

Разновидности и противостояние реализма и антиреализма в философии математики. Возможна ли третья линия?*

В. А. БАЖАНОВ

В статье классифицируются различные течения в рамках математического реализма (платонизма) и антиреализма и намечаются контуры подхода, который позволил бы синтезировать математический реализм и антиреализм в виде третьей линии, своего рода “срединного” пути на основе идеи о тройной детерминации математической реальности (математических объектов).

This paper deals with ordering of various versions of mathematical realism (Platonism) and antirealism (nominalism) and vistas of synthesis of mathematical realism and antirealism in the form of emergence of ‘third’, medium line are outlined on the ground of triple determination idea of mathematical reality (mathematical objects).

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: реализм, платонизм, антиреализм, номинализм в математике, тройная детерминация системы логико-математических объектов.

KEY WORDS: realism, Platonism, antirealism, nominalism in mathematics, ‘third line’, triple determination of logico-mathematical objects.

*Памяти доктора Ирвинга Анеллиса (31.10.1946–14.7.2013),
друга и коллеги, энтузиаста и глубокого
исследователя философии и истории математики посвящается*

История реализма и номинализма, как известно, восходит к средневековой философии. Противостояние реализма и номинализма, вызванное разногласием по проблеме универсалий, казалось бы, давно утратило былую остроту. Однако это противостояние возобновилось в XX в. в контексте размышлений об основаниях логики и математики и происходит в достаточно острых формах уже едва ли не сотню лет. Так, ближайший сотрудник и коллега великого Д. Гильберта П. Бернайс предпринимал попытку осмыслить природу математического платонизма еще в 1934-м г. [Бернайс 1935]¹.

* Работа поддерживалась грантом РФФИ №13-06-00005а.

© Бажанов В.А., 2014 г.

Проблема статуса и соотношения общего и единичного в логико-математических науках безусловно актуальна и ныне. Дискуссии между сторонниками реализма² (очень часто именуемыми “платонистами”) и антиреалистами, развивающими линию номинализма³ в логико-математических науках, активно продолжаются⁴. И нет веских причин надеяться, что они прекратятся ввиду победы одной из сторон в обозримом будущем. Напротив, каждая из дискутирующих сторон находит всё более и более веские и изощренные аргументы в пользу справедливости своей позиции и отыскивает слабые звенья в аргументах оппонентов. Анализ и оценка предмета и ткани этой дискуссии наводит на мысль о том, что в данной ситуации более перспективным выглядит стремление найти *третью*, “*срединную*” *линию*, которая бы могла бы избежать и “слабости” реализма, и “слабости” номинализма.

Современные перипетии этой дискуссии в отечественной литературе, посвященной философским основаниям логики и математики, освещены довольно скудно, да и соответствующих работ вообще крайне мало⁵. Между тем с методологической точки зрения эта дискуссия очень важна, поскольку во многом способна определить магистральные пути развития логико-математических дисциплин – как классических, так и относимых к неклассическим и/или альтернативным. Она затрагивает самые важные проблемы, претендующие на “метафизическое значение”, которые имеют непосредственный выход в специфику сложного математического анализа и доктринальные особенности отдельных математических дисциплин [Геллер 2013, 592].

В настоящей статье я постараюсь сосредоточиться на особенностях современного реализма и антиреализма и ответить на вопросы о том,

- 1) что конкретно ныне понимается под реализмом (антиреализмом);
- 2) какие разновидности реализма (антиреализма) существуют;
- 3) каковы основания для их выделения?

Сейчас, когда понятия реализма и антиреализма употребляются в самых различных смыслах и контекстах, весьма важно разобраться, какое содержание соответствует тому или иному их употреблению, каков спектр использования данных понятий и стоящих за ними концептуальных конструкций. Кроме того, я попытаюсь предложить *третью линию*, которая позволила бы снять остроту разногласий между реализмом и антиреализмом и под новым углом зрения подойти к проблеме существования логико-математических объектов.

Традиционный реализм (платонизм) и его разновидности

Ключевой вопрос, который разделяет реализм и антиреализм – это вопрос о модуле существования логико-математических объектов. Существуют ли логико-математические объекты подобно тому, как существуют деревья, коровы или грабли? Проблема существования этих объектов, несмотря на свою кажущуюся простоту, в действительности оказывается весьма сложной. Если связывать требование “существования” с некоторыми “априорными” необходимыми и достаточными условиями признания факта существования (объектов), то это, как показал Дж. Аззуни, может вести к своему роду “метафизическому нигилизму” [Аззуни 2010, 90–91]. Между тем констатация модуля “существования” всегда плотно вписана в определенный контекст – онтологический, социологический, мереологический и т.д. И это естественно, поскольку каждый раз речь идет об “абстрактных” объектах, напрямую зависимых от когнитивного оснащения субъекта, его языковых, ментальных и иных особенностей.

Логико-математические объекты – в отличие от объектов изучения нематематических (например, физико-химических наук) – как известно, неосвязаемы и эмпирически не верифицируемы, принципы детерминизма, обычные для физической реальности, в пределах математической реальности не действуют. Тогда можно ли утверждать, что они нам “известны”? И, если да, то в каком смысле?

Сильная версия реализма (которая фактически тождественна **традиционному платонизму**) на вопрос о модусе существования математических объектов отвечает утвердительно, причем имеется в виду фактическое существование вне зависимости от языка, который описывает данные объекты, ментального состояния того, кто осмысливает их природу или его деятельности (онтологическая версия реализма); аналогично обычно утверждается и наличие истинностных значений тех или иных математических предложений независимо от субъекта математической деятельности (семантическая версия реализма). Иначе говоря, речь идет о некоторой актуальной *сверхчувственной*, трансцендентальной реальности в которую “погружены” эти объекты. Эта реальность для субъекта в смысле ее восприятия имеет тот же статус, что и реальность его собственных чувств.

Сравнение объектов сверхчувственной реальности со своего рода платоновскими идеями допустимо лишь в ограниченном плане, а аналогии с концепцией Платона, имеющей историко-философский смысл, далеко не всегда в данном случае безупречны. Тем не менее, термин “платонизм” прежде всего справедливо указывает на отдаленные истоки современного реализма, хотя, разумеется, самого Платона к математическим платонистам отнести нельзя. Математику он рассматривал как своего рода мост от иллюзорного мира чувств к истинной реальности идеальных форм.

Логико-математическое исследование с позиций платонизма является *открытием* соответствующих объектов и их свойств, причем допускаются методы доказательства, которые могут говорить о существовании этих объектов (или их свойств) без определения пути их построения (имеются в виду, например, так называемые теоремы чистого существования). Это, пожалуй, наиболее популярная у многих крупных и задумывающихся об основаниях своей науки математиков идеологическая позиция, которую разделяли, например, Г. Фреге, Т. Харди или К. Гёдель. Объекты здесь считаются “известными”, если определены правила действия с ними (например, правила вывода).

Более точно, эта позиция предполагает:

- 1) объективное существование некоторой математической реальности;
- 2) объективное существование элементов этой реальности;
- 3) независимость этих элементов от познавательной деятельности субъекта, его “инструментального” оснащения, включая языковые средства;
- 4) значения математических предложений задаются теми условиями истинности, которые задаются особенностями математической реальности.

В этом смысле под математикой понимают науку о структурах, порядке и отношениях, возникшую в процессе развития практики вычислений, измерений и описания форм реальных и абстрактных объектов и отношений между ними и основанную на логических доказательствах и численных выкладках⁶.

Однако если математика занимается исследованием некоторых объективно существующих идеальных (а потому не доступных непосредственному чувственному восприятию, т.е. сверхчувственных) сущностей, то каков модус этого исследования (проблема Бенаццерафа)? В контексте так называемой причинной теории познания и референции (causal theory of knowledge and reference), которая предполагает наличие причинно-следственных связей между объектами познания, вообще не понятно, как и каким образом, нам известны и/или познаются логико-математические объекты, фактически находящиеся вне системы этих связей⁷.

Признаться, нам, воспитанным отечественной логико-гносеологической традицией признания важной роли абстракций и идеализаций в познании, которая обоснована оригинальной концепцией интервальности [Новоселов 2005; Бажанов, Новоселов 1987], трудно осознать требование чувственного восприятия объектов познания, которое характерно для западной логико-эпистемологической мысли и которая уже не один десяток лет бьется над разрешением проблемы (или дилеммы Бенаццерафа – если иметь в виду трактовку когнитивных способностей человека, обязательно включающих этап чувственного восприятия). Тем не менее, в западной философии математики данная проблема занимает почетное место, что никак не позволяет обходить ее вниманием (см. также: [Целищев 2002, 37–38]).

Сам П. Бенацераф еще в 1973 г. сформулировал аргументы, которые должны были бы подорвать позиции платонизма в математике [Бенацераф 1973].

Эти аргументы сводятся к ряду утверждений:

- 1) если математический платонизм является истинной концепцией, то нам должно быть доступно знание об абстрактных математических сущностях;
- 2) если нам доступно знание об абстрактных математических сущностях, то последние должны быть связаны с нами причинными зависимостями;
- 3) однако такой причинной зависимости нет;
- 4) следовательно, математический реализм нельзя считать истинной концепцией.

Позднее многие крупные философы математики пытались усовершенствовать аргументацию Бенацерафа. Например, Х. Филд отказался от идеи, связанной с необходимостью учитывать причинную зависимость в познании, которая используется Бенацерафом и обратился к идее надежности математического знания и уверенности в этом сообщества математиков. Филд считает, что многовековая уверенность математиков в точности и обоснованности математических рассуждений и конструкций говорит в пользу однозначной истинности этой области знаний [Филд 1998]. Эта идея повлекла со стороны некоторых философов математики обвинения Филда в нарушении принципов натурализма и даже в агностицизме (Дж. Бургесс, Г. Розен). Однако полемика продолжилась.

Следует заметить, что антиреализм и его разновидность в виде номинализма в общем случае склонны связывать логико-математическое исследование не с открытием, а с *конструированием* объектов и их свойств, которое должно осуществляться в явном виде, а доказательство принимается лишь в том случае, если указан механизм такого конструирования, причем в крайних вариантах семантические соображения, относящиеся к понятию (математической) истины, могут заменяться альтернативными синтаксическими, типа свойств непротиворечивости и/или консервативного расширения. Именно так поступает Х. Филд при изложении своей номиналистической концепции в форме фикционализма [Филд 1989]. Эта концепция не нуждается в допущении, что имеющие конкретные приложения математические теории являются истинными и потому могут быть полезными в науке (согласно так называемому “аргументу незаменимости”); наличие математических приложений, следуя номиналисту Х. Филду, можно объяснить случайностью, но тогда является ли случайным самое широкое использование в математике разного рода абстракций? Без абстракций до сих пор математика обходиться была никак не способна, и абстракции не только выполняют в ней роль конструкций, которые делают рассуждения “компактными”, но и концентрируют в себе особую концептуальную нагрузку.

Более умеренная точка зрения в платонизме состоит в том, что логико-математические объекты существуют, но не в буквальном смысле, а в некотором метафизически вторичном плане, когда о фактическом существовании речь не идет (или же лишь утверждается существование “фиксированного” истинностного значения); объект оказывается составной частью более фундаментальных соотношений [Розен 2011, 125].

Несмотря на апелляцию реализма к сверхчувственной реальности, его сторонники интенсивно ищут эмпирическое обоснование и усматривают его наличие в “аргументе незаменимости” (indispensability argument), который связывает факт существования такого рода реальности с фактом незаменимости (или же поразительной эффективности) математики в науке [Баттерман 2010]. Аргумент незаменимости, особенно интенсивно осмысливавшийся У. Куайном и Х. Патнэмом [Куайн 1986, 99; Патнэм 1971, 347], – это некоторая метафизическая позиция, которая позволяет купировать некоторые возражения против платонизма, имеющие эпистемологическую окраску [Ябло 2012]. Тем не менее, убедительность этого аргумента, несмотря на его популярность в западной философии науки, на мой взгляд, далеко не бесспорна.

Впрочем, для многих логиков и математиков, далеких от философских раздумий об основаниях науки, но придерживающихся главного лейтмотива платонизма – явного или неявного признания независимого существования математической реальности и её объектов – платонизм связывается с рядом математических принципов и методов, которые

только и допустимы для квалифицированного математического исследования⁸. Это означает использование:

- 1) классических первопорядковых формальных языков (в некоторых случаях и более сильных формальных языков);
- 2) классической логики;
- 3) “неконструктивных” методов и “неконструктивных” аксиом (типа аксиомы выбора в теории множеств);
- 4) непредикативных определений.

Данная группа логико-математического сообщества придерживается линии стихийного гносеологического оптимизма, которая выражается в убеждении, что всякая проблема в принципе (со временем) разрешима. Это платонизм на уровне “обыденного” сознания математиков, принятый ими вовсе не по каким-то “идеологическим” мотивам, а в соответствие со своего рода утилитарными соображениями. Его можно условно назвать “работающим”⁹.

Традиционный платонизм (сильная версия реализма) полагает, что абстрактные логико-математические объекты не обладают пространственно-временными характеристиками и не могут осмысливаться в терминах причинно-следственных связей, которые пронизывают объекты физического происхождения.

Если предмет математики трактуется в виде исследования некоторых абстрактных образований (структур), а логико-математическая реальность как система абстрактных объектов – чисел, функций, множеств, категорий и т.п. и, возможно, их истинностных значений, то этот тип реализма (платонизма) обычно еще называют объектным. В этом случае считается, что, например, теория множеств или теория чисел лишь *описывает* эти объекты [Балагуэр 2009, 41].

Такой современный подход к интерпретации идеи паранепротиворечивости как дилетизм-dialetheism¹⁰ хотя непосредственно и не связан с определенной концепцией истины, но неявно предполагает своего рода платонизм умеренного толка, поскольку подводит к констатации реального существования противоречивых объектов и/или реальных противоречивых ситуаций (подробнее см.: [Прист 2010]).

Приверженность (стихийному, так сказать) платонизму многих работающих математиков можно объяснить с точки зрения обыденной психологии исследователей. Их платонизм культивируется самой предметной областью (“числа”), языком математики, который предполагает процесс широкого использования кванторов существования (на что, кажется, обращал внимание еще У. Куайн), что стимулирует убеждение в реальном существовании соответствующих объектов, а не просто некоторых их “виртуальных” свойств. В указанном смысле математики радикально отличаются от физиков, среди которых платоников фактически не встречается. Причина здесь достаточно очевидна: физики рассматривают математику именно как *язык*, помогающий анализировать конкретные физические объекты и их свойства, а не интерпретировать его как конечную реальность.

Нетрадиционный реализм (платонизм) и его разновидности

В рамках **нетрадиционного реализма** (платонизма) принято различать версии П. Мэдди, в которой логико-математические объекты наделяются пространственно-временными характеристиками, “структуралистскую” (М. Резник и С. Шапиро), а также так называемый “полнокровный” реализм (М. Балагуэр и Э. Залта). Согласно варианту П. Мэдди логико-математические объекты являются абстрактными образованиями нефизической и нементальной природы, но существующими в пространстве и времени, как и множества (обычных) физических предметов [Мэдди 2005].

Реализм “структурного” толка (или просто “структурализм”) интерпретирует логико-математическое знание как описание и анализ комбинаций абстрактных структур (“паттернов”), которые носят элементарный, базисный характер, но из которых можно образовывать сколь угодно сложные абстрактные системы, фундаментальные свойства которых

раскрываются не “сами по себе”, а исключительно через их отношения к другим системам. По мнению М. Резника, паттерны состоят из позиций, которые могут проявлять разные свойства в зависимости от конкретных отношений и вхождения в те или иные структуры. Важны ориентации паттернов и их метрики, причем одних лишь логических средств оказывается недостаточно для полной характеристики паттернов, что свидетельствует в пользу их структурной релятивности [Резник 2010, 224].

Наконец, в последнее время была предложена и приобрела достаточную популярность концепция “полнокровного” реализма [Балагуэр 2009]. “Полнокровный” реализм принимает принцип “изобилия” (*plenitude principle*), согласно которому с необходимостью существуют все логически мыслимые абстрактные объекты.

Этот тип реализма, наверное, было бы точнее назвать реализмом “без берегов” по той причине, что он утверждает не просто существование абстрактных объектов в виде некоторой сверхчувственной актуальной реальности, но и не накладывает на эти объекты никаких ограничений, имея в виду тот факт, что все в принципе (логически) мыслимые абстрактные объекты должны обладать актуальным (т.е. действительным) существованием¹¹. С точки зрения здравого смысла это очень сильное утверждение. Однако оно придает данной сверхсильной версии реализма (платонизма) качества, которые позволяют избежать действия ряда серьезных опровергающих его аргументов и ощутить себя в позиции, которая обеспечивает непротиворечивость системы соответствующих представлений и объектов. Традиционные платоники теряются при вопросе о том, откуда логики и математики “берут” аксиомы, которые описывают математическую реальность; согласно полнокровному платонизму, *любая* непротиворечивая система аксиом необходимо описывает определенный фрагмент этой реальности. Принимая определенную систему аксиом, они лишь “вырезают” из математической (точнее, “платонической”) реальности тот фрагмент, который ими будет изучаться.

При этом данная реальность наделяется сторонниками полнокровного платонизма свойствами в духе упомянутого выше принципа “изобилия”. Например, для континуум-гипотезы, независимой в рамках стандартных аксиоматик теории множеств, существуют фрагменты “платонической” реальности, где она истинна, и существуют фрагменты, в которых она ложна. В традиционном платонизме такого рода “плюрализм” не допускается: можно говорить об универсуме, в котором континуум-гипотеза либо истинна, либо ложна.

Разумеется, в факт существования некоторой сверхчувственной (“платонической”) реальности, которая не обнаруживает себя ни в одном из физических эффектов, поверить сложно. Наличие её можно разве что постулировать – как, собственно, и поступают последовательные реалисты. Апелляция к аргументу “незаменимости” в качестве эмпирического обоснования – аргументу, который носит, на мой взгляд, достаточно искусственный характер, ничуть не добавляет уверенности в смысле констатации существования данной сверхчувственной реальности.

Математическая реальность является объективной и независимой по отношению к человеку как компонент культуры, но она исторически обусловлена и предопределена как компонент внутреннего мира человека, задающий его когнитивные возможности и вектор активности. Вовсе не обязательно для нахождения философских оснований математики, как это делает традиционный математический реализм, постулировать существование некоторой сверхчувственной реальности, которая открывается некоторой априорной (в абсолютном смысле) интуицией¹². Более того, с точки зрения социального конструктивизма математика естественным образом выступает как типичный результат творческой деятельности человека, а точнее исторически предопределенной – и в этом смысле конкретной – математической практики [Кол 2008, 115]. Аналогично мотивы поиска и усовершенствования доказательств в логике и математике можно усматривать не в факторе “поиска истины”, а в апелляции к научному сообществу с призывом проверить надежность и обоснованность того пути, который связан с формулировкой тезиса доказательства (например, теоремы), когда научное сообщество может убедиться в том, что ответственность, которая взята на себя автором (авторами) доказательства правомерна и подкреплена вескими аргументами. Здесь доказательство приобретает смысл *этической* процедуры [Бажанов 2008].

Современный **антиреализм** так же, как и реализм, включает в себя целый набор различных подходов и направлений.

К нему обычно принято относить конвенционализм, который интерпретирует выражения логико-математического языка как аналитически истинные суждения (Р. Карнап, К. Гемпель); формализм в духе Г. Фреге и метаматематический формализм в духе Г. Карри; фикционализм Х. Филда, который рассматривает логико-математические выражения как не имеющие отношения к реальности, подобно тем выражениям, в которых утверждается, что малыш Карлсон живет на крыше нашего дома, а также мейнонгианизм, согласно которому числа и другие логико-математические понятия не существуют в реальности, но могут характеризоваться определенными истинностными значениями [Балагуэр 2009, 44–49].

Кроме того, к антиреализму в философии математики относят психологизм в духе Э. Гуссерля и Л.Э.Я. Брауэра¹³ и сторонников физикализма, которые считают логико-математические дисциплины науками об объектах физического мира¹⁴ [Ирвин 1990].

Номинализм как разновидность антиреализма в его натуралистическом выражении (имея в виду установку на использование эмпирических методов исследования в науке) выступает в двух независимых друг от друга формах: 1) как отрицание возможности существования неких (или же вообще) *абстрактных* объектов и 2) как отрицание возможности существования универсалий (общих понятий). Здесь даже может подразумеваться, что *любые* логико-математические объекты – числа, функции, множества и т.п. – лишены какого-либо модуса существования; на самом деле мы имеем дело не с объектами, как утверждает А. Масгрейв, а с отношениями между высказываниями [Масгрейв 1999].

В настоящее время принято выделять следующие разновидности номинализма:

1) предикатный номинализм (вещи объединяются по наличию некоторого свойства, например, на основании того, что они обладают “желтизной”);

2) концептуальный номинализм (вещи подпадают под некоторое единое понятие); номинализм классов (свойство как класс определенных вещей);

3) номинализм сходства (вещи, подобные в тех или иных отношениях);

4) иногда говорят и о мереологическом номинализме, имея в виду наличие некоторого свойства как той части, которая выделяется в некотором целостном образовании¹⁵;

5) в последнее десятилетие все большее распространение получает так называемый инструментальный номинализм [Розен 2001; Розен 2011]. Речь здесь идет о требованиях к языку, в котором используются предикаты, которые выражают отношения только между конкретными (физическими) объектами, константы, используемые в теории, относятся только к этим объектам, а кванторы “пробегают” только по множествам данных объектов и/или их свойствам.

С точки зрения инструментального номинализма аргумент незаменимости Куайна-Патнема несостоятелен, поскольку мы вправе говорить о возможности теории описывать объективный мир, и эта возможность никоим образом не обуславливает необходимое независимое существование математической реальности и математических объектов [Петтигрю 2012, 707].

В рамках современного номинализма природа и основная цель математического знания связывается и с её коммуникативной функцией, причем логико-математический язык считается насыщенным – как и любой естественный язык – своего рода метафорами, позволяющими эффективно осуществлять общение соответствующего сообщества по поводу некоторых абстрактных конструкций. Общение носит игровой характер. Принципиальной разницы между выражениями из x следует y и если x (имея в виду ребенка, который представляет себя гвардейцем кардинала) лежит, то он y (один из гвардейцев ранен) нет. Это так называемый “абстрактный экспрессионизм”, который стремится избежать ряда концептуальных трудностей, свойственных номинализму [Ябло 2002]. Поскольку выполнение этой – коммуникативной – функции возможно лишь постольку, поскольку (научное, математическое) сообщество *верит* в надежность, связанность, упорядоченность, прину-

дительность выводов с помощью и в контексте данного абстрактного языка, то еще более точно такая номиналистская позиция может быть названа “экспрессионизмом на основе совместной веры (belief expressionism)” [Лиггинс 2013, 13].

Рефлексия над дискуссией реализма и антиреализма подводит к заключению о том, что в определенном смысле допустимо говорить о необходимости введения понятия *метаонтологии*, имея в виду совокупность вопросов, касающихся собственно онтологии, такие как их осмысленность, уровни объективности и сложности ее анализа. Именно в контексте своего рода метаонтологии математика может быть органично представлена как совокупность метафорических предложений, относящихся к некоторой “реальности”, которая допускает спектр различных толкований в духе, близком к тому, который представлен Ю.И. Маниным [Манин 2008, 52–60], К. Девлином [Девлин 2000], Дж. Лакоффом и Р. Ньюнессом [Лакофф, Ньюнесс 2000].

Возможна ли третья линия в философии математики?

Между тем комбинация некоторых положений структурализма, антиреализма (номинализма) в версии психологизма и “абстрактного экспрессионизма”, биологической предопределенности базисных логико-математических абстракций [Тростников 1975] и идеи нормативного статуса бытия математических объектов [Розов 1985] позволяют обозначить своего рода “*срединную*”, *третью линию* между реализмом и номинализмом в основаниях логики и математики, снять их противостояние и пролить новый свет на реальный модус существования математических объектов. Надо сказать, что подобные попытки сами по себе [Хейл 1990] или отталкивающиеся от пересмотра статуса аргумента незаменимости, уже предпринимались, но обычно оценивались как не вполне удачные, поскольку оказывалось, что речь шла об усовершенствовании аргументации либо реализма, либо номинализма [Колеван 2006]. Причину этих неудач можно усмотреть в том, что во всех случаях неявно указанные попытки подразумевали только двойную (внутреннюю и внешнюю) детерминацию математики.

Многу вводится качественно новая идея о *тройной* детерминации математики. Обоснование этой идеи предполагает дальнейший прогресс нейробиологических и психологических исследований когнитивных процессов.

Идея третьей линии состоит в следующем.

Паттерны (по М. Резнику) представляют собой базисные, элементарные образования, которые формируют математическую реальность. Между тем в этой реальности человеческий интеллект вырезает то, что предзадано характером его деятельности и предшествующим опытом. В этом смысле можно говорить о нормативности абстрактных объектов математики [Розов 1985] и об априорности процесса математического творчества, обусловленного активностью субъекта логико-математического познания [Бажанов 2012]. Однако когнитивные способности субъекта логико-математического познания исторически обусловлены, а математика может считаться важнейшим элементом человеческой культуры и человеческой деятельности. Этот элемент столь же универсален и определен как и другие элементы на конкретном историческом отрезке и в конкретном социальном окружении. Когнитивные способности субъекта логико-математического познания определяются не только его (настоящей и предшествующей) деятельностью, но и ее биологической предопределенностью, двойной (внешней и внутренней) детерминацией психики, ее перцептивными компонентами. В данном случае мы имеем непосредственное пересечение философии науки (и ее социально-культурного измерения) и философии сознания.

Известно, что разнородные, но сравнительно молодые языки креольской группы, географически далеко разделенных этносов имеют некоторые общие – базисные – структуры. Наличие этой общности обычно объясняют наличием некоторых универсальных когнитивных структур, которые обусловлены соответствующими особенностями человеческого мозга. У “старых” естественных языков эти структуры под плотными наслоениями исторической и культурной эволюции крайне сложно выявить. По аналогии с высокой

степенью правдоподобия можно предположить, что особенности человеческого мозга отражаются и на логико-математических языках. “Если мы хотим глубже познать природу математики, то – утверждает Р. Херш, – мы обязаны понять и осмыслить специфические свойства человеческого мозга” [Херш 2008, 18].

Действительно, специфика чувственного восприятия человека такова, что в перцептивном пространстве отрезок является более простым объектом, нежели точка, а в процессе восприятия объекта происходит укрупнение и обобщение данных отдельных (групп) нейронов, формируются целостные конфигурации, которыми и оперирует мозг и через “призму” которых он анализирует действительность. И это понятно, поскольку в процессе эволюции для выживания было важно различать крупные визуальные конфигурации, которые оказываются первичными с точки зрения формирования образа внешнего предмета. Так, теорема Кантора о вложенных отрезках, лежащая в основе теории действительных чисел (любая последовательность убывающих ограниченных множеств действительных чисел имеет непустое пересечение) как бы вынуждается особенностями этого (перцептивного) пространства, а теорема Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке соответствует нашему врожденному представлению о непрерывности. Анализ особенностей восприятия младенцев свидетельствует, что они, еще не приобретшие какого-нибудь зрительного опыта, предпочитают одни формы другим. Отсюда напрашивается вывод о том, что селекция форм происходит на уровне глубинных, “врожденных” структур мозга. Последующая эволюция интеллекта безусловно корректирует механизмы селекции [Тростников 1975, 239–248]. Если иметь в виду наличие такого рода структур, то логико-математические языки оказываются как бы надстройкой, вторым этажом над теми нейробиологическими структурами, которые в результате синтеза данных восприятия и внешних конфигураций в конечном счете предопределяют компоненты математической реальности. Кроме того, и сам характер человеческой деятельности через свои нормативные компоненты определенным образом вносит свою лепту в формирование объектов этой реальности. Отсюда можно понять тот смысл, который великий К. Гёдель, несмотря на свои симпатии к платонизму вкладывал в понятия *объективной и субъективной* математики: об объективной математике, вдохновляющей платоников, можно говорить как о постоянном расширяющемся до бесконечности множестве идей, которые никогда не будут исчерпаны конечным человеческим разумом (математик как первооткрыватель “новых” земель), а о субъективной математике можно говорить в смысле того, что математика есть продукт человеческого интеллекта, его гениальная конструкция, которую он постоянно творит и усовершенствует (математик как инженер и строитель величественного здания математики).

Здесь нельзя не вспомнить некоторые положения энактивизма [Бескова, Князева... 2011; Лаков, Ньюбес 2000], который стремился пролить новый свет и на процесс познания, и на происхождение и природу математики.

Математика под углом зрения энактивизма также является не только процессом репрезентации некоторых количественных и пространственных отношений внешнего мира, сколько процессом создания особой реальности, которая несет на себе печать специфики телесной организации человека (имея в виду и физиологию его мозга), – процессом, в котором теснейшим образом переплетаются механизмы репрезентации (внешние стимулы), особенности его телесной организации (внутренние стимулы) и собственно деятельность с её исторической обусловленностью и социально-культурной предопределенностью, формирующей нормативы действия с абстрактными объектами.

Таким образом, обнаруживается тройная детерминация математической реальности (системы логико-математических объектов) – “внутренняя”, “внешняя” и собственно деятельность (нормативная). Думается, что такой подход позволяет наметить контуры направления, способного преодолеть противостояние математического реализма и номинализма в виде “третьего” пути, сглаживающего “углы” и реализма, и номинализма и снимающего ряд эпистемологических затруднений, которые характерны для философии математики последних десятилетий.

ЛИТЕРАТУРА

- Аззуни 2010 – *Azzouni J.* Ontology and the Word 'Exist': Uneasy Relations // *Philosophia Mathematica*. 2010. Vol. 18.
- Бажанов 2008 – *Bazhanov V.A.* Proof as an Ethical Procedure / Science and Ethics. The Axiological Contexts of Science. Eds. *Agazzi E., Minazzi F.* Bruxelles, Bern, Berlin, Frankfurt am Main, New York, Oxford, Wien: Peter Lang, 2008.
- Бажанов 2012 – *Бажанов В.А.* Кантианские мотивы в логике и философии науки: идея единства априорного и эмпирического знания // Кантовский сборник. 2012. № 3.
- Бажанов 2013 – *Бажанов В.А.* Dialetheism как методология паранепротиворечивой логики: исторический аспект // Восьмые Смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конф. 19–21 июня 2013. М.: МГУ, 2013.
- Бажанов, Новоселов 1987 – *Бажанов В.А., Новоселов М.М.* Логика научного познания и логика абстракций в аспекте интервальной семантики / Логика научного познания. Актуальные проблемы. М.: Наука, 1987.
- Балагуэр 2009 – *Balaguer M.* Realism and Anti-realism in Mathematics / Handbook of the Philosophy of Science. Philosophy of Mathematics. Ed. *A.D. Irvine.* Amsterdam–London–Oxford: North-Holland Elsevier, 2009.
- Баттерман 2010 – *Batterman R.W.* On the Explanatory Role of Mathematics in Empirical Science // *British Journal for the Philosophy of Science*. 2010. Vol. 61. PP. 1–25.
- Бенацераф 1973 – *Benacerraf P.* Mathematical Truth // *The Journal of Philosophy*. 1973. Vol. 70. No. 19. PP. 661–679.
- Бернайс 1935 – *Bernays P.* Sur le platonisme dans les mathématiques // *L'enseignement mathématique*. 1935. Vol. 34.
- Бернайс 1983 – *Bernays P.* On Platonism in Mathematics / Philosophy of Mathematics. Selected Readings. Eds. *Benacerraf P. and Putnam H.* Cambridge – N.Y.: Cambridge University Press. 1983.
- Бескова, Князева... 2011 – *Бескова Н.А., Князева Е.Н., Бескова Д.А.* Природа и образы телесности. М.: Прогресс-Традиция, 2011.
- Вейнгартнер 1982 – *Weingartner P.* On the Demarcation between Logic and Mathematics // *The Monist*. 1982. Vol. 65. № 1.
- Геллер 2013 – *Heller M.* Deep Questions on the Nature of Mathematics // *Notices of the AMS*. 2013. Vol. 60. № 5.
- Девлин 2000 – *Devlin C.* Thinkig Evolved and Why Numbers Are Like Gossips. New York: Basic Books Publ., 2000.
- Ирвин 1990 – *Irvine A.D.* Nominalism, Realism, and Physicalism in Mathematics / Physicalism in Mathematics. Ed. *Irvine A.D.* Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publisher, 1990.
- Каллард 2007 – *Callard B.* The Conceivability of Platonism // *Philosophia Mathematica* (III). 2007. Vol. 15.
- Карпенко 2013 – *Карпенко А.С.* Философский принцип полноты. Часть II. // Вопросы философии. 2013. № 7.
- Кол 2008 – *Cole J.* Mathematical Domains: Social Constructs? / Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy. Eds. *B. Gold, R. Simons.* Mathematics Association of America. 2008.
- Коливан 2006 – *Colyvan M.* Scientific Realism and Mathematical Nominalism: A Marriage Made in Hell / Rationality and Reality: Conversations with Alan Musgrave. Eds. *Cheyne C., Worrall J.* Springer, 2006.
- Куайн 1986 – *Quine W. V. O.* Philosophy of Logic. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1986. 2nd ed.
- Лаков, Ньюьес 2000 – *Lakoff G., Nunez R.E.* Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being. New York: Basic Books Publ., 2000.
- Лиггинс 2013 – *Liggins D.* Abstract Expressionism and the Communication Problem // *British Journal for the Philosophy of Science*. 2013. Vol. 64. № 4.
- Мэдди 2005 – *Maddy P.* Mathematical Existence // *Bulletin of Symbolic Logic*. 2005. Vol. 11. № 3.
- Манин 2008 – *Манин Ю.И.* Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2008.
- Масгрейв 1999 – *Musgrave A.* Essays on Realism and Rationalism. Amsterdam: Rodopi, 1999.
- Новоселов 2005 – *Новоселов М.М.* Абстракция в лабиринте познания. М.: Идея-пресс, 2005.
- Патнэм 1971 – *Putnam H.* Philosophy of Logic // Mathematics, Matter, and Method: Philosophical Papers. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1971. 2nd ed.
- Петтигрю 2012 – *Pettigrew R.* Indispensability Arguments and Instrumental Nominalism // *Review of Symbolic Logic*. 2012. Vol. 5(4).

- Прист 2010 – *Priest G.* The Language of Dialetheism. Preprint, 2010.
- Псиллос 2006 – *Psillos S.* Scientific Realism / Encyclopedia of Philosophy. Ed. *Borchert D.* Detroit: MacMillan Reference. 2006. Vol. 8.
- Резник 2010 – *Резник М.* Структурализм и идентичность математических объектов // Логические исследования, 2010. Вып. 16.
- Розен 2001 – *Rosen G.* Nominalism, Naturalism, and Epistemic Relativism // *Philosophical Perspectives.* 2001. Vol. 15.
- Розен 2011 – *Rosen G.* The Reality of Mathematical Objects / Meaning in Mathematics. Ed. *J. Polkinghorne.* Oxford: Oxford University press, 2011.
- Розов 1985 – *Розов М.А.* Способ бытия математических объектов / Методологические проблемы развития и применения математики. М.: АН СССР: Центральный совет философских (методологических) семинаров при Президиуме АН СССР, 1985.
- Тростников 1975 – *Тростников В.Н.* Конструктивные процессы в математике. М.: Наука, 1975.
- Филд 1989 – *Field H.* Realism, Mathematics, and Modality. Oxford: Blackwell Publishers, 1989.
- Филд 1998 – *Field H.* Mathematical Objectivity and Mathematical Objects / Contemporary Readings in the Foundations of Metaphysics. Eds. *Stephen Laurence and Cynthia MacDonald.* Oxford: Blackwell, 1998.
- Хейл 1990 – *Hale B.* Nominalism / Physicalism in Mathematic. Ed. *Irvine A.D.* Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publisher, 1990.
- Херш 2008 – *Hersh P.* On Platonism // *European Mathematical Society Newsletter.* June, 2008.
- Целищев 2002 – *Целищев В.В.* Философия математики. Новосибирск: Наука, 2002.
- Целищев 2003 – *Целищев В.В.* Онтология математики. Объекты и структуры. Новосибирск: Наука, 2003.
- Ябло 2002 – *Yablo St.* Abstract Objects: A Case Study // *Philosophical Issues.* 2002. Vol. 12.
- Ябло 2012 – *Yablo St.* Explanation, Extrapolation, and Existence // *Mind.* 2012. Vol. 121. № 487.

Примечания

¹ Данная статья является английским переводом с французского лекции П. Бернаиса 18 июня 1934 г. В ней ученый подчеркивает, что “платонизм ныне царствует в математике” и подвергает серьезному сомнению надежность апелляции к непосредственной интуиции, свойственной интуиционизму. Поскольку интуиция числа, считает Бернаис, более фундаментальна, чем интуиция пространства, то предпосылки платонизма носят более трансцендентальный характер, нежели предпосылки и обоснование перспективности интуиционизма [Бернайс 1935, 57, 70].

² Здесь и далее имеется в виду не так называемый “научный реализм”, понимание которого в западной традиции довольно близко к отечественному пониманию материализма, а именно реализм, который восходит к средневековой традиции. О “научном реализме”, включающем метафизический, семантический и эпистемический аспекты (см.: [Псиллос 2006]).

³ Еще в 1990-х гг. было принято говорить лишь о номинализме в математике [Ирвин 1990, XII]. Понятие антиреализма и широкое его использование позже обуславливается тем, что анализ соответствующего концептуального поля, прямо или косвенно связанного с номинализмом, обнажил такие оттенки ситуации и идей, которые не вполне покрывались понятием номинализма.

⁴ Абстракции и объекты, которыми оперируют логика и математика, близки по своей природе, но не идентичны [Вейнгартнер 1982]. Логицизм склонен считать абстракции и объекты логики более фундаментальными, нежели абстракции и объекты математики, но, думается, что это слишком сильное утверждение.

⁵ Современные проблемы, относящиеся к дискуссии реализма и номинализма, в основном затрагиваются лишь в работах В.В. Целищева [Целищев 2002, 31–36; Целищев 2003, 11–16, 74–81].

⁶ Данное определение было предложено Д.Х. Муштари, А.Н. Шерстневым и автором этих строк.

⁷ Эта проблема между тем может не представляться как “непосильная” для платонизма, в рамках которого допустим ответ, придающей этой проблеме не столь острый характер [Каллард 2007].

⁸ *Linnebo O.* Platonism in the Philosophy of Mathematics. Version of 2011 / Stanford Encyclopedia of Philosophy (<http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/platonism-mathematics/>).

⁹ *Linnebo O.* Platonism in the Philosophy of Mathematics. Version of 2011 / Stanford Encyclopedia of Philosophy (<http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/platonism-mathematics/>).

¹⁰ Обоснование соответствующего русского термина “далетизм” дано в [Бажанов 2013].

¹¹ В современной космологии в связи с осмыслением моделей инфляционной Вселенной высказываются аналогичные идеи [Карпенко 2013].

¹² Любопытно, что в 2008 г. известный математик и философ математики Р. Херш предложил участникам представительной конференции по математике ответить на вопрос о том, была ли истинной некоторая спектральная теорема в гильбертовом пространстве до Большого взрыва. 75% ответила положительно, 25% отрицательно [Херш 2008, 17]. Однако до Большого взрыва не существовало ни человека, ни математики, ни гильбертова пространства и т.п. и потому ответ на этот вопрос не может быть истинным или ложным; любой ответ здесь лишен смысла. Отсюда Р. Херш заключает, что нельзя говорить об этих понятиях и вообще о математике вне и помимо человеческой активности и её исторической обусловленности. В данном случае человеческий разум порождает конструкции вневременного и внепространственного характера, “истинные во всех возможных мирах”.

¹³ *Balaguer M.* Philosophy of Mathematics // Encyclopedia Britannica, 2003 (<http://www.eb.com>).

¹⁴ *Szabo L.* How can physics account for mathematical truth? Preprint, 2009 http://philsci-archive.pitt.edu/5338/1/szabo-phys_math.pdf.

¹⁵ *Rodriguez-Pereyra G.* Nominalism in Metaphysics. Version of 2011 <http://stanford.library.usyd.edu.au/entries/nominalism-metaphysics>.