

ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
ФИЛОСОФИЯ. СОЦИОЛОГИЯ.  
ПОЛИТОЛОГИЯ

Tomsk State University Journal  
of Philosophy, Sociology and Political Science

---

---

*Научный журнал*

---

---

**2024**

**№ 81**

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-30316 от 16 ноября 2007 г.  
выдано Федеральной службой по надзору в сфере массовых  
коммуникаций, связи и охраны культурного наследия

Подписной индекс 44046 в объединенном каталоге  
«Пресса России»

Журнал включен в БД Emerging Sources Citation Index (Web of Science  
Core Collection) и в «Перечень рецензируемых научных изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные  
научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук,  
на соискание ученой степени доктора наук»  
Высшей аттестационной комиссии  
(№ 1528)

## СОДЕРЖАНИЕ

### ОНТОЛОГИЯ, ЭПИСТЕМОЛОГИЯ, ЛОГИКА

<b>Бажанов В.А.</b> Доказательные рассуждения в математике: сочинение строгости? .....	5
<b>Борисов Е.В.</b> Модальный аспект познаваемости .....	17
<b>Ладов В.А., Черепахин А.Е.</b> Аналитический реализм в содержательном аспекте: теория и практика .....	24
<b>Моисеева А.Ю.</b> Соотношение логического следования и импликации в релевантной логике .....	39
<b>Спрукуль П.С.</b> Концепции будущего в философии искусственного интеллекта: дистопия, утопия, протопия .....	48

### ИСТОРИЯ ФИЛОСОФИИ

<b>Корниенко М.А.</b> «Комментарий на „Сон Сципиона“» Макробия: опыт прочтения Цицерона в эпоху поздней античности .....	56
<b>Яковлев В.В.</b> Программа примирения разума и христианской веры: концептуальные религиозно-философские и теологические установки Дж. Толанда .....	68

### СОЦИАЛЬНАЯ ФИЛОСОФИЯ И ФИЛОСОФСКАЯ АНТРОПОЛОГИЯ

<b>Бараш Р.Э.</b> Паттерны активизма и протеста в социально-сетевой коммуникации современных россиян .....	79
<b>Лягошина Т.В.</b> Влияние больших языковых моделей на современный публичный курс: анализ социальных и эпистемологических импликаций .....	98
<b>Мельников М.В.</b> Публичное пространство и его приватизация в контексте иерархии благ .....	109
<b>Найман Е.А., Пашина Л.А.</b> Философские проблемы стареющего общества в героэтике .....	118
<b>Оглезнев В.В., Бондарев В.Г.</b> Философия наказания: потенциал компромиссных теорий .....	129
<b>Рзов Н.С., Филиппов С.И.</b> Лояльность местных элит центральной власти в России: общие условия и особенности социально-исторического контекста .....	140
<b>Хитрук Е.Б., Быков Р.А.</b> Отцовство Божественное и отцовство человеческое: социально-философские основания «отцовской революции» .....	152

### СОЦИОЛОГИЯ

<b>Боронина Л.Н., Ольховикова С.В.</b> Барьеры инклюзивного образования в высшей школе .....	165
<b>Вялых Н.А.</b> Доверие российского общества медицинским организациям: грани и ограничения социологического познания .....	175
<b>Кичерова М.Н., Трифонова И.С.</b> Дисфункции образовательной экосистемы: риски неформального образования в оценках экспертов .....	188
<b>Коропец О.А., Федорова А.Э., Абрамова С.Б.</b> Влияние четвертой промышленной революции на гендерные аспекты благополучия на рабочем месте .....	203
<b>Петрова Е.В., Бильтрикова А.В., Дашибалова И.Н.</b> Социальное самочувствие жителей дальневосточных регионов (Республика Бурятия, Забайкальский и Приморский края) .....	213
<b>Солодова Г.С.</b> Обстоятельства, обусловившие особую вероисповедную политику в Туркестане, и ее некоторые принципы (дореволюционный период) .....	224

### ПОЛИТОЛОГИЯ

<b>Краснопёров А.Ю., Гончаров М.Д., Соколова А.В., Бушин Ю.Ю.</b> Влияние делиберации на восприятие и выявление фейковых новостей по политическим вопросам .....	234
<b>Матвеева Е.В., Шилова А.Э., Сат А.В.</b> Традиционные ценности в системе политической культуры студенческой молодежи Кузбасса .....	244
<b>Никандров А.В.</b> Концепт развитого социализма в советской теории государства и идеологии .....	253
<b>Потоцкий Я.А.</b> Законы о декоммунизации в контексте конструирования национальной мифологии в прибалтийских республиках .....	262

### МОНОЛОГИ, ДИАЛОГИ, ДИСКУССИИ

<b>Берестов И.В.</b> Ахиллес вне времени и пространства: ещё раз о несводимости прохождения открытого интервала к прохождению замкнутых (вторая реплика на статью Е.В. Борисова) .....	271
--	-----

# CONTENTS

## ONTOLOGY, EPISTEMOLOGY, LOGIC

<b>Bazhanov V.A.</b> Proof in mathematics: Making up rigor? .....	5
<b>Borisov E.V.</b> The modal aspect of knowability .....	17
<b>Ladov V.A., Cherepakhin A.E.</b> Analytical realism in the substantive aspect: Theory and practice .....	24
<b>Moiseeva A.Yu.</b> The relationship between logical consequence and implication in relevant logic .....	39
<b>Sprukul' P.S.</b> Concepts of the future in the philosophy of artificial intelligence: Dystopia, utopia and protopia .....	48

## HISTORY OF PHILOSOPHY

<b>Kornienko M.A.</b> "Commentary on the "Dream of Scipio" by Macrobius: an experience of reading Cicero in late antiquity .....	56
<b>Yakovlev V.V.</b> The program of reconciliation of reason and Christian faith: Conceptual religious-philosophical and theological attitudes of John Toland .....	68

## SOCIAL PHILOSOPHY AND PHILOSOPHY OF HUMANITY

<b>Barash R.E.</b> Patterns of activism and protest in the social network communication of modern Russians .....	79
<b>Lyagoshina T.V.</b> The impact of large language models on contemporary public discourse: An analysis of social and epistemological implications .....	98
<b>Melnikov M.V.</b> Public space and its privatization in the context of the hierarchy of goods .....	109
<b>Nayman E.A., Pashina L.A.</b> Philosophical problems of an aging society in geroethics .....	118
<b>Ogleznev V.V., Bondarev V.G.</b> Philosophy of punishment: The capacity of compromise theories .....	129
<b>Rozov N.S., Filippov S.I.</b> Loyalty of local elites to the central government in Russia: General conditions and peculiarities of the socio-historical context .....	140
<b>Khitruck E.B., Bykov R.A.</b> Divine fatherhood and human fatherhood: Socio-philosophical foundations of the "paternal revolution" .....	152

## SOCIOLOGY

<b>Boronina L.N., Olkhovikova S.V.</b> Inclusive education barriers in higher school education .....	165
<b>Vyalykh N.A.</b> Russian society's trust in medical organizations: Edges and limitations of sociological knowledge .....	175
<b>Kicherova M.N., Trifonova I.S.</b> Educational ecosystem dysfunctions: Non-formal education risks in expert assessments .....	188
<b>Koropets O.A., Fedorova A.E., Abramova S.B.</b> The impact of the Fourth Industrial Revolution on gender dimensions of well-being in the workplace .....	203
<b>Petrova E.V., Biltrikova A.V., Dashibalova I.N.</b> Social well-being of residents of the Far Eastern regions (Republic of Buryatia, Zabaykalsky Krai, and Primorsky Krai) .....	213
<b>Solodova G.S.</b> Circumstances that determined the special religious policy in Turkestan and some of its principles (the pre-revolutionary period) .....	224

## POLITICAL SCIENCE

<b>Krasnoperov A.Yu. , Goncharov M.D. , Sokolova A.V., Bushin Yu.Yu.</b> The impact of de-liberation on the perception and detection of fake news on political issues .....	234
<b>Matveeva E.V., Shilova A.E., Sat A.V.</b> Traditional values in the system of political culture of students in a resource-type region .....	244
<b>Nikandrov A.V.</b> The concept of developed socialism in the Soviet theory of the state and ideology .....	253
<b>Pototskii Ia.A.</b> Laws on decommunization in the context of the construction of national mythology in the Baltic states .....	262

## MONOLOGUES, DIALOGUES, DISCUSSIONS

<b>Berestov I.V.</b> Achilles beyond time and space: Once again on the irreducibility of the passage of an open interval to the passage of closed ones (a second reply to Evgeny Borisov's article) .....	271
---	-----

## ОНТОЛОГИЯ, ЭПИСТЕМОЛОГИЯ, ЛОГИКА

Научная статья  
УДК 165.2  
doi: 10.17223/1998863X/81/1

### ДОКАЗАТЕЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ В МАТЕМАТИКЕ: СОЧИНЕНИЕ СТРОГОСТИ?

**Валентин Александрович Бажанов**

*Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия,  
vbazhanov@yandex.ru, <https://staff.ulsu.ru/bazhanov>*

**Аннотация.** В статье обсуждаются представления о строгости доказательства в математике и требования, которые предъявляются к строгости в различных математических направлениях и сообществах. Показывается, что эти представления и требования задаются членами этих направлений, сообществ и в значительной степени зависят от их субъективных предпочтений, вплоть до симпатий / антипатий к конкретным личностям. Эти предпочтения касаются выбора базисных принципов (аксиоматик), допустимых / недопустимых абстракций, методов рассуждений (правил вывода) и образования основополагающих понятий, которые задействуются в тех или иных доказательных процедурах. Границы возможного строгого доказательного рассуждения определяются пределами деантропологизации знания. Таким образом конструктивный момент играет существенную роль в генезисе и репрезентации различных направлений в логике и математике. Поэтому этот процесс может быть осмыслен под углом зрения идеи Я. Хакинга о «сочинении» (в данном случае математической) реальности и ее элементов, составляющих онтологический фундамент. Показывается, что представления о строгости и требованиях к строгости также «сочиняются» (в смысле Хакинга). Предлагается ввести в философию математики принцип относительности к средствам доказательства.

**Ключевые слова:** математика, логика, доказательство, Хакинг, принцип относительности к средствам доказательства

**Для цитирования:** Бажанов В.А. Доказательные рассуждения в математике: сочинение строгости? // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2024. № 81. С. 5–16. doi: 10.17223/1998863X/81/1

## ONTOLOGY, EPISTEMOLOGY, LOGIC

Original article

### PROOF IN MATHEMATICS: MAKING UP RIGOR?

**Valentin A. Bazhanov**

*Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russian Federation, vbazhanov@yandex.ru,  
<https://staff.ulsu.ru/bazhanov>*

**Abstract.** The article discusses the ideas about the rigor of proof in mathematics and the requirements for rigor in various mathematical directions and communities. It is shown that these ideas and requirements are set by members of such directions and communities, and

depend to a great extent on their subjective preferences, up to sympathies/antipathies to particular individuals. These preferences concern the choice of basic principles (axiomatics), admissible/inadmissible abstractions, methods of reasoning (rules of inference), and the formation of fundamental concepts that are involved in certain proof procedures. Thus, the constructive moment plays an essential role in the genesis and representation of different directions in logic and mathematics. Therefore, this process is analyzed through the lens of Ian Hacking's idea of the "making up" (in this case, mathematical) of reality and its elements that constitute its ontological foundation. I claim the notions of rigor and requirements for rigor may also be covered by the "making up" procedure (in Hacking's sense). I suggest that the principle of relativity to the means of proof is legitimate in the philosophy of mathematics as well.

**Keywords:** mathematics, logic, proof, Hacking, principle of relativity to means of proof

**For citation:** Bazhanov, V.A. (2024) Proof in mathematics: making up rigor? *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science*. 81. pp. 5–16. (In Russian). doi: 10.17223/1998863X/81/1

Математика вовсе не случайно считается – и в обыденном сознании, и среди научного сообщества – строгой наукой. Основание такого рода оценки – тот статус доказательства, который издавна принят в математике и отступления от которого не допускаются. Строгое доказательство – не просто идеал, а норма математического рассуждения. Наиболее жесткие требования к доказательству отличают такой раздел математики, как математическая логика. Между тем история науки зафиксировала факты довольно частых споров между логиками, которые иногда носили едва ли не ожесточенный характер. Выдающийся британский логик С. Джевонс спорил с другим крупным британским логиком Х. Макколом, великий французский математик А. Пуанкаре дискутировал по логическим вопросам с другим известным французским логиком Л. Кутюра, Дж. Кук Вильсон, являясь убежденным сторонником традиционной логики даже в первой четверти XX столетия, когда Б. Рассел и А.Н. Уайтхед предложили в 1910–1913 гг. миру образец строгого рассуждения в виде *Principia Mathematica*, категорически не принимал математическую логику и ранее сурово критиковал Л. Кэррола, который стремился убедить оппонента в том, что он просто не понимает сути представления логики в математической форме (т.е. математическую логику). В настоящее время энергично дискутируют с С. Мочизуки по поводу состоятельности его доказательства известной АВС-гипотезы. Мочизуки убежден, что гипотеза доказана, а его оппоненты возражают, указывая на непонятные и невоспроизводимые фрагменты его (якобы) доказательства, которые касаются вовсе не частных случаев, а принципиальных моментов, относящихся к самой идее доказательства [1. Р. 9–12].

В истории науки и (в первую очередь) математики помнят о длительном противостоянии сторонников классической логики (во главе которых стоял великий Д. Гильберт) и интуиционистской логики, родоначальником которой являлся Л.Э.Я. Брауэр<sup>1</sup>. С 1960-х гг. до настоящего времени оппозицию классической математике составляет математика, принимающая принципы пара-

---

<sup>1</sup> Близкие к интуиционистам по воззрениям в техническом смысле в СССР были конструктивисты (А.А. Марков, Б.А. Кушнер, Н.М. Нагорный, Н.А. Шанин и др.). Ключевые идеи ультраинтуиционизма (А.С. Есенин-Вольпин) были еще более радикальными.

непротиворечивой логики, т.е. способная «работать» с противоречиями, локализовывать таковые (Н. да Коста, К. Мортенсен, Р. Роутли, Г. Прист и др.)<sup>1</sup>.

Возникают правомерные вопросы о том, как фактор строгости, принятый в логико-математических системах, некоторые из которых были представлены в исключительно формализованном, т.е. заведомо строгом виде, допускали такой разброс мнений и оценок среди тех, кому они были обязаны своим рождением и последующим быстрым и успешным развитием? Означает ли факт разброса мнений по поводу базисных логико-математических принципов и приемлемости / неприемлемости основных законов, что представления о строгости математических рассуждений преувеличены или даже в определенном смысле бесосновательны? Какие факторы порождают споры в области, которая служит эталоном строгости? Может ли строгость быть «относительной», привязанной к субъективным симпатиям определенных научных сообществ в логике и математике (не упоминая другие «менее строгие» науки)?

### **Когда математическое рассуждение считается строгим?**

Острота данных вопросов повышается, если вспомнить, что главный функционал строгости состоит в том, чтобы обеспечить правильность рассуждения и получить правильный результат, к которому не представляется возможным «придраться» в смысле признания ненадежности каких-то элементов рассуждения или задействованных в нем методов. Образно выражаясь, строгость – это своего рода гигиена математики [3. Р. 7]<sup>2</sup>. В условиях существенного роста сложности и приближения к «необозримости» математических доказательств этот функционал приобретает особую актуальность [4. Р. 2]. Стремление к строгости математических рассуждений придает математике мощный объяснительный и в то же время эвристический потенциал [5. Р. 2–4], и благодаря этому потенциалу прикладные аспекты математики лежат в основе признания, на котором сделал акцент Е. Вигнер, ее «непостижимой эффективности» и роли в познании природы. Однако эффективность применения математических методов в естествознании достигается не фанатичным следованием требованиям строгости, а в той мере, в которой строгость не ограничивает эвристический аспект этих методов. Строгость – не *sine qua non* в абсолютном смысле, а компонент своего рода машинерии роста знания. Этот факт особо подчеркивался теми учеными, которые опирались на математику в своих исследованиях природных явлений. Так, О. Хэвисайд, один из когорты выдающихся ученых, гармонично сочетавший в своей работе математические и физические методы, «ценил математику лишь постольку, поскольку она помогала решать физические задачи...» [6. С. 33]. «Жалобы на недостаток совершенства в выборе путей и в образе действий исследователя со стороны людей, привыкших к более строгим методам, – замечал Хэвисайд, – в значительной степени смехотворны» (цит. по: [6. С. 36]). М. Уилсон также

<sup>1</sup> Подробнее см.: [2].

<sup>2</sup> Содержание понятия строгости законов (*justitia*) в юриспруденции отлично от того, которое принято в математике и науках, применяющих математические методы. Правосудие не может и не должно следовать жестким предписаниям *justitia*, а максимально принимать во внимание соображения праведности и милосердия (*aequitas*), которые в общем случае не согласуются с *justitia*. Впрочем, обсуждение этого важного вопроса выходит за рамки настоящей статьи.

не вполне доверяет тем уверениям в строгости рассуждений, которые были свойственны для некоторых представителей логического эмпиризма, и описывает их как «эрзац-строгость», упрекая их в том, что строгость они превратили в своего рода фетиш [7. Р. 1–10].

Между тем проблема строгости рассуждений и выводов осознается ныне как вполне актуальная не только для чистой математики, но и для многочисленных приложений математических методов, развития программирования, искусственного интеллекта, подходов к анализу «Больших Данных». Эта проблема также активно обсуждается в современной нейронауке [8], экономике [9], медицине [10, 11]<sup>1</sup> и т.д. В конечном итоге в фокусе такого рода обсуждений находится вопрос о соотношении, балансе требований, связанных с установками придерживаться максимально возможной строгости и степенью соответствия рассуждений и вычислений некоторой предметной области. Такой баланс часто соблюсти непросто, поскольку рассогласование выкладок и реальности может иметь далеко идущие негативные последствия [14. Р. 2]. Так, в ведущем мировом медицинском журнале *The Lancet* была опубликована статья, в которой на основе математического анализа некоторого массива эмпирических данных утверждалось наличие корреляции между прививками против кори и аутизмом. Якобы эти прививки провоцируют у детей развитие аутизма. Несмотря на то, что довольно скоро (в 2010 г.) статья из журнала была ретрагирована (отозвана) и во многих публикациях в серьезных журналах (включая сам *Lancet*) приводились данные о том, что прививки против кори никоим образом не связаны с аутизмом, многие родители в США прекратили делать эти прививки, что привело к заметному всплеску заболеванием корью среди детей.

По определению крупного математика С. Маклейна, «математическое доказательство считается строгим, если оно может быть записано на языке исчисления предикатов первого порядка как следствие из системы аксиом  $ZFC^2$ » (цит. по: [15. Р. 2]). Менее техническое определение строгости таково: «строгое доказательство – рассуждение все составляющие которого следуют согласно чисто логическим отношениям между понятиями» [16. Р. 10]. Распространенные определения строгости обычно обходят стороной тот факт, что большинство математических теорий не аксиоматизированы и, в общем случае, не нуждаются в последовательной и сколько-нибудь выверенной и строгой аксиоматизации.

С какой же целью логики и математики стремятся придерживаться очень жестких, в идеале максимально жестких в данный исторический момент, стандартов строгости? Если постараться выразить смысл главной установки, которая предполагает придание логико-математическим рассуждениям и выкладкам такого рода свойства (строгости), то это утверждение отношения логического следования между всеми компонентами процедуры доказательства. Попросту говоря, это означает, что цепь рассуждения такова, что его последующие части должны базироваться (вытекать) из предыдущих частей, надежность и обоснованность которых установлена ранее с не вызывающими

---

<sup>1</sup> Не упоминая педагогический аспект, связанный со значительной ролью преподавания математики в (физиологическом) развитии мозга и увеличении степени его пластичности [12, 13].

<sup>2</sup> Имеется в виду система аксиом теории множеств Цермело–Френкеля с аксиомой выбора.

сомнения нормами строгости, и в принципе все блоки доказательного рассуждения восстановимы и воспроизводимы вплоть до начальных аксиом – если формальная система допускала и ранее была аксиоматизирована, т.е. неформальное доказательство в принципе допускало бы представление в виде формального аналога [17. Р. 7378]. Пробелы в рассуждениях не допускаются; ни одна связка между отдельными «блоками», переход от одной его части к другой не должен осуществляться по соображениям «очевидности», интуитивных догадок, аналогии. Такого рода жесткие условия, в первую очередь, накладываются на формальные и / или в значительной степени формализованные системы, хотя они составляют сравнительно небольшое число математических теорий и в математической практике занимают далеко периферийное положение. Поэтому строгость доказательства – это своего рода «серая зона» между формализованными системами и реальной математической практикой [18]. «Серые зоны» могут возникать в самых неожиданных областях математики и ее приложений. Так, только в 2024 г. оказалось необходимым, в связи с развитием методов программирования и, проверив, начать пересматривать традиционные, едва ли не веками устоявшиеся представления о таком фундаментальном, «каноническом» математическом понятии, как «равенство»:  $2 + 1$ ,  $1 + 2$  и  $3$ , в некоторых случаях оказываются нетождественными, «неравными» в концептуальном смысле таким образом, что программа (Lean) указывает на их различие и идентифицирует как «ошибку» системы. Этот нюанс ускользнул даже от внимания таких выдающихся математиков, первопроходцев в алгебраической геометрии, как А. Гротендик и Ж. Дьедонне, которые рассуждали о равенстве и изоморфизме «в слишком свободной манере» [19. Р. 6].

## Строгость и интуитивные суждения

Достаточно вспомнить гениального индийского математика С. Рамануджана, не получившего систематического математического образования. Он утверждал, что к нему во сне якобы являлась богиня Намагири (Namagiri), «опекавшая» семью математика и подсказывающая ему удивительно красивые и сложные математические соотношения (особенно в области теории чисел), восхищавшие крупных математиков. Просыпаясь, Рамануджан записывал эти соотношения, в правильности которых он был убежден интуитивно. Многие из них впоследствии удавалось доказать, но все-таки примерно одна треть оказалась неверной: блестящие интуитивные догадки Рамануджана были не столь безупречными, как он надеялся.

Выдающийся современный математик В.А. Воеводский был удостоен медали Филдса за существенные результаты в области алгебраической геометрии. Однако уже после этого события он обнаружил слабое место в своем доказательстве гипотезы Милнора–Блоха–Като. С тем, чтобы в будущем избежать такого рода ситуаций, Воеводский предпринял усилия в создании программы автоматической проверки правильности доказательств при помощи компьютеров, которая дала импульс для формирования библиотеки так называемых унивалентных оснований математики, включающей в себя методы, позволяющие автоматически проверять и доказывать математические

теоремы<sup>1</sup>. Ошибочные суждения и выводы – не редкость в математике. Даже великие математики не всегда получают достоверные (правильные) результаты. Так, великий Д. Гильберт вопрос о взаимном расположении кривых степени 6, не имеющих действительных особых точек, отнес к 16-й проблеме из своего знаменитого списка важнейших математических проблем. Гильберт сам предложил решение, связанное с этим вопросом, но оно оказалось ошибочным. Верное решение было получено Д.А. Гудковым в 1950–1960-х гг.

Образ и стремление к строгости в математике можно представить в виде образа (морского) корабля: корабль должен быть надежным с тем, чтобы преодолеть большое расстояние в бурном океане; кроме того, он должен приплыть строго по назначению, в конкретную географическую точку, а не просто переплыть океан, пришвартовавшись на другом континенте. Строгое доказательство обеспечивает уверенность и его автора и, главное, научное сообщество в том, что цель – обоснование истинности некоторого утверждения (теоремы) – достигнута и сомнение в методах его достижения безосновательно.

Апогей строгости – это формальное, до предела, так сказать, формализованное доказательство. Благодаря этому доказательству истинность некоторого математического утверждения не вызывает сомнения. Однако в общем случае вовсе не такое доказательство убеждает математиков в истинности утверждения. Убеждает, подчеркивает А. Гранвил, нечто иное, лежащее за границами собственно формального доказательства [24. Р. 320], а именно факторы неформального характера: изящная и надежная методология, красота и оригинальность, точность выкладок, авторитет ученого, его школы, ранее утвержденная репутация как мыслителя, которому следует доверять, другие факторы, не сводящиеся к формальным выкладкам, например, использование в доказательствах уже апробированных методов [25]. Иногда к этим факторам добавляют ясность / простоту [26. С. 66]<sup>2</sup>. Поэтому ключевое предназначение доказательства в узком смысле – это установление истинности некоторого утверждения; в широком же смысле – убеждение достаточно компетентных членов научного сообщества в том, что выкладки автором доказательства произведены правильно, основополагающие принципы теории приемлемы, а методам и полу-

<sup>1</sup> Важность усилий в направлении автоматической проверки и доказательства трудно переоценить, поскольку в математике довольно много утверждений и так называемых «призрачных» (ghost) теорем, которые никогда не доказывались, но активно используются в математической практике ввиду их «полезности» и отсутствия подозрений в том, что они приводят к противоречиям [20. Р. 3880]. Аналогичный статус «провалов (пробелов)» (gaps), энтимематического рода конструкций в математическом дискурсе, когда используются привычные и всем давно известные приемы [21]. Между тем вовсе не следует возлагать большие надежды на машинные методы доказательства новых теорем, поскольку эти методы фактически лишены эвристического потенциала, который был и остается только у «живого» и одаренного математика. «Ошибочно мнение, что машинная технология, – подчеркивает Дж. Авигад в своем ответе на вопрос о том, изменят ли компьютеры математику, – в состоянии изменить природу математики. На это способны только сами математики. Тем не менее эта технология безусловно повлияет на стиль математических рассуждений» [22. Р. 238]. Экспансия информационных технологий в математику и едва ли не взрывная волна появления машинных методов проверки и доказательства теорем заставила издать специальный номер одного из ведущего журнала США, посвященного этому процессу и его перспективам в математике [23, 24]. Лейтмотив едва ли не всех статей в данном номере заключается в том, что машинные методы проверки доказательств прежде всего увеличивают нашу уверенность в том, что математик, автор доказательства, не ошибся.

<sup>2</sup> Представления о ясности и простоте математического выражения (включая доказательство) также относятся к характеристикам, которыми оперирует тот, кто их оценивает: если для одного специалиста что-то «ясно и просто», то другой может не разделять это мнение. Поэтому вряд ли без серьезных оговорок можно разделить мнение Д. Гильберта о том, что «наиболее строгий метод доказательства в то же время оказывается более простым и понятным» (цит. по: [26. С. 66]).

ченному результату можно вполне доверять<sup>1</sup>. Под таким углом зрения доказательство – важнейшая *этическая* процедура, посредством которой автор возлагает на себя ответственность в том, что интуиция его не подвела и любой достаточно компетентный член сообщества может при желании воспроизвести метод и получить тот же самый результат. Убеждение из внутриличностного феномена (догадка, озарение автора доказательства, выбор методологии и методов рассуждения) приобретает статус общезначимого (т.е. воспроизводимого), разделяемого компетентным научным сообществом [27, 28]. Между тем удельный вес и значение субъективных компонентов, оказывающих влияние на доказательство, позволил С. Де Тоффоли высказать мнение, что в реальности, рассуждая о доказательстве, мы должны вести речь о не вполне полноценном, а квази- (так сказать, «будто») доказательстве (*simil-proof*): доказательство как таковое с жесткими требованиями по строгости – это своего рода (почти) недостижимый идеал [29. Р. 400–401].

Аргументация в процессе доказательства не сводится к выбору и применению апробированных методов; она включает в себя возможность апелляции к многообразию методов, которые также могут привести к полученному результату, риторике, которая способна его представить в наиболее ярком и доступном максимально широкому кругу специалистов виде [30].

### «Сочиняется» ли строгость?

Если при конструировании логико-математических систем требования к строгости столь велики и эти требования носят универсальный характер, т.е. обязательны для всех то по каким причинам, концептуальным основаниям возникают дискуссии по поводу состоятельности, правомерности того или иного доказательства?

Мы склонны рассуждать о доказательстве как некоторой объективной процедуре<sup>2</sup>, фактически вынося за скобки особенности субъекта доказательства, его автора с глубоко субъективными воззрениями на то, какие фундаментальные принципы должны лежать в основаниях той или иной теории, какие методы допустимы, а какие недопустимы для достижения надежности доказательства, какие базисные абстракции наилучшим способом могут обеспечить построение теории вообще и эффективны / не эффективны в плане ее совершенствования и развития. Все указанные (и иные) субъективные особенности автора (и тем более группы авторов) доказательства и оказываются глубинными основаниями для разногласий и дискуссий, связанных с доказательствами. Различные группы математиков, вообще говоря, зачастую имеют несовпадающие представления о том, каким должно быть доказательство и какие средства допускаются при его конструкции<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Допустимо утверждение, что в определенном смысле любое математическое доказательство может быть отнесено к классу правдоподобных рассуждений.

<sup>2</sup> Обычно выделяют онтологический, эпистемический и семантический аспекты объективности математики и математического дискурса, которые, однако, ограничены особенностями репрезентации знания в этой науке [31. Р. 244].

<sup>3</sup> Все это позволяет говорить о своего рода «дедуктивном плюрализме» [32. Р. 1436], в контексте которого вопрос об онтологических основаниях математики (столь важных для сторонников платонизма) – каков модус существования математической реальности и абстрактных объектов в ней – теряет смысл, хотя, как мне кажется, интерпретация условий генезиса и статуса абстрактных объектов с позиций номинализма по-прежнему правомерен. Так, число с этих позиций рассматривается в качестве «культурного» объекта [34].

Более конкретно – разногласия по поводу приемлемости системы аксиом, основополагающих абстракций (как, скажем, актуальной, потенциальной бесконечности или фактической осуществимости), допустимости тех или иных методов рассуждений и доказательств (например, использование диаграмм [34]), философско-методологических предпосылок теории и ее онтологических оснований (например, реализм versus антиреализм), практического использования тех или иных результатов, ее социального значения (ср.: [35. Р. 38]), вплоть до личных антипатий (как, например, У. Куайна к Р. Баркан-Маркус), несогласия со доминирующим стилем (как В.И. Арнольд имплицитно возражал стилю группы Бурбаки [36]) или ввиду недоброжелательного отношения к той или иной математической школе, ее репутации и репутации ее членов, оценок достижений некоторого сообщества. Иногда играют значение даже предрассудки, связанные с гендерными признаками. Наконец, у ученых могут быть различные мнения по поводу престижности и ценности публикаций в тех или иных изданиях. Так, В.И. Арнольд вспоминал совет Н.Н. Боголюбова предпочитать для своих статей не физические, а математические журналы: если в физическом и математическом журналах число читателей будет одним и тем же, подмечал Боголюбов, то в физическом журнале с хорошей статьей тысяча читателей познакомится за месяц, а потом о ней и ее авторе забудут, и даже предложенный там метод припишут кому-то другому, а математический журнал по дюжине человек будут читать лет сто, и имя автора не будет забыто и войдет в славную историю математики [37. С. 12]. Возможно, что Боголюбов (и вслед за ним Арнольд) несколько преувеличивал различие между сообществами физиков и математиков, но главное, как мне кажется, подмечено точно: стили мышления и оценки результатов у них отличны; это же, вообще говоря, будет (не в столь категоричной форме) справедливо и для тех или иных сообществ в математике, которые часто придерживаются различных точек зрения на то, каким требованиям должны удовлетворять доказательства для того, чтобы быть принятыми и признанными верными научным сообществом [38. Р. 169–170].

Если представления о строгости и требования, связанные с обеспечением (минимального) уровня строгости, как мы видели выше, столь многообразны, то осознание этого факта подводит к мысли о том, что если следовать идее Я. Хакинга о роли (новых) понятий в процессе «сочинения», создания (ранее не замечаемой) реальности [39; 40. С. 120–121]<sup>1</sup>, то строгость представляет собой креатуру концептуального порядка, которая «сочиняется» и утверждается посредством некоторых ментальных операций: выбора приемлемых базисных принципов, допустимых абстракций и методов рассуждений, операций с объектами новой реальности и т.п. Результаты «сочинений» отливаются в новые типы онтологии. У сторонников платонизма (реализма) это математические объекты (числа, отношения, структуры и т.д.), существующие независимо от человеческого сознания в некоторой (так сказать, виртуальной) реальности с особыми свойствами; у сторонников номинализма (анти-реализма), к которым, по-видимому, можно с известными оговорками причислить и самого Хакинга [41. С. 257–292], – это математические объекты и отношения, в конечном по-

---

<sup>1</sup> Хакинг эту идею высказал в отношении «создания» новых категорий людей, которые не выделялись на фоне общей массы людей до появления понятий, с помощью которых они «проявлялись» из общей совокупности.

рожденные, сконструированные человеческим сознанием, которые можно отнести к жанру «концептуального инжиниринга» [42].

## Заключение

Поэтому строгость – это не абсолютная, а относительная характеристика результата рассуждений в рамках некоторого дискурса. Ее границы определяются пределами деантропологизации знания. Она замыкается на те особенности, которые отличают человека как активного субъекта познания, и плотно привязана к историческому контексту, конкретному научному направлению и / или сообществу исследователей. Вероятно, подобно тому, как в физике имеет смысл принцип относительности к средствам измерений, так и в математике допустим принцип относительности к средствам доказательства – если иметь в виду представления о том, какие принимаются исходные допущения (аксиомы), какие абстракции и методы рассуждения считаются правомерными.

## Список источников

1. *Aberdein A.* Deep Disagreement in Mathematics // *Global Philosophy*. 2023. Vol. 33. Article 1. P. 1–27.
2. *Mortensen C.* Inconsistent mathematics. URL: <https://plato.stanford.edu/entries/mathematics-inconsistent/> (дата обращения: 10.06.2024).
3. *Arana A., Burnett H.* Mathematical Hygiene. Preprint. 2023. 24 p.
4. *Burgess J.P., De Toffoli S.* What is mathematical rigor? // *APhEx*. 2022. Vol. 25. P. 1–17.
5. *Marfori M.A., Bangu S., Ippoliti E.* The explanatory and heuristic power of mathematics // *Synthese*. 2023. Vol. 201. Article 154.
6. *Болотовский Б.М.* Оливер Хэвисайд. М.: Наука, 1985. 260 с.
7. *Wilson M.* Imitation of rigor. An alternative history of analytic philosophy. Oxford: Oxford University Press, 2022. XVII. 210 p.
8. *Crook S.M., Davison A.P. et al.* Editorial: Reproducibility and rigor in computational neuroscience // *Frontiers in Neuroinformatics*. 2020. Vol. 14. Article 23.
9. *Sells S.N., Bassing S.B. et al.* Increased scientific rigor will improve reliability of research and effectiveness of management // *The Journal of Wildlife Management*. 2017. Vol. 82 (3). P. 485–494.
10. *Hofseth L.J.* Getting rigorous with scientific rigor // *Carcinogenesis*. 2018. Vol. 39 (1). P. 21–25.
11. *Sansbury B.E., Nystoriak M.A. et al.* Rigor me this: What are the basic criteria for a rigorous, transparent, and reproducible scientific study? // *Frontiers in Cardiovascular Medicine*. 2022. Vol. 9. Article 913612.
12. *Cresswell C., Speelman C.P.* Does mathematics training lead to better logical thinking and reasoning? A cross-sectional assessment from students to professors // *PLOS One*. 2020. Vol. 15 (7). Article e0236153.
13. *Zacharopolous G., Sella F., Kadosh R.C.* The impact of a lack of mathematical education on brain development and future attainment // *PNAS*. 2021. Vol. 118, № 24. Article e2013155118.
14. *Cantlon J.F.* The balance of rigor and reality in development neuroscience // *Neuroimage*. 2020. Vol. 216. Article 116464.
15. *Hamami Y.* Mathematical rigor and proof // *Review of Symbolic Logic*. 2019. P. 1–41.
16. *Hamami Y.* Mathematical rigor, proof gap and the validity of mathematical inference // *Philosophia Scientiae*. 2014. Vol. 18, № 1. P. 7–26.
17. *Avigad J.* Reliability of mathematical inference // *Synthese*. 2021. Vol. 198. P. 7377–7399.
18. *Ламберов Л.Д.* Строгость доказательства: «серая зона» между формализацией и практикой // *Философия науки*. 2023. № 1 (96). С. 128–133.
19. *Buzzard K.* Grothendick’s use of equality // *arXiv:2405.10387v1*. May 16, 2024.
20. *Rittberg C.J., Tanswell F.S., Van Bendegem J.P.* Epistemic injustice in mathematics // *Synthese*. 2020. Vol. 197 (9). P. 3875–3904.
21. *Andersen L.E.* Acceptable gaps in mathematical proofs // *Synthese*. 2023. Vol. 197 (1). P. 233–247.

22. Avigad J. Mathematics and the formal turn // American Mathematical Society Bulletin. 2024. Vol. 61, № 2. P. 225–240.
23. Fraser M., Granville A. et al. Will machines change mathematics? // American Mathematical Society Bulletin. 2024. Vol. 61, № 2. P. 201–202.
24. Granville A. Proof in the time of machines // American Mathematical Society Bulletin. 2024. Vol. 61, № 2. P. 317–329.
25. Detlefsen M., Arana A. Purity of methods // Philosopher Imprint. 2011. Vol. 11 (2). P. 1–20.
26. Целищев В.В., Хлебалин А.В. Концептуальная и формальная строгость математического доказательства // Философия науки. 2022. № 1 (92). С. 64–70.
27. Bazhanov V.A. Proof as an Ethical Procedure // Science and Ethics. The Axiological Contexts of Science/ Eds. Agazzi E., Minazzi F. Bruxelles, Bern, Berlin, Frankfurt am Main, New York, Oxford, Wien. Peter Lang, 2008. P. 185–193.
28. Бажанов В.А. Загрязняет ли кризис воспроизводимости математику? // Философия науки и техники. 2022. № 1. С. 70–83.
29. De Toffoli S. Proofs for a price: Tomorrow ultra-rigorous mathematical culture // American Mathematical Society Bulletin. 2024. Vol. 61, № 3. P. 395–410.
30. Aberdein A., Ashton Z. Argumentation in Mathematical Practice // Bharath Sriraman (ed.), Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice. Cham: Springer, 2024. P. 2665–2687.
31. Cole J.C. Some preliminary note on the objectivity of mathematics // Topoi. 2023. Vol. 42. P. 235–245.
32. Hosack J. All inclusive philosophy of mathematics // American Mathematical Society Notices. 2019. Vol. 66. P. 1433–1437.
33. Бажанов В.А. Число и кантианская исследовательская программа в современной нейронауке // Вопросы философии. 2021. № 7. С. 50–60.
34. De Toffoli S. Who is afraid of mathematical diagrams // Philosophical Imprint. 2023. Vol. 23 (1). P. 1–20.
35. De Toffoli S., Fontanari C. Recalcitrant disagreement in mathematics: An “endless and depressing controversy” in the history of Italian algebraic geometry // Global Philosophy. 2023. Vol. 33. Article 38. P. 1–30.
36. Arnold V.I. Mathematics and physics: mother and daughter or sisters // Physics – Uspekhi. 1999. Vol. 42 (12). P. 1205–1271.
37. Арнольд В.И. Что такое математика? М. : Изд-во МЦНМО, 2004. 104 с.
38. Inglis M., Aberdein A. Diversity in proof appraisal // Mathematical Cultures / ed. B. Larvor. Basel : Birkhauser, 2016. P. 163–180.
39. Hacking I. Making Up People // London Review of Books. 2006. Vol. 18, № 16 (August 17).
40. Хакинг Я. Историческая онтология / пер. В.В. Целищева. М. : Канон+, 2024. 384 с.
41. Хакинг Я. Почему вообще существует философия математики? / пер. В.В. Целищева. М. : Канон+, 2020. 400 с.
42. Kohler S., Veluwenkamp H. Conceptual engineering: For what matters // Mind. 2024. Vol. 133, issue 530. P. 400–427.

### References

1. Aberdein, A. (2023) Deep Disagreement in Mathematics. *Global Philosophy*. 33. Art. 1. pp. 1–27.
2. Mortensen, C. (n.d.) *Inconsistent mathematics*. [Online] Available from: <https://plato.stanford.edu/entries/mathematics-inconsistent> (Accessed: 10th June 2024).
3. Arana, A. & Burnett, H. (2023) *Mathematical Hygiene*. [Preprint].
4. Burgess, J.P. & De Toffoli, S. (2022) What is mathematical rigor? *AphEx*. 25. pp. 1–17.
5. Marfori, M.A., Bangu, S. & Ippoliti, E. (2023) The explanatory and heuristic power of mathematics. *Synthese*. 201. Art. 154.
6. Bolotovskiy, B.M. (1985) *Oliver Khevisayd* [Oliver Heaviside]. Moscow: Nauka.
7. Wilson, M. (2022). *Imitation of Rigor. An Alternative History of Analytic Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.
8. Crook, S.M., Davison, A.P. et al. (2020) Editorial: Reproducibility and rigor in computational neuroscience. *Frontiers in Neuroinformatics*. 14. Art. 23.
9. Sells, S.N., Bassing, S.B. et al. (2017) Increased scientific rigor will improve reliability of research and effectiveness of management. *The Journal of Wildlife Management*. 82(3). pp. 485–494.
10. Hofseth, L.J. (2018) Getting rigorous with scientific rigor. *Carcinogenesis*. 39(1). pp. 21–25.

11. Sansbury, B.E., Nystoriak, M.A. et al. (2022) Rigor me this: What are the basic criteria for a rigorous, transparent, and reproducible scientific study? *Frontiers in Cardiovascular Medicine*. 9. Art. 913612.
12. Cresswell, C. & Speelman, C.P. (2020) Does mathematics training lead to better logical thinking and reasoning? A cross-sectional assessment from students to professors. *PLOS One*. 15(7). Art. e0236153
13. Zacharopolous, G., Sella, F. & Kadosh, R.C. (2021) The impact of a lack of mathematical education on brain development and future attainment. *PNAS*. 118(24). Art. e2013155118.
14. Cantlon, J.F. (2020) The balance of rigor and reality in development neuroscience. *Neuroimage*. 216. Art. 116464.
15. Hamami, Y. (2019) Mathematical rigor and proof. *Review of Symbolic Logic*. pp. 1–41.
16. Hamami, Y. (2014) Mathematical rigor, proof gap and the validity of mathematical inference. *Philosophia Scientiae*. 18(1). pp. 7–26.
17. Avigad, J. (2021) Reliability of mathematical inference. *Synthese*. 198. pp. 7377–7399.
18. Lamberov, L.D. (2023) Strogost' dokazatel'stva: "seraya zona" mezhdu formalizatsiey i praktikoy [Rigor of proof: The "gray zone" between formalization and practice]. *Filosofiya nauki*. 1(96). pp. 128–133.
19. Buzzard, K. (2024) Grothendick's use of equality. *arXiv:2405.10387v1*. 16th May.
20. Rittberg, C.J., Tanswell, F.S. & Van Bendegem, J.P. (2020) Epistemic injustice in mathematics. *Synthese*. 197(9). pp. 3875–3904.
21. Andersen, L.E. (2023) Acceptable gaps in mathematical proofs. *Synthese*. 197(1). pp. 233–247.
22. Avigad, J. (2024) Mathematics and the formal turn. *American Mathematical Society Bulletin*. 61(2). pp. 225–240.
23. Fraser, M., Granville, A. et al. (2024) Will machines change mathematics? *American Mathematical Society Bulletin*. 61(2). pp. 201–202.
24. Granville, A. (2024) Proof in the time of machines. *American Mathematical Society Bulletin*. 61(2). pp. 317–329.
25. Detlefsen, M. & Arana, A. (2011) Purity of methods. *Philosopher Imprint*. 11(2). pp. 1–20.
26. Tselishchev, V.V. & Khlebalin, A.V. (2022) Kontseptual'naya i formal'naya strogost' matematicheskogo dokazatel'stva [Conceptual and formal rigor of mathematical proof]. *Filosofiya nauki*. 1(92). pp. 64–70.
27. Bazhanov, V.A. (2008) Proof as an Ethical Procedure. In: Agazzi, E. & Minazzi, F. (eds) *Science and Ethics. The Axiological Contexts of Science*. Bruxelles, Bern, Berlin, Frankfurt am Main, New York, Oxford, Wien: Peter Lang. pp. 185–193.
28. Bazhanov, V.A. (2022). Zaträgivaet li krizis vosproizvodimosti matematiku? [Is the reproducibility crisis affecting mathematics?]. *Filosofiya nauki i tekhniki*. 1. pp. 70–83.
29. De Toffoli, S. (2024) Proofs for a price: Tomorrow ultra-rigorous mathematical culture. *American Mathematical Society Bulletin*. 61(3). pp. 395–410.
30. Aberdein, A. & Ashton, Z. (2024) Argumentation in Mathematical Practice. In: Sriraman, B. (ed.) *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice*. Cham: Springer. pp. 2665–2687.
31. Cole, J.C. (2023) Some preliminary note on the objectivity of mathematics. *Topoi*. 42. pp. 235–245.
32. Hosack, J. (2019) All inclusive philosophy of mathematics. *American Mathematical Society Notices*. 66. pp. 1433–1437.
33. Bazhanov, V.A. (2021) Chislo i kantianskaya issledovatel'skaya programma v sovremennoy neyronauke [Number and the Kantian research program in modern neuroscience]. *Voprosy filosofii*. 7. pp. 50–60.
34. De Toffoli, S. (2023). Who is afraid of mathematical diagrams? *Philosophical Imprint*. 23(1). pp. 1–20.
35. De Toffoli, S. & Fontanari, C. (2023) Recalcitrant disagreement in mathematics: An "endless and depressing controversy" in the history of Italian algebraic geometry. *Global Philosophy*. 33. Art. 38. pp. 1–30.
36. Arnold, V.I. (1999) Mathematics and physics: mother and daughter or sisters. *Physics – Uspekhi*. 42(12). pp. 1205–1271.
37. Arnold, V.I. (2004) *Chto takoe matematika?* [What is mathematics?]. Moscow: MTSNMO.
38. Inglis, M. & Aberdein, A. (2016) Diversity in proof appraisal. In: Larvor, B. (ed.) *Mathematical Cultures*. Basel: Birkhauser. pp. 163–180.
39. Hacking, I. (2006) Making Up People. *London Review of Books*. 18(16) 17th August.

40. Hacking, I. (2024) *Istoricheskaya ontologiya* [Historical Ontology]. Moscow: Kanon+.
41. Hacking, I. (2020) *Pochemu voobshche sushchestvuet filosofiya matematiki?* [Why is there philosophy of mathematics at all?]. Moscow: Kanon+.
42. Kohler, S. & Veluwenkamp, H. (2024) Conceptual engineering: For what matters. *Mind*. 133(530). pp. 400–427.

***Сведения об авторе:***

**Бажанов В.А.** – заслуженный деятель науки РФ, доктор философских наук, профессор, заведующий кафедрой философии факультета гуманитарных наук и социальных технологий Ульяновского государственного университета (Ульяновск, Россия). E-mail: vbazhanov@yandex.ru, <https://staff.ulsu.ru/bazhanov/>

***Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.***

***Information about the author:***

**Vazhanov V.A.** – Honored Scientist of the Russian Federation, Dr. Sci. (Philosophy), professor, head of the Department of Philosophy, Faculty of Humanities and Social Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russian Federation). E-mail: vbazhanov@yandex.ru, <https://staff.ulsu.ru/bazhanov/>

***The author declares no conflicts of interests.***

*Статья поступила в редакцию 01.07.2024;  
одобрена после рецензирования 23.09.2024; принята к публикации 21.10.2024  
The article was submitted 01.07.2024;  
approved after reviewing 23.09.2024; accepted for publication 21.10.2024*