ориентированное ребро (a, b) на нем отсутствует, так как оно является лишним. Не может быть здесь и противоположно ориентированного ребра (b, a), так как вместе с $A(a, b)$ это привело бы к ориентированному циклу, возвращающемуся к a, откуда следовало бы, что $a > a$, что противоречит условию 1 (рис. 93). С другой стороны, каждый ациклический ориентированный граф, т. е. ориентированный граф, не содержащий ориентированных циклов, приводит к частичной упорядоченности, если считать, что $a > b$ в том случае, когда имеется ориентированная цепь, идущая от a к b.

Отношением упорядоченности (в строгом смысле) называется (строгая) частичная упорядоченность, $a>b$, для которой в дополнение к предыдущим условиям выполнено также следующее

Условие полноты. *Для любых двух несовпадающих элементов a и b всегда выполнено одно из двух соотношений $a>b$ или $b>a$.*

Иными словами, *все* элементы множества «сравнимы» между собой по этому отношению. Иногда это отношение называется отношением **полной упорядоченности** в отличие от частичной упорядоченности. Аналогично отношение упорядоченности $a \geqslant b$

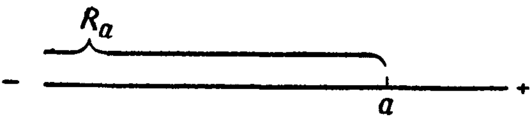


Рис. 94

определяется тем же самым условием полноты в дополнение к условиям частичной упорядоченности.

Для отношения упорядоченности множества R_a и R_b, отвечающие двум элементам a и b, всегда должны удовлетворять условию $R_a \supset R_b$ или $R_b \supset R_a$. Как в математике, так и в повседневной жизни часто приходится иметь дело с упорядоченными множествами; например, слова в словарях упорядочиваются лексикографически, т. е. в алфавитном порядке; ученики могут быть упорядочены по росту, по числу полученных в спортивном состязании очков, по школьным отметкам или по многим иным признакам. Наиболее известно в математике упорядочение чисел вещественной числовой оси. Здесь множество R_a состоит из всех чисел b, удовлетворяющих условию $a>b$, т. е. в обычном представлении R_a состоит из всех чисел, лежащих на числовой оси левее a (рис. 94).

Очень часто приходится иметь дело с упорядоченными множествами, состоящими из конечного числа элементов. Такое множество содержит некоторый элемент a_1, меньший чем все остальные элементы, следующий элемент a_2, больший чем a_1, но меньший чем все другие элементы, и т. д. до наибольшего элемента a_n. Следовательно, элементы такого множества упорядочены точно так же, как упорядочены целые числа $1, 2, \ldots, n$, расположенные в порядке возрастания. Это можно выразить также следующим образом: каждое упорядоченное множество, состоящее из n элементов, в отношении порядка устроено так же, как множество целых чисел $1, 2, \ldots, n$.

Упражнения

1. Начертите полный граф и базисный граф для упорядоченного множества, состоящего из четырех чисел 1, 2, 3, 4.
2. Каков базисный граф для упорядоченного множества из n чисел $1, 2, 3, \ldots, n$?
3. Докажите, что отношение делимости $a|b$ в множестве целых чисел является отношением частичной упорядоченности. Каково в этом случае различие между частичной упорядоченностью и строгой частичной упорядоченностью?
4. Укажите все подмножества множества S, состоящего из трех элементов a, b, c. Сколько здесь имеется подмножеств? Постройте граф и базисный граф для соответствующей частичной упорядоченности. Почему здесь стóит ввести также пустое множество $\varnothing$, вовсе не содержащее элементов?

ГЛАВА VIII

Плоские графы

§ 1. Условия для плоских графов

Плоским графом, как мы уже говорили (перечитайте § 4 гл. I), называется граф, который можно начертить на плоскости таким образом, чтобы его ребра не имели точек пересечения, отличных от вершин. Мы уже привели несколько примеров плоских графов. В § 5 гл. I мы рассмотрели задачу о трех домах и трех колодцах и объяснили, почему соответствующий граф не является плоским. Граф этой задачи (рис. 16, стр. 22) может быть начерчен многими способами, как это возможно, впрочем, и для всех графов. Когда мы говорим о «графе этой задачи», мы имеем в виду любой граф, изоморфный какому-то частному графу, описывающему данную ситуацию. Следовательно, утверждение «граф, изображенный на рис. 16, не является плоским» означает, что не существует изоморфного ему графа, начерченного на плоскости, с соблюдением требуемых условий. Вершины этого графа можно, например, расположить в вершинах правильного шестиугольника, как на рис. 95. Точка пересечения ребер в центре шестиугольника не является вершиной графа: мы должны представлять себе, что в этой точке его ребра проходят друг над другом.

Существует даже граф, имеющий всего пять вершин и не являющийся плоским — это полный граф с пятью вершинами (рис. 96). То, что этот граф действительно не является плоским, можно объяснить, так же, как это сделано в § 5 гл. I для графа рис. 95 (или рис. 16). При любом изображении такого графа на плоскости его вершины, скажем в порядке $ABCDEA$, должны образовывать некоторый цикл $\mathscr{P}$. Проводя ребро (B, E) такого плоского графа, мы еще имеем выбор — располагать его внутри или вне $\mathscr{P}$. Рассуждение в обоих случаях одинаково. Предположим, что мы провели это ребро внутри $\mathscr{P}$, как на рис. 97. Вершина A должна быть соединена ребрами с D и C. Так как ребро (B, E) мешает им проходить внутри $\mathscr{P}$, то оба они пройдут вне $\mathscr{P}$. Ребро (D, B) можно провести

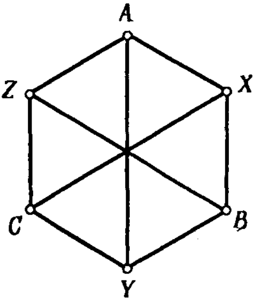


Рис. 95

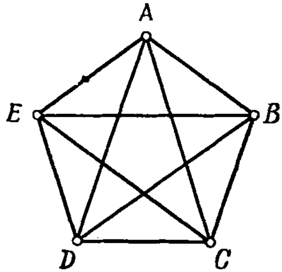


Рис. 96

только внутри $\mathscr{P}$, потому что ребро (A, C) мешает подходу к B извне. Но тогда у нас нет способа провести на плоскости последнее ребро (C, E), так как оно не может пройти ни внутри $\mathscr{P}$ — из-за ребра (D, B), ни вне $\mathscr{P}$ — из-за ребра (A, D) [1]).

Мы рассмотрели подробно эти два графа — граф задачи о трех домах и трех колодцах (рис. 95) и полный граф с пятью вершинами (рис. 96), потому что они играют особую роль в определении того, является данный граф плоским или нет. Критерий, характеризующий плоские графы, был предложен в 1930 г. польским математиком Куратовским. Чтобы сформулировать его, мы должны сначала объяснить, что мы понимаем под **расширением** и **сжатием** графа.

Предположим, что на некоторые ребра графа мы поставили новые вершины, так что эти ребра стали

[1]) Другое доказательство см. в § 3.

элементарными цепями, состоящими из нескольких ребер. Эту операцию мы назовем **расширением** графа. На рис. 98 приведен пример расширения, переводящего граф *а*, содержащий всего четыре вершины, в граф *б*.

Обратно, предположим, что мы имеем такой граф, как *б* на рис. 98, содержащий элементарные цепи, разделенные на ребра, причем из промежуточных вершин не исходит никаких других ребер. Посредством обратной операции он может быть **сжат** в такой граф, на котором его элементарные цепи становятся ребрами.

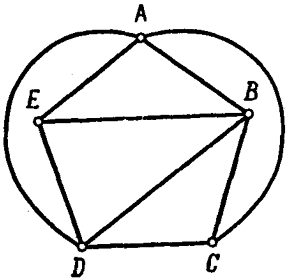


Рис. 97

Так, граф *б* рис. 98 может быть сжат в граф *а* путем удаления из соответствующих элементарных цепей разделяющих их вершин.

Теперь мы в состоянии сформулировать **теорему Куратовского**.

Для того чтобы граф был плоским, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал внутри себя никакого графа, который можно было бы сжать до пятиугольного графа (рис. 96) *или шестиугольного графа* (рис. 95).

Доказательство этой теоремы не слишком сложно, но несколько громоздко и потребовало бы больше места, чем то, которым мы здесь располагаем.

Сделаем еще несколько замечаний относительно плоских графов. Выше мы пытались, например для графов рис. 17 (стр. 22) или рис. 97, найти их плоское представление, проводя в качестве ребер более или

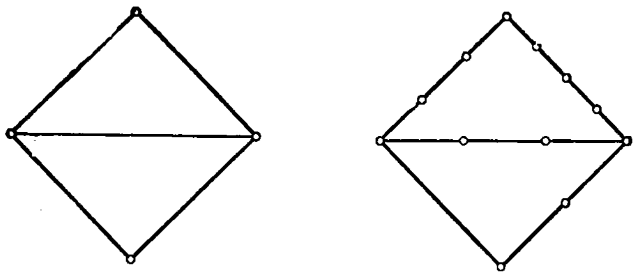


Рис. 98

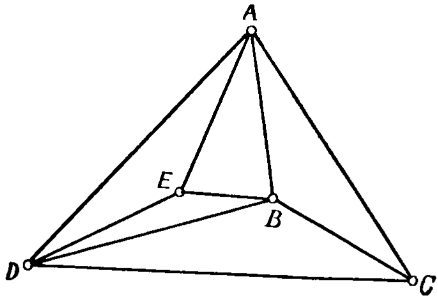


Рис. 99

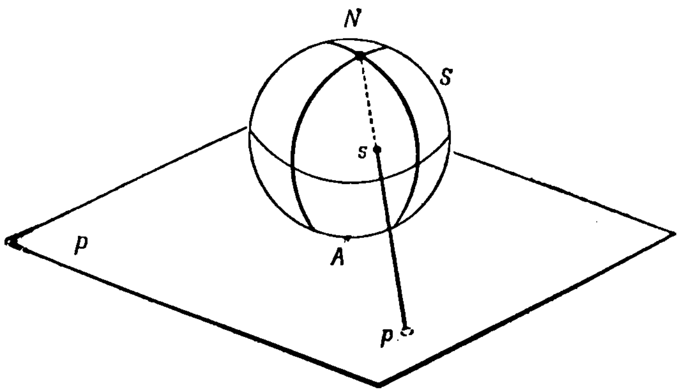


Рис. 100

менее сложные кривые. На самом деле это не существенно. Можно показать, что каждый плоский граф можно начертить на плоскости таким образом, что все его ребра будут прямолинейными, при условии, конечно, что никакая пара его вершин не соединена более чем одним ребром. В качестве примера мы можем указать граф рис. 97 и его «прямолинейное представление», изображенное на рис. 99.

Заслуживает упоминания также и то, что всякий плоский граф может быть изображен на поверхности сферы. Существует много способов получения такого представления. Например, можно воспользоваться для этого *стереографической проекцией*; этот метод часто используется картографами, особенно для составления карт областей земного шара, лежащих вблизи полюсов.

Пусть P — плоскость, на которой расположен наш граф. Поместим сферу S так, чтобы она касалась плоскости P в своем, так сказать, южном полюсе (рис. 100). Северный полюс N примем за центр проекции. Каждую точку p плоскости P соединим прямой линией с точкой N. Эта прямая пересечет сферу S в некоторой точке s. При этом для каждой точки p плоскости P найдется соответствующая ей точка s сферы S. Обратной проекцией можно каждый граф на сфере S перевести на плоскость, касающуюся сферы S. Единственной точкой сферы S, не имеющей образа на плоскости P, является центр проекции N.

Упражнения

1. Удалите ребро (A, Y) графа рис. 95 и начертите полученный после этого граф на плоскости так, чтобы все его ребра были непересекающимися прямолинейными отрезками.
2. Попытайтесь найти все графы с шестью вершинами, не являющиеся плоскими.

§ 2. Формула Эйлера

Теперь мы будем рассматривать плоские графы, образующие на плоскости *многоугольные сети*. Это значит, что ребра плоского графа G образуют множество прилегающих друг к другу многоугольников, разделяющих плоскость на многоугольные области подобно тому, как это изображено на рис. 101.

Подчеркнем, что, говоря о многоугольниках, мы, в противоположность обычному употреблению этого термина, не предполагаем, что их ребра непременно

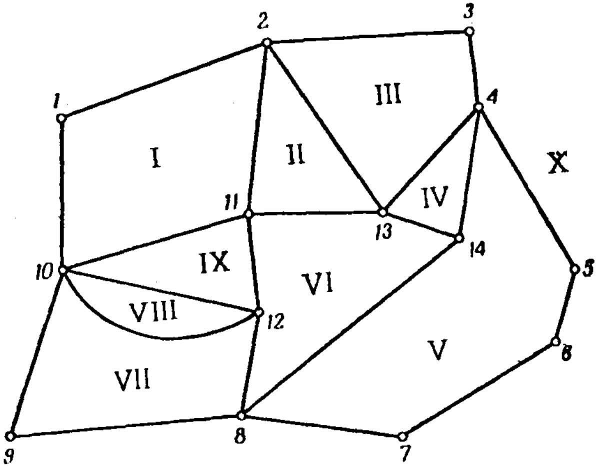


Рис. 101

прямолинейны. Это могут быть какие угодно непрерывные кривые без самопересечений, разделяющие плоскость на отдельные области. Хорошим примером такого многоугольного графа служит карта США, разделенная на отдельные штаты, а также любая другая географическая карта с границами между странами. Эти границы являются ребрами графа, а сами страны — многоугольниками.

Итак, мы будем рассматривать теперь многоугольные графы. Из определения ясно, что они связны; потребуем, кроме того, чтобы ни один многоугольник не лежал внутри другого. Граничные ребра каждого такого многоугольника образуют цикл, иногда называемый **минимальным циклом**. Часть плоскости, заключенная внутри такого многоугольника, называется **гранью** графа. На таком графе имеется еще и **максимальный цикл** C_1, окружающий весь граф со всеми его гранями. В математике обычно руководствуются превосходнейшим принципом, состоящим во введении таких соглашений, чтобы все формулы становились возможно более простыми. Так, в нашем случае выгодно рассматривать часть плоскости, лежащую вне C_1, тоже как грань графа с границей C_1. Мы назовем ее **бесконечной гранью** F_∞. Проектируя граф на сферу (см. § 1), можно убедиться в том, что на самом деле нет никакой разницы между бесконечной гранью и любой из остальных.

Проиллюстрируем все это на графе рис. 101. Это граф с 10 гранями, занумерованными числами от I до X. Грань I, например, имеет в качестве границы цикл, состоящий из ребер

$$(1,\ 2),\ (2,\ 11),\ (11,\ 10),\ (10,\ 1),$$

а грань VIII ограничена только двумя ребрами, соединяющими вершины 10 и 12. Ребра максимального цикла C_1 проходят по всем вершинам от 1 до 10 по порядку, а затем возвращаются назад к 1. Бесконечная грань X представляет собой совокупность всех точек, лежащих вне C_1.

Для пространственных многогранников существует одно интересное соотношение, впервые доказанное Эйлером и известное под названием **формулы Эйлера для многогранников**. Она справедлива и для наших многоугольных графов. Обозначим через

$$в,\ р,\ г$$

соответственно число вершин, ребер и граней такого графа G. Теорема Эйлера утверждает, что всегда

$$в - р + г = 2. \tag{1}$$

Доказательство. Формула (1) очевидна в том простейшем случае, когда рассматривается только один многоугольник, имеющий n ребер (рис. 102). В этом случае

$$в = р = n, \quad г = 2$$

и равенство (1) действительно имеет место. Для доказательства справедливости этой формулы в общем случае мы воспользуемся методом математической индукции, а именно мы покажем, что если она справедлива для графов, имеющих *г* граней, то она также

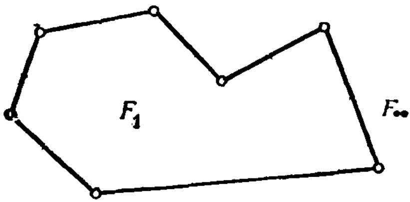


Рис. 102

будет верна и для графов с $г+1$ гранями. Многоугольные графы можно строить, последовательно добавляя по одной грани «извне». Предположим, что G (сплошная линия на рис. 103) — многоугольный граф,

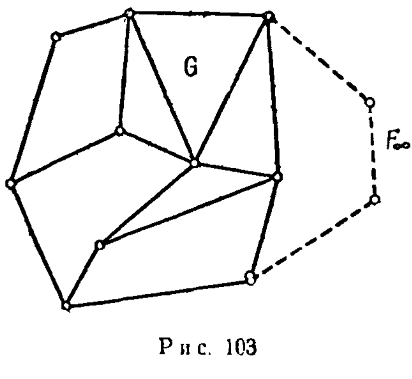


Рис. 103

имеющий *в* вершин, *р* ребер и *г* граней, и что для чисел *в*, *р* и *г* справедлива формула Эйлера. Добавим новую грань (пунктирная линия на рис. 103), проводя по грани F_∞ некоторую элементарную цепь, соединяющую две вершины максимального цикла графа G. Если эта дуга имеет r ребер, то нам придется добавить $r-1$ новых вершин и одну новую грань. Но тогда ясно, что формула Эйлера останется справедливой и для нового графа, так как

$$в' - р' + г' = (в + r - 1) - (р + r) + (г + 1) = в - р + г.$$

Упражнения

1. Проверьте формулу Эйлера для графа, изображенного на рис. 13.
2. Сделайте то же самое для графа, образованного 8×8 квадратными полями шахматной доски. Обобщите это рассуждение на случай доски, образованной $n \times n$ квадратными полями.

§ 3. Некоторые соотношения для графов. Двойственные графы

В этом параграфе мы опять будем рассматривать многоугольные графы. Формулу Эйлера (1) мы перепишем в виде

$$в + г = р + 2. \qquad (2)$$

Число ребер графа можно найти, пересчитав ребра, выходящие из каждой его вершины. Так как при этом каждое ребро считается дважды, то мы получаем равенство

$$2р = \rho(A_1) + \ldots + \rho(A_в), \qquad (3)$$

совпадающее с равенством (1) из § 6 гл. I, где $\rho(A_i)$ — степень вершины A_i, т. е. число исходящих из нее ребер. Для графа рис. 101 $р = 22$.

Можно и иначе сосчитать ребра многоугольного графа. Обозначим число k-угольных граней графа G через φ_k; здесь $k = 2, 3, 4, \ldots$ Так, например, для графа рис. 101

$$\varphi_2 = 1, \ \varphi_3 = 3, \ \varphi_4 = 3, \ \varphi_5 = 1,$$
$$\varphi_6 = 1, \quad \varphi_7 = 0, \ \varphi_8 = 0, \ \varphi_9 = 0, \ \varphi_{10} = 1.$$

Иными словами, среди его 10 граней имеется одна ограниченная двумя ребрами, три ограниченные тремя ребрами и т. д. Так как на таких многоугольных сетях нет петель, то на них нет и граней, ограниченных одним ребром. Следовательно,

$$г=\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4+\ldots \tag{4}$$

А теперь, для того чтобы снова сосчитать число ребер графа, заметим, что каждое его ребро служит границей в точности двух граней, следовательно,

$$2p=2\varphi_2+3\varphi_3+4\varphi_4+\ldots \tag{5}$$

Отсюда для графа рис. 101 мы по-прежнему получаем $p=22$[1]).

Для каждого многоугольного графа G можно следующим образом построить новый многоугольный граф G^*, называемый двойственным к первому. Внутри каждой грани, в том числе и бесконечной, вы-

---

[1]) Пользуясь формулами (4) и (5), можно снова доказать, что полный граф с пятью вершинами (рис. 96) и граф задачи о трех домах и трех колодцах (рис. 16) не являются плоскими. В первом случае число вершин $в=5$, число ребер $p=\frac{5\cdot 4}{2}=10$. Если бы этот граф был плоским, то по теореме Эйлера число его граней $г$ было бы равно $2-в+p=7$. Каждые две вершины этого графа соединены единственным ребром, поэтому для него $\varphi_2=0$ и по формулам (4) и (5)

$$г=7=\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5+\ldots$$

и

$$2p=20=3\varphi_3+4\varphi_4+5\varphi_5+\ldots$$

Умножая первое равенство на 3, получим

$$21=3\varphi_3+3\varphi_4+3\varphi_5+\ldots;$$

но эта сумма меньше второй суммы, равной 20. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно.

Во втором случае $в=6$, $p=\frac{6\cdot 3}{2}=9$; если бы граф был плоским, число его граней $г$ равнялось бы 5. Так как здесь не только $\varphi_2=0$, но и $\varphi_3=0$ (два дома или два колодца между собой не соединяются), то

$$г=5=\varphi_4+\varphi_5+\varphi_6+\ldots$$

и

$$2p=18=4\varphi_4+5\varphi_5+6\varphi_6+\ldots$$

Умножая первое равенство на 4, получим

$$20=4\varphi_4+4\varphi_5+4\varphi_6+\ldots,$$

но эта сумма меньше второй суммы, равной 18.

берем по одной точке. Две такие внутренние точки A и B соединим ребром в том и только в том случае, когда они принадлежат двум соседним граням с общим граничным ребром E, и это новое ребро проведем от A к B так, чтобы оно пересекало E, но не пересекало других ребер графа. Если имеется несколько граничных ребер, общих для двух граней, то для каждого из них проводим по одному ребру. Это показано

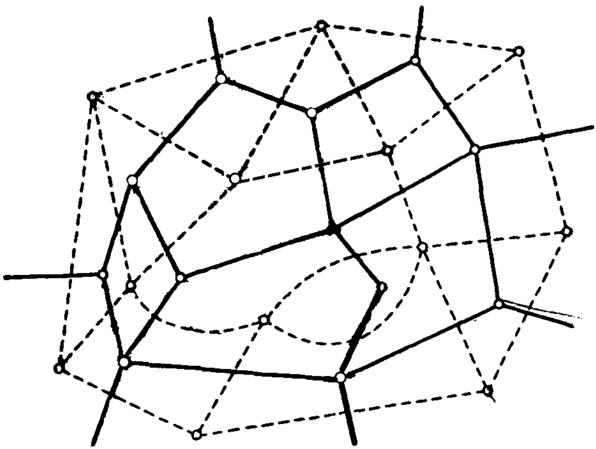


Рис. 104

на рис. 104, где граф G изображен сплошными, а граф G^* — пунктирными линиями. Двойственный граф G^* можно построить только для плоского графа G.

Граф, двойственный многоугольному графу, сам является многоугольным графом. Из рис. 104 видно, что каждой грани F графа G соответствует в точности одна вершина V^* графа G^*, причем число ребер, сходящихся в вершине V^* графа G^*, равно числу ребер, ограничивающих соответствующую грань F графа G. Следовательно, степень вершины V^* графа G^* равна числу ребер, ограничивающих соответствующую грань F графа G. Каждому ребру E графа G соответствует единственное пересекающее его ребро E^* графа G^*.

Из каждой вершины V графа G выходит $\rho(V)$ ребер. Они пересекаются ребрами графа G^*, образующими грань F^*. Следовательно, грань F^* ограничена $\rho(V)$ ребрами графа G^*. Из рис. 104 нетрудно видеть, что граф G в свою очередь является двойственным к G^*. Два этих графа имеют одно и то же число ребер, число вершин графа G^* равно числу граней графа G, а число граней графа G^* — числу вершин графа G.

§ 4. Правильные многогранники

Граф называется *однородным* (см. гл. I, § 6), если в каждой его вершине сходится одно и то же число ρ ребер; однородный многоугольный граф G называется *правильным*, если и двойственный к нему граф G^* также является однородным. Это означает (см. предыдущий параграф), что каждая грань графа G должна быть ограничена одним и тем же числом, скажем ρ^*, ребер.

Сейчас мы покажем, что существует очень мало правильных графов. Если сосчитать число ребер графа G по формулам (3) и (5), то для правильных графов обе суммы сведутся к выражению

$$2p = \rho в = \rho^* г. \tag{6}$$

Из равенства (6) находим

$$p = \frac{1}{2}\rho в; \quad г = \frac{\rho}{\rho^*} в;$$

подставляя эти значения в формулу Эйлера (2), получаем

$$в\left(1 + \frac{\rho}{\rho^*} - \frac{1}{2}\rho\right) = 2,$$

что можно переписать так:

$$в(2\rho + 2\rho^* - \rho\rho^*) = 4\rho^*. \tag{7}$$

Так как $в$ и ρ^* — целые положительные числа, то выражение в скобках тоже должно быть целым положительным числом

$$2\rho + 2\rho^* - \rho\rho^* > 0.$$

Это последнее неравенство мы перепишем в виде

$$\rho\rho^* - 2\rho - 2\rho^* < 0,$$

или

$$(\rho - 2)(\rho^* - 2) < 4. \qquad (8)$$

Мы будем решать неравенство (8) в два приема. Сначала рассмотрим тот случай, когда оба множителя $\rho - 2$ и $\rho^* - 2$ положительны, т. е. когда и ρ и ρ^* больше двух. Так как все пары целых положительных чисел, произведение которых меньше 4, исчерпываются парами 1 и 1, 1 и 2, 1 и 3, то $\rho - 2 \leqslant 3$ и $\rho^* - 2 \leqslant 3$. В этом случае ρ и ρ^* могут принимать только 5 значений, перечисленных в следующей таблице:

Правильные графы

ρ	ρ^*	*в*	*р*	*г*	Тип
3	3	4	6	4	Тетраэдр
3	4	8	12	6	Куб
3	5	20	30	12	Додекаэдр
4	3	6	12	8	Октаэдр
5	3	12	30	20	Икосаэдр

Число ребер, вершин и граней здесь было сосчитано с помощью формул (6) и (7). При построении правильных графов, перечисленных в таблице, начинают с треугольника, четырехугольника или пятиугольника, в соответствии со значениями $\rho^* = 3$, 4 или 5. Собирая многоугольники вместе, так чтобы в каждой вершине сходилось требуемое число граней, мы найдем, что с точностью до изоморфизма для каждого из пяти случаев имеется в точности один тип правильных графов (см. рис. 105).

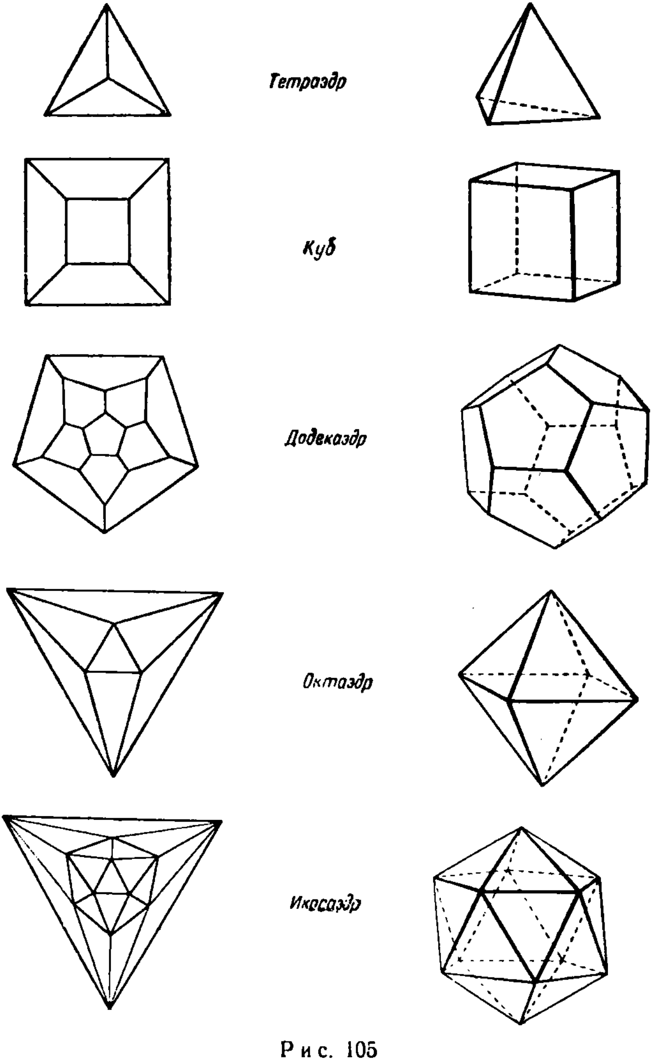


Рис. 105

Граф, двойственный правильному графу, сам, по определению, тоже является правильным. Из нашей таблицы видно, что октаэдр является двойственным кубу, икосаэдр — додекаэдру, а тетраэдр является двойственным самому себе.

При определении целых положительных чисел ρ и ρ^*, удовлетворяющих неравенству (8), мы рассмотрели пока только значения $\rho>2$ и $\rho^*>2$ и пришли к указанным в таблице результатам. Однако это неравенство имеет решения также и в тех случаях, когда ρ

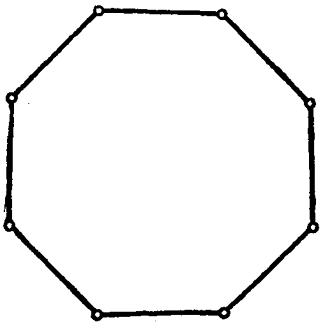


Рис. 106

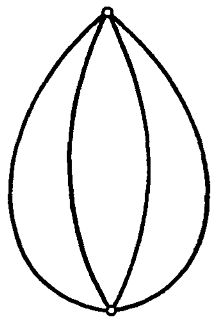


Рис. 107

(или ρ^*) принимает значение 2 или 1. Соответствующие графы оказываются совершенно тривиальными.

Если $\rho=2$, мы имеем связный граф с двумя ребрами в каждой вершине, или, короче говоря, элементарный цикл (рис. 106). Если $\rho^*=2$, то равенство (7) принимает вид

$$в(2\rho+4-2\rho)=4в=8,$$

так что $в=2$; в этом случае граф состоит из двух вершин, соединенных несколькими ребрами (рис. 107). Заметим, что граф, двойственный циклу с двумя гранями, n вершинами и n ребрами, имеет две вершины, n граней и n ребер. Иными словами, такие графы, как изображенные на рис. 106 и 107, двойственны друг другу.

При $\rho=1$ неравенство (8) удовлетворяется для любого положительного значения ρ^* (проверьте это!).

Но связный граф с единственным ребром в каждой вершине должен иметь только одно ребро, т. е. должно быть

$$в=2, \quad р=г=1, \quad \rho=1, \quad \rho^*=2.$$

Вы легко можете проверить, что при $\rho^*=1$ граф представляет собой одну петлю, для которой

$$в=р=1, \quad г=2, \quad \rho=2, \quad \rho^*=1.$$

В 13-й книге «Начал» Евклида изложено учение о **правильных многогранниках**. Эти многогранники можно вписать в сферу; все грани каждого такого многогранника — правильные и равные между собой многоугольники, причем в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер и граней. Граф такого многогранника, составленный его вершинами и ребрами, является правильным; это плоский граф, так как его можно спроектировать на сферу из ее центра.

Правильные многогранники упоминаются также у Платона в его сочинении Timaeus; влияние Платона было столь велико, что с тех пор эти многогранники часто называют платоновыми телами. Однако и не Евклид открыл правильные многогранники; они были известны еще его предшественникам. Некоторые из правильных многогранников знали даже пифагорейцы. В древности и в средние века правильные многогранники рассматривались как символы гармонии вселенной [1]).

Из нашего исследования правильных графов вытекает, что не существует никаких правильных многогранников, отличных от тех пяти, которые изображены на рис. 105.

Упражнения

1. Начертите графы, двойственные тетраэдру, кубу и октаэдру.
2. На всех ли правильных многогранниках имеются гамильтоновы линии?

---

[1]) Так считал, например, И. Кеплер, положивший эти тела в основу своих довольно сомнительных расчетов, связанных с определением параметров планет солнечной системы.

§ 5. Мозаики

Если посмотреть на пол в ванной комнате, можно увидеть узор из повторяющихся правильных многоугольников. Форма этих многоугольников может быть разной; они могут быть квадратами, или треугольниками, или шестиугольниками (рис. 108). Такие

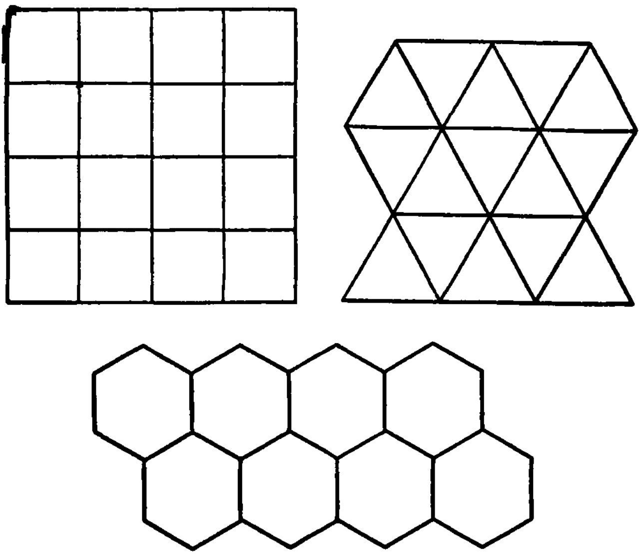


Рис. 108

узоры для мозаичных полов были распространены еще в глубокой древности. В природе можно найти много примеров таких повторяющихся узоров со сходными или даже с одинаковыми ячейками. В ботанике они встречаются при изучении расположения листьев, почек и семян у растений. Вы, возможно, замечали такую правильность, например, в характерном рисунке на поверхности ананаса или в расположении семян подсолнечника.

С точки зрения теории графов подобная мозаика — это плоский граф, все грани которого имеют одно и то же число ребер и повторяются большое число раз.

Мы снова покажем, что существует лишь весьма небольшое число действительно возможных узоров.

Воспользуемся теми же обозначениями, что и выше: пусть в каждой вершине графа сходится ρ ребер и каждая его грань ограничена ρ^* ребрами. Мы начнем нашу мозаику с одной из таких граней и будем добавлять к ней другие грани до тех пор, пока некоторая часть плоскости не окажется покрытой — так, как обычно кладется пол.

Мы получим тогда многоугольный граф G, в котором все грани, за исключением бесконечной, ограничены ρ^* ребрами и в каждой вершине которого, за исключением тех, которые лежат на границе грани F_∞, сходится ρ ребер.

Предположим, что мы кладем эту мозаику таким образом, что, когда число кусков возрастает, отношение числа $в_1$ вершин, лежащих на границе, к общему числу вершин $в$ становится все меньше и меньше. В терминах теории пределов это можно записать так:

$$\frac{в_1}{в} \to 0, \quad \text{если} \quad в \to \infty, \tag{9}$$

т. е. дробь $\frac{в_1}{в}$ стремится к нулю, если $в$ стремится к бесконечности.

Оценим число ребер графа G, подсчитывая их отдельно в каждой вершине и пользуясь формулой (3). Если бы в каждой вершине графа сходилось в точности ρ ребер, то общее число ребер было бы равно $\frac{1}{2}\rho в$. Если мы не будем считать ребра в граничных вершинах, мы получим $\frac{\rho}{2}(в - в_1)$ ребер. Следовательно,

$$\rho в - \rho в_1 < 2p < \rho в,$$

где p — число ребер графа G. Эти неравенства можно переписать в виде

$$\frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{2}\frac{в_1}{в} < \frac{p}{в} < \frac{\rho}{2}.$$

Из (9) мы заключаем, что

$$\frac{p}{в} \to \frac{\rho}{2}, \quad \text{если} \quad в \to \infty. \tag{10}$$

Сосчитаем теперь число ребер графа по формуле (5). Имеется $г-1$ граней с ρ^* граничными ребрами и грань F_∞, число граничных ребер которой равно числу $в_1$ граничных вершин графа. Следовательно,

$$2p=(г-1)\rho^*+в_1;$$

разделив обе части этого равенства на $в\rho^*$, мы представим его в виде

$$\frac{г}{в}=\frac{2}{\rho^*}\frac{p}{в}+\frac{1}{в}-\frac{в_1}{\rho^* в}.$$

Если $в\to\infty$, то оба последних члена в правой части стремятся к нулю, и из (10) следует, что

$$\frac{г}{в}\to\frac{2}{\rho^*}\frac{\rho}{2}=\frac{\rho}{\rho^*}, \quad \text{если} \quad в\to\infty. \tag{11}$$

Вернемся к формуле Эйлера (2), которую запишем теперь следующим образом:

$$1+\frac{г}{в}=\frac{p}{в}+\frac{2}{в}.$$

При возрастании $в$ левая часть, согласно (11), стремится к

$$1+\frac{\rho}{\rho^*},$$

в то время как правая часть, согласно (10), стремится к $\frac{\rho}{2}$. Так как обе части должны иметь один и тот же предел, то

$$1+\frac{\rho}{\rho^*}=\frac{\rho}{2},$$

откуда

$$(\rho-2)(\rho^*-2)=4.$$

Этому уравнению удовлетворяют только следующие пары целых чисел

$$\rho=3,\ \ \rho^*=6;\ \ \rho=4,\ \ \rho^*=4;\ \ \rho=6,\ \ \rho^*=3.$$

Следовательно, все повторяющиеся плоские графы узоров, или мозаик, должны быть образованы либо треугольниками, либо четырехугольниками, либо шестиугольниками. Все эти случаи представлены на рис. 108.

ГЛАВА IX

Раскрашивание карт

§ 1. Проблема четырех красок

Каждый многоугольный граф можно представить себе как некоторую географическую карту, где грани — это страны, а бесконечная грань — окружающий их океан. На такой карте все страны и океан раскрашиваются так, чтобы их можно было отличить друг от друга. Для этого страны с общей границей должны быть раскрашены в разные цвета. Если в нашем распоряжении имеется достаточное количество красок, это не составит никакого труда. Намного сложнее решить вопрос о *наименьшем* количестве красок, достаточном для такого раскрашивания стран данной карты.

Широко известное предположение состоит в том, что *каждая карта может быть раскрашена с соблюдением требуемых условий при помощи четырех красок.* Британский математик А. Кэли, один из первых исследователей теории графов, в 1879 г. опубликовал статью о проблеме четырех красок, оказавшуюся вполне уместной в первом томе Трудов Королевского географического общества. Эту статью часто считают «свидетельством о рождении» проблемы четырех красок. Однако это не совсем правильно. Шотландский физик Фредерик Гутри рассказывал, что около 1850 г. эта проблема была достаточно популярна среди студентов-математиков в Лондоне и что его брат Фрэнсис Гутри обратил на нее внимание своего преподавателя математика А. Де Моргана.

Поначалу проблема не казалась слишком серьезной. Математики, по-видимому, рассматривали ее как почти очевидный факт. В дальнейшем появилось несколько неверных доказательств; проблема четырех красок, сбивающая с толку простотой своей формулировки, сопротивлялась всем усилиям самых выдающихся математиков. Большой интерес к теории графов, возникший в связи с этой проблемой, способствовал открытию многих важных результатов этой теории, поскольку они казались полезными для решения проблемы четырех красок.

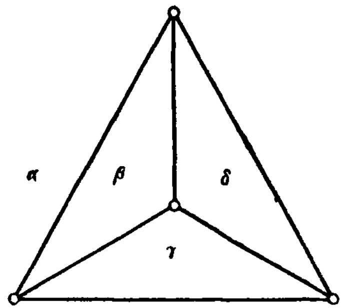


Рис. 109

Укажем сразу же, что для раскрашивания некоторых графов существенно, чтобы мы действительно располагали четырьмя красками (см. рис. 109). В дальнейшем мы будем обозначать различные цвета греческими буквами α, β, γ, δ, ε, ..., разумеется, не имеет никакого значения, какой именно цвет обозначает та или иная буква. Предположим, что бесконечная грань, или внешняя область, тетраэдра окрашена в цвет α. Тогда три остальные его грани должны быть окрашены в разные (и притом отличные от α) цвета, так как все они граничат между собой.

Заметим далее, что, решая вопрос о раскрашивании карты наименьшим возможным числом красок, можно предполагать, что эта карта не содержит вершин, в которых сходятся лишь два ребра. В самом деле, если a — такая вершина, то можно оба сходящихся в ней ребра объединить в одно, исключив саму эту вершину a (рис. 110) и не изменив схемы раскрашивания карты.

Достаточно, следовательно, рассматривать только графы, в каждой вершине которых сходятся по крайней мере три ребра. Но можно сделать и гораздо

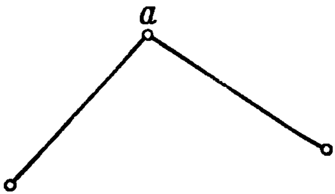


Рис. 110

более сильное предположение: раскрашивание произвольного многоугольного графа некоторым определенным количеством красок можно свести к случаю, когда этот граф является *однородным степени три*,

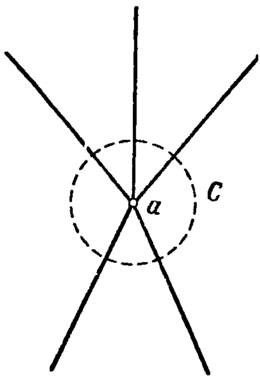


Рис. 111а.

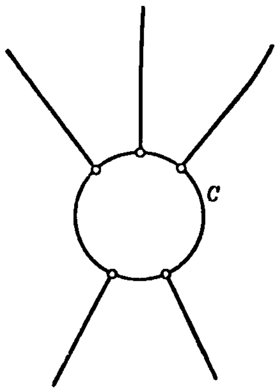


Рис. 111б.

т. е. когда в каждой его вершине сходятся ровно три ребра. Иными словами, если мы умеем решить задачу о красках для однородных графов степени три, то мы сможем решить ее и для любых графов. В самом деле, предположим, что в некоторой вершине a сходятся более трех ребер (рис. 111а). Проведем окружность C с центром в точке a, причем настолько малую, чтобы она не доставала до остальных вершин. Удалим вершину a и те части пересекающихся в ней ребер, которые лежат внутри этой окружности, введя вместо них ребра, являющиеся дугами самой окружности C (рис. 111б). В каждой новой вершине сходится по три ребра. Из каждого раскрашивания нового графа G_1 можно получить и раскрашивание первоначального

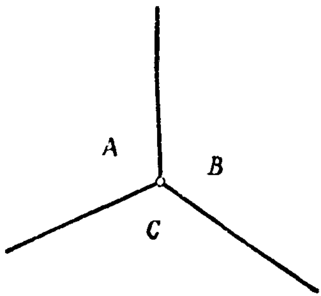


Рис. 112

графа G, если окружность C стянуть в точку. Проделав такое построение для всех вершин, в которых сходится более трех ребер, мы приведем нашу задачу о раскрашивании карты к задаче раскрашивания однородного многоугольного графа степени три.

В дальнейшем мы ограничимся однородными графами степени три. Для них имеется полезная формула, дополняющая те, которые мы вывели в § 3 гл. VIII; она основана на том, что теперь каждая вершина принадлежит в точности трем граням (рис. 112). Следовательно, сосчитав число вершин на всех гранях, мы получим утроенное общее число вершин. Выше мы обозначали через φ_i число граней с i ребрами и, следовательно, i вершинами. Это приводит к равенству

$$3в = 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + 6\varphi_6 + 7\varphi_7 + \ldots . \quad (1)$$

Умножив равенство (1) на 2, а равенства (5) и (4) из гл. VIII соответственно на 3 и 6, получим следующие три равенства:

$$6в = 4\varphi_2 + 6\varphi_3 + 8\varphi_4 + 10\varphi_5 + 12\varphi_6 + 14\varphi_7 + \ldots,$$

$$6р = 6\varphi_2 + 9\varphi_3 + 12\varphi_4 + 15\varphi_5 + 18\varphi_6 + 21\varphi_7 + \ldots,$$

$$6г = 6\varphi_2 + 6\varphi_3 + 6\varphi_4 + 6\varphi_5 + 6\varphi_6 + 6\varphi_7 + \ldots.$$

Перепишем формулу Эйлера (2) в виде

$$12 = 6в - 6р + 6г$$

и подставим в нее найденные значения. В результате мы получим

$$12 = 4\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \ldots, \quad (2)$$

где все не выписанные члены отрицательны. Так как правая часть равенства (2) должна быть положительной, мы приходим к следующему результату:

Однородный граф степени три непременно содержит грань, ограниченную менее чем шестью ребрами.

§ 2. Теорема о пяти красках

В этом параграфе мы рассмотрим задачу о раскрашивании графа четырьмя или пятью красками; согласно результатам предыдущего параграфа, можно предполагать, что мы имеем дело с многоугольным однородным графом степени три, на котором есть по крайней мере одна грань, ограниченная менее чем шестью ребрами. Мы рассмотрим отдельно случаи, когда на графе имеется грань, ограниченная двумя, тремя, четырьмя и пятью ребрами. В каждом случае мы покажем, что а) некоторые границы могут быть изъяты так, что получится снова однородный граф степени три, но с меньшим числом граней, и б) если полученный при этом граф можно раскрасить не более чем пятью красками, то это же можно сделать и для исходного графа. Так как новый граф тоже будет однородным графом степени три, то после каждого такого упрощения снова найдется грань, ограниченная менее чем шестью ребрами, и, значит, мы будем последовательно получать графы все с меньшим и меньшим числом областей, которые нужно закрашивать.

Кратные ребра. а) Прежде всего мы покажем, что граф G всегда можно упростить таким

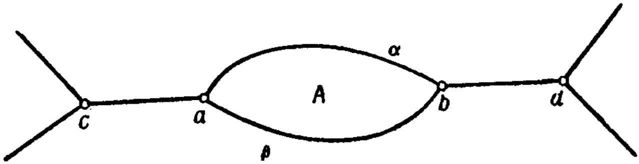


Рис. 113

образом, что он не будет содержать граней, ограниченных двумя ребрами. Если между вершинами a и b проходит двойное ребро, как на рис. 113, то мы исключим одно из этих ребер, объединив оставшееся ребро

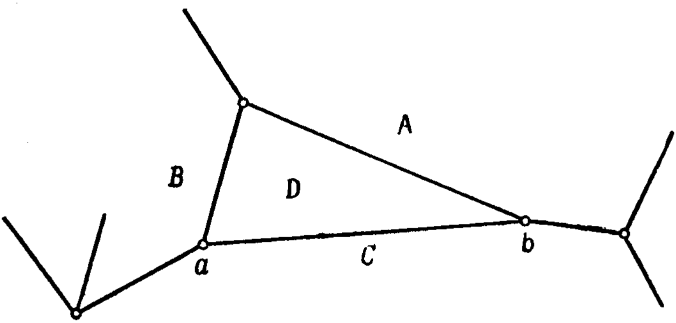


Рис. 114

с ребрами (a, c) и (b, d), выходящими соответственно из вершин a и b, и заменив их единственным ребром (c, d). Новый граф G_1 снова будет однородным степени три.

б) Если граф G_1 можно раскрасить, то с двух сторон от ребра (c, d) будут какие-то два разных цвета α и β. Мы сможем тогда вернуть на свои места вершины a и b и второе ребро (a, b) и закрасить грань A в третий цвет γ.

Треугольная грань. а) Рассматриваемый граф можно упростить так, что он не будет содержать треугольных граней. Предположим, что D — такая грань, граничащая с тремя другими A, B, C. Пусть (a, b) — граничное ребро между C и D (рис. 114). Удалим ребро (a, b) и объединим два других ребра, проходящих через вершину a, в одно ребро; то же самое проделаем и в вершине b. Полученный граф G_1 будет однородным графом степени три.

б) Если граф G_1 можно раскрасить должным образом, то грань A будет закрашена в какой-то цвет α, грань B — в цвет β и грань $C+D$ в цвет γ. Восстановив ребро (a, b), мы сможем закрасить грань D в четвертый цвет δ.

Четырехугольная грань. а) Несколько сложнее показать, что можно исключить грани и

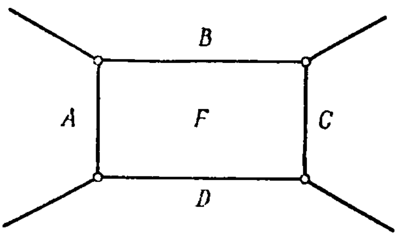


Рис. 115

с четырьмя граничными ребрами. Пусть F — такая грань с соседними гранями A, B, C, D (см. рис. 115). Тогда найдется пара противоположных граней, например B и D (или A и C), которые не являются частями одной и той же грани и не граничат между собой. Действительно, если, например, A и C — только различные части одной и той же грани или если они имеют общую границу (m, n), как показано на рис. 116, то грань B не может иметь общей границы с D. Тогда мы исключим ребра (a, b) и (c, d) и объединим ребра (a_1, a), (a, c), (c, c_1) в одно ребро

(a_1, c_1) и аналогично ребра (b_1, b), (b, d), (d, d_1) — в одно ребро (b_1, d_1). Новый граф G_1 будет однородным степени три, а $B+F+D$ будет одной из его граней.

б) Предположим, что граф G_1 раскрашен и грань $B+F+D$ имеет цвет α. Тогда грани A и C раскрашены в какие-то цвета β и γ, быть может, одинаковые. Восстановив теперь два ребра (a, b) и (c, d), мы закрасим грань F в четвертый цвет δ.

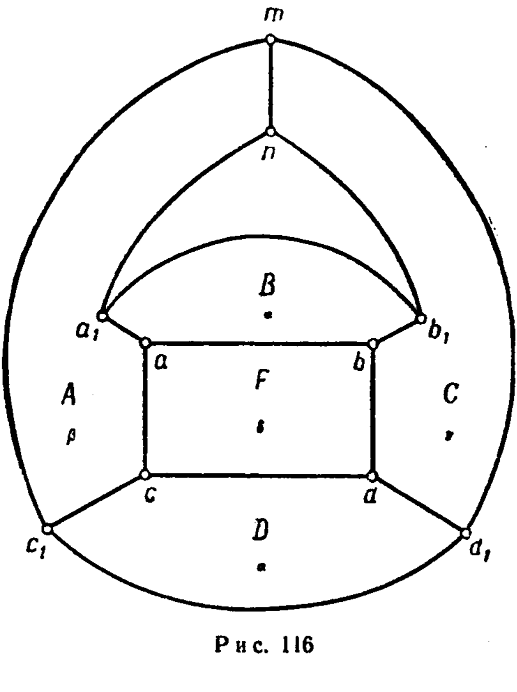


Рис. 116

Пятиугольная грань. а) Предположим, что грань F граничит с пятью другими гранями A, B, C, D, E, как показано на рис. 117. Точно так же, как для четырехугольника, найдется пара несмежных граничащих с F граней, скажем A и C, не являющихся частями одной и той же грани и не имеющих общей границы. Исключим тогда ребра (a, b) и (c, d) (см. рис. 117) и вершины a, b, c, d, объединяя два оставшихся в каждой из этих вершин ребра в одно; при этом снова получается однородный граф степени три.

б) Предположим, что мы раскрасили полученный граф и что грань $A+F+C$ имеет при этом цвет α. На три грани B, D, E могут потребоваться еще три разных цвета β, γ, δ. Имея в своем распоряжении пять красок, мы сможем восстановить оба ребра (a, b) и (c, d) и закрасить грань F в пятый цвет ε. Однако,

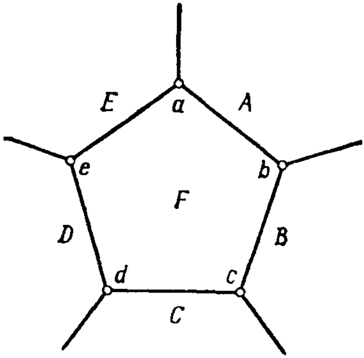


Рис. 117

если у нас есть только четыре краски, это не всегда может быть сделано.

Итак, мы показали, что если однородный граф имеет грани, ограниченные двумя, тремя, четырьмя или пятью ребрами, и в нашем распоряжении есть пять красок, то задача о раскрашивании всегда может быть приведена к задаче о раскрашивании графа с меньшим числом граней. В конце предыдущего параграфа было показано, что однородный граф имеет по крайней мере одну такую грань с небольшим числом ребер, так что это приведение всегда можно продолжать до тех пор, пока не получится граф, имеющий не более пяти граней, который, следовательно, наверняка можно раскрасить не более чем пятью красками. Таким образом, доказана следующая

Теорема о пяти красках. *Любой плоский граф можно раскрасить пятью красками.*

Приведенное доказательство этой теоремы неприменимо в случае, когда у нас имеется лишь четыре краски. Как мы видели, пятиугольники в этом случае не могут быть исключены. Наш процесс приведения может остановиться на некотором однородном графе, каждая грань которого имеет не менее пяти граничных ребер. На нем совсем не будет граней с двумя, тремя и четырьмя граничными ребрами и, значит,

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0.$$

Формула (2) показывает, что такой неприводимый далее однородный граф должен иметь по крайней мере 12 пятиугольных граней.

На самом деле доказано, что любая карта, число граней которой меньше 39, может быть раскрашена четырьмя красками. Конечно, в наш век вычислительных машин это не слишком высокая граница. Если кто-нибудь придумает способ программирования этой задачи, чтобы ею могла заняться вычислительная машина, то, возможно, она сумеет сильно отодвинуть эту границу и — кто знает, — быть может, даже наткнется на карту, которую нельзя раскрасить четырьмя красками. Однако это маловероятно; для такой карты было установлено так много разных ограничений, что ее существование кажется очень сомнительным.

Если бы мы захотели рассказать о многочисленных работах, относящихся к проблеме четырех красок, на это потребовалась бы еще одна такая книга, поэтому приходится довольствоваться тем, что мы хотя бы познакомили вас с этой проблемой.

Решения упражнений

ГЛАВА I

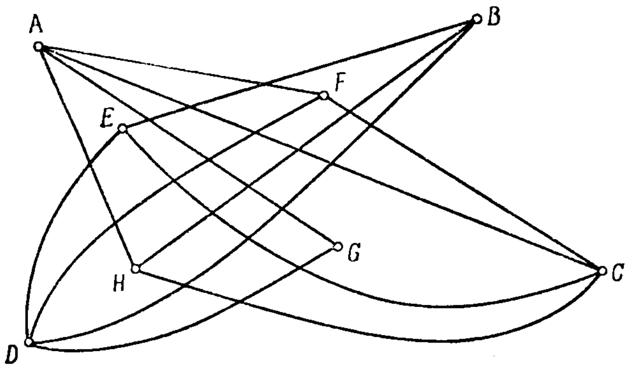
§ 1, стр. 13

2. AB, AE, AD, BC, BG, BF, CD, CG, DH, EH, EG, EF, FH, FG, GH.

3. 9 ребер, 6 вершин; 15 ребер, 8 вершин

§ 2, стр. 15

1.



2. $\frac{1}{2}n(n-1)$.

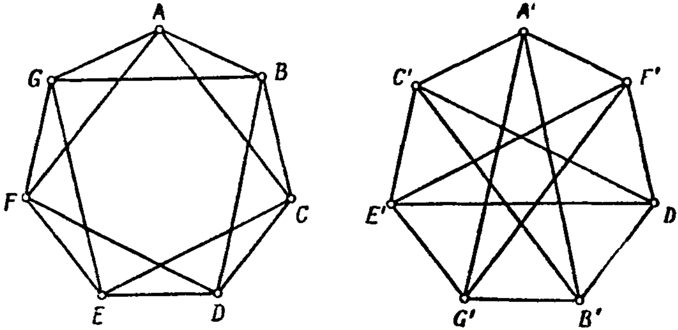
§ 3, стр. 19

1. Граф рис. 1 не изоморфен графу рис. 2, так как второй имеет вершину G с пятью ребрами, в то время как на графе рис. 1 такой вершины нет. Граф рис. 1 не изоморфен графу

рис. 6, так как последний имеет вершину F с единственным ребром; по той же причине не изоморфны и графы рис. 2 и рис. 6.

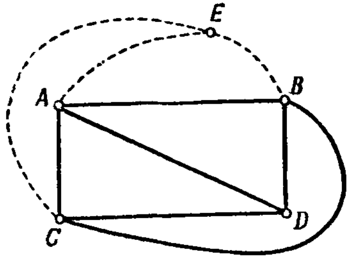
2. Ребро (5, 8) первого графа принадлежит двум циклам длины 4, а на втором графе такого ребра нет.

3. Требуемое соответствие вершин указано на рисунке:



§ 5, стр. 26

1 и 2. Обозначим четырех первых соседей через A, B, C, D; пусть их дороги образуют плоский граф, изображенный на рисунке. Где бы ни поместить пятую точку E, она всегда будет отрезана некоторой замкнутой кривой от одной из остальных точек.



§ 6, стр. 29

1. На рис. 2 имеем

$$\rho(A) = \rho(C) = \rho(D) = 3; \quad \rho(G) = 5;$$
$$\rho(B) = \rho(E) = \rho(F) = \rho(H) = 4;$$

число ребер графа равно $\frac{1}{2}(3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5) = 15$.

На рис. 6

$$\rho(A) = \rho(B) = \rho(D) = \rho(E) = 2, \quad \rho(C) = 3, \quad \rho(F) = 1,$$

общее число ребер равно $\frac{1}{2}(4 \cdot 2 + 3 + 1) = 6$.

2. Они имеют соответственно 4 и 2 нечетные вершины.

ГЛАВА II

§ 3, стр. 38

1. Так как на каждом из графов, изображенных на рис. 28, имеется по две нечетные вершины, то каждый из них можно покрыть единственной цепью.

3. Граф U_4 можно покрыть двумя цепями 1, 2, 3, 4 и 2, 4, 1, 3. Для графа U_5 достаточно единственной цепи 1, 2, 3, 4, 5, 1, 4, 2, 5, 3, 1.

§ 5, стр. 43

1. Первый граф имеет гамильтонову линию *ACBFEDA*, второй — *ABFEHGCDA*.

2. Кратчайшая цепь $A_1A_2A_4A_3A_1$ имеет длину 470.

§ 6, стр. 46

1. 336 ходов, если принять во внимание и направление хода, и 168 — в противном случае.

2. Имеется 4 угловых положения с тремя ходами, 24 боковых положения с пятью ходами и 36 центральных положений с восемью ходами.

ГЛАВА III

§ 2, стр. 52

1. Цикломатические числа этих графов соответственно равны $\gamma = 15 - 8 + 1 = 8$ и $\gamma = 32 - 21 + 1 = 12$.

2. $\gamma = \frac{1}{2}(n-1)n - n + 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

§ 4, стр. 60

1. Для графа рис. 1 имеем, например,

$$A \to AC, \quad B \to BE, \quad C \to CB, \quad D \to DA, \quad E \to EF, \quad F \to FA.$$

Для графа рис. 2

$$A \to AB, \quad B \to BC, \quad C \to CD, \quad D \to DA,$$
$$E \to EF, \quad F \to FG, \quad G \to GH, \quad H \to HE.$$

ГЛАВА IV

§ 2, стр. 67

1. Почти тривиальный пример мы получим, предположив, что каждый ученик образует отдельный кружок. Тогда никто не сможет быть старостой еще какого-нибудь нового кружка.

2. Число кружков равно

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220;$$

оно намного больше числа возможных старост, равного 12.

3. Одно из отображений: $m_1 \to p_2$, $m_2 \to p_1$, $m_3 \to p_4$, $m_4 \to p_5$.

§ 3, стр. 71

2. Свойства а) и б) вытекают из того, что каждая строка и каждый столбец изображенной на рис. 48 таблицы содержит все числа от 1 до N в точности по одному разу. Для того чтобы доказать утверждение в), проанализируем эту таблицу. Считая первую строку и первый столбец, мы имеем N строк и N столбцов, которые устроены следующим образом:

(а) число, стоящее на пересечении i-й строки и i-го столбца, отвечает встрече игрока i с игроком 1;

(б) если $i \neq j$, то число, стоящее на пересечении i-й строки и j-го столбца, отвечает встрече игрока j с игроком, номер которого равен

$$k = 2i - j + [\pm(N-1)]$$

(где, если это требуется, мы прибавляем или вычитаем $N-1$, чтобы число k находилось в пределах от 2 до N). Выражая отсюда j, получаем

$$j = 2i - k + [\pm(N-1)];$$

утверждение в) следует из того, что k и j входят в эти формулы симметрично.

ГЛАВА V

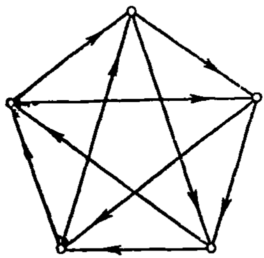
§ 3, стр. 83

2. Можно написать

$$\rho(A) + \rho^*(A) + \rho_0(A) = k; \quad \rho(B) + \rho^*(B) + \rho_0(B) = k-1,$$

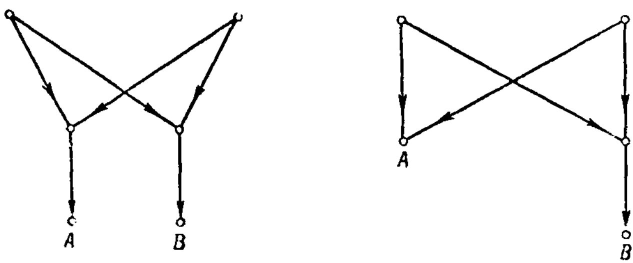
где $\rho_0(A)$ — число ничьих.

3. Для $n = 5$ имеем следующий граф:



§ 4, стр. 89

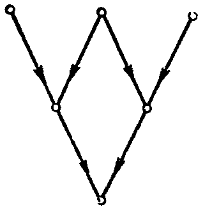
1. Эти графы имеют следующий вид:



а *б*

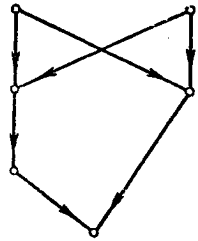
2. Одно из возможных решений: отнесем вершину 1 к классу О; тогда вершины 2 и 7 должны относиться к классу М, а вершина 5 — к классу О.

3.



а

б

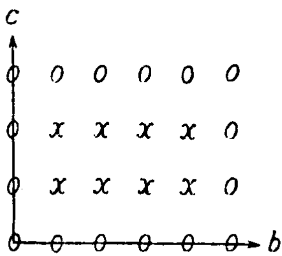


в

ГЛАВА VI

§ 1, стр. 94

1 и 2. Так как единственные имеющиеся в нашем распоряжении приборы для измерения — это сами кувшины *B* и *C*, то мы можем оценить, как распределена жидкость, только в том случае, если один из этих кувшинов либо полный, либо пустой. Все такие распределения жидкости представлены точками (отмеченными кружочками) на границе прямоугольника, изображенного справа. Совокупность распределений *U* представлена внутренними точками (отмеченными буквой *x*) этого прямоугольника. Предположим, что мы имеем распределение, соответствующее какой-то внутренней точке. Тогда единственный способ точно отмерить жидкость следующим переливанием — либо освободить один из кувшинов *B*, *C*, либо наполнить один из них. В обоих случаях такое переливание жидкости приводит к некоторой точке, лежащей на границе графа. Но раз мы уже имеем полный или пустой кувшин, следующее переливание снова приводит к распределению, в котором по крайней мере один кувшин оказывается либо пустым, либо полным. Иными словами, каждое переливание из граничного положения снова приводит к некоторому граничному положению, так что внутренние точки *U* не могут быть достигнуты.

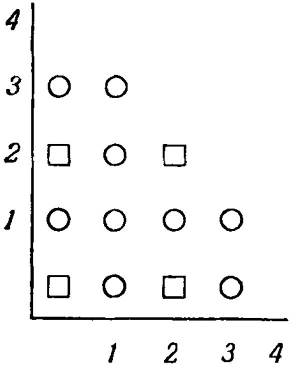


3. (7, 0), (3, 4), (3, 0), (0, 3), (7, 3), (6, 4), (6, 0).

§ 2, стр. 101

2. $В_1(A_1) = (0,\ 0,\ \alpha),\quad \alpha \geqslant 1;\quad П_1(A_2) = (1,\ 1,\ 0);$
$В_2(A_1) = (0,\ 0,\ \alpha),\quad (1,\ 1,\ \beta),\quad (0,\ 1,\ \gamma),\quad \beta \geqslant 1,\quad \gamma \geqslant 2;$
$П_2(A_2) = (1,\ 1,\ 0),\quad (0,\ 2,\ 2).$

3. На рисунке кружочки означают выигрышные положения для A_1, квадраты — проигрышные положения для A_2.



$В_1(A_1) = (1,0),\ (0,1),\ (1,1)$
$П_1(A_2) = (0,2),\ (2,0)$
$В_2(A_1) = (1,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (3,0),\ (3,1)$
$П_2(A_2) = (0,2),\ (2,0),\ (2,2)$

§ 3, стр. 107

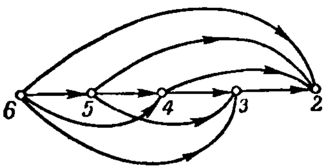
2. Ничьи должны быть представлены ребрами, ориентированными в обоих направлениях.

ГЛАВА VII

§ 1, стр. 111

1. Возьмите, например, отношение «a больше квадрата b», или «множества A и B не имеют общих элементов», или «один треугольник пересекается с другим».

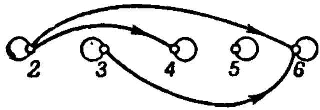
2. а)



$R_6 = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\},$
$R_5 = \{2,\ 3,\ 4\},$
$R_4 = \{2,\ 3\},$
$R_3 = \{2\},$
$R_2 = \{\varnothing\}.$

б) Это отношение представляется полным графом с 5 вершинами без петель: $R_6 = \{2, 3, 4, 5\}$, $R_5 = \{2, 3, 4, 6\}$, $R_4 = \{2, 3, 5, 6\}$, $R_3 = \{2, 4, 5, 6\}$, $R_2 = \{3, 4, 5, 6\}$.

в)



$R_6 = \{6\}$, $R_5 = \{5\}$, $R_4 = \{4\}$, $R_3 = \{3, 6\}$, $R_2 = \{2, 4, 6\}$.

Отношение $a \mid b$ рефлексивно, так как каждое число является делителем самого себя; см. также решение задачи 3 из упражнений к гл. VII, § 4.

§ 2, стр. 115

2. а) Это отношение антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

б) Это отношение рефлексивно, симметрично, но не транзитивно.

§ 3, стр. 120

2. Если $a = b + km$ и $c = d + k_1 m$,
то
$$a + c = b + d + (k + k_1) m,$$
$$a - c = b - d + (k - k_1) m$$
и
$$ac = bd + (dk + bk_1) m + kk_1 m^2 = bd + (dk + bk_1 + kk_1 m) m.$$
Следовательно,
$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod m, \qquad ac \equiv bd \pmod m.$$

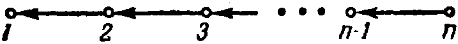
3. Отношение $|a| = |b|$ для чисел a, b рефлексивно, симметрично и транзитивно; следовательно, это есть отношение эквивалентности. Каждый класс эквивалентности состоит из пары $(a, -a)$; члены каждой такой пары различны, за исключением случая, когда $a = 0$.

§ 4, стр. 126

1. На графе полной упорядоченности имеются ребра
$$(4, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 2), (3, 1), (2, 1);$$

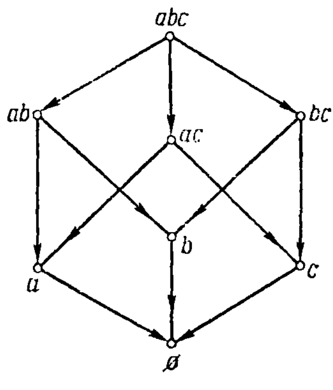
базисным графом является ориентированная элементарная цепь 4, 3, 2, 1.

2. Базисным графом является ориентированная элементарная цепь



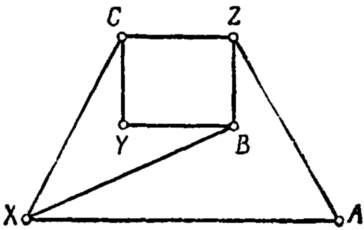
3. Для того чтобы показать, что отношение $a \mid b$ является отношением частичной упорядоченности, заметим прежде всего, что $a \mid a$, так как $a = 1 \cdot a$. (Для строгой частичной упорядоченности отношение $a \mid b$ означает, что $b = ka$, причем $k \neq 1$; другими словами, если в отношении $a \mid b$ число a должно быть собственным делителем b, то это отношение антирефлексивно.) Далее, проверим, что это отношение транзитивно: действительно, если $a \mid b$ и $b \mid c$, то $b = ka$ и $c = k_1 b$, так что $c = k_1 ka$ и, следовательно, $a \mid c$. Наконец, если $a \mid b$ и $b \mid a$, то $b = ka$, $a = lb$, так что $b = klb$, что может выполняться лишь в том случае, когда целые числа k и l оба равны единице, т. е. когда $a = b$. Для строгой частичной упорядоченности отношения $a \mid b$ и $b \mid a$ не могут выполняться одновременно.

4. Имеется 8 подмножеств, считая и $\varnothing$. Базисный граф приводится на рисунке; заметим, что обратный граф изоморфен базисному графу.



ГЛАВА VIII

§ 1, стр. 131



2. Это 1) граф рис. 95 и все графы, которые можно получить из него добавлением ребер; 2) граф рис. 96 с еще одной изолированной вершиной и все графы, которые можно получить из него добавлением ребер.

§ 2, стр. 135

1. $в = 7$, $р = 11$, $г = 6$ и $7 - 11 + 6 = 2$.

2. Вообще $в = (n+1)^2$, $р = 2n(n+1)$, $г = n^2 + 1$ и $в - р + г = 2$

§ 4, стр. 142

2. На всех.

Литература

[1] Б е р ж К., Теория графов и ее применения, М., ИЛ, 1962.

Обстоятельная монография, широко затрагивающая общие вопросы теории графов и применения этой теории. Содержание книги является сравнительно несложным; однако изложение не рассчитано на начинающего.

[2] O r e O., Theory of Graphs (О р е О., Теория графов), Providence (США), 1962.

Эта книга относится к издаваемой американским математическим обществом серии (American Mathematical Society Colloquium Publications), состоящей из обзоров, посвященных отдельным разделам математики. В книге много места уделяется приложениям теории графов; имеется много интересных примеров, зачастую совершенно элементарных. Изложение весьма ясное и отчетливое; однако книга рассчитана на квалифицированного читателя.

[3] Д о м о р я д А. П., Математические игры и развлечения, М., Физматгиз, 1961.

[4] К о р д е м с к и й Б. А., Математическая смекалка, М., Физматгиз, 1954.

[5] R o u s e B a l l M., Mathematical Recreations and Essays (Р а у з Б е л л М., Математические развлечения и очерки), London — New York, 1962.

Посвященные математическим развлечениям и играм книги [3]—[5] имеют много точек соприкосновения с материалом настоящей книги.

[6] Papy J., Mathématique moderne I (Папи Ж., Современная математика, ч. I), Bruxelles — Paris, 1963.

Экспериментальный учебник математики для школьников средних классов (12—13 лет), испытываемый в настоящее время в ряде бельгийских школ. В книге весьма широко применяются графы; многие главы этого учебника специально посвящены теории графов и тесно связанной с ней теории бинарных отношений (см. гл. VII настоящей книги).

[7] Дынкин Е. Б. и Успенский В. А., Математические беседы, М.—Л., Гостехиздат, 1952.

[8] Головина Л. И. и Яглом И. М., Индукция в геометрии, М., Физматгиз, 1961.

В книгах [7] и [8] много внимания уделено задачам о раскраске географических карт (см. гл. IX настоящей книги), тесно связанным с теорией графов.

Словарь основных терминов, используемых в книге.

Ациклический граф. Ориентированный граф, не содержащий никакого ориентированного цикла.

Вершина графа. Либо конец какого-нибудь ребра графа, либо изолированная точка графа.

Гамильтонова линия. Элементарный цикл, проходящий по всем вершинам графа.

Грань многоугольного графа G. Часть плоскости, ограниченная каким-нибудь минимальным циклом из G или максимальным циклом C_1 графа G; в последнем случае это часть плоскости, лежащая вне C_1; ее называют также бесконечной гранью.

Граф. Фигура, состоящая из точек (называемых вершинами) и отрезков, соединяющих некоторые из этих вершин. Соединяющие отрезки могут быть прямолинейными или криволинейными; они называются ребрами графа.

Граф G^*, двойственный многоугольному графу G. Многоугольный граф, каждая вершина которого соответствует определенной грани графа G, а каждая грань — определенной вершине графа G. Две вершины графа G^* соединены ребром в том и только в том случае, когда соответствующие грани графа G имеют общее ребро.

СЛОВАРЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ

Двудольный граф. Граф, вершины которого можно разделить на два непересекающихся множества так, что вершины одного и того же множества не соединены между собой ребрами.

Дерево. Связный граф, не имеющий циклов.

Додекаэдр. Многогранник, ограниченный 12 пятиугольными гранями.

Дополнение $\bar{G}$ графа G. Граф $\bar{G}$ состоит из всех ребер (и их концов), которые необходимо добавить к G для того, чтобы получился полный граф.

Изолированная вершина. Вершина, из которой не исходит ни одного ребра.

Изоморфные графы. Графы G_1 и G_2 изоморфны, если между их вершинами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что пары вершин графа G_1 в том и только в том случае соединены ребром, когда соединены ребром соответствующие пары вершин графа G_2. В случае ориентированных графов это соответствие должно сохранять ориентацию ребер.

Икосаэдр. Многогранник, ограниченный 20 треугольными гранями.

Инцидентность ребра и вершины. Ребро называется инцидентным вершине, если она является одним из его концов.

Корень дерева. Любая вершина, которую мы выбираем за начальную точку дерева.

Кратные ребра. Если две вершины графа соединены более чем одним ребром, то каждое такое ребро называется кратным.

Лес. Граф, все связные компоненты которого являются деревьями (граф без циклов).

СЛОВАРЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ

Максимальный цикл C_1 многоугольного графа G. Цикл, окружающий весь граф G.

Минимальный цикл многоугольного графа G. Цикл, образованный граничными ребрами одного из многоугольников, составляющих G.

Многогранник. Трехмерное тело, граница которого состоит из плоских многоугольников.

Многоугольный граф (многоугольная сеть). Плоский граф, ребра которого образуют множество смежных, не налегающих друг на друга многоугольников.

Нечетная вершина. Вершина, степень которой нечетна.

Нуль-граф. Граф, состоящий только из изолированных вершин: граф, не имеющий ребер.

Обратный граф G^* для данного ориентированного графа G. Граф G^* получается из G изменением направлений всех его ребер.

Однородный граф степени r. Граф, степени всех вершин которого одинаковы и равны r. (В случае ориентированных графов требуется, чтобы степени ρ и ρ^* были одинаковы во всех вершинах и равны друг другу.)

Октаэдр. Многогранник, ограниченный восемью треугольными гранями.

Ориентированный граф. Граф, на котором указаны направления всех его ребер.

Перешеек. Другой термин для связывающего ребра.

СЛОВАРЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ

Петля. Ребро графа, оба конца которого совпадают.

Плоский граф. Граф, который можно начертить на плоскости так, чтобы его ребра пересекались только в его вершинах.

Полный граф. Граф, любые две вершины которого соединены ребром. Полный граф, у которого n вершин, имеет $\frac{1}{2}n(n-1)$ ребер.

Правильный граф. Многоугольный однородный граф, такой, что двойственный к нему граф G^* тоже является однородным.

Правильный многогранник. Многогранник, все грани которого являются равными правильными многоугольниками и в каждой вершине которого сходится одно и то же число ребер.

Ребро графа. Кривая, соединяющая две вершины графа и не содержащая других вершин.

Связная компонента вершины A. Все вершины графа, которые можно соединить с точкой A цепями, и все инцидентные им ребра.

Связный граф. Граф, каждая вершина которого может быть соединена некоторой цепью с любой другой его вершиной.

Связывающее ребро. Ребро, удаление которого приводит к увеличению числа связных компонент графа.

Смешанный граф. Граф, на котором имеются как ориентированные, так и неориентированные ребра.

Степень $\rho(A)$ вершины A. Число ребер, сходящихся в вершине A. Для ориентированного графа $\rho(A)$ означает число выходящих ребер, а $\rho^*(A)$ — число входящих ребер в вершине A; в этом случае имеются две степени.

СЛОВАРЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ

Тетраэдр. Многогранник, ограниченный четырьмя треугольными гранями.

Цепь. Линия на графе, не проходящая ни по какому ребру более одного раза.

Цикл. Замкнутая цепь.

Циклическое ребро. Ребро, не являющееся связывающим.

Цикломатическое число графа G. Число ребер графа G минус число его вершин плюс единица.

Четная вершина. Вершина, степень которой четна.

Эйлеров граф. Граф, содержащий эйлерову линию.

Эйлерова линия. Цепь, проходящая по всем ребрам графа в точности по одному разу.

Элементарная цепь. Цепь, не проходящая ни через одну из своих вершин более одного раза.

Элементарный цикл. Цикл, не проходящий ни через одну из своих вершин более одного раза.

Оглавление

ОГЛАВЛЕНИЕ

О. Оре

**ГРАФЫ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ**

Редактор *Н. И. Плужникова*
Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *А. Г. Резоухова*
Корректор *Е. Г. Литвак*

Сдано в производство 5/IV 1965 г.
Подписано к печати 25/VIII 1965 г.
Бумага $84 \times 108^1/_{32}$=2,75 бум. л. 9,0 печ. л.
Уч.-изд. л. 6,85. Изд. № 1/3302.
Цена 48 коп. Зак. 1412. БЗ—16—65—5

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Государственного
комитета Совета Министров СССР
по печати. Измайловский проспект, 29