

Н.Г. БАРАНЕЦ, А.Б. ВЕРЁВКИН

ПРОБЛЕМА ДОКАЗАТЕЛЬНОСТИ
ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ
НА РУБЕЖЕ XIX-XX ВЕКОВ

Ключевые слова: история математики, презентизм, антикваризм, реконструкция текста, доказательность интерпретации.

Аннотация: В статье анализируются представления о специфике историко-математического исследования и проблемах реконструкции древних математических источников на рубеже XIX–XX веков. Описываются затруднения интерпретации древнеегипетских и древнегреческих математических текстов и осмысление их отечественными историками математики – В.В. Бобыниным, Г.Н. Поповым, И.И. Чистяковым и Д.М. Синцовым.

Введение

XIX век оставил науке ряд древних письменных источников, чье происхождение можно проследить. Предыдущий этап масштабного введения в научный оборот легендарных памятников (XV–XVII вв.) происходил в совершенно иной обстановке. Он отличался не только степенью сформированности дисциплинарных сообществ, но и самой атмосферой общественной жизни. К XIX веку наука окончательно вырвалась из авторитарных пут Средневековья и развила критические методы познания. Учёные могли более свободно высказывать свои мнения и обмениваться научной информацией, не опасаясь религиозного или цехового преследования. В обосновании достоверности выводов удалённых от прямого наблюдения исторических исследований традиционность потеряла доминирующее значение, отдав преимущество критическому историографическому анализу. Поэтому исследовательские стратегии историков математики рубежа XIX-XX веков представляются интересными для современного изучения. В первом ряду здесь стоят

методы выяснения аутентичности математических рукописей и доказательности проводимых исторических и концептуальных реконструкций. Для более широкого взгляда на проблему необходимо уточнение историко-эпистемологических понятий презентизма (модернизма) и антикваризма (архаизма). Затем мы опишем историко-культурную ситуацию сообщества историков, собирателей и любителей древностей XIX века и проведём исследование интерпретаций папируса Ринда в отечественном математическом сообществе рубежа XIX–XX веков. Это позволит выявить критерии доказательности историко-математических исследований указанного периода.

О ПРЕЗЕНТИЗМЕ, АНТИКВАРИЗМЕ И МЕТОДЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Как понять научный текст Античной Греции, Древнего Китая или периода Великой французской революции? Можно ли вполне передать его содержание современной речью? Есть ли способ отделения авторского текста от современной исследовательской интерпретации? Как нам понять людей иной культурно-исторической эпохи, с другой системой ценностей и целей, использовавших почти забытый категориально-понятийный аппарат для построения своих гипотез и теорий? Какие иллюзии пленяют исследователя на этом пути? И что же он, в итоге, изучает – запечатлённые в источниках идеи или синтетический артефакт – историческую проекцию своих профессиональных стереотипов?

При попытке адекватной реконструкции содержания текста историк науки попадает в многовариантную методологическую ситуацию, крайние проявления которой представляют собой альтернативу *презентизма (модернизма)* и *антикваризма (архаизма)*. Презентистский взгляд на источник отражает актуальное состояние его предмета, излагая его современным языком, предполагая, что автор труда руководствовался однородными с современными исследователями мотивами и целями. При таком подходе снижается важность собственно исторического изучения обстоятельств возникновения текста и появляется риск его излишней модернизации, – древнему автору припи-

сываются замыслы и возможности, невозможные в его хронотопе. Антикваризм, напротив, состоит в тщательном восстановлении исторической атмосферы создания научного артефакта без учёта «здорового смысла» настоящего времени. Опасности этого подхода столь же очевидны, – в отсутствие достоверного знания прошедшего, они кроются в возможности безграничной фантазии при исторической реконструкции, не ограничиваемой современными научными представлениями о существовании изучаемого явления.

Проблема познаваемости исторического прошлого стала предметом дискуссии между Р.Дж. Коллингвудом и Л. Ранке, стимулировавшей обсуждение в философии истории критериев познаваемости прошлого, соотношения описания и объяснения в исторической науке. Термин «презентизм», по утверждению А.Г. Барабашева, в отечественные исследования был введён Н.И. Кузнецовой в монографии «Наука в её истории» (1982). Это понятие было использовано в книге однажды в контексте разбора концепции Т. Куна. Кузнецова описала два способа историко-научного анализа текста, не давая им названия. Читатель по контексту и логике подачи материала делает вывод о том, что презентистский подход характеризуется использованием современного уровня научного знания и стремлением выяснить происхождение современных идей. При этом источник рассматривается как научный текст, оцениваемый с точки зрения современного исследователю понимания аргументированности. Антикваристский подход исключает редукцию полученных в прошлом знаний к современности. Историк должен реконструировать прошлое видение мира во всем его своеобразии, переводя язык источника в такие образы, метафоры и аналогии, которые позволили бы представить утраченное мировосприятие. Напомним в этом контексте, что марксизм претендовал на владение истинной исторической методологией – «историзмом» (которую К. Поппер критиковал под названием «историцизма»). В силу этого влияния Кузнецова отвергла указанные ранее подходы, как неисторичные. В 1994 году в третьем номере журнала «Вопросы естествознания и техники» была опубликована статья М.И. Розова «Презентизм и антикваризм – две

картины истории», дающая развёрнутую критику этих подходов. А.Г. Барабашев в статье «В поддержку метода интерпретации в истории математики» из второго номера «Историко-математических исследований» 1996 года, признавая слабость упомянутых подходов, доказывал их неизбежность в любой историко-научной реконструкции. Он предполагал, что для уменьшения издержек модернизаторского метода интерпретация должна проводиться с учётом историко-культурной ситуации создания текста. Барабашев опирался на мнения авторитетных отечественных учёных – историков математики И.Г. Башмакову и С.С. Демидова. В статье «О роли интерпретаций в истории математики» («Историко-математические исследования», 1986, №30) Башмакова писала о необходимости интерпретации математических текстов прошлых эпох, поскольку понимание математического сочинения возможно лишь в контексте современной математики. Кроме того, интерпретация позволяет обогатить старый материал, вскрыв его новое содержание, даже не осознаваемое автором. Демидов в статье «Презентизм и антикваризм в историко-математическом исследовании» («Вопросы истории естествознания и техники», 1994, № 3) указал, что любой историк математики модернизирует старые тексты простым употреблением современного языка: *«Сам исследователь уже априори «испорчен» современной культурой, его понятийный аппарат и используемый язык несут в себе дух культуры сегодняшнего дня, от которого он не в силах отрешиться»* [1]. Кроме того, исследователь применяет математический аппарат своего времени или же архаическую терминологию, но более современную, чем понятия первоисточника. Модернизм перерастает в презентизм, если историк математики полностью перекладывает источник на современный язык.

Историк колеблется между модернизмом и его отрицанием, что существенно влияет на результаты его работы. Ориентируясь на современность, воспринимая себя частью математического сообщества и приписывая древнему тексту истоки современных идей, он может поплатиться иллюзией о сквозном единстве математики. Антимодернистская критика образа матема-

тики исключительно как знания, вписывающая его в гипотетический культурно-исторический контекст, в своем стремлении устранить современный язык и понятия, стилизуясь под язык источника, может привести к невозможности его понимания для современников. В целом, историография выиграла из этого противостояния, получив новые методы и поле исследования. Антикваристы расширили трактовку математики, вернули истории науки многие забытые тексты, установили контроль за используемой в исследованиях терминологией. Презентисты дополнили допустимые методы исторического анализа математического знания при сохранении его «узкого» предмета [2]. Сведём воедино доводы антикваризма и презентизма:

Антикваризм	Презентизм
<p><i>Позитивистски-фактуалистский аргумент</i></p> <p>Историк математики ограничен описанием имеющихся в источнике математических предложений. Он не создаёт теории, восполняющие отсутствующие факты или домысливающие их. Не обнаруженные результаты и методы не принимаются во внимание, даже если естественно предположение об их известности.</p>	<p><i>Антифактуалистский аргумент</i></p> <p>Историк математик «домысливает» факты, поскольку является частью современного математического сообщества и имеет апперцепции о ходе развития математических дисциплин. Модернизация исторических источников неотвратима. Понимание источников возможно только через обращение к современной математике.</p>
<p><i>Естественно-объективистский аргумент</i></p> <p>Цель исторической работы в обнаружении истины, а всякие истолкования и личные соображения мешают объективности.</p>	<p><i>Личностно-мотивационный аргумент.</i></p> <p>Научное творчество историка не имеет смысла, если он не высказывает своих личных мнений и оценок.</p>
<p><i>«Продильтеевский» герменевтический аргумент</i></p> <p>Историк математики «вживается» в строй мыслей математика прошлого и помещает источник в контекст культуры своей эпохи.</p>	<p><i>«Прогадамеровский» герменевтический аргумент</i></p> <p>Адекватное понимание математического текста недостижимо из-за «исторического зазора». Рациональная реконструкция наиболее плодотворна при его осовременивании.</p>
<i>Принципы исследования</i>	
<p>Описание против фантазии. Нет оснований полагать, что математики прошлого мыслят так же,</p>	<p>Цель в рациональной реконструкции. Невозможно узнать мысли древних математиков, их идеи «восстановимы»</p>

По мнению Барабашева, позиция последовательного антикваризма не плодотворна, и стесняет историка математики. Презентизм, опирающийся на социокультурную философию математики, более перспективен. Его стратегия исследования ориентируется на возможно более полную интерпретацию источников в современном контексте, на описание изменений социокультурных основ математики и выявление исторических закономерностей в развитии науки.

В современной истории математики позиции модернистов и архаистов сближаются. Осознав их сильные и слабые стороны, учёные стремятся к рациональным реконструкциям в контексте исторических эпох и с учётом эволюции математического знания.

ИСТОРИКИ, АВАНТЮРИСТЫ И ЛЮБИТЕЛИ ДРЕВНЕЙ МАТЕМАТИКИ

Охарактеризуем общий настрой XIX века в отношении древней истории и представим тот культурный фон, на котором происходило исследование древней истории математики. Замечательное обстоятельство – весь XIX век происходили неожиданные открытия в древней истории, обнаруживались новые тексты – вначале греческие, затем египетские, персидские и индийские, уводившие историков в дальнейшее прошлое, открывая замечательные по своему уровню и совершенству образцы древней науки и литературы.

Ренессансная мода на Античность, породившая классицизм в искусстве XVIII века, в XIX веке распространилась на историю науки. Обращение к Античности в каждый из периодов было различным с точки зрения целей и причин. В эпоху Возрождения с появлением книгопечатания появилась принципиально новая возможность для быстрого распространения информации. Вскоре возникла необходимость в систематизации накопленных публикаций для их унификации и изучения. Тексты античных учёных стали издаваться с комментариями, восстановленными и дополненными местами, что

было широко распространенной книгоиздательской практикой. Также сложился обычай прятать новые идеи за псевдонимом и авторитетом древних, чтобы защитить автора от цехового или религиозного преследования или для придания новому автору ещё не заслуженного им научного веса. Отношение к Античности было прагматичным, древность мнения рассматривалась как важный аргумент его достоверности и значимости. К XVII веку появляется осознание сильных и слабых сторон обращения к авторитету, пробуждаются поиски новых методов аргументации, неизвестных древним. Новизна и доказательность стали основательными идеалами научности, породившими новую науку и философию. Античные тексты утрачивают своё практическое значение и вытесняются из оборота естествознания. Мода на древность уходит в эстетическую сферу литературы и художеств. В XVIII веке формируется романтическое, некритичное и мифологическое отношение к Античности. Изучение классической древности стало частью образовательной системы. По воссозданным старым образцам классицисты строили архитектурные здания, оформляли интерьеры и создавали произведения искусства, формирующие специфический «визуальный» жизненный мир эпохи, оторванный от рациональности и здравого смысла. Неогуманистически образованный человек уже не мог критично воспринимать образ Античности и поклонялся её произведениям.

В XIX веке учёные и коллекционеры из европейских стран, – Франции, Англии, Германии, – открыли новые объекты для исследования. В Палестине, Египте, Персии, Индии они обнаружили новый культурный мир, сулящий неисчерпаемые запасы артефактов. Учёные и любители принялись разыскивать на открытых для археологов землях упомянутые, но потерянные ранее сочинения. Из университетских библиотек поиск распространился в лавки Каира и Стамбула. В провинциальных архивах и в неописанных фондах библиотек, между книжными полками и стенами ризниц, в корзинах хозяйственных комнат монастырей были «обнаружены» забытые рукописи Омара Хайяма, Леонардо Пизанского, Франко из Люттиха и др. На возникшей моде ан-

тиквары делали приличные состояния, продавая любителям древностей письма, например, Александра Македонского или Марии Магдалины. Жертвами аферистов становились люди весьма образованные.

Нашим современником, воспитанным на нормах строгой научной этики, осуждающей плагиат, подлог и фальсификацию, не стоит забывать, что с XVI по XIX века существовала развитая и доходная индустрия производства поддельных древних монет, документов и произведений искусства. При этом целью фальсификаторов не всегда было личное обогащение, иногда они руководствовались ложно понимаемыми высокоидейными соображениями – патриотизмом и гордостью за свою нацию. В первой половине XIX века на волне национального пробуждения народов Европы, появилось много энтузиастов древности – краеведов и фольклористов, домысливавших, исправлявших и создававших древнюю историю своего народа для подъёма его национального духа и гордости за великое прошлое. Так, польский писатель Прибыслав Диаментовский (1694–1774) из чувства патриотизма написал несколько поддельных хроник. Энциклопедия Брокгауза и Ефрона сообщает о нём: *«... жил в то время, когда история служила средством для прославления дворянских родов, и, обладая большой эрудицией, вздумал сочинить материал для панегириков в честь знаменитых польских дворян и стал писать поддельные хроники. Одну из них издал в Варшаве в 1825 г. Ковнацкий, под заглавием "Kronika polska przez Prokosza w wieku X napisana". Множество подобного рода трудов Диаментовского остались неизданными».*

Примерами чистого патриотической фальсификации могут послужить некоторые труды Вацлава Ганки (1791–1861). Он был профессором чешского языка и литературы в Пражском университете, библиотекарем народного музея и знаменитым деятелем чешского национального возрождения. Вместе с помощниками Линде и Свободой в 1817 году он обнаружил на чердаке церковной башни Краледвора (по-немецки – Кенигингофа) 12 листов пергамента, содержащих самобытное произведение древне-чешской письменности, которое, по определению критика находки профессора В.И. Ламанского, есть

«новейшее произведение древне-чешской литературы». По вопросу подлинности этой рукописи чешские учёные разделились на два непримиримых лагеря, так и не достигнув согласия.

В начале XIX века в России с большим размахом подделывал исторические документы собиратель и торговец антиквариатом А.И. Бардин (он умер в 1842 году). Бардин мастерски имитировал древнее уставное письмо – известно более 30 сделанных им подложных рукописей, хранящихся в государственных и частных библиотеках. Он продал директору Московского архива Коллегии иностранных дел А.Ф. Малиновскому и академику графу А.И. Мусину-Пушкину, потерявшему свою коллекцию древних рукописей в пожаре 1812 года, списки «Слова о полку Игореве». Лишь позднее учёные догадались о подлоге. У современных историков принято считать, что Бардин не создавал качественно новых памятников, а изготавливал высококачественные списки реально существовавших источников. Но при этом отличить одно от другого не представляется возможным. Исключительно из патриотических целей подделывал древние рукописи страстный библиофил и историк-любитель князь А.И. Сулакидзе (1771–1832). Его руке принадлежат рунические «Песни Бояна», компилятивное сочинение «О воздушном летании в России с 906 лета по Р.Х.» и другие тексты [3]. И такого рода случаи не уникальны. Прохождение документа через собрание коллекционера, заподозренного в фальсификации, основательно компрометирует источник. Массовые подлоги подрывают фундамент всей исторической науки. Для историков того времени была насущна проблема критериев подлинности древнего текста. Некоторые составили себе научное имя на выявлении подделки.

В 20–40-е годы XIX века оформились новые научные специальности – палеография и библиография, в европейских странах появились специалисты, описывавшие рукописные и печатные книги в библиотеках университетов и частных собраний. Они выступали экспертами при обнаружении новых источников.

Историография математики также богата подделками. Наверное, в самом ярком скандале поучаствовал известный французский геометр, историк науки, парижский академик Мишель Шаль (1793–1880). Он купил письма Галилея, Ньютона, Лейбница, Монтеня, Рабле, Жанны д'Арк, Страбона, Верцингеторикса и других, написанные по-французски на старинной бумаге малограмотным аферистом Дени Врэн-Люка. Шаль приобрёл рукопись и письма Паскаля, в которых излагались основы дифференциального исчисления. Движимый патриотизмом, Шаль был счастлив обнаружить приоритет французского гения над англичанином Ньютоном и немцем Лейбницем. На одном из заседаний французской Академии наук 1869 года Шаль сделал гордый доклад о находке, привлёкший мировое внимание. Вскоре выяснилась подложность писем Паскаля и всей коллекции Шаля, приобретённой за 140 тысяч франков. После непродолжительного сопротивления Шалю пришлось признать свою ошибку и напрасные расходы. Фальсификатор Врэн-Люка провёл несколько лет в тюрьме, демонстрируя там отличное поведение. Славу историка математики Мишель Шаль приобрёл немного ранее – в 1860 году, когда реконструировал сочинение Евклида, сохранившее лишь туманное название – «Поризмы». Шаль предположил, что «Поризмы» развивают идеи «Начал» и содержат основы аналитической и проективной геометрии – областей профессионального интереса самого Шаля. За реконструкцию текста «Поризмов» он в 1865 году получил медаль Г. Копли Лондонского королевского общества. По поводу этой работы можно встретить сообщение, что гипотезы Шаля прекрасно подтвердились после обнаружения античного папируса...

Зачастую утраченные тексты становились предметом исследования в изменённом виде, давая повод самым смелым выводам. Рассмотрим это явление на примере сочинения об абаке французского монаха Герберта, который выучился у арабов в Кордовском и Севильском университетах и в 999 году н.э. стал римским папой Сильвестром II. Текст его «Regula de abaco computi» был опубликован в 1867 году. Историк Николай Михайлович Бубнов исследовал сохранившиеся рукописи этого сочинения. Применяя палео-

графический и хронологический методы, он проанализировал возможность появления сочинения Герберта, определил трудности его распространения и проблемы исследователей позднего времени. В докторской диссертации «Herberti, postea Sylvestri II papae opera mathematica» 1899 года Бубнов доказывал, что Герберт в юности имел возможность изучить подлинный текст какого-то анонимного автора, изложившего искусство счета на абаке (этот неизвестный получил имя «anonymus Bubnovianus»). Будто бы, через 20 лет Герберт по памяти восстановил текст по просьбе неизвестного Константина. Другие неизвестные авторы, неудовлетворенные работой Герберта, позднее дополнили его. Последующие поколения абакистов исправляли этот текст, в настоящее время считающийся творчеством Герберта. Бубнов также доказывал, что в Средневековье был сделан подлог и за Боэция, римского философа рубежа V–VI веков н.э., под именем которого выступал лжеБоэций, – «лотарингский лгун», – монах XII века. Бубнов также утверждал, что под именем Архита Тарентского, философа-пифагорейца IV века до Р.Х., скрывался сам Герберт, а все, что *«он говорит о Пифагоре и пифагорейцах в той определенности как у него, есть его свободное творчество ... что настоящий Боэций ничего об абаке не писал, и тем не менее абак с мечеными жетонами был известен всему Греко-римскому миру, а, следовательно, и Боэцию, что наших цифр настоящий Боэций ни в каком из своих сочинений не сообщает, но что к абацистам XI – XII вв. они всё-таки попали не от арабов, а из Греко-римской традиции, и что воображаемый «Боэций» знает их как заурядный абацист XI в.»* [4].

Переместимся теперь на Восток в Индию. Европейские учёные заинтересовались индийской культурой накануне XIX века. История Индии извлекается только из её мифологических памятников, – исторической наукой в европейском смысле индусы не обладали. Её созданием занялись британские и германские учёные, находившиеся в плену восточной экзотики. Начало научного исследования Индии по времени можно связать с работами основателя индийской филологии англичанина Генри Томаса Кольбрука

(1765–1837): в 1797 году он издал четырёхтомный свод индусских законов, в 1805 году сделал первое европейское сообщение о Ведах, а в 1817 году опубликовал перевод санскритских математических сочинений «Algebra of the Hindoos». В это время в Европе стали печатать грамматики и словари санскрита, и Кольбрук одним из первых высказался о его родстве с германскими языками. Немного позднее, в 1855 году были опубликованы ранее неизвестные письма итальянского купца Филиппо Сассетти, высказавшего аналогичную идею в конце XVI века.

Исследователи XIX века придавали индийской цивилизации чрезвычайную древность, – например, американский санскритолог Вильям Двойт Витни (1827–1894) относил создание Ригведы к 2000 году до н.э. Они же стали утверждать, что многие математические открытия, считавшие плодами эллинистического мира или европейского Возрождения, ранее были угаданы древними индийскими математиками. Индусы не были знакомы с процедурой доказательства и с логикой аргументации, разработанной в европейской математической традиции. Они апеллировали к очевидности высказанных нетривиальных положений.

Об истории древнеиндийской математики размышляли и российские учёные. Выпускник Московского высшего технического училища и Московского университета, профессор Георгий Николаевич Попов (1878–1930) в книге «История математики» 1920 года изложил историю известной теоремы Пифагора. Фрагмент его рассуждений хорошо передаёт мнение историко-математического сообщества по этому поводу: *«В настоящее время известно, что не позднее V века, а может быть IV века до Р. Хр. индусы в своих «правилах измерения» и руководствах к постройке алтаря (Culvasutras) для определения прямого угла пользовались треугольником со сторонами 15, 36 и 39. Впервые этот вопрос выяснил Тибо (1875 г.), затем Шридер (Pythagoras und die Inder) 1884 г., наконец Бюрк в «Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft», 55, 56 Leipzig (1901–1902) дал перевод и комментарии к «Сувасутрам» и теперь можно на основании указанных работ считать уста-*

новленным принадлежность этой теоремы индусам и зависимость от них пифагорейцев. От самого Пифагора не осталось никаких сочинений геометрического содержания и, по свидетельству Прокла, писатели ранних эпох приписывали открытие теоремы Пифагору (Первое упоминание встречается в «Архитектуре» Витрувия). Таким образом, если допустить, что Пифагор владел доказательством этого предложения, то о форме его можно строить только догадки, т.к. из комментариев Прокла видно, что ученики Пифагора пользовались приемами (какими именно, он не указывает) отличными от данных Эвклидом в его «Началах». По поводу этого Прокл говорит: «Я почитаю и тех, которые первые признали истину этого предложения; но ещё выше ценю автора начал не только за то, что он дал стройное доказательство его, но и за то, что более общую теорему шестой книги основал на непреложных научных данных. По вопросу об этой теореме создавалась целая литература и автор новейшей работы («Теорема Пифагора») В. Литцманн говорит: «В настоящее время все единогласно признают, что эта теорема не была открыта Пифагором, но одни полагают, что он первый дал вполне верное (но не дошедшее до нас) доказательство, другие же оспаривают и эту заслугу». Как бы то ни было, только исследования недавнего времени в области математических знаний древних Индусов дали точные указания, в каком смысле надо истолковывать бывшее до сих пор туманным происхождение указанного предположения» [5]. На наш взгляд, упомянутые исследования породили больше вопросов, чем ответов.

Для выяснения подлинности источников Попов указывал четыре необходимых фактора. Во-первых, внешняя форма и характер письма, языка, стиля и композиции текста должны соответствовать заведомо подлинным источникам того же времени. Во-вторых, текст не должен содержать факты, не известные во время его создания. В-третьих, форма и содержание текста должны соответствовать характеру общего эволюционного цикла окружающих его идей. В-четвертых, по форме и по содержанию текста нужно выявить его поздние искажения. По его мнению, обнаружение интерполяций,

то есть, позднейших вставок в первоначальный текст, является серьёзнейшей проблемой, актуальной при работе с манускриптами, размножившимися посредством переписывания. Не менее проблематично определение места и времени происхождения источника, поскольку древние авторы редко заботились сообщить об этом. Иногда помогает ссылка автора на известный источник и упоминаемые им солнечные или лунные затмения. Более трудная задача – определить автора анонимного произведения. Тут у историков в дело идут сличение почерка и лингвистический анализ. Попов указал профессиональные достоинства историка науки: *«Беспристрастие и объективность – качества, неотделимые от критики, дают возможность исследователю, считаясь с анализом научных фактов и разбором трудов деятелей науки, установить степень и ценность, роль и место в истории и содействовать искоренению заблуждений и ошибочных мнений, широко распространяемых под влиянием доверия к основательности суждений тех писателей, которых «авторитетность» ставится вне сомнений авторами, пользующимися материалом из вторых рук»* [6].

Но подлинный древний источник нужно уметь правильно прочесть. Как избежать произвольных, тенденциозных истолкований, какие познавательные средства допустимы при этом? Ответы на эти вопросы породили жаркие дискуссии среди историков математики, – в частности, между Мориксом Кантором (1829–1920) и Иеронимом Цейтеном (1939–1920): первый был антикваристом, а второй – презентистом.

ЧТО ЖЕ НАПИСАНО В ПАПИРУСЕ РИНДА?

Папирус Ринда – это свиток 5,5 м длины и 32 см ширины (иногда указывают другие размеры), содержащий математические записи древнеегипетским иератическим письмом. Он также называется «папирусом Ахмеса» по оставленному на нём имени писца Агамеза (иначе – Яхмоса) или же – папирусом Британского Музея №10057 или №10058 по месту хранения (часть оказалась в Нью-Йорке). Шотландский коллекционер древностей Александр

Генри Ринд (1833–1863) приобрёл папирус в металлическом футляре на Луксорском базаре в 1858 году, но иногда указывают более позднюю дату. После смерти Ринда его покупка оказалась в Британском Музее.

По имени государя, от которого осталось только окончание -at, первые исследователи относили написание папируса ко времени фараона Аменемга III из XII династии – примерно к 2200 году до н.э. Такую же дату указал профессор А.В. Васильев в книге «Целое число» 1922 года. Профессор В.В. Витковский в статье «Квадратура круга» энциклопедии Брокгауза и Ефрона относил папирус «за 2000 лет до Р. Х.». Историк математики Бобынин, сводя имя писца с одним из прозвищ «короля Амосиса» XVII–XVIII династии, заключает, «что папирус Ринда был составлен в 1700 г. до Р. Х. по образцу более древних математических сочинений, написанных в 2221–2179 г. до Р. Х.» [7]. Сейчас папирус датируют по почерку 1650 годом до н.э.

Заглавие сочинения таково – «Наставление, как достигнуть знания всех земных вещей, всех тайн, содержащихся в вещах. Сочинено в 33-м году, в четвёртом месяце времени наводнения при величестве царя О-усер-Ра, как копия по образцу старых сочинений времени фараона ---at писцом Яхмосом». Текст содержит 23 таблицы, в которых найдено 84 не всегда правильных рецепта решений задач на темы: действия с дробями и деление; линейные уравнения от одной неизвестной, которую египтологи читают «хау» или «аха»; нахождение площадей плоских фигур, – в том числе треугольника, трапеции и круга (приведённое для круга правило соответствует значению $P = 256/81 = 3,16049\dots$); нахождение объёмов житниц, – в частности, прямоугольного параллелепипеда и прямого кругового конуса; определение параметров пирамиды; сумма геометрической прогрессии; подобия и пропорции (иногда прочитывают и проценты).

Английский археолог Самуил Бирч (1813–1885) ознакомился с папирусом Ринда в Британском Музее. В 1868 году в краткой статье «Геометрический папирус» он неточно передал его содержание. Впоследствии папирус исследовал немецкий египтолог, профессор Гейдельбергского университета

Август Эйзенлор (1832–1902). В 1870 году он занимался купленным для Британского Музея «Великим папирусом Харриса», с завещанием Рамзеса III, а от него перешёл к изучению папируса Ринда. Эйзенлор был доктором химии, и, обладая знаниями точных наук, смог прочесть этот памятник древнеегипетской математики. Факсимиле папируса с комментариями Эйзенлора изданы в Лейпциге в 1877 году.

Изучение папируса Ринда подорвало веру в древнеегипетское происхождение математики древних греков. Она особенно бытовала среди немецких учёных. Так, Мориц Кантор (1829–1920) в фундаментальных «Лекциях по истории математики в 4-х томах» (1880–1908) заявлял, что египтяне знали почти все теоремы, приписываемые Фалесу и Пифагору, а различие между египетской и греческой математикой состоит лишь в методе доказательства – индуктивном у египтян и дедуктивном у греков. Французские историки математики, начиная с Жана Этьена Монтюкла (1725–1799), относились к египетскому влиянию на греков скептически. Они допускали заимствование греками у египтян некоторых приёмов, но создание строгой системы математических рассуждений считали заслугой греческого разума.

Виктор Викторович Бобынин (1849–1919) был первым российским знатоком папируса Ринда. 7 мая 1882 года он защитил о нём магистерскую диссертацию в Московском университете. Мотивируя значимость предмета исследования, Бобынин писал: *«Для Истории математики открытие папируса Ринда является событием первостепенной важности, так как только при его посредстве современная наука получила возможность изучить содержание и методы египетской математики по источникам непосредственным. Всё, что до сих пор было известно о состоянии математических наук в древнем Египте, основывалось на отрывочных, крайне неполных и не всегда достоверных свидетельствах писателей древней Греции. В виду громадного значения, которое имеет египетская математика как для решения вопросов о первоначальном развитии математических знаний вообще, так и для развития этих же знаний в древней Греции, а через неё и во всей древней*

и современной Европе, такое положение дел может быть названо только крайне прискорбным. После всего изложенного неудивительно, что, как только папирус Ринда появился в Британском Музее, он тотчас же получил известность и привлек общее внимание египтологов... Возникновение в течении менее чем 10 лет целой литературы о папирусе Ринда представляет самое красноречивое свидетельство громадной важности этого памятника, как для египтологии так и для истории математики» [8].

Своё суждения о папирусе Ринда Бобынин резюмировал в статье «Математика» энциклопедии Брокгауза и Ефрона. Он считал папирус сводом математических знаний Древнего Египта. Бобынин выделял в нём арифметическую и геометрическую части. В арифметической части, кроме четырёх действий с целыми и дробными числами, есть примеры возведения в степень, пропорциональное деление, зачатки учения об отношениях и пропорциях, определение среднего арифметического, решение линейных уравнений с одним неизвестным, арифметические прогрессии. Доказательства или объяснения решений отсутствуют. Результат подаётся в готовом виде или вычисляется по рецепту. Иногда делается проверка ответа.

Бобынин считал, что такой способ изложения свидетельствует о неполной осознанности предлагаемого решения и показывает, что решение задач изначально было найдено феноменальными счётчиками и затем в качестве образца передавалось следующим поколениям. Бобынин интересовался способностями к быстрому счёту и даже написал для энциклопедического словаря Брокгауза и Ефрона статью «Счетчики феноменальные». К бессознательным методам быстрого счёта он относил метод попыток и метод искомого неизвестного. «Метод попыток» заключается в возможно меньшем переборе и проверке ряда ответов для точного решения задачи. Он применим к теоретическим и практическим задачам. «Метод выражения искомого неизвестного» использовался для решения задач с немногими простыми условиями, указывающими ряд очевидных действий (алгоритм), исполнение которых приводит к искомому ответу. В папирусе Ринда встречается только одно пра-

вило общего значения (применение дистрибутивности для нахождения некоторых аликвотных разложений): результат умножения дроби с единицей в числителе на $2/3$ всегда состоит из половины исходной дроби и её шестой части. Правило излагается после ряда подтверждающих примеров. Бобынин заключил, что оно найдено индуктивно через простое перечисление.

В геометрической части папируса сведения *«стоят на гораздо более низкой степени развития, чем их арифметические знания»*. Все приёмы измерения, определения величины земельных участков и вместимости житниц неправильны. Приёмы измерения величин участков умозрительны, и опираются на ошибочное учение о равенстве площадей фигур равного периметра. Способы определения вместимости житниц являются грубо эмпирическими. Более содержательно описание геометрических свойств пирамид. По мнению Бобынина в этой части изложена *«статья о вычислении пирамид, заключающая в себе в примитивном виде учение о подобии треугольников и пользующаяся для определения равенства углов в прямоугольных треугольниках приемами, состоящими в смысле науки нашего времени в определении синусов и тангенсов»*. Бобынин отнёс папирус Ринда к учебно-научной работе, синтетической форме математической литературы, естественной при низком уровне научных знаний.

В.В. Бобынин отметил главные проблемы исследования истории науки: *«Изучение истории наук в их первоначальном состоянии, как и вообще истории культуры, в весьма сильной степени задерживается трудностью для современного исследователя обнять, не говорим вполне, но с достаточным приближением, всю совокупность идей и знаний, более или менее отдалённой от нас эпохи, вместе со всеми вытекающими из этой совокупности ближайшими и отдалёнными последствиями. Значительная разность между уровнями развития научных знаний в какую-нибудь отдалённую эпоху и в наше время делает до крайности рискованной всякую попытку построения аналогий, всегда имеющих для исследователя столь важное значение. Скудность числа фактов, относящихся к отдельным эпохам и находящихся в*

распоряжении науки, вместе с трудностью добывания новых, делает еще более затруднительным положение исследователя, так как, лишая его достаточного фактического материала для выводов, придаёт всем его построениям крайнюю шаткость и непрочность. Один новый противоречащий факт или упущенная из виду комбинация известных фактов – и блестящая теория, на составление которой было потрачено так много остроумия и, может быть, много времени и труда, обращается в блестящую, но бесплодную иллюзию» [9].

Бобынин явно тяготел к антикваризму и для адекватного восстановления трудов древних математиков требовал тщательной историко-научной работы. Исследователь, забывший о разнице уровней развития математических знаний, вместо исторической реконструкции решения получит его новый вариант. В качестве примера такого рода Бобынин указывал опыты восстановления способа приближенного извлечения квадратного корня по сочинению Архимеда «Об измерении окружности»: *«При выборе средств для достижения своей цели авторы многих из этих попыток не стеснялись даже фактом несуществования во время Архимеда избираемых ими средств. Так, некоторые из них употребляли в своих работах даже непрерывные дроби. Понятно, что с такими средствами достигнуть своей цели они оказались не в состоянии» [10].* Сам Бобынин полагал, что ему удалось правильно реконструировать результат Архимеда на пути, указанном Теоном Александрийским в его «Комментарии к Альмагесту Птолемея».

В многочисленных рецензиях Бобынин сформулировал *критерии историко-математической работы*. К ним он относил: фактическую состоятельность, т.е. правильность подбора и интерпретации исторических фактов в историко-культурном контексте; использование первоисточников или качественных интерпретаций первоисточников; теоретические и философские обобщения, позволяющие осознать исторические закономерности развития науки; когерентность, т.е. «вписываемость» предлагаемых идей в уже сложившуюся традицию представления истории математики.

Отметим, что Бобынин сурово относился к любым попыткам оригинального разрешения какой-то проблемы, ранее уже объяснённой, по его мнению, авторитетным учёным. При нарушении же исследователем вышеуказанных критериев, он не скупился на язвительные замечания. Критике подвергались малейшие отступления от сложившихся у него «канонических» мнений об истории древних египтян и греков. Причём, эта «каноничность» зачастую была уделом представлений самого Бобынина и соответствовала его образу понимания хода исторических событий.

После бобынинских исследований египетской математики отечественные историки науки редко обращались к этой теме, обычно касаясь при этом частных или спорных вопросов. Так, в 1928 году профессор и методист, редактор журнала «Математическое образование» Иоасаф Иванович Чистяков (1870–1942) опубликовал статью «О новейших исследованиях в области древнеегипетской математики». Поводом к работе стало выступление в Московском научно-педагогическом математическом кружке профессора Ленинградского университета В.В. Струве, доложившего о своих результатах расшифровки математического папируса Голенищева. Новые факты дали Чистякову возможность уточнить сведения, полученные из папируса Ринда: *«В области геометрии мы, согласно с ранее уже отмеченным практическим характером египетской науки, находим также ряд задач с решениями. Они относятся прежде всего к вычислению площадей прямолинейных фигур: прямоугольника, квадрата, прямоугольного треугольника и прямоугольной трапеции. Заметим, что благодаря неудачным чертежам в папирусе Ринда для двух последних фигур, исследователи (М. Кантор, В.В. Бобынин и др.) склонны были видеть в двух последних случаях равнобедренный треугольник и равнобедренную трапецию, а потому считали данные для вычисления их площадей у Ахмеса формулы грубо ошибочными. Однако после работы Д.П. Цинзерлинга по этому вопросу, состоящей в связи с расшифрованием аналогичных мест из папируса Голенищева, можно считать строго установленным, что у Ахмеса идет речь именно о прямоугольных треугольниках и тра-*

пециях и что даваемые им формулы, совпадающие с современными, правильны» [11]. Чистяков верил в превосходство древнеегипетской математики над древнегреческой. Поэтому он по традиции приписал древним египтянам знание числа $\Pi = 3,16049$ (ведь для задачи о квадрате, равновеликом данному кругу, египтяне брали сторону квадрата, равную $8/9$ диаметра круга, откуда и получалось египетское значение числа $\Pi = 256/81$). Чистякова не беспокоило, что и в более поздние времена это число получалось с меньшей точностью: у вавилонян, китайцев и в Ветхом Завете $\Pi = 3$, у славян $\Pi = 4$, у Иосифа Скалигера в «*Cyclometrica elementa duo*» 1594 года $\Pi = \sqrt{10} = 3,16228$.

В папирусе Ринда определяются отношения неоднозначно понимаемых метрических параметров некоторой правильной пирамиды с квадратным основанием, и Чистяков заключает отсюда, что египтяне определяли углы наклона рёбер и граней пирамиды к плоскости основания, утверждая, что это «с современной точки зрения соответствует употреблению тригонометрических функций косинуса и тангенса». Но мы знаем, что понятие величины угла является продуктом более развитой геометрии (от Фалеса до Евклида), — углы не участвуют ни в упомянутых папирусах древних египтян, ни в их многочисленных гороскопах, положение светил в которых привязаны к созвездиям Зодиака, имеющим различную угловую меру. Более того, отождествление размера фигуры с её периметром, продемонстрированное автором папируса Ринда, раскрывает его непонимание влияния формы фигуры на её размер, а ведь форма простейшей геометрической фигуры, — угла, измеряется его величиной. Таким образом, рассуждения профессора Чистякова являются образцом крайней модернизации, приписывающей древним египтянам недоступную им математику. Здесь же можно отметить, что уровень знаний, продемонстрированный египетскими математическими папирусами, в целом соответствует уровню европейского образования рубежа XV–XVI веков.

У исследователей науки древнего Египта возникла и другая проблема, — папирус Голенищева на основании почерка датировали на сотню-другую лет старше папируса Ринда, но при этом он имел превосходящий математи-

ческий уровень. Напомним, что папирус Голенищева, называемый также «Московским», – это разорванный на 16 кусков и попорченный свиток длиной 5,44 м. Его обнаружил египтолог Владимир Семёнович Голенищев (1856–1947). Разорившись, в 1911 году он передал папирус вместе с двумястами двадцатью четырьмя ящиками своей древнеегипетской коллекции Московскому музею изящных искусств, в обмен на пожизненную государственную пенсию, которую прекратили выплачивать после 1917 года. Папирус содержит иератическую запись рецептов решений 24-х математических задач. Пять из них расшифровал известный ориенталист Борис Александрович Тураев (1868–1920), опубликовавший в 1915 году одну задачу на английском языке. Русский перевод пяти задач Тураева опубликовал в Известиях РАН 1925 года математик-педагог Дмитрий Петрович Цинзерлинг (1864–1941). Полный перевод папируса Голенищева на немецкий язык в 1930 году опубликовал в Берлине ученик Б.А. Тураева, востоковед Василий Васильевич Струве (1889–1965), восстановивший текст неизвестных до него 4 столбцов. Папирус использует десятичную систему исчисления, но встречаются следы и пятеричной системы. Из арифметики в нём присутствует нахождение величины по её дробной части умножением на обращённую дробь. Содержатся практические задачи по переводу хлеба в пиво и разделу зерна, приводящие к пропорциональному делению. Некоторые задачи касаются мореплавания. Из области алгебры, подобно папирусу Ринда, есть линейные уравнения от одного неизвестного, но приводимые для более простых уравнений. Из алгебраических действий встречается возведение в квадрат (например, 4 «проходит мимо» и получается 16), а так же отсутствующее в папирусе Ринда извлечение квадратного корня (операция называется «сделай угол» и обозначается знаком в виде угла, отчасти похожим на европейский радикал, предложенный Христофором Рудольфом в 1525 году). Геометрия представлена шестью задачами, показывающими более высокий уровень знаний, чем в папирусе Ринда. Так в задаче «сделать циновку, площадью 12 сетов, шириной $\frac{3}{4}$ длины» надо было решать простейшее квадратное урав-

нение и извлекать квадратный корень. В папирусе также указан правильный способ вычисления объёма усечённой пирамиды с квадратным основанием. По этому поводу Чистяков написал: *«Принимая во внимание, что теоремы об объёме усеченной пирамиды нет еще в «Началах» Эвклида (III в. до нашей эры), приходится удивляться знанию её египтянами за 1S тысячелетия раньше греков»* [12]. Задача определения поверхности корзины содержит ещё более удивительную информацию о знании египтянами величины $\Pi=256/81$ (как в папирусе Ринда) и её отношении к этой проблеме: *«если принять во внимание, что формула поверхности шара дана только Архимедом в III в. до нашей эры (предложение XXXV в сочинении «О сфере и цилиндре»), то открытие этой последней задачи проф. Струве является еще более сенсационным, чем предыдущей»* [13]. Ведь далеко не очевидно то, что в формулах длины окружности, площади круга и сферы, а также объёма шара участвует одна и та же константа Π ,— это следует из интегральных вычислений.

При вычислении объёма усечённой пирамиды посредством разности объёмов двух подобных пирамид оказывается необходим расчёт соотношений высот при заданных основаниях. При этом появляются вопросы: было ли у египтян понятие о подобии треугольников; могли ли они производить алгебраические вычисления, лёгкие для современного образованного человека, но затруднительные полторы тысячи лет до нашей эры? Профессор Харьковского университета Дмитрий Матвеевич Синцов (1867–1946) считал, что эти препятствия преодолимы. Предполагая, что из преданий о Фалесе всё же следует знакомство древних египтян с подобием, он предложил способ получения объёма усечённой пирамиды с использованием только равенства фигур. При его «простом» способе используется формула объёма пирамиды (получаемая лишь интегральными средствами), а так же формула сокращённого умножения и сложная форма распределительного закона.

Переводчик папируса Ринда на английский язык, ливерпульский профессор Томас Эрик Пит (1882–1934) в 1923 году высказал сомнение, что древние египтяне использовали в своей формуле высоту самой пирамиды, а

не её боковой грани, подрывая тем самым правильность прочитанной в папирусе формулы. Кроме того, что спорный египетский термин буквально значит «лить воду», его возражения, возможно, были обусловлены практической сложностью непосредственного измерения высоты правильной пирамиды, — как известно, изобретение косвенного приёма через вычисление длины тени пирамиды приписывается Фалесу, который использовал открытую им теорему о подобиях. Таким образом, подобия треугольников, устраняясь из теории, возвращаются через практику. Синцов отмечает затруднения Пита без особых раздумий: «... было бы удивительно, если бы народ, дошедший до вывода множителя $(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ правильно, сделал такую грубую ошибку, чтобы ввести вместо высоты пирамиды высоту её боковой грани» [14].

Не допуская мысли о позднем написании математических папирусов и зависимости их от греческой и, тем более, арабской науки, Синцов объяснил замеченные исследователями анахронизмы через привычные представления о систематической потере знаний ранних эпох культурного процветания: «Мы имеем аналогию между золотым периодом греческой александрийской школы и состоянием знаний в Западной Европе так около 1000–1050 г. нашей эры. Когда не-историк говорит о Египте и египетской науке, то как-то забываешь, какой длинный, чреватый событиями период здесь подразумевается, и нельзя ставить за одну скобку всю египетскую культуру. Мы можем допустить и здесь известный период расцвета, когда открывались и новые истины в области математики. Этот период творчества заканчивается, и далее идет лишь повторение, застой, а затем упадок. Книгопечатания не было. И при преподавании (как и в средние века) преподаватель должен был диктовать своим слушателям и ученикам (это могли быть и взрослые люди). Может быть, папирус Rhind'a и есть продукт этого уже начавшегося застоя. Тогда могло получиться и смешение прямоугольного треугольника с равнобедренным, и прямой трапеции с равнобочной. Не кажется мне непонятным и параллельное существование александрийской науки и формул гарпедонаптов, приводимых Героном. И этому было бы не

трудно подыскать параллели в современности... Расцвет математических наук в Италии, начавшийся после освободительной войны, поведшей к объединению Италии, и во Франции в период послереволюционных и наполеоновских побед, и наоборот, упадок науки в Александрии после порабощения римлянами, в Византии при господствовавшем там гнете и постепенном разложении, и ряд других аналогичных явлений позволяют установить как известную закономерность упадок творческой мысли и падение научной производительности в побежденном и угнетенном народе, и это позволяет считать вероятной догадку, что падение математического творчества в Египте совпадает по времени с порабощением Нижнего Египта гиксами» [15]. Объяснение Синцова неявно опирается на позднесредневековую идею циклического развития человечества и на ренессансные представления о давно минувшем «Золотом Веке» (неслучайно он упоминает «золотой период греческой александрийской школы»). Эти архаичные гипотезы не учитывают развития цивилизации в целом, отрицают научно-технический прогресс и представляют маловероятный сценарий мировой истории. Ведь в более надёжно наблюдаемый и документированный период европейской истории науки, — начиная с XV века, — не обнаруживается периодов упадка, а наука прогрессирует посредством аккумуляции знаний и перманентных «дисциплинарных революций». Научный темп ускоряется, благодаря обогащению поля и совершенствованию средств исследований, а в особо благоприятные моменты (например, после социальных революций или при национальном освобождении, пробуждающих из под гнёта творческие силы народных масс) развитие принимает взрывной, скачкообразный характер. Войны или социальные потрясения, разрушая сложившийся порядок, замедляют научное развитие на короткое в историческом масштабе время адаптации человеческого разума к новым условиям. Никакого ретроградного движения науки и принципиальной для всего научного сообщества потери знаний, навыков и исследовательских методов в Новое время не видно. Помешать развитию мировой науки прежде не смогли ни инквизиция, ни эпидемии, ни тоталитарные пося-

гательства на свободу научного творчества. Хотелось бы надеяться, что проявление закономерности мы находим именно здесь, а не в апокалиптических легендах Средневековья.

Общепринятого и достоверного мнения об истории древней науки не сложилось на рубеже XIX–XX веков, и даже в настоящее время. Реконструкция египетской и греческой истории науки продолжает создаваться нашими современниками. Мы полагаем, что её правильное завершение – удел не близкого будущего.

Работа поддерживалась грантами РГНФ № 12-33-01329, № 11-13-73003a/B и № 10-03-0054.

Литература:

1. Демидов С.С. Презентизм и антикваризм в историко-математическом исследовании// Вопросы истории естествознания и техники. 1994. № 3. С. 8.
2. Барабашев А.Г. В поддержку метода интерпретации в истории математики// Историко-математические исследования. 1996. № 2. С. 207-208.
3. Бердинских В.А. Ремесло историка в России.– М.: Новое литературное обозрение, 2009. – С. 150-152.
4. Бубнов Н.М. Происхождение и история наших цифр. Палеографическая попытка.– М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – С. 80-81.
5. Попов Г.Н. История математики. Выпуск первый.– М.: Типо-Лит. Московск. Картоиздательского Отдела Корп. Воен. Топогр., 1920. – С. 84-85.
6. Попов Г.Н. История математики. Выпуск первый.– М.: Типо-Лит. Московск. Картоиздательского Отдела Корп. Воен. Топогр., 1920. – С. 92.
7. Бобынин В.В. Математика древних египтян (По папирусу Ринда).– М.: Издание журнала «Математический листок», 1882. – С. 7.
8. Бобынин В.В. Математика древних египтян: По папирусу Ринда. Изд. 2.– М., 2012. – С. 1-5.
9. Бобынин В.В. Математика древних египтян: По папирусу Ринда. Изд. 2.– М., 2012. – С. 9.
10. Бобынин В.В. Естественные и искусственные пути восстановления историками математики древних доказательств и выводов// Вестник опытной физики и элементарной математики. 1910. № 515. С. 277.
11. Чистяков И.И. О новейших исследованиях в области древнеегипетской математики// Математическое образование. 1928. № 4. С. 145.
12. Чистяков И.И. О новейших исследованиях в области древнеегипетской математики// Математическое образование. 1928. № 4. С. 149.

13. Чистяков И.И. О новейших исследованиях в области древнеегипетской математики// Математическое образование. 1928. № 4. С.149-150.
14. Синцов Д.М. К вопросу об объёме усечённой пирамиды у египтян// Математическое образование. 1930. № 1. С. 2.
15. Синцов Д.М. К вопросу об объёме усечённой пирамиды у египтян// Математическое образование. 1930. № 1. С. 3-4.