УДК 512.8

Достаточное условие совпадения нижней и верхней экспонент многообразия линейных алгебр

Верёвкин А.Б., Зайцев М.В., Мищенко С.П.

На протяжении всей работы основное поле Φ имеет нулевую характеристику. Все не объясняемые понятия можно найти в книгах [1], [2]. Договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, то есть $abc = (ab)c$.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие линейных алгебр, а $F(\mathbf{V})$ — его относительно свободная алгебра счетного ранга, порожденная элементами $x_1, x_2, \ldots$. Обозначим через $P_n(\mathbf{V})$ подпространство полилинейных одночленов от $x_1, \ldots, x_n$ в $F(\mathbf{V})$ и $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$ – его размерность. Рост числовой последовательности $c_n(\mathbf{V})$ называют ростом многообразия $\mathbf{V}$. Если последовательность $c_n(\mathbf{V})$ мажорируется экспонентой a^n для подходящего a, то существуют пределы

$$\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}, \qquad \overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})},$$

которые называют нижней и верхней экспонентой многообразия $\mathbf{V}$. Если $\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \alpha$, то число α называют зкспонентой многообразия $\mathbf{V}$ и обозначают $\mathrm{EXP}(\mathbf{V})$.

В случае ассоциативных алгебр любое многообразие имеет рост не выше экспоненциального [3] и более того его экспонента является натуральным числом [4]. В общем случае, как доказано в работе [5], для любого действительного $\alpha > 1$ существует такое многообразие $\mathbf{V}_\alpha$, что $\mathrm{EXP}(\mathbf{V}_\alpha) = \alpha$.

В случае алгебр Ли в работе [6] доказано, что многообразие алгебр Ли, порожденное конечномерной алгеброй, имеет целочисленную экспоненту. Однако, еще в 1999 году в работе [7] был построен первый пример многообразия алгебр Ли с дробными экспонентами. Остановимся на этом подробнее.

Пусть $\mathbf{A}^2$ многообразие всех метабелевых алгебр Ли, то есть многообразие, определяемое тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0.$$

Обозначим $M = F_3(\mathbf{A}^2)$ относительно свободную алгебру этого многообразия с множеством свободных образующих $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Рассмотрим линейное преобразование d векторного пространства $< y_1, y_2, y_3 >$, определенное правилом

$$d(y_1) = y_2,\ d(y_2) = y_3,\ d(y_3) = y_1.$$

Хорошо известно, что в этом случае d продолжается до дифференцирования алгебры M, которое мы обозначим той же буквой.

Дифференцирование d порождает в алгебре всех дифференцирований одномерную подалгебру $< d >$, поэтому мы можем построить полупрямое произведение $L = M \leftthreetimes < d >$ алгебр M и $< d >$. Отметим, что алгебра M является метабелевым идеалом коразмерности 1 алгебры L.

Пусть $\mathbf{U}$ многообразие, порожденное алгеброй L. Основным результатом статьи [7] являются строгие неравенства $3 < \underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{U}) \leq \overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{U}) < 4$. Другими словами, верхняя и нижняя экспоненты многообразия $\mathbf{U}$ не являются целыми числами.

В данной работе на примере многообразия $\mathbf{U}$ приведено достаточное условие существования экспоненты многообразия, то есть, доказано совпадение нижней и верхней экспонент этого многообразия. Кроме того, с большой точностью найдено ее значение. Оказалось, что

$$\mathrm{EXP}(\mathbf{U}) \approx 3,610718614.$$

Теорема. *Экспонента* $\mathrm{EXP}(\mathbf{U})$ *существует и является дробным числом, приблизительно равным* $\mathrm{EXP}(\mathbf{U}) \approx 3,61$.

Доказательство. Как известно S_n-модуль $P_n(\mathbf{U})$ является вполне приводимым, рассмотрим разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров

$$\chi_n(\mathbf{U}) = \chi(P_n(\mathbf{U})) = \sum_{\lambda \vdash n,} m_\lambda \chi_\lambda, \qquad (1)$$

где m_λ так называемая кратность, а χ_λ — характер неприводимого представления, соответствующего разбиению λ.

Обозначим через d_λ размерность соответствующего λ неприводимого модуля, $d_\lambda = \deg \chi_\lambda$. Отметим, что для введенных числовых характеристик выполняется такое соотношение $c_n(\mathbf{U}) = \dim P_n(\mathbf{U}) = \sum_{\lambda \vdash n,} m_\lambda d_\lambda$.

В статье [7] (см. лемма 1) доказано, что если вне первых четырех строк диаграммы Юнга содержится более двух клеток либо $\lambda_1 - \lambda_3 <$

$2(\lambda_4-3)$, то кратность m_λ равна нулю. В частности, в многообразии выполнена система тождеств Капелли. Как доказано в работе [8] в этом случае кратности m_λ полиномиально ограничены. Понятно, что в случае выполнения системы тождеств Капелли количество слагаемых в сумме (1) также полиномиально ограничено. Поэтому верхнюю и нижнюю оценку экспонент можно находить, анализируя размерности неприводимых модулей симметрической группы.

Учитывая, что ограниченное количество клеток не влияют на числовые значения верхней и нижней экспонент многообразия, рассмотрим разбиения на не более, чем четыре части.

Для λ=$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ разбиения числа n определим числа $\alpha_i=\lambda_i/n$, $i=1,2,\ldots,4$. Поясним, что введенное обозначение допускает ситуацию, когда число слагаемых разбиения может быть строго меньше, чем 4, то есть некоторые из последних λ_i могут быть равны нулю.

Определим функцию

$$F(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\frac{1}{\Pi_{i=1}^4\alpha_i^{\alpha_i}},$$

предполагая, что $\alpha_i^{\alpha_i}=1$ в случае, когда $\alpha_i=0$.

Для любого натурального t рассмотрим разбиение

$$\lambda(t)=(\alpha_1nt,\alpha_2nt,\alpha_3nt,\alpha_4nt).$$

Отметим, что $\lambda(1)=\lambda$. Пусть $d_{\lambda(t)}$— размерность соответствующего разбиению $\lambda(t)\vdash nt$ модуля симметрической группы S_{nt}.

Используя формулу крюков и формулу Стирлинга, получаем, что

$$\lim_{t\to\infty}\sqrt[nt]{d_{\lambda(t)}}=F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_4).$$

Определим область T_n 4−мерного арифметического пространства следующим условием: точка $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ принадлежит множеству T_n тогда и только тогда, когда существует такое разбиение $\lambda\vdash n$, что $m_\lambda\neq 0$ в сумме (1), где $\alpha_s=\lambda_s/n$, $s=1,2,\ldots$. Поясним, что разбиение $\lambda\vdash n$ не может состоять из более, чем четырех частей.

Пусть T область 4-х мерного пространства, определенная условиями

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 & = & 1\\ \alpha_1-\alpha_3 & \geq & 2\alpha_4\\ \alpha_1\geq\alpha_2\geq\alpha_3\geq\alpha_4 & \geq & 0.\end{array}\right.$$

Так как функция $F(\alpha)$ непрерывна, то она достигает на компакте T своего максимального значения в некоторой точке $\alpha^{(0)} \in T$,

$$F_{\max} = F(\alpha^{(0)}) = \max_{\alpha \in T} F(\alpha).$$

Из упомянутой леммы 1 статьи [7] получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что множество T_n при $n \geq N$ содержится в $\varepsilon-$окрестности компакта T. Отсюда, а также из того, что число слагаемых и кратности в сумме (1) полиномиально ограничены, получаем, что $\overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{U}) \leq F_{\max}$.

Для доказательства $\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{U}) \geq F_{\max}$ достаточно доказать, что существует последовательность $\alpha^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots,$ такая, что $\lim_{s\to\infty} \alpha^{(s)} = \alpha^{(0)}$ и чтобы $m_{\lambda^{(s)}(t)} \neq 0$ для любых натуральных s и t. Мы покажем, что таким свойством обладает произвольная точка множества T с рациональными $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$. Как и выше, поскольку $\alpha^{(0)}$ аппроксимируется рациональными точками из T с какой угодно точностью, этого будет достаточно для получения нижней оценки.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ некоторая произвольная рациональная точка множества T, $\lambda \vdash n$, $\lambda = (\alpha_1 n, \alpha_2 n, \alpha_3 n, \alpha_4 n)$, где n общий знаменатель рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Как и раньше для любого натурального t определим разбиение $\lambda(t) = (\alpha_1 nt, \alpha_2 nt, \alpha_3 nt, \alpha_4 nt) \vdash nt$.

Пусть $x_1, x_2, x_3, x_4,$ z_1 и z — свободные образующие относительно свободной алгебры $F(\mathbf{U})$ а $X_s = ad\, x_s$, $s = 1, 2, 3$, $Z = ad\, z$ внутренние дифференцирования алгебры, то есть $ad\, y(x) = xY = xy$. Будем использовать черту или волну над образующими для обозначения альтернирования, например,

$$z_1\bar{X}_1[\bar{X}_2, \bar{Z}] = 2(z_1x_1x_2z + z_1x_2zx_1 + z_1zx_1x_2 - z_1x_1zx_2 - z_1zx_2x_1 - z_1x_2x_1z),$$

$$\bar{X}_1[\bar{X}_2, \bar{X}_3][[\bar{X}_4, Z], Z]) = \sum_{p\in S_4} (-1)^p X_{p(1)}[X_{p(2)}, X_{p(3)}][[X_{p(4)}, Z], Z],$$

где S_n — симметрическая группа, а $(-1)^r$ — четность перестановки $r \in S_n$.

Пусть

$$R_1 = Z, \quad R_2 = [\bar{X}_1, \bar{Z}], \quad R_3 = [\bar{X}_1, \bar{Z}]\bar{X}_2, \quad R_4 = [[\bar{X}_3, Z], Z][\bar{X}_1, \bar{Z}]\bar{X}_2.$$

Рассмотрим такой элемент относительно свободной алгебры $F(\mathbf{U})$:

$$g_t = z_1 R_1^{\alpha_1 nt - \alpha_2 nt - 2\alpha_4 nt} R_2^{\alpha_2 nt - \alpha_3 nt} R_3^{\alpha_3 nt - \alpha_4 nt} R_4^{\alpha_4 nt}. \tag{2}$$

Отметим, что степень g_t равна $m = nt+1$. Пусть f_t – полная линеаризация элемента g_t, а $R_t = \Phi S_{nt+1}$ – подмодуль в $P_{n+1}(\mathbf{U})$, порожденный элементом f. Элемент g_t содержит $\alpha_4 nt$ альтернированных наборов по 4 переменных $\{z, x_1, x_2, x_3\}$ в каждом, $(\alpha_3 - \alpha_4)nt$ альтернированных наборов по 3 переменных $\{z, x_1, x_2\}$ в каждом, $(\alpha_2 - \alpha_3)nt$ альтернированных наборов по 2 переменных $\{z, x_1\}$ в каждом. Все остальные переменные, кроме z_1, которые не входят в альтернированные наборы, совпадают с z. Поэтому при разложении модуля R_t в прямую сумму неприводимых ненулевыми слагаемыми могут быть лишь модули, соответствующие диаграммы Юнга которых содержат поддиаграмму, соответствующую разбиению $\lambda(t) \vdash nt$.

Докажем, что по крайней мере один из таких неприводимых модулей не равен нулю в полилинейной части $P_{nt+1}(\mathbf{U})$. Для этого рассмотрим такие элементы

$$h_s = z_1 R_s,\ s = 2, 3, 4.$$

Сделаем в h_2, h_3 и h_4 следующую подстановку: $z_1{=}y_2 Y_1^k$, $x_1{=}y_3$, $x_2{=}y_1$, $x_3{=}y_2$, $z{=}d$.

Если два элемента $y_i\ y_j$ в процессе суммирования одновременно попадают в коммутаторную скобку, то такое слагаемое равно нулю, так как M является метабелевым идеалом алгебры L. Таким образом, результат подстановки не равен нулю, так как в нем, например, присутствует такой ненулевой базисный элемент алгебры M, который ни с чем не сокращается: $y_2 y_1^{k_s}$, где $k_s = k+s-1$. Другими словами, h_s при такой подстановке переходит в $\mu y_2 y_1^{k_s} + \cdots$, где μ — ненулевое целое число, а многоточием обозначена комбинация слагаемых вида $y_2 y_1^t$ с $t < k_s$ и базисных одночленов M, отличных от $y_2 y_1^t$.

Теперь понятно, что если в элемент g_t сделать такую подстановку элементов алгебры L: $z_1{=}y_2$, $x_1{=}y_3$, $x_2{=}y_1$, $x_3{=}y_2$, $z{=}d$, то результат подстановки будет не равен нулю, так как будет, например, содержать базисный элемент $y_2 y_1^{(\alpha_1+\alpha_3-\alpha_4)nt}$, который ни с чем не сокращается.

Из полученных неравенств получаем, что $\overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{U}) = \underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{U}) = F_{\max}$.

Вычисление максимума функции $F(\alpha)$ на области T было проведено классическим способом, с использованием метода множителей Лагранжа. Опуская технические и достаточно громоздкие вычисления, отметим, что точкой максимума является точка $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in T$, где β_4 — положительный корень многочлена $f(t) = 16t^3 - 24t^2 + 11t - 1$, а остальные переменные удовлетворяют соотношениям $\beta_3 = 2\beta_4 - 4\beta_4^2$, $\beta_2 = \beta_3^2/\beta_4$,

$\beta_1 = \beta_3^3/\beta_4^2$.

Приближенные значения величин получены с использованием вычислительных методов и равны $\beta_1 \approx 0,421350946$, $\beta_2 \approx 0,276953179$, $\beta_3 \approx 0,182040800$, $\beta_4 \approx 0,119655073$, $F_{\max} \approx 3,610718614$.

Теорема полностью доказана.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 09-01-00303-а и 10-01-00209-а.

Список литературы

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли.– М.: Наука, 1985.

[2] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs V. 122, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[3] Regev A. Existence of polynomial identities in $A \otimes B$// Bull. Amer. Math. Soc.- 1971.- V.77, N. 6.- P. 1067-1069.

[4] Giambruno A., Zaicev M. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate// Adv. Math. 1999. **142**. 221–243.

[5] Giambruno A., Mishchenko S. P., Zaicev M. V. Codimensions of Algebras and Growth Functions// Adv. Math. 2008. **217**. 1027–1052.

[6] Зайцев М. В. Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли// Изв. РАН. Сер. матем. 2002. **66**, № 3. 23–48.

[7] Mishchenko S. P., Zaicev M. V. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent// J. Math. Sci. (New York). 1999. **93**, № 6. 977–982.

[8] Зайцев М.В., Мищенко С.П. О полиномиальности роста кодлины многообразий алгебр Ли// Алгебра и логика. 1999. **38**, № 2. 161–175.