О ПОРОЖДАЮЩИХ ПОДАЛГЕБРЫ ВЕРОНЕЗЕ.

Верёвкин А.Б.

Пусть $A=\oplus_{n\geqslant 0}A_n$ градуированная ассоциативная алгебра над полем $k{=}A_0$. Её подалгеброй Веронезе степени $d\geqslant 1$ назовём $A^{(d)}=\oplus_{n\geqslant 0}A_{nd}$. Если все компоненты A_n конечномерны, можно рассмотреть ряды Гильберта $A(t)=\sum_{n\geqslant 0}\dim A_n{\cdot}t^n$ и $A^{(d)}(t)=\sum_{n\geqslant 0}\dim A_{nd}{\cdot}t^{nd}{=}d^{-1}{\cdot}\sum_{r=1}^{d}A(t{\cdot}\exp\{\frac{2\pi ir}{d}\})$. В этом случае A обладает порождающим множеством $X{=}\cup X_n$, $X_n{\subset}A_n$ с рядом Гильберта $X(t){=}\sum_{n>0}\sharp(X_n){\cdot}t^n$; среди всех таких множеств имеются минимальные – у них число элементов любой степени n: $\sharp(X_n)$ – принимает наименьшее из всех возможных значений. Они являются подъёмами базиса пространства $A_+{\otimes}_A(A/A_+)$, $A_+=\oplus_{n>0}A_n$. Аналогично, имеются минимальные порождающие множества $X^{(d)}$ алгебры $A^{(d)}$; все они имеют один ряд Гильберта $X^{(d)}(t)$ и моя цель – дать ему оценку через $X(t)$.

Ясно, что, при фиксированном $X(t)$, $X^{(d)}(t)$ имеет наибольшее значение, когда $A=k{<}X{>}$ – свободная алгебра. В этом случае имеем формулу:

$$\Big(1-X^{(d)}(t)\Big)^{-1}=\frac{1}{d}\sum_{r=1}^{d}\left(1-X\left(t{\cdot}\exp\left\{\frac{2\pi ir}{d}\right\}\right)\right)^{-1} \qquad (1)$$

Доказательство:

Поскольку $A=k{<}X{>}$ – свободная алгебра, $A(t){=}(1-X(t))^{-1}$ и справа в (1) стоит $A^{(d)}(t)$. Сама формула (1) теперь равносильна утверждению о свободности подалгебры Веронезе, а эта свободность следует из Теоремы 6.2 [1, стр.294] (нужно рассмотреть полугруппы порождённые X и $X^{(d)}$, соответственно) или из теоремы Шютценберже [2, стр.133].

Предложение 1 *Пусть $A=k{<}X{>}$, $d\geqslant 1$. Тогда равносильны условия:*

1. *$A^{(d)}$ – конечнопорождена;*
2. *для некоторого многочлена $P(t)$, $X(t)=t^n{\cdot}P(t^d)$.*

Доказательство:

Пусть $X(t)=t^n{\cdot}Z(t^d)$, для некоторого ряда $Z(t)$. Тогда

$$(1-X(t))^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}(X(t))^s=\sum_{s=0}^{\infty}t^{ns}{\cdot}\Big(Z\Big(t^d\Big)\Big)^s.$$

В $\Big(Z\Big(t^d\Big)\Big)^s$ степени всех слагаемых кратны d, поэтому

$$(1-X^{(d)}(t))^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}\Big(t^n{\cdot}Z\Big(t^d\Big)\Big)^{sa}=\Big(1-\Big(t^n{\cdot}Z\Big(t^d\Big)\Big)^a\Big)^{-1},$$

где $a=d/(d,n)$. Следовательно, $X^{(d)}(t)=\Big(t^n{\cdot}Z\Big(t^d\Big)\Big)^a$ – является многочленом, только когда $Z(t)$ – многочлен.

Пусть $X(t)$ не представим в виде $t^n{\cdot}Z(t^d)$, тогда имеются $x,y{\in}X$, $d\not|\,l{=}\deg x$, $m{=}\deg y>0$, $d\not|\,(l{-}m)$.

Рассмотрим уравнение в $\mathbb{N}$:

$$l + mz \equiv 0 \pmod d. \tag{2}$$

Если оно неразрешимо, тогда, полагая $\alpha{=}d/(d,l)$, видим $\nu_s{=}x{\cdot}y^{ds}{\cdot}x^{\alpha-1}{\in}A^{(d)}$, но никакое его начало не лежит в $A^{(d)}$. Поэтому, для всех s, $\nu_s{\in}X^{(d)}$ и $\sharp(X^{(d)}){=}\infty$.

Если (2) разрешимо, пусть β – его наименьшее решение. Рассмотрим слово:

$$\mu_s = x{\cdot}y^{\beta-1}{\cdot}(x{\cdot}y^{\beta})^s{\cdot}x{\cdot}y^{\beta+1} \in A^{(d)}.$$

Любое его начало имеет следующий вид:

$\omega = x{\cdot}y^r$, $0 \leqslant r < \beta$ **:** $\deg\omega \equiv l + mr \not\equiv 0 \pmod d$ и $\omega \notin A^{(d)}$;

$\omega = x{\cdot}y^{\beta-1}{\cdot}(x{\cdot}y^{\beta})^r{\cdot}x$ **:** $\deg\omega \equiv l - m \not\equiv 0 \pmod d$ и $\omega \notin A^{(d)}$;

$\omega = x{\cdot}y^{\beta-1}{\cdot}(x{\cdot}y^{\beta})^p{\cdot}x{\cdot}y^r$, $0 < r \leqslant \beta$ **:** $\deg\omega \equiv l + m(r-1) \not\equiv 0 \pmod d$, поскольку $0 \leqslant r - 1 < \beta$ и $\omega \notin A^{(d)}$.

Следовательно, $\mu_s \in X^{(d)}$ для всех s, и $\sharp(X^{(d)}){=}\infty$.

Следствие 2 *Если X содержит элементы различных степеней, тогда алгебра $A^{(d)}$ – конечнопорождена лишь для конечного числа значений d.*

Пример 3 *Пусть* $A{=}k{<}x,y{>}$, $\deg x{=}1$, $\deg y{=}2$. *Тогда*

$$X(t) = t + t^2,\ A(t){=}(1 - t - t^2)^{-1}{=}\sum_{s=0}^{\infty} F_s{\cdot}t^s,$$

где $(F_s,\ s{=}0,1,\ldots){=}(1,1,2,3,5,\ldots)$ *– последовательность Фибоначчи. Несложно посчитать ряд $X^{(d)}(t)$:*

$$X^{(d)}(t) = \frac{F_d{\cdot}t^d - (-1)^d{\cdot}t^{2d}}{1 - F_{d-2}{\cdot}t^d},\ \ F_{-1} := 0.$$

В частности, $X^{(2)}(t){=}2t^2 + t^4 + t^6 + \cdots$, $X^{(2)}{=}\{y, x{\cdot}y^s{\cdot}x,\ s{=}0,1,2,\ldots\}$.

Вопрос 4 *Если A – несвободна, подалгебра $A^{(d)}$ может оказаться конечнопорождённой при всех d. Возникает задача перечисления $X^{(d)}$ в более общей ситуации. Мне представляются интересными два случая, для которых методы настоящей работы неприменимы:*

1. *$A = S(X)$ – свободная коммутативная k-алгебра порождённая X.*
2. *$A = \Lambda(X)$ – внешняя k-алгебра порождённая X.*

Список литературы

[1] Кон П. *Свободные кольца и их связи.*— М.:Мир, 1971

[2] Лаллеман Ж. *Полугруппы и комбинаторные приложения.*— М.:Мир, 1985