

Макет для изготовления в системе  $\text{\LaTeX}2\epsilon$

# ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Кафедра ПМ — ФМиИТ УлГУ — 2009

Государственное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
Ульяновский государственный университет

Российско-германский факультет  
Факультет математики и информационных технологий  
Кафедра «Прикладная математика»

Работа допущена к защите

Зав.кафедрой д.ф.-м.н. Бутов А. А.

(Ф. И. О)

\_\_\_\_\_

(подпись)

\_\_\_\_\_

(дата)

**ДИПЛОМНАЯ РАБОТА**

**Сравнительный анализ  
последовательных алгоритмов оценивания**

\_\_\_\_\_

(название темы)

**010501 – Прикладная математика и информатика**

\_\_\_\_\_

(код и наименование специальности)

Выполнил студент РГ-5м \_\_\_\_\_ Шледевитц  
(группа) (подпись) (Пахалина) Т.С.  
(Ф.И.О.)

Научный руководитель профессор \_\_\_\_\_ Семущин И. В.  
(должность) (подпись) (Ф.И.О.)

Рецензент доцент \_\_\_\_\_ Цыганова Ю. В.  
(должность) (подпись) (Ф.И.О.)

**Ульяновск 2009**

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 Безусловная оптимизация</b>	<b>8</b>
1.1 Функции для минимизации . . . . .	8
1.1.1 Название . . . . .	8
1.1.2 Название . . . . .	8
1.1.3 Таблица функций для минимизации . . . . .	8
1.2 Название . . . . .	11
1.2.1 Название . . . . .	11
1.2.2 Название . . . . .	11
1.3 Название . . . . .	11
1.3.1 Название . . . . .	11
1.3.2 Название . . . . .	12
1.4 Название . . . . .	12
1.4.1 Название . . . . .	12
1.4.2 Название . . . . .	12
<b>2 Название</b>	<b>13</b>
2.1 Название . . . . .	13
2.1.1 Название . . . . .	13
2.1.2 Название . . . . .	13
2.2 Название . . . . .	14
2.2.1 Название . . . . .	14
2.2.2 Название . . . . .	14
2.3 Название . . . . .	15
2.3.1 Название . . . . .	15
2.3.2 Название . . . . .	15
2.4 Название . . . . .	15
2.4.1 Название . . . . .	15

2.4.2	Название . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Название</b>	<b>17</b>
3.1	Название . . . . .	17
3.1.1	Название . . . . .	17
3.1.2	Название . . . . .	17
3.2	Название . . . . .	18
3.2.1	Название . . . . .	18
3.2.2	Название . . . . .	18
3.3	Название . . . . .	18
3.3.1	Название . . . . .	18
3.3.2	Название . . . . .	19
3.4	Название . . . . .	19
3.4.1	Название . . . . .	19
3.4.2	Название . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Название</b>	<b>20</b>
4.1	Название . . . . .	20
4.1.1	Название . . . . .	20
4.1.2	Название . . . . .	20
4.2	Название . . . . .	22
4.2.1	Название . . . . .	22
4.2.2	Название . . . . .	22
4.3	Название . . . . .	22
4.3.1	Название . . . . .	22
4.3.2	Название . . . . .	23
4.4	Название . . . . .	23
4.4.1	Название . . . . .	23
4.4.2	Название . . . . .	23
	<b>Заключение</b>	<b>24</b>
	<b>Список иллюстраций</b>	<b>26</b>
	<b>Список таблиц</b>	<b>27</b>
	<b>Список использованной литературы</b>	<b>28</b>

<b>А</b>	<b>Ортогональные преобразования</b>	<b>32</b>
A.1	Ортогональные матрицы и приложения . . . . .	32
A.2	Линейная задача наименьших квадратов . . . . .	34
A.3	Ортогональные матрицы в задаче о наименьших квадратах . .	35
A.4	Преобразование Хаусхолдера . . . . .	36
A.5	Шаг триангуляризации матрицы преобразованием Хаусхолдера	41
A.6	Решение треугольной системы $Rx = z$ и обращение матриц $R$ и $A$ . . . . .	42
A.7	Преобразование Гивенса . . . . .	45
A.8	Варианты заполнения матрицы $R$ . . . . .	51
A.9	Правосторонние ортогональные преобразования и их применение	51
A.10	Двусторонние ортогональные преобразования и их применение	52
<b>В</b>	<b>Название приложения В</b>	<b>56</b>
V.1	Название подраздела В.1 в приложении В . . . . .	56
V.1.1	Название пункта В.1.1 в приложении В, подразд. В.1 .	56
V.1.2	Название . . . . .	56
V.2	Название подраздела в приложении 2 . . . . .	56
V.2.1	Название . . . . .	56
V.2.2	Название . . . . .	56

# Введение

Здесь пишете ...

Задача Введения — обосновать актуальность темы данной работы, т. е. объяснить:

- ◇ Зачем написана эта работа ?
- ◇ Для кого написана эта работа ?
- ◇ Как структурно организован текст работы ?
- ◇ Какой материал помещен в основные структурные единицы работы ?
- ◇ Чем подкреплена данная работа: эксперименты, расчеты... ?

Еще вариант оформления списков:

- ✓ Зачем написана эта работа ?
- ✓ Для кого написана эта работа ?
- ✓ Как структурно организован текст работы ?
- ✓ Какой материал помещен в основные структурные единицы работы ?
- ✓ Чем подкреплена данная работа: эксперименты, расчеты... ?

Еще вариант оформления списков:

- ▣▶ Зачем написана эта работа ?
- ▣▶ Для кого написана эта работа ?
- ▣▶ Как структурно организован текст работы ?
- ▣▶ Какой материал помещен в основные структурные единицы работы ?
- ▣▶ Чем подкреплена данная работа: эксперименты, расчеты... ?

Еще вариант оформления списков:

- Зачем написана эта работа ?
- Для кого написана эта работа ?
- Как структурно организован текст работы ?
- Какой материал помещен в основные структурные единицы работы ?
- Чем подкреплена данная работа: эксперименты, расчеты... ?

Еще вариант оформления списков:

- Зачем написана эта работа ?
- Для кого написана эта работа ?
- Как структурно организован текст работы ?
- Какой материал помещен в основные структурные единицы работы ?
- Чем подкреплена данная работа: эксперименты, расчеты... ?

*Вариантов оформления списков очень много ... Еще примеры см. в Заключении.*

### **Вложенные списки также возможны:**

- Зачем написана эта работа ?
  - ☞ Для кого написана эта работа ?
  - ☞ Как структурно организован текст работы ?
  - ☞ Какой материал помещен в основные структурные единицы работы ?
  - ☞ Чем подкреплена данная работа: эксперименты, расчеты... ?
- Для кого написана эта работа ?
  - ✦ Для кого написана эта работа ?
  - ✦ Как структурно организован текст работы ?
  - ✦ Какой материал помещен в основные структурные единицы работы ?

- ✎ Чем подкреплена данная работа: эксперименты, расчеты... ?
- Как структурно организован текст работы ?
  - ⇒ Для кого написана эта работа ?
  - ⇒ Как структурно организован текст работы ?
  - ⇒ Какой материал помещен в основные структурные единицы работы ?
  - ⇒ Чем подкреплена данная работа: эксперименты, расчеты... ?
- Какой материал помещен в основные структурные единицы работы ?
  - ★ Для кого написана эта работа ?
  - ★ Как структурно организован текст работы ?
  - ★ Какой материал помещен в основные структурные единицы работы ?
  - ★ Чем подкреплена данная работа: эксперименты, расчеты... ?
- Чем подкреплена данная работа: эксперименты, расчеты... ?
  - ✎ Для кого написана эта работа ?
  - ✎ Как структурно организован текст работы ?
  - ✎ Какой материал помещен в основные структурные единицы работы ?
  - ✎ Чем подкреплена данная работа: эксперименты, расчеты... ?

**Однако слишком «разукрашивать» свою дипломную работу не стоит.** Стиль оформления должен быть не рекламный, а достаточно строгий, академический. Желательно остановиться на одном-единственном варианте оформления нумерованных списков, например, на таком:

- современный уровень банковских услуг;
- развитие технической и информационной базы банков и их клиентов;
- технология работы электронных банковских продуктов;
- безопасность проведения расчетов;
- возможности и экономическая целесообразность внедрения электронных розничных услуг в коммерческих банках.



# Глава 1

## Безусловная оптимизация

Здесь пишите ...

Как показано в гл. 1, подразд. 1.1, пункт 1.1.2 ...

### 1.1 Функции для минимизации

#### 1.1.1 Название

Здесь пишите ..., что в данном пункте 1.1.1

##### Название

Здесь пишите ..., что в данном подпункте

##### Название

Здесь пишите ..., что в данном подпункте

#### 1.1.2 Название

Здесь пишите ..., что в данном пункте 1.1.2

##### Название

Здесь пишите ..., что в данном подпункте

##### Название

Здесь пишите ..., что в данном подпункте

#### 1.1.3 Таблица функций для минимизации

Таблица 1.1. Функции для безусловной минимизации

№ П/П	Функция $f(x)$	Начальный вектор $x_0$	Точка минимума $x^*$	Значение $f(x^*)$
1	$(1 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2$	$[-2; 3; -4; 5]$	$[1; 1; 1; 1]$	0
2	$(x_1 - 1)^2 + 10(x_2 - 1)^2 + 100(x_3 - 1)^2 + 1000(x_4 - 1)^2$	$[-1; -2; -3; -4]$	$[1; 1; 1; 1]$	0
3	$100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$	$[3; 4]$	$[1; 1]$	0
4	$100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$	$[-1, 2; 1]$	$[1; 1]$	0
5	$(x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$	$[3; -1; 0; 1]$	$[0; 0; 0; 0]$	0
6	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 16x_1^2x_2^2 + 8x_2^2x_3^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2$	$[1; 2; 3; 4]$	$[0; 0; 0; 0]$	0
7	$10(x_1 - \sin x_2)^2 + 0, 1x_2^2$	$[1, 2; 3]$	$[0; 0]$	0
8	$(1, 5 - x_1(1 - x_2))^2 + (2, 25 - x_1(1 - x_2^2))^2 + (2, 625 - x_1(1 - x_2^3))^2$	$[0; 0]$	$[3; 0, 5]$	0
9	$100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^3 + 10, 1((x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2) + 19, 8(x_2 - 1)(x_4 - 1)$	$[-3; -1; -3; -1]$	$[1; 1; 1; 1]$	0
10	$-x_1 - 2x_3 - x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$[0; 0; 0]$	$[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}]$	$\frac{9}{12}$
11	$x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$	$[-1; 3]$	$[1; 1]$	-1
12	$2x_1x_2x_3 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 + 4x_3$	$[-3; -3; -3]$	$[1; 2; 0]$	-5
13	$x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$	$[0; 0]$	$[1; 1], [-1; -1]$	-2
14	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3$	$[2; 2; 2]$	$[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1]$	$-\frac{4}{3}$

продолжение таблицы на следующей странице

продолжение таблицы с предыдущей страницы				
№ П/П	Функция $f(x)$	Начальный вектор $x_0$	Точка минимума $x^*$	Значение $f(x^*)$
15	$3x_1 - x_1 + x_2^3 - 3x_2^2 - 1$	$[-1; -1]$	$[\frac{1}{3}; 2]$	$-\frac{47}{9}$
16	$6x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$	$[-1; -1]$	$[-2; -1]$	$-6$
17	$x_1 + x_2^2 + ((x_1 + x_2 - 10)/3)^2$	$[-1; -1]$	$[5; 0, 5]$	$7, 5$
18	$(x_1 - 1)^2 + 100(x_1 - x_2)^2$	$[3; 4]$	$[1; 1]$	$0$
19	$5(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$	$[0; 0]$	$[3; 5]$	$0$
20	$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$	$[1; 2]$	$[0; 0]$	$0$
21	$9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2$	$[0; 3]$	$[5; 4]$	$-481$
22	$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$	$[1; 1]$	$[\frac{1}{3}; \frac{4}{3}]$	$-\frac{14}{3}$
23	$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2$	$[3; 5]$	$[1; 0]$	$-1$
24	$5x_1 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 16x_1 - 12x_2$	$[1; 1]$	$[-4; 14]$	$-152$
25	$2x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 11x_1 - 8x_2$	$[-3; -5]$	$[2; 3]$	$-23$
26	$x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$	$[1; 1]$	$[-1; 1, 5]$	$-1, 25$
27	$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$	$[1; 1]$	$[0; 0]$	$0$
28	$x_1^2 + 16x_2^2$	$[2; 2]$	$[0; 0]$	$0$
29	$(1 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2$	$[-5; -8]$	$[1; 1]$	$0$
30	$x_1^2 + 4x_2^2 + 1$	$[3; 5]$	$[0; 0]$	$1$

## 1.2 Название

Здесь пишите ...

### 1.2.1 Название

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

### 1.2.2 Название

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

## 1.3 Название

Здесь пишите ...

### 1.3.1 Название

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**1.3.2 Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**1.4 Название**

Здесь пишите ...

**1.4.1 Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**1.4.2 Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

# Глава 2

## Название

Здесь пишите ...

Как показано в гл. 2, подразд. 2.1, пункт 2.1.2 ...

### 2.1 Название

Здесь пишите ...

#### 2.1.1 Название

Здесь пишите ...

##### Название

Здесь пишите ...

##### Название

Здесь пишите ...

#### 2.1.2 Название

Здесь пишите ...

##### Название

Здесь пишите ...

##### Название

Здесь пишите ...

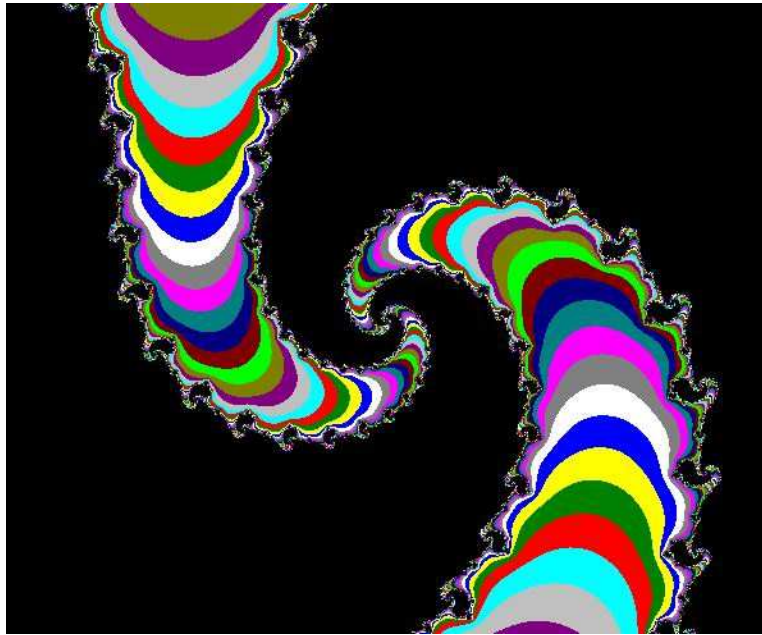


Рис. 2.1. Множество Жюлиа.

## 2.2 Название

Здесь пишите ...

### 2.2.1 Название

Здесь пишите ...

#### Название

Здесь пишите ...

#### Название

Здесь пишите ...

### 2.2.2 Название

Здесь пишите ...

#### Название

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**2.3 Название**

Здесь пишите ...

**2.3.1 Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**2.3.2 Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**2.4 Название**

Здесь пишите ...

**2.4.1 Название**

Здесь пишите ...



**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**2.4.2 Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

# Глава 3

## Название

Здесь пишите ...

### 3.1 Название

Здесь пишите ...

#### 3.1.1 Название

Здесь пишите ...

#### Название

Здесь пишите ...

#### Название

Здесь пишите ...

#### 3.1.2 Название

Здесь пишите ...

#### Название

Здесь пишите ...

#### Название

Здесь пишите ...

## 3.2 Название

Здесь пишете ...

### 3.2.1 Название

Здесь пишете ...

**Название**

Здесь пишете ...

**Название**

Здесь пишете ...

### 3.2.2 Название

Здесь пишете ...

**Название**

Здесь пишете ...

**Название**

Здесь пишете ...

## 3.3 Название

Здесь пишете ...

### 3.3.1 Название

Здесь пишете ...

**Название**

Здесь пишете ...

**Название**

Здесь пишите ...

**3.3.2 Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**3.4 Название**

Здесь пишите ...

**3.4.1 Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**3.4.2 Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

# Глава 4

## Название

Здесь пишите ...

### 4.1 Название

Здесь пишите ...

#### 4.1.1 Название

Здесь пишите ...

#### Название

Здесь пишите ...

#### Название

Здесь пишите ...

#### 4.1.2 Название

Здесь пишите ...

#### Название

Здесь пишите ...

#### Название

Здесь пишите ...

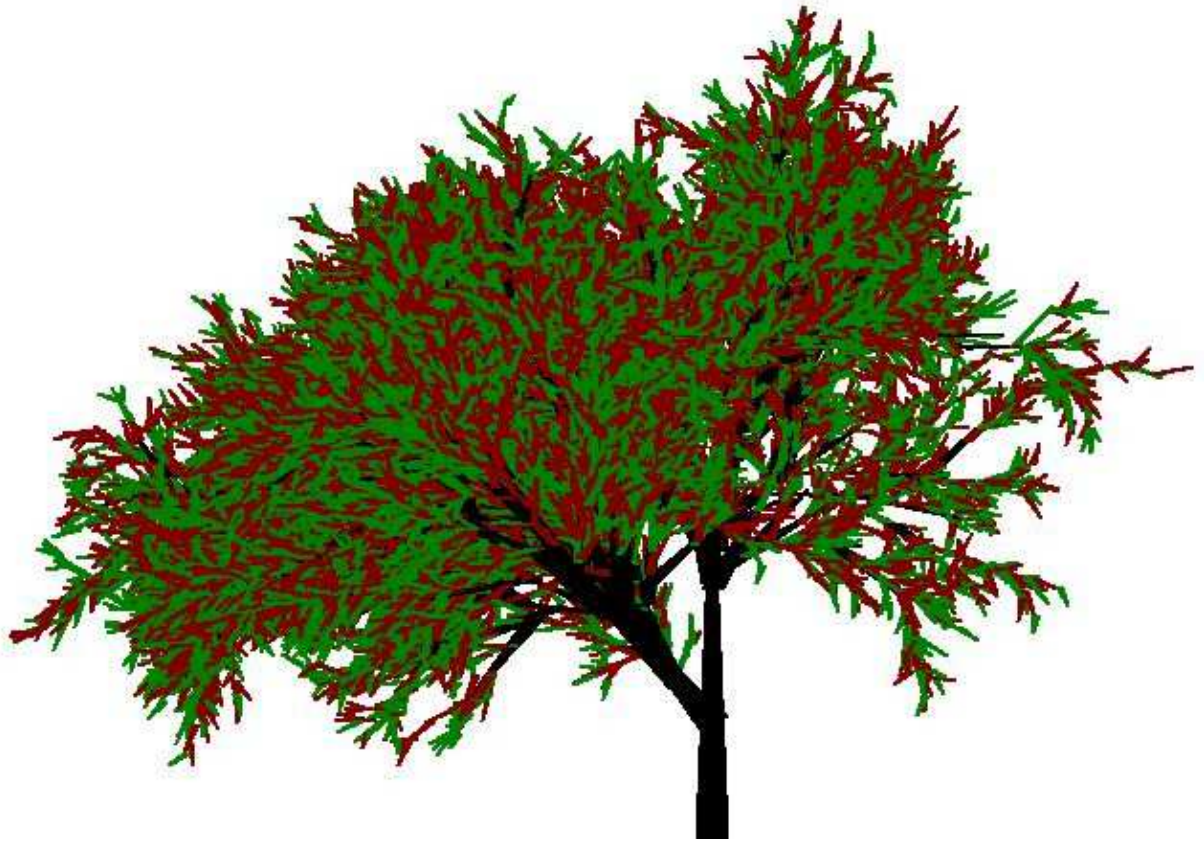


Рис. 4.1. Фрактальное дерево.

## 4.2 Название

Здесь пишете ...

### 4.2.1 Название

Здесь пишете ...

**Название**

Здесь пишете ...

**Название**

Здесь пишете ...

### 4.2.2 Название

Здесь пишете ...

**Название**

Здесь пишете ...

**Название**

Здесь пишете ...

## 4.3 Название

Здесь пишете ...

### 4.3.1 Название

Здесь пишете ...

**Название**

Здесь пишете ...

**Название**

Здесь пишите ...

**4.3.2 Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**4.4 Название**

Здесь пишите ...

**4.4.1 Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**4.4.2 Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...

**Название**

Здесь пишите ...



# Заключение

Здесь пишете . . .

В данной работе освещены аспекты систем электронных расчетов в современном коммерческом банке со следующих точек зрения:

- современный уровень банковских услуг;
- развитие технической и информационной базы банков и их клиентов;
- технология работы электронных банковских продуктов;
- безопасность проведения расчетов;
- возможности и экономическая целесообразность внедрения электронных розничных услуг в коммерческих банках.

Это, конечно, ПРИМЕР. — Заключение не должно пересказывать основной текст, — этого делать не надо.

В Заключении надо:

- перечислить, какие задачи из числа задач этой работы, сформулированных в разделе «Постановка задачи», вами решены,
- сформулировать, какие выводы из этих результатов вами найдены и обоснованы в основном тексте работы.

Еще один пример оформления списков (нумерованный список):

1. Перечислить, какие задачи из числа задач этой работы, сформулированных в разделе «Постановка задачи», вами решены.
2. Сформулировать, какие выводы из этих результатов вами найдены и обоснованы в основном тексте работы.

Здесь пишете . . .

В данной работе освещены аспекты систем электронных расчетов в современном коммерческом банке со следующих точек зрения:

- современный уровень банковских услуг;
- развитие технической и информационной базы банков и их клиентов;
- технология работы электронных банковских продуктов;
- безопасность проведения расчетов;
- возможности и экономическая целесообразность внедрения электронных розничных услуг в коммерческих банках.

Это, конечно, ПРИМЕР. — Заключение не должно пересказывать основной текст, — этого делать не надо.

В Заключении надо:

- перечислить, какие задачи из числа задач этой работы, сформулированных в разделе «Постановка задачи», вами решены,
- сформулировать, какие выводы из этих результатов вами найдены и обоснованы в основном тексте работы.

Еще один пример оформления списков (нумерованный список):

1. Перечислить, какие задачи из числа задач этой работы, сформулированных в разделе «Постановка задачи», вами решены.
2. Сформулировать, какие выводы из этих результатов вами найдены и обоснованы в основном тексте работы.

# Список иллюстраций

2.1	Множество Жюлиа. . . . .	14
4.1	Фрактальное дерево. . . . .	21
A.1	Алгебраически эквивалентные задачи, решаемые методом наименьших квадратов значений невязки $v$ или среднего квадрата погрешности $e$ : (a) — оптимальное моделирование неизвестной системы по экспериментальным условиям $A$ и данным $z$ ; (b) — оптимальное оценивание неизвестного вектора по наблюдениям $Ax$ в присутствии случайных помех $v$ с характеристиками $\mathbf{E}\{v\} = 0$ и $\mathbf{E}\{vv^T\} = I$ . . . . .	33
A.2	Геометрия преобразования Хаусхолдера. Задача 1 (прямая): даны векторы $u$ и $y$ , найти вектор $y_r$ , отраженный от гиперплоскости $U_\perp$ . . . . .	37
A.3	Геометрия преобразования Хаусхолдера. Задача 2 (обратная): даны векторы $y$ и $y_r$ , найти вектор $u$ , задающий отражающую гиперплоскость $U_\perp$ ; здесь $y_r = se_1 = [s \mid 0 \cdots 0]^T$ . . . . .	39
A.4	Схематическое представление возможных случаев применения теоремы A.1 к матрице $A(m, n)$ ; (a) недоопределенная система: $k = m - 1 \leq n$ ; (b) определенная система: $k = n - 1, m = n$ ; (c) переопределенная система: $k = n < m$ ; (d) $k < n < m$ . . . . .	40
A.5	Сохранение преобразования $T$ и вычисление вектора $y = Tz$ , $\forall y \in \mathbb{R}^m$ . . . . .	46
A.6	Вычисление матрицы $A^{-1}$ после сохранения преобразования $T$ . . . . .	46
A.7	Геометрия вращений . . . . .	46

А.8 Преобразование Гивенса: (а) столбцово ориентированная схема вычисления матрицы  $PA$ , где  $P = P^{(j)}$  при  $j = \min(m - 1, n)$  (нижняя матрица слева); (б) вычисление координаты  $r$  вектора  $(a, b)^T$ , повернутого до совмещения с первой осью, а также косинуса и синуса угла поворота и рабочего признака  $\zeta$ ; (в) строчно ориентированная схема вычисления матрицы  $PA$  (верхняя матрица слева); (г) восстановление косинуса и синуса угла поворота из признака  $\zeta$ ; (д) получение вектора  $y$  теми преобразованиями  $P_{j,i}$  произвольного вектора  $z \in \mathbb{R}^m$ , которые сохранены в рабочих признаках  $\zeta_{j,i}$  и восстанавливаются из них; (е) вследствие (б), векторы 1, 2, 3 и 4 поворачиваются к положительному направлению первой координатной оси, а векторы 5, 6, 7 и 8 поворачиваются к отрицательному направлению этой оси. . . . .

50

# Список таблиц

1.1	Таблица функций для минимизации . . . . .	9
A.1	Эффективное обращение верхнетреугольной матрицы: $U := R^{-1}$ . Реализуются формулы (A.31), (A.32) и (A.33). Верхнетреугольные матрицы $R$ и $U$ хранятся как векторы размерности $N(N + 1)/2$ . Если нужно, $U$ может замещать $R$ . . . . .	45

## Список использованной литературы

1. Андриевский, Б. Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. — СПб. : Наука, 2000.
2. Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. — М. : Наука, 1965.
3. Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. — М. : Наука, 1965.
4. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1974.
5. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987.
6. Медич, Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. — М. : Энергия, 1973.
7. Острем, К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления / К. Ю. Острем. — М. : Мир, 1973.
8. Пугачев, В. С. Основы стохастической теории автоматических систем / В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, Л. Г. Евланов. — М. : Наука, 1980.
9. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. — М. : Наука, 1979.
10. Соломенцев, Е. Д. Функции комплексного переменного и их применения / Е. Д. Соломенцев. — М. : Высшая школа, 1988.
11. Андриевский, Б. Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. — СПб. : Наука, 2000.

12. Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. — М. : Наука, 1965.
13. Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. — М. : Наука, 1965.
14. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1974.
15. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987.
16. Медич, Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. — М. : Энергия, 1973.
17. Острем, К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления / К. Ю. Острем. — М. : Мир, 1973.
18. Пугачев, В. С. Основы стохастической теории автоматических систем / В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, Л. Г. Евланов. — М. : Наука, 1980.
19. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. — М. : Наука, 1979.
20. Соломенцев, Е. Д. Функции комплексного переменного и их применения / Е. Д. Соломенцев. — М. : Высшая школа, 1988.
21. Андриевский, Б. Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. — СПб. : Наука, 2000.
22. Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. — М. : Наука, 1965.
23. Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. — М. : Наука, 1965.
24. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1974.
25. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987.

26. Медич, Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. — М. : Энергия, 1973.
27. Острем, К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления / К. Ю. Острем. — М. : Мир, 1973.
28. Пугачев, В. С. Основы стохастической теории автоматических систем / В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, Л. Г. Евланов. — М. : Наука, 1980.
29. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. — М. : Наука, 1979.
30. Соломенцев, Е. Д. Функции комплексного переменного и их применения / Е. Д. Соломенцев. — М. : Высшая школа, 1988.
31. Андриевский, Б. Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. — СПб. : Наука, 2000.
32. Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. — М. : Наука, 1965.
33. Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. — М. : Наука, 1965.
34. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1974.
35. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987.
36. Медич, Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. — М. : Энергия, 1973.
37. Острем, К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления / К. Ю. Острем. — М. : Мир, 1973.
38. Пугачев, В. С. Основы стохастической теории автоматических систем / В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, Л. Г. Евланов. — М. : Наука, 1980.
39. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. — М. : Наука, 1979.



40. Соломенцев, Е. Д. Функции комплексного переменного и их применения / Е. Д. Соломенцев. — М. : Высшая школа, 1988.

# Приложение А

## Ортогональные преобразования

### А.1 Ортогональные матрицы и приложения

В этом разделе напомним определение и некоторые свойства ортогональных матриц, полезные для дальнейшего.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** Матрица  $T$ , имеющая размер  $n \times n$ , т.е.  $T(n, n)$ , есть *ортогональная* матрица, если и только если  $TT^T = I$ .

**Свойство А.** Если  $T_1$  и  $T_2$  суть две ортогональные матрицы, то их произведение  $T_1T_2$  есть тоже ортогональная матрица.

**Свойство В.**  $T^{-1} = T^T$  и  $T^TT = I$ .

**Свойство С.** Ортогональное преобразование сохраняет скалярное произведение векторов, т.е.  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : y^Tx \triangleq (x, y) = (Tx, Ty)$ , в частности, оно сохраняет (евклидову) норму вектора:  $\|Ty\| = \|y\|$ .

**Свойство D.** Если  $v$  есть вектор случайных переменных с математическим ожиданием  $\mathbf{E}\{v\} = 0$  и ковариацией  $\mathbf{E}\{vv^T\} = I$ , то теми же характеристиками обладает вектор  $\bar{v} = Tv$ , т.е.

$$\mathbf{E}\{\bar{v}\} = 0, \quad \mathbf{E}\{\bar{v}\bar{v}^T\} = I.$$

Хотя это свойство легко проверяется, немного удивительно, что компоненты преобразованного вектора остаются взаимно некоррелированными.

Свойства С и D играют существенную роль в квадратно-корневых алгоритмах решения прикладных задач оптимального моделирования и оптимального оценивания методом наименьших квадратов (рис. А.1).

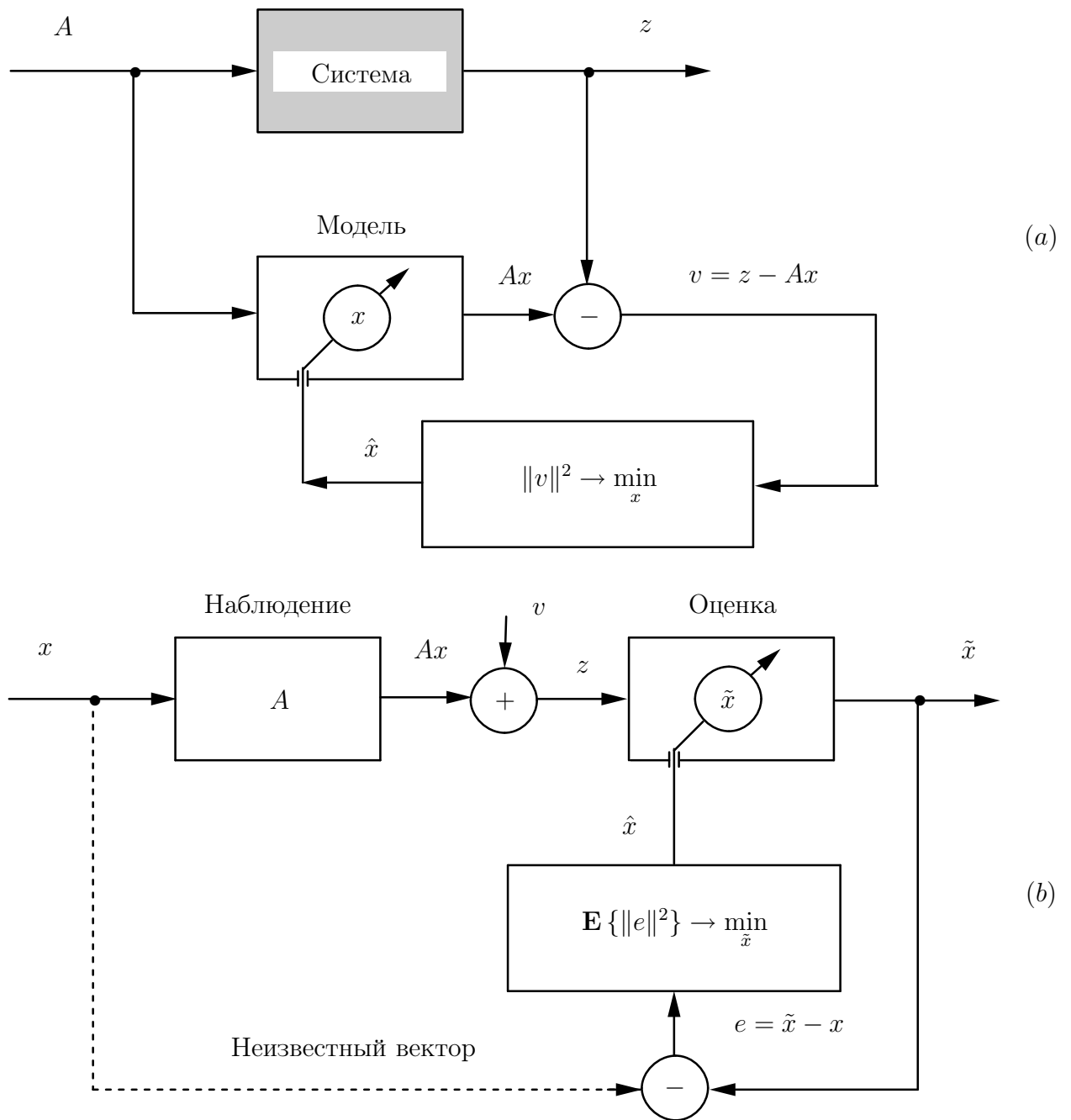


Рис. А.1. Алгебраически эквивалентные задачи, решаемые методом наименьших квадратов значений невязки  $v$  или среднего квадрата погрешности  $e$ : (a) — оптимальное моделирование неизвестной системы по экспериментальным условиям  $A$  и данным  $z$ ; (b) — оптимальное оценивание неизвестного вектора по наблюдениям  $Ax$  в присутствии случайных помех  $v$  с характеристиками  $\mathbf{E}\{v\} = 0$  и  $\mathbf{E}\{vv^T\} = I$

## А.2 Линейная задача наименьших квадратов

Линейная задача наименьших квадратов (см. рис. А.1) ставится следующим образом.

Дано *линейное* уравнение

$$z = Ax + v, \quad (\text{А.1})$$

в котором известны вектор  $z \in \mathbb{R}^m$  и  $(m \times n)$ -матрица  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , т. е.  $A = A(m, n)$ . Разностный вектор  $v \triangleq z - Ax$ , называемый *невязкой*, зависит от переменного вектора  $x \in \mathbb{R}^n$ . Требуется найти значение  $\hat{x}$  вектора  $x$ , минимизирующее *квадратический* критерий качества

$$J(x) = (z - Ax)^T(z - Ax) = \|v\|^2 \rightarrow \min. \quad (\text{А.2})$$

Если ни при каком  $x$  невязка  $v$  не может быть обращена в  $\mathbf{0}$  — нулевой вектор, то система  $Ax = z$  — несовместная, в противном случае совместная, т. е. критерий (А.2) охватывает оба случая. Однако сам *метод наименьших квадратов* (МНК), выраженный критерием (А.2), создан Лежандром в 1805 году как алгебраическая процедура именно для несовместных систем и подтвержден как статистическая процедура Гауссом в 1809 году [?]. МНК как алгебраическая процедура проиллюстрирован выше с помощью рис. А.1(а), а как статистическая процедура — с помощью рис. А.1(б). Замечательно, что обе процедуры имеют одинаковые решения, т. е. алгебраически эти решения эквивалентны и при  $\mathbf{E}\{v\} = 0$  и  $\mathbf{E}\{vv^T\} = I$  (см. рис. А.1(б)) совпадают, поэтому можно говорить о едином МНК-решении  $\hat{x}$ .

МНК-решение  $\hat{x}$  всегда существует как решение *нормальных уравнений*

$$A^T A \hat{x} = A^T z, \quad (\text{А.3})$$

выражается формулой

$$\hat{x} = A^+ z + (I - A^+ A) y \quad (\text{А.4})$$

через произвольный вектор  $y \in \mathbb{R}^n$ , где  $A^+$  — *псевдообратная матрица* для матрицы  $A$ , и единственно тогда и только тогда, когда  $A^+ A = I$ , что равносильно условию, что только нулевой вектор составляет ядро (нуль-пространство) матрицы  $A$ , т. е. при  $\text{rank } A = n$ .

Условие  $\text{rank } A = n$ , называемое *условием полного столбцового ранга* матрицы  $A$ , обуславливает случай  $m \geq n$ , что при  $m > n$  означает переопределенную систему полного ранга в (А.1). Этот типичный для практики

случай ниже и рассматривается, при этом из (А.3), (А.4) следует  $\hat{x} = A^+z$  и  $A^+ = (A^T A)^{-1}A^T$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ А.1.** Слагаемое  $\hat{x}_0 \triangleq A^+z$  в (А.4) есть единственное МНК-решение с минимальной нормой, называемое *нормальным псевдорешением*. Оно ортогонально второму слагаемому в (А.4), т.е.  $A^+z \perp (I - A^+A)y$ , и лежит в пространстве строк матрицы  $A$ , т.е.  $\hat{x}_0 \in \mathcal{R}(A^T)$ .

Таким образом, типичный для практики случай имеет формальное решение  $\hat{x} = \hat{x}_0 = (A^T A)^{-1}A^T z$ , и вычислительная задача наименьших квадратов заключается в его эффективном отыскании.

### А.3 Ортогональные матрицы в задаче о наименьших квадратах

В рассматриваемой задаче о наименьших квадратах

$$J(x) = \|z - Ax\|^2, \quad A(m, n), \quad m \geq n, \quad \text{rank } A = n. \quad (\text{А.5})$$

Пусть  $T, T(m, m)$ , есть матрица некоторого ортогонального преобразования. В силу свойства С (см. разд. А.1) запишем

$$J(x) = \|T(z - Ax)\|^2 = \|(Tz) - (TA)x\|^2. \quad (\text{А.6})$$

При таком представлении видно, что минимум критерия  $J(x)$ , равный  $J(\hat{x})$ , не зависит от  $T$ . Этим фактом можно воспользоваться, т.е. матрицу  $T$  можно выбрать так, что  $(TA)$  приобретает привлекательную для вычислений форму. Действительно, в разд. А.4 и А.7 мы покажем, как можно выбрать  $T$ , чтобы преобразованная матрица имела вид

$$TA = \left[ \begin{array}{c} R \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{array}{l} \} n \\ \} m - n \end{array}, \quad (\text{А.7})$$

с верхнетреугольным блоком  $R$ ,  $\text{rank } R = n$ .

Если соответственно этому вектор  $Tz$  разбить на блоки, т.е. записать

$$Tz = \left[ \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \} n \\ \} m - n \end{array}, \quad (\text{А.8})$$

то  $J(x)$  от (А.6) приводится к виду

$$J(x) = \|z_1 - Rx\|^2 + \|z_2\|^2. \quad (\text{А.9})$$

Приведение критерия наименьших квадратов к виду (А.9) позволяет видеть, что искомый вектор  $\hat{x}$ , минимизирующий этот критерий, должен удовлетворять уравнению

$$R\hat{x} = z_1, \quad (\text{А.10})$$

которое легко решается обратной подстановкой (см. разд. А.6), и кроме того,

$$\min J(x) = J(\hat{x}) = \|z_2\|^2. \quad (\text{А.11})$$

В вычислительном отношении эти результаты гораздо более элегантны, чем неразумная трата сил на решение нормальных уравнений (А.3). Но важнее всего то, что решение, использующее ортогональные преобразования (соотношения (А.7), (А.8), (А.10) и (А.11)), менее чувствительно к погрешностям, вызванным ошибками округления в компьютере. Это видно хотя бы из того, что выражение (А.7) влечет равенство

$$R^T R = (TA)^T(TA) = A^T A,$$

которое означает, что  $R$  является квадратным корнем из матрицы  $(A^T A)$  системы нормальных уравнений (А.3). Следовательно, при решении системы (А.10) вдвое более эффективно используется разрядная сетка компьютера, чем при решении системы (А.3)<sup>1</sup>.

## А.4 Преобразование Хаусхолдера

Преобразования Хаусхолдера суть матричные представления, которые соответствуют геометрическому понятию отражения. Пусть задан некоторый ненулевой вектор  $u$ , который мы называем *направляющим вектором*. Подпространство, ортогональное ему, есть гиперплоскость  $U_\perp$ . Если взять произвольный вектор  $y$ , то можно отразить его от  $U_\perp$ , в точности соблюдая законы обычного оптического отражения от плоского зеркала (рис. А.2).

Обозначим отраженный вектор  $y_r$ . Поскольку положение гиперплоскости  $U_\perp$  не зависит от длины направляющего вектора, пронормируем его, т. е. образуем орт  $\hat{u} = u/\|u\|$ . Проекция  $(y \mid u)$  вектора  $y$  на прямую, задаваемую направлением  $u$ , равна  $(y^T \hat{u})\hat{u}$ . Следовательно,

$$y = (y \mid u) + v, \quad v \perp u, \quad v \in U_\perp. \quad (\text{А.12})$$

<sup>1</sup> Представление в компьютере квадрата  $a^2$  любого действительного числа  $a$  требует удвоенной разрядности мантиссы, т. е. счет по уравнению (А.10) равносильен счету с удвоенной разрядностью мантиссы чисел по уравнению (А.3).

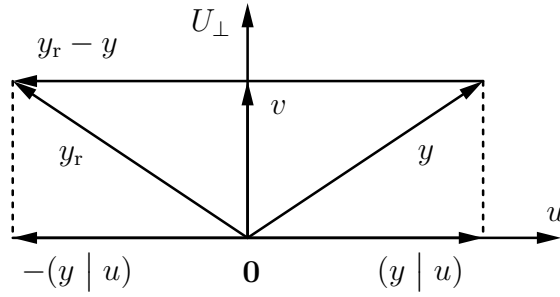


Рис. А.2. Геометрия преобразования Хаусхолдера. Задача 1 (прямая): даны векторы  $u$  и  $y$ , найти вектор  $y_r$ , отраженный от гиперплоскости  $U_\perp$

Отраженный вектор  $y_r$ , как видно из рис. А.2, имеет разложение

$$y_r = -(y | u) + v, \quad v \perp u, \quad v \in U_\perp \quad (\text{A.13})$$

с той же составляющей  $v$ , которая ортогональна вектору  $u$ , но с проекцией  $-(y | u)$ , которая (в силу знака  $-$ ) направлена противоположно проекции  $(y | \hat{u})$  вектора  $y$  на направление  $u$ . Исключая  $v$  из (А.12) и (А.13), находим

$$y_r = y - 2(y | u) = (I - \beta u u^T) y = T_u y, \quad (\text{A.14})$$

где  $\beta \triangleq 2/\|u\|^2 = 2/u^T u$ . Матрица  $T_u \triangleq (I - \beta u u^T)$ , в вычислениях явно не участвующая, имеет фундаментальное значение для приложений в силу своих замечательных свойств.

**Свойство 1.**  $T_u = T_u^T$ , т.е.  $T_u$  — симметрическая матрица.

**Свойство 2.**  $T_u^2 = I$ , т.е.  $T_u$  — идемпотентная матрица. Это легко продемонстрировать алгебраически разложением матрицы  $T_u^2$  или же геометрически по рис. А.2 как двукратное отражение вектора  $y$  относительно  $U_\perp$ .

**Свойство 3.** Если  $u(j) = 0$ , то  $(T_u y)(j) = y(j)$ , т.е. если  $j$ -я компонента вектора  $u$  — нулевая, то  $T_u$  оставляет  $j$ -ю компоненту вектора  $y$  неизменной.

**Свойство 4.** Если  $u \perp y$ , то  $T_u y = y$ .

**Свойство 5.**

$$T_u y = y - \gamma u, \quad \gamma \triangleq 2y^T u / u^T u = \beta y^T u. \quad (\text{A.15})$$

Свойство 5 важно с практической точки зрения. Формирование матрицы  $T_u$  в качестве множителя для  $y$  потребовало бы на порядок больше вычислений, чем того требует прямое вычисление  $T_u y$  по свойству 5. Это также означает, что не нужно тратить память для хранения  $T_u$ , что наиболее существенно проявляется при больших  $m$ .

**Триангуляризация матрицы преобразованиями Хаусхолдера.** Обратимся к основному применению ортогональных преобразований. Для этого решим задачу, обратную к той, что рассмотрена выше, а именно: дан вектор  $y$  и дано желаемое расположение отраженного вектора  $y_r$ , — найти направление  $u$  такое, что  $T_u y = (s, 0, \dots, 0)^T$  (рис. А.3). Из свойства С, разд. А.1, норма (евклидова длина) вектора  $y$  не изменяется при ортогональном преобразовании, следовательно, определим ее как

$$\sigma \triangleq \|T_u y\| = |s| = (y^T y)^{1/2}. \quad (\text{A.16})$$

Направление  $u$  может быть получено из свойства 5 (уравнение (A.15)), т. е.

$$u = \text{const} \cdot (y - s e_1). \quad (\text{A.17})$$

Этот результат приводит к следующему свойству.

**Свойство 6.** Пусть  $s = -\text{sgn} [y(1)]\sigma$ , где  $\text{sgn} [\cdot]$  — функция знака,

$$\text{sgn} [x] = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

и элементы вектора  $u$  определены выражением (A.17), т. е.  $u(1) = y(1) - s$ ,  $u(i) = y(i)$ ,  $i > 1$ . Тогда  $T_u y = s e_1$  и  $\beta \triangleq 2/u^T u = -1/(s u(1))$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ А.2.** Геометрический смысл выражения (A.17) ясен из рис. А.3, где видно, что вектор  $y_r$  ортогонален гиперплоскости  $U_\perp$  и параллелен вектору  $u$ .

Непосредственное вычисление  $u^T u$  показывает, что  $u^T u = -2s u(1)$ , при этом знак для  $s$  выбран противоположно знаку первого элемента  $y(1)$ , т. е. так, чтобы максимизировать  $|u(1)|$  и тем уменьшить относительную погрешность вычисления разности  $u(1) = y(1) - s$ . Если свойство 6 применить к матрице  $A$ , взяв в качестве  $y$  ее первый столбец, то это даст первый шаг, который послужит основой приведения матрицы к верхнетреугольному виду. Повторение таких действий шаг за шагом позволит осуществлять верхнюю триангуляризацию любой заданной матрицы  $A$ .



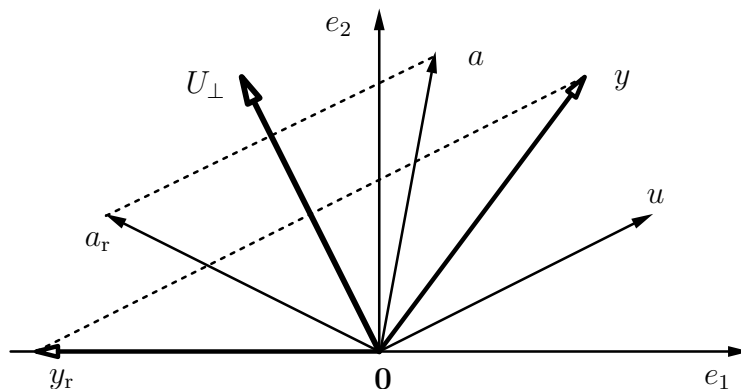


Рис. А.3. Геометрия преобразования Хаусхолдера. Задача 2 (обратная): даны векторы  $y$  и  $y_r$ , найти вектор  $u$ , задающий отражающую гиперплоскость  $U_\perp$ ; здесь  $y_r = = se_1 = [s \mid 0 \cdots 0]^T$

**ЛЕММА А.1.** Пусть дана матрица  $A(m, n)$ . Тогда существует ортогональное преобразование Хаусхолдера  $T_u$  такое, что

$$T_u A = \begin{matrix} & \overbrace{\phantom{1}}^1 & \overbrace{\phantom{n-1}}^{n-1} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c|c} s & \tilde{A} \\ \mathbf{0} & \end{array} \right. \end{matrix} \quad (\text{A.18})$$

**ЗАМЕЧАНИЕ А.3.** Скаляр  $s$  и матрица  $\tilde{A}$  в (А.18) вычисляются непосредственно по данным в матрице  $A$ ;  $s$  — по выражению (А.16) и свойству 6, а  $\tilde{A}$  — по свойству 5, (А.15). Первый столбец, который уместно назвать *ведущим* столбцом, используют как вектор  $y$  в задаче 2 (см. рис. А.3) для определения вектора  $u$ . Второй и далее столбцы, обозначенные на рис. А.3 произвольно как вектор  $a$ , отражают от найденной таким образом гиперплоскости  $U_\perp$ , решая для этого задачу 1 (см. рис. А.2) с  $y := a$  и тем самым получая блок  $\tilde{A}$ .

**ТЕОРЕМА А.1** (*Триангуляризация матрицы по методу Хаусхолдера*). Пусть  $A_1 := A(m, n)$  и для каждого  $j$  выбрано элементарное преобразование Хаусхолдера  $T_j$  так, что

$$T_j A_j = \begin{matrix} & \overbrace{\phantom{1}}^1 & \overbrace{\phantom{n-j}}^{n-j} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ m-j \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c|c} s_j & a_j^T \\ \mathbf{0} & A_{j+1} \end{array} \right. \end{matrix}, \quad j = 1, \dots, k; \quad k \leq \min(m-1, n). \quad (\text{A.19})$$

Тогда в процессе после  $k$  повторных применений свойства 6 и леммы А.1 имеем следующий промежуточный результат триангуляризации матрицы  $A$ :

$$T^{(k)}A = \left[ \begin{array}{ccc|c} s_1 & & & a_1^T \\ & s_2 & & a_2^T \\ & & \dots & \vdots \\ & & & a_k^T \\ \mathbf{0} & & & \\ \hline & & & A_{k+1} \end{array} \right] \quad (\text{A.20})$$

с отвечающей этому моменту процесса итоговой матрицей преобразований

$$T^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & T_k \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} T_1. \quad (\text{A.21})$$

**ЗАМЕЧАНИЕ А.4.** Важно подчеркнуть, что алгоритм триангуляризации (А.19) не требует вычисления или запоминания ортогональной матрицы  $T^{(k)}$ , так как правая часть равенства (А.4) вычисляется непосредственно в соответствии с замечанием А.3. Стоит также заметить, как неявно определяется  $A_{j+1}$  рекурсией по  $j$  в алгоритме (А.19). Кроме  $A_{j+1}$ , на шаге  $j$  этой рекурсии определяются скаляр  $s_j$  и  $(n-j)$  компонент вектор-строки  $a_j^T$ . Эти неявные соотношения для  $s_j$ ,  $a_j^T$  и  $A_{j+1}$  и весь процесс вычислений (рис. А.4) представлены в явном виде в разд. А.5.

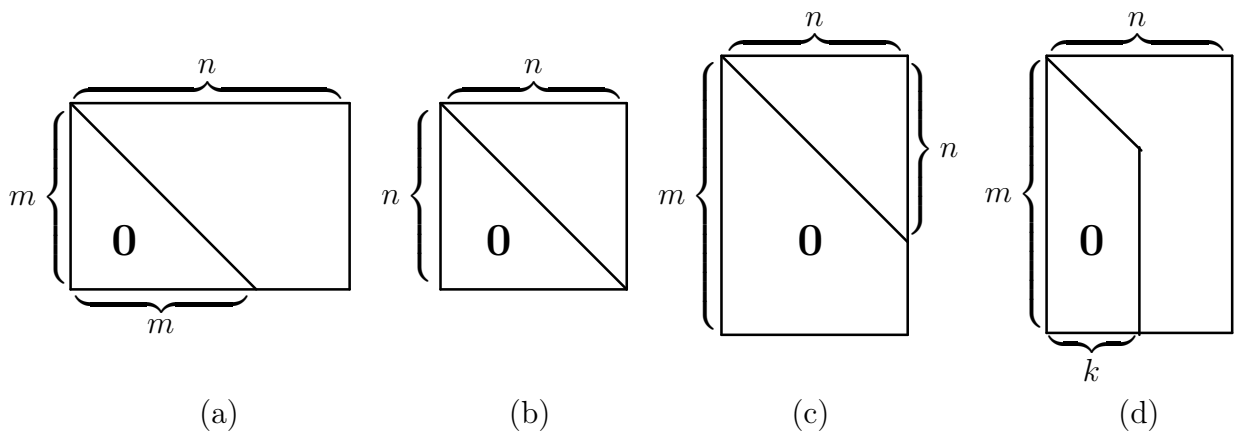


Рис. А.4. Схематическое представление возможных случаев применения теоремы А.1 к матрице  $A(m, n)$ ; (а) недоопределенная система:  $k = m - 1 \leq n$ ; (б) определенная система:  $k = n - 1, m = n$ ; (в) переопределенная система:  $k = n < m$ ; (д)  $k < n < m$

## А.5 Шаг триангуляризации матрицы преобразованием Хаусхолдера

Пусть матрица  $A = A(m, n)$  задана. Тогда, согласно лемме А.1, базовая операция процесса триангуляризации заключается в вычислении скаляра  $s$  и матрицы  $\tilde{A} = \tilde{A}(m, n - 1)$  таких, что

$$T_u A = \begin{matrix} & \overbrace{1} & \overbrace{n-1} \\ & \left[ \begin{array}{c|c} s & \\ \mathbf{0} & \tilde{A} \end{array} \right] & \end{matrix}. \quad (\text{A.22})$$

**Алгоритм.** Для вычисления  $s$  следует применять свойство 6, т.е. выполнять (А.23) для всех  $k = 1$  до  $\min(m - 1, n)$ . Затем для вычисления  $\tilde{A}$  следует применять свойство 5, т.е. последовательно в цикле по  $j = 2, \dots, n$  для всех  $i = k, \dots, m$  выполнять (А.24) с  $\lambda \triangleq -\gamma$  (см. (А.15)). Здесь введена величина  $\alpha \triangleq -\beta$  (см. (А.14) и свойство 6).

<p>Для <math>k = 1</math> до <math>\min(m - 1, n)</math></p> $s_k = -\operatorname{sgn}[A(k, k)] \left( \sum_{i=k}^m [A(i, k)]^2 \right)^{1/2},$ $u_k(1) = A(k, k) - s_k,$ $u_k(i) = A(k + i - 1, k), \quad i = 2, \dots, m - k + 1,$ $\alpha_k = 1/(s_k u_k(1)) \quad (\alpha_k < 0).$	} (A.23)
<p>Для <math>j = k + 1, \dots, n</math></p> $\lambda := \alpha_k \cdot \sum_{i=k}^m u_k(i - k + 1) A(i, j),$ <p>Для <math>i = k, k + 1, \dots, m</math></p> $A(i, j) := A(i, j) + \lambda u_k(i - k + 1).$	} (A.24)

Приведенный алгоритм (А.23), (А.24) называют *столбцово ориентированным*, так как операции (А.24) вычисляют целиком каждый  $j$ -й столбец матрицы, находящийся справа от ведущего, т.е.  $k$ -го столбца.

Альтернативная схема вычислений называется *строчно ориентированным* алгоритмом. Ее можно получить из выражения  $T_u = I - \beta u u^T$  для матрицы Хаусхолдера следующим образом.

Введем вспомогательные обозначения:  $\mu \triangleq \sqrt{\beta}$ ,  $w \triangleq \mu u$ , чтобы записать  $T_u = I - ww^T$ . Тогда  $(T_u A) = A - wz^T$ , где  $z^T \triangleq w^T A = \mu v^T$ ,  $v^T \triangleq \sum_{i=1}^m u(i)A(i, \cdot)$  и  $A(i, \cdot)$  есть  $i$ -я строка матрицы  $A = A(m, n)$ . Введем обозначение  $\lambda^T = \alpha v^T$ , используя ранее введенное (см. (А.23))  $\alpha \triangleq -\beta$ . Отсюда получаем формулу для любой  $i$ -й строки  $(T_u A)(i, \cdot)$  преобразованной матрицы  $(T_u A)$  в виде

$$(T_u A)(i, \cdot) = A(i, \cdot) - w(i)z^T = A(i, \cdot) - \mu^2 u(i)v^T = A(i, \cdot) + \lambda^T u(i).$$

**Алгоритм** (строчно ориентированный), эквивалентный (А.23) и (А.24).

<p>Для <math>k = 1</math> до <math>\min(m - 1, n)</math></p> $s_k = -\operatorname{sgn} [A(k, k)] \left( \sum_{i=k}^m [A(i, k)]^2 \right)^{1/2},$ $u_k(1) = A(k, k) - s_k,$ $u_k(i) = A(k + i - 1, k), \quad i = 2, \dots, m - k + 1,$ $\alpha_k = 1/(s_k u_k(1)) \quad (\alpha_k < 0).$	$\left. \vphantom{\begin{matrix} s_k \\ u_k \\ \alpha_k \end{matrix}} \right\} \quad (\text{А.25})$
<p>Для <math>j = k + 1, \dots, n</math></p> $\lambda_k(j - k) := \alpha_k \cdot \sum_{i=k}^m u_k(i - k + 1)A(i, j),$ <p>Для <math>i = k, k + 1, \dots, m</math></p> <p>Для <math>j = k + 1, \dots, n</math></p> $A(i, j) := A(i, j) + \lambda_k(j - k)u_k(i - k + 1).$	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda_k \\ A(i, j) \end{matrix}} \right\} \quad (\text{А.26})$

## А.6 Решение треугольной системы $Rx = z$ и обращение матриц $R$ и $A$

Как отмечено в разд. А.3, мы часто заинтересованы в решении уравнения

$$Rx = z, \tag{А.27}$$

где  $R = R(n, n)$  — верхнетреугольная невырожденная матрица. Если нужно иметь только решение  $x$ , то  $R^{-1}$  (для  $x = R^{-1}z$ ) вычислять не надо. Следующий алгоритм обратной подстановки позволяет вычислить решение  $x$  непосредственно.

**Алгоритм.** Для  $j = n, n - 1, \dots, 1$  вычислять

$$x(j) = \left( z(j) - \sum_{k=j+1}^n R(j, k)x(k) \right) / R(j, j). \quad (\text{A.28})$$

По сложности этот алгоритм почти такой же, как матричное умножение. Он допускает записывать  $x(j)$  поверх  $z(j)$ , что очень удобно в приложениях.

Если все же требуется иметь матрицу  $U \triangleq R^{-1}$ , то ее можно вычислить по алгоритму окаймления, основанному на следующем легко проверяемом тождестве для треугольных матриц:

$$\begin{bmatrix} R_j & y \\ 0 & \sigma_{j+1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R_j^{-1} & -R_j^{-1}y\sigma_{j+1}^{-1} \\ 0 & \sigma_{j+1}^{-1} \end{bmatrix} = R_{j+1}^{-1}. \quad (\text{A.29})$$

Это соотношение позволяет вычислять обратную матрицу  $U \triangleq R^{-1}$  рекуррентно, т.е., если  $R_j^{-1} = U_j$ , где  $R_j$  обозначает верхнюю левую часть матрицы  $R$ , то

$$U_{j+1} = \begin{bmatrix} U_j & -U_j [R(1, j+1), \dots, R(j, j+1)]^T \sigma_{j+1} \\ 0 & \sigma_{j+1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

где  $\sigma_{j+1} = 1/R(j+1, j+1)$ . Полагая  $U = R_{-1}$ , этот результат представим в алгоритмической форме.

**Алгоритм.** Задать начальное значение

$$U(1, 1) = 1/R(1, 1). \quad (\text{A.31})$$

Для  $j = 2, \dots, n$  вычислять по формулам (A.32) и (A.33):

$$U(j, j) = 1/R(j, j), \quad (\text{A.32})$$

$$U(k, j) = - \left( \sum_{i=k}^{j-1} U(k, i)R(i, j) \right) U(j, j), \quad k = 1, \dots, j-1. \quad (\text{A.33})$$

**ЗАМЕЧАНИЕ А.5.**  $R^{-1}$  вычисляется по столбцам, при этом элементы матрицы  $R^{-1}$  могут записываться поверх элементов исходной матрицы  $R$ .

В справочных целях приведем примеры реализации данного алгоритма на языке FORTRAN. Эти примеры могут помочь студентам написать свои собственные программы на других языках высокого уровня при выполнении лабораторного проекта № 6, описание которого дано ниже в подразд. ??.

**Обращение верхнетреугольной матрицы:**  $U := R^{-1}$ . Реализуются формулы (А.31), (А.32) и (А.33). Если нужно,  $U$  может замещать  $R$ .

$R(N, N)$ ,  $U(N, N)$ ,  $R$  и  $U$  — верхнетреугольные матрицы.

$$U(1, 1) = 1./R(1, 1)$$

DO 20  $J = 2, N$

$$U(J, J) = 1./R(J, J)$$

$$JM1 = J - 1$$

DO 20  $K = 1, JM1$

$$SUM = 0.$$

DO 10  $I = K, JM1$

$$10 \quad SUM = SUM - U(K, I) * R(I, J)$$

$$20 \quad U(K, J) = SUM * U(J, J)$$

В случаях, когда важно или нужно экономить память компьютера, матрицы в программе объявляют как одномерные массивы (см. подразд. ??). Хотя в компьютере даже многомерно объявленные массивы всегда хранятся как одномерные, компилятор генерирует индексные выражения с операциями умножения и деления. Операции сложения и вычитания в компьютерах выполняются гораздо быстрее, поэтому индексы для доступа к элементам матриц следует программировать в рекуррентной инкрементной форме, экономя таким образом и время процессора (табл. А.1). В этой программе преобразование в треугольную форму выполняется отождествлением  $J(J - 1)/1 + I$  с  $(I, J)$ . Рекуррентное инкрементное вычисление  $KK$ ,  $JJ$  и  $KK$  экономит вычисления.

Как отмечалось на с. 43, иногда требуется вычислять  $R^{-1}$ . Такая ситуация появляется, если требуется найти  $A^{-1}$ , для которой уже выполнено преобразование  $TA = R$ , где  $T = T^{(n-1)}$  по формуле (А.21), так как в теореме А.1 для этого случая  $m = n$  и  $A^{-1} = R^{-1}T$ . Последнее означает, что то же самое ортогональное преобразование  $T$  теперь надо применить к строкам матрицы  $R^{-1}$ , но уже в обратном порядке следования элементарных преобразований, составляющих полное преобразование  $T = T^{(n-1)}$  по формуле (А.21). Таким образом, возникает проблема запоминания элементарных преобразований, составляющих полное преобразование  $T = T^{(n-1)}$ , чтобы позже можно было его применить в задаче отыскания  $A^{-1}$  или же для решения уравнения  $Ax = z$  с невырожденной матрицей  $A$  после преобразования  $TA = R$ .

Как видно из (А.24), для отражения любого вектора  $y = T^{(k)}z$  от гиперплоскости  $U_{\perp}$ , заданной вектором  $u$ , требуется иметь сохраненными две

Таблица А.1. Эффективное обращение верхнетреугольной матрицы:  $U := R^{-1}$ . Реализуются формулы (А.31), (А.32) и (А.33). Верхнетреугольные матрицы  $R$  и  $U$  хранятся как векторы размерности  $N(N + 1)/2$ . Если нужно,  $U$  может замещать  $R$ .

$R(N, N), U(N, N), R$ и $U$ — верхнетреугольные матрицы.	
$U(1) = 1./R(1)$	© $R(1) \equiv R(1, 1)$
$JJ = 1$	
DO 20 $J = 2, N$	
$\overline{JJ} = JJ$	© $\overline{JJ} = J(J - 1)/2 = (J - 1, J - 1)$
$JJ = JJ + J$	© $JJ = J(J + 1)/2 = (J, J)$
$U(JJ) = 1./R(JJ)$	
$JM1 = J - 1$	
$KK = 0$	
DO 20 $K = 1, JM1$	
$KK = KK + K$	© $KK = K(K + 1)/2$
$KI = KK$	
$SUM = 0.$	
DO 10 $I = K, JM1$	
$SUM = SUM - U(KI) * R(\overline{JJ} + I)$	© $KI = (K, I), \overline{JJ} + 1 = (I, J)$
10 $KI = KI + I$	© $KI = (K, I + 1)$
20 $U(\overline{JJ} + K) = SUM * U(JJ)$	© $\overline{JJ} + K = (K, J)$

величины: вектор  $u$  и скаляр  $\alpha$ . Поскольку нули ниже диагонали, получающиеся в результате триангуляризации, хранить не нужно, это место можно отвести для сохранения вектора  $u$  (вместе с диагональю, поэтому диагональные элементы  $s_k$  приходится хранить отдельно). Данное предложение схематически показано на рис. А.5. Каким образом можно выполнить вычисление матрицы  $A^{-1}$ , показано на рис. А.6 на конкретном примере размерностей, а именно:  $m = 4, n = 4$ .

## А.7 Преобразование Гивенса

Преобразование Гивенса осуществляет вращение вектора в плоскости двух координат. Поскольку поворот вектора  $y = (y_1 \mid y_2)^T$  на угол  $\theta$  по часовой стрелке эквивалентен повороту системы координат против часовой стрелки на тот же угол, легко найти (рис. А.7), что координаты  $y'_1, y'_2$  повернутого вектора  $y_r = (y'_1 \mid y'_2)^T$  определяются в виде  $y'_1 = y_1 \cos \theta + y_2 \sin \theta, y'_2 = -y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta$ .

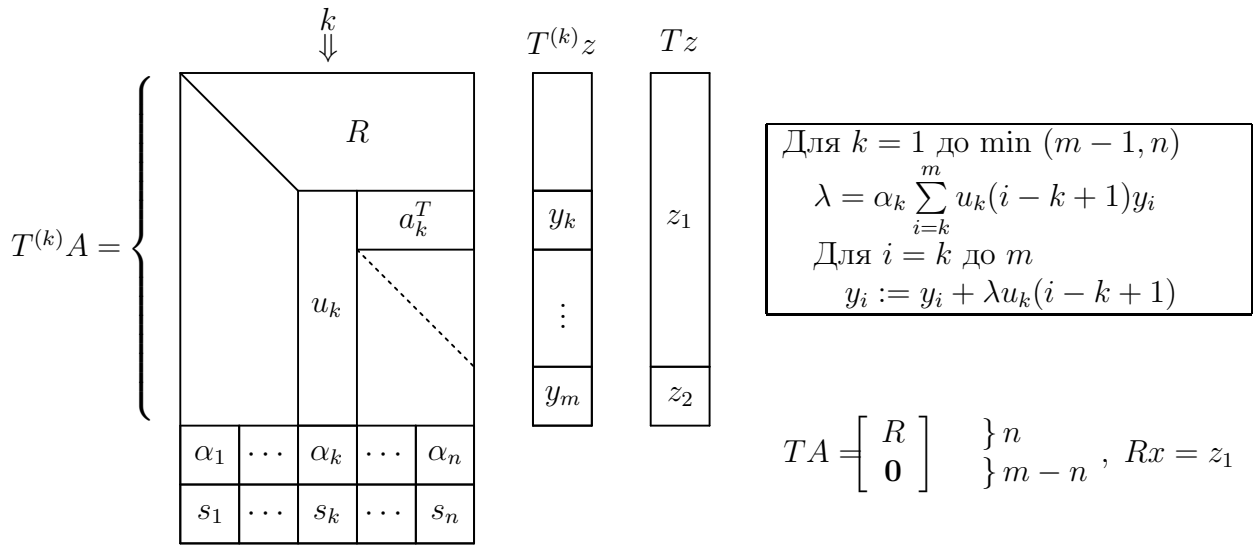


Рис. А.5. Сохранение преобразования  $T$  и вычисление вектора  $y = Tz, \forall y \in \mathbb{R}^m$

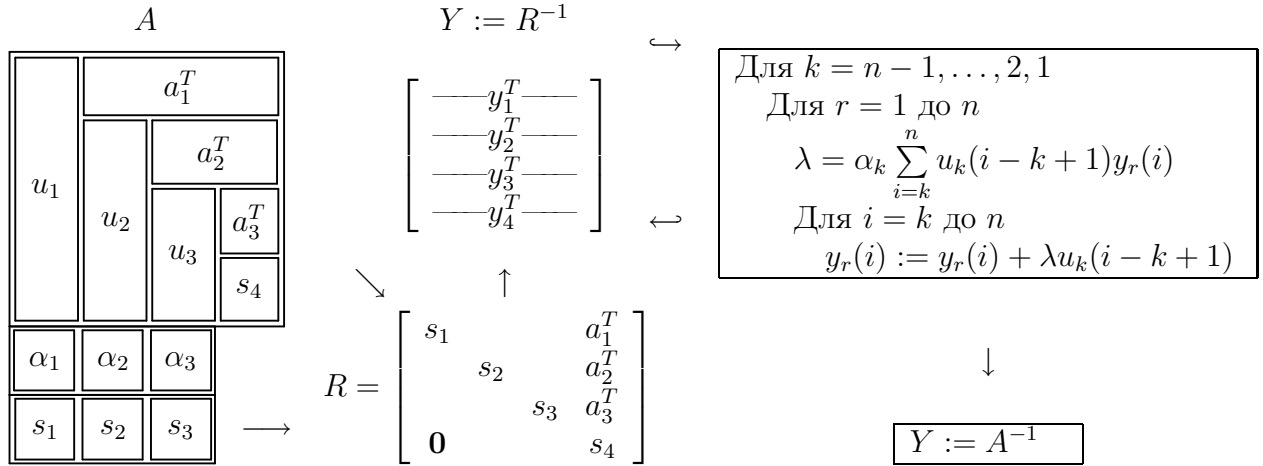


Рис. А.6. Вычисление матрицы  $A^{-1}$  после сохранения преобразования  $T$

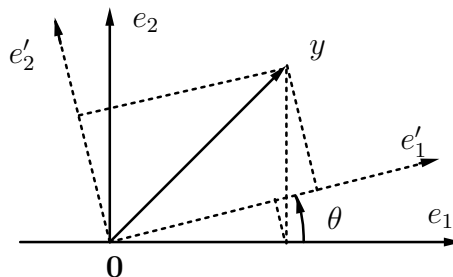


Рис. А.7. Геометрия вращений



Записывая это в матричной форме и требуя, чтобы поворот  $P_{1,2}$  в плоскости  $(e_1, e_2)$  происходил до совмещения с первой координатной осью, получим

$$y_{\Gamma} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} y = P_{1,2} y = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{l} c \triangleq \cos \theta = y_1/r \\ s \triangleq \sin \theta = y_2/r \end{array} \right\}, \quad r \triangleq \sqrt{y_1^2 + y_2^2},$$

где, очевидно, матрица  $P_{1,2}$  плоского вращения ортогональна при любом  $\theta$ .

**Триангуляризация матрицы преобразованиями Гивенса.** Выбор  $\theta$  такой, что вторая координата вектора  $y_{\Gamma}$  становится равной нулю, используем для триангуляризации матрицы  $A(m, n)$ . На первом шаге нужны преобразования, делающие равными нулю все элементы ниже первого диагонального элемента. Для этого, очевидно, нужно выполнить последовательно элементарные вращения  $P_{1,2}, P_{1,3}, \dots, P_{1,m}$ . Так определенные преобразования воздействуют на все столбцы матрицы, но только первый столбец, который уместно назвать *ведущим столбцом*, приобретает желаемый вид.

**ЛЕММА А.2.** Пусть дана матрица  $A(m, n)$  и  $y$  — ее ведущий (левый) столбец. Тогда существует ортогональное преобразование Гивенса, задаваемое матрицей  $P_1 = P_1(m, m)$ , такое, что

$$P_1 A = \begin{matrix} & \overbrace{1} & \overbrace{n-1} \\ & \left\{ \begin{array}{c|c} r & \tilde{A} \\ \mathbf{0} & \end{array} \right. \\ & m-1 \end{matrix}, \quad (\text{A.34})$$

$$P_1 = P_{1,m} \cdots P_{1,3} P_{1,2},$$

		$P_{1,i} \ (i = 2, 3, \dots, m)$				$y$
		1	$i$	$m$		
1	$\begin{array}{ccc} c_{1,i} & & s_{1,i} \\ & \ddots & \\ & & 1 & & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & \\ -s_{1,i} & & c_{1,i} & & \\ & & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & & \ddots \end{array}$	←	$\begin{array}{l} r_{1,1} := y_1 \\ \text{Для } i = 2, 3, \dots, m \\ r_{1,i} := \sqrt{r_{1,i-1}^2 + y_i^2} \\ c_{1,i} := \frac{r_{1,i-1}}{r_{1,i}} \\ s_{1,i} := \frac{y_i}{r_{1,i}} \\ r \triangleq r_{1,m} = \sum_{i=1}^m y_i^2 = \ y\ ^2 \end{array}$	←	$\begin{array}{c} y_1 \\ \\ y_i \\ \\ y_m \end{array}$	
$m$	$\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & 1 \end{array}$					

**ТЕОРЕМА А.2** (Триангуляризация матрицы по методу Гивенса). Пусть  $A_1 := A(m, n)$  и для каждого  $j = 1, 2, \dots, k$ ,  $k \leq \min(m-1, n)$  серия элементарных преобразований Гивенса, задаваемая матрицей  $P_j$  размера  $(m+1-j) \times (m+1-j)$ , выбрана для ведущего (левого) столбца  $y_j$  матрицы  $A_j$  так, что

$$P_j A_j = \begin{matrix} 1 \\ m-j \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \overbrace{1} \\ \overbrace{r_j} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \overbrace{a_j^T} \\ A_{j+1} \end{matrix} \right\}, \quad j = 1, \dots, k; \quad k \leq \min(m-1, n). \quad (\text{A.35})$$

Тогда в процессе после  $k$  повторных применений леммы А.2 имеем следующий промежуточный результат триангуляризации матрицы  $A$ :

$$P^{(k)} A = \begin{bmatrix} r_1 & & & & a_1^T \\ & r_2 & & & a_2^T \\ & & \dots & & \vdots \\ & & & r_k & a_k^T \\ & \mathbf{0} & & & A_{k+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

с отвечающей этому моменту процесса итоговой матрицей преобразований

$$P^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & P_k \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} P_1, \quad P_j = P_{j, m-j+1} \cdots P_{j,3} P_{j,2}, \quad (\text{A.37})$$

$$P_{j,t} \quad (t = 2, 3, \dots, l), \quad l \triangleq m - j + 1, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad i = j + t - 1. \quad \begin{matrix} y_j \\ \Downarrow \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 \\ t \\ l \end{matrix} \begin{bmatrix} c_{j,i} & & s_{j,i} & & \\ & \dots & & & \\ & & 1 & & \mathbf{0} \\ & & & \dots & \\ t & -s_{j,i} & & c_{j,i} & \\ & & \mathbf{0} & & 1 \\ l & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} r_{j,1} := y_{1,j} \\ \text{Для } t = 2, \dots, l \\ r_{j,t} := \sqrt{r_{j,t-1}^2 + y_{t,j}^2} \\ c_{j,j+t-1} := \frac{r_{j,t-1}}{r_{j,t}} \\ s_{j,j+t-1} := \frac{y_{t,j}}{r_{j,t}} \\ r_j \triangleq r_{j,l} = \sum_{t=1}^l y_{t,j}^2 = \|y_j\|^2 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} y_{1,j} \\ y_{t,j} \\ y_{l,j} \end{bmatrix}$$

Формула (А.37) имеет рекуррентный вид произведения

$$P^{(j)} = \left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{j-1} & 0 \\ 0 & P_j \end{bmatrix} P^{(j-1)}, \quad P^{(1)} = P_1 \\ & P_j = P_{j,m-j+1} \cdots P_{j,3} P_{j,2}, \quad j = 2, \dots, N \end{aligned} \right\}, \quad N = \min(m-1, n). \quad (\text{А.38})$$

Все участвующие здесь матрицы являются ортогональными, поэтому финальная матрица  $P \triangleq P^{(N)}$  также ортогональна. Общее число используемых при этом элементарных матриц вращения равно  $(m-1) + (m-2) + \dots + (m-N) = (2m-N-1)N/2$ . В результате (в случае  $m > n$ ) получим

$$PA = \begin{bmatrix} R \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{array}{|c|} \hline \text{треугольная} \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \end{array} \triangleq R_{\text{не}}, \quad (\text{А.39})$$

где индекс <sub>не</sub> подчеркивает, что в треугольной матрице  $R$  заполненной частью может быть только «северо-восточная» (*north-by-east*) часть. Полагая  $Q = P^T$ , при  $m = n$  имеем  $QR$ -разложение матрицы  $A = A(n, n)$ , т. е.  $A = QR$ . Матрицы в (А.37) и (А.38) непосредственно не вычисляются.

Для алгоритма Гивенса — так же, как и для других матричных алгоритмов, — имеются две схемы вычислений: (1) строчно ориентированная схема и (2) столбцово ориентированная схема (рис. А.8). Как и в алгоритме преобразований Хаусхолдера (см. рис. А.5), здесь обычно требуется сохранять информацию о произведенных по ходу алгоритма (А.38) элементарных преобразованиях, чтобы впоследствии иметь возможность решать системы уравнений  $Ax = z$  (совместные или несовместные, в последнем случае — по методу наименьших квадратов, см. подразд. А.3) или же находить обратную матрицу  $A^{-1}$  (когда  $m = n$ ).

Необходимая информация означает значения косинуса и синуса, однако их сохранение было бы неэффективным решением. Gentleman (1973) предложил эффективный способ, включенный в рис. А.8(б) и (г) с геометрической иллюстрацией его действия на рис. А.8(е). Введенный им рабочий признак  $\zeta$  — это одно число, которое можно хранить в позиции  $(i, j)$  как  $\zeta_{j,i}$  вместо нулевого элемента, появляющегося в позиции  $(i, j)$  матрицы (А.39) в момент преобразования  $P_{j,t}$  ( $t = i + 1 - j$ ) в (А.37). Как и с преобразованиями Хаусхолдера, нахождение  $A^{-1}$  после преобразований Гивенса требует такой же последовательности процедур: сначала находят  $R^{-1}$  (см. А.6), затем к  $R^{-1}$  применяют с правой стороны финальное преобразование  $P \triangleq P^{(N)}$  (А.38), так как  $A^{-1} = R^{-1}P$ . Для этого на рис. А.6 надо взять алгоритм из рис. А.8(д), который также отыскивает  $Pz$  при решении уравнения  $Ax = z$ .

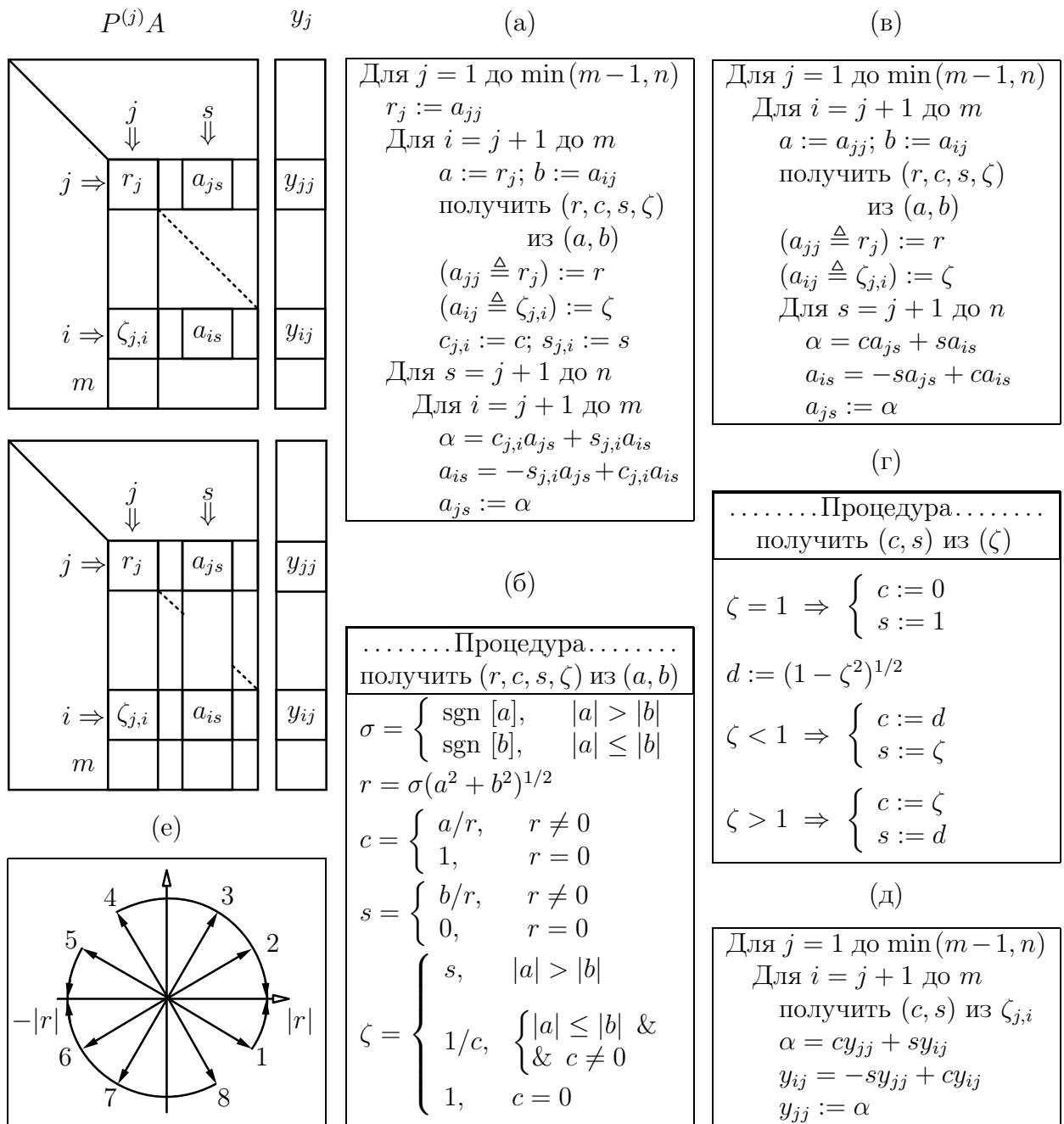


Рис. А.8. Преобразование Гивенса: (а) столбцово ориентированная схема вычисления матрицы  $PA$ , где  $P = P^{(j)}$  при  $j = \min(m-1, n)$  (нижняя матрица слева); (б) вычисление координаты  $r$  вектора  $(a, b)^T$ , повернутого до совмещения с первой осью, а также косинуса и синуса угла поворота и рабочего признака  $\zeta$ ; (в) строчно ориентированная схема вычисления матрицы  $PA$  (верхняя матрица слева); (г) восстановление косинуса и синуса угла поворота из признака  $\zeta$ ; (д) получение вектора  $y$  теми преобразованиями  $P_{j,i}$  произвольного вектора  $z \in \mathbb{R}^m$ , которые сохранены в рабочих признаках  $\zeta_{j,i}$  и восстанавливаются из них; (е) вследствие (б), векторы 1, 2, 3 и 4 поворачиваются к положительному направлению первой координатной оси, а векторы 5, 6, 7 и 8 поворачиваются к отрицательному направлению этой оси.

## А.8 Варианты заполнения матрицы $R$

Традиционно, любые ортогональные преобразования (выше рассмотрены  $T$  — преобразование Хаусхолдера и  $P$  — преобразование Гивенса, ниже будет рассмотрено  $Q$  — преобразование Грама-Шмидта) приводят матрицу к виду, показанному на рис. А.4 или в выражении (А.39). Однако выбор того угла матрицы, который должен остаться треугольно заполненным, естественно, произволен. Предпочтения диктуются целями использования, т. е. предназначением преобразования. Преследуя здесь учебно-тренировочные цели, включим в проект (см. подразд. ??) все четыре возможных варианта заполнения матрицы  $R$ , а именно: первый вариант показан в (А.39), следующие три имеют вид

$$PA = \begin{bmatrix} R \\ \cdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \end{array} \triangleq R_{\text{nw}}, \quad (\text{А.40})$$

где индекс  $\text{nw}$  подчеркивает, что в треугольной матрице  $R$  заполненной частью может быть только «северо-западная» (*north-by-west*) часть,

$$PA = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \cdots \\ R \end{bmatrix}, \quad R = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{0} \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \triangleq R_{\text{se}}, \quad (\text{А.41})$$

где индекс  $\text{se}$  подчеркивает, что в треугольной матрице  $R$  заполненной частью может быть только «юго-восточная» (*south-by-east*) часть, и

$$PA = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \cdots \\ R \end{bmatrix}, \quad R = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \end{array} \triangleq R_{\text{sw}}, \quad (\text{А.42})$$

где индекс  $\text{sw}$  подчеркивает, что в треугольной матрице  $R$  заполненной частью может быть только «юго-западная» (*south-by-west*) часть. Вполне очевидно, что эти варианты получаются простым изменением порядка действий в алгоритмах преобразований.

## А.9 Правосторонние ортогональные преобразования и их применение

С правосторонними ортогональными преобразованиями мы уже сталкивались (см. подразд. А.6); тогда для квадратной матрицы  $A$  после  $TA = R$

вычисляли  $A^{-1} = R^{-1}T$ . Однако, можно начинать с правостороннего преобразования матрицы  $A$ ; тогда отыскание  $A^{-1}$  потребует, соответственно, левостороннего преобразования.

Пусть  $A = A(n, n)$  — квадратная невырожденная матрица. Будем рассматривать ее строки как векторы в  $\mathbb{R}^n$ . Преобразования вектора как матрицы-строки в  $n$ -мерном линейном пространстве задаются умножением ее на преобразующую матрицу справа. Поэтому правосторонним ортогональным преобразованием  $Q$  можно привести матрицу  $A$  к виду  $AQ = R$ , где применена ортогональная матрица  $Q$  одного из типов, а  $R$  — треугольная матрица, имеющая форму одного из возможных вариантов заполнения (см. подразд. А.9). При этом преобразованию  $Q$  подвергаются не столбцы, а строки матрицы  $A$ , и преобразование  $Q$  запоминается по принципу, показанному ранее на рис. А.5 и рис. А.8, на месте элементов, обращаемых в нуль.

После такого преобразования матрицы  $A$  решение системы  $Ax = z$  сводится к решению эквивалентной системы с треугольной матрицей  $Ry = z$ . Затем искомый вектор определяется через сохраненное преобразование  $Q$  как  $x = Qy$ . Обратная матрица  $A^{-1}$ , соответственно, находится как решение системы  $RY = I$  с последующим преобразованием  $Q$  матрицы  $Y$ , т. е.  $X = A^{-1} = QY$ . Матрица  $Q$  не формируется, из чего видна необходимость запоминания преобразований, обеспечивших  $AQ = R$ .

## А.10 Двусторонние ортогональные преобразования и их применение

Ортогональные преобразования, будучи применены одновременно слева и справа к данной матрице  $A$ , позволяют приводить ее к формам с нулями как ниже, так и выше диагонали. Это, в свою очередь, облегчает решение других сложных задач. С помощью ортогональных преобразований для квадратной матрицы широко распространены: приведение симметрической матрицы к трехдиагональному виду и приведение квадратной матрицы к двухдиагональному виду. При этом в качестве ортогональных преобразований одинаково успешно могут быть использованы преобразования Хаусхолдера или преобразования Гивенса.

**Приведение симметрической матрицы к трехдиагональному виду.** Применим к симметрической матрице слева и справа преобразование Хаусхолдера (или Гивенса), выбирая его из задачи желаемого преобразования

ведущего столбца и ведущей строки, а именно: сохранение первого диагонального элемента, получение ненулевых элементов в двух смежных с ним позициях и получение нулевых элементов в остальных позициях.

**ЛЕММА А.3.** Пусть дана матрица  $A = A(n, n) = A^T$ . Тогда существует ортогональное преобразование  $Q_2$  (Хаусхолдера  $T_2$  или Гивенса  $P_2$ ) такое, что

$$\left[ \begin{array}{c|c} I_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & Q_2 \end{array} \right] A \left[ \begin{array}{c|c} I_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & Q_2^T \end{array} \right] = \begin{array}{c} \overbrace{1} \\ \overbrace{1} \\ \underbrace{n-2} \\ \left\{ \begin{array}{c|c} a_1 & \begin{array}{cc} s_1 & \mathbf{0} \\ \hline & \tilde{A} \end{array} \end{array} \right. \end{array} \quad (\text{A.43})$$

**ЗАМЕЧАНИЕ А.6.** В (А.43) транспонирование  $Q_2^T$  не требуется, если в качестве  $Q_2$  взято преобразование Хаусхолдера (в силу его симметричности). При этом индекс «2» указывает на позицию того элемента в ведущем столбце (для левостороннего преобразования) или в ведущей строке (для правостороннего преобразования), который остается ненулевым в этом столбце (в результате применения  $Q_2$ ) или в этой строке (в результате применения  $Q_2^T$ ). В данном случае, т. е. в (А.43), эти элементы суть  $s_1$  и  $s_1$ . Элемент  $a_1$  не изменяется, так как  $I_1$  — единичная матрица размера  $1 \times 1$ .

**ТЕОРЕМА А.3** (*Тридиагонализация симметрической матрицы*). Пусть дана симметрическая матрица  $A = A(n, n) = A^T$ ,  $A_1 := A(n, n)$  и для каждого  $j = 1, \dots, k$ , где  $k \leq N = n - 2$ , выбрано элементарное преобразование  $Q_{j+1}$  (Хаусхолдера  $T_{j+1}$  или Гивенса  $P_{j+1}$ ) так, что

$$\left[ \begin{array}{c|c} I_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & Q_{j+1} \end{array} \right] A_j \left[ \begin{array}{c|c} I_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & Q_{j+1}^T \end{array} \right] = \begin{array}{c} \overbrace{1} \\ \overbrace{1} \\ \underbrace{n-j-1} \\ \left\{ \begin{array}{c|c} a_j & \begin{array}{cc} s_j & \mathbf{0} \\ \hline & A_{j+1} \end{array} \end{array} \right. \end{array} \quad (\text{A.44})$$

Тогда в процессе после  $k$  повторных применений леммы А.3 имеем отвечающую этому моменту процесса итоговую матрицу преобразований

$$Q^{(k)} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & Q_{k+1} \end{bmatrix} Q^{(k-1)}, \quad 1 \leq k \leq N = n - 2, \quad Q^{(0)} = I_n \quad (\text{A.45})$$

и промежуточный результат тридиагонализации данной матрицы  $A$  в виде

$$Q^{(k)}A(Q^{(k)})^T = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} a_1 & s_1 & & & & & \\ s_1 & a_2 & s_2 & & & & \mathbf{0} \\ & s_2 & \dots & \dots & & & \\ & & \dots & a_k & s_k & & \\ & & & s_k & & & \\ \mathbf{0} & & & & & & A_{k+1} \end{array} \right].$$

**Приведение квадратной матрицы к двухдиагональному виду.** Применим к произвольной квадратной матрице слева преобразование  $Q_1$  и справа преобразование  $S_2$  (беря любое из них как преобразование Хаусхолдера или как преобразование Гивенса), при этом  $Q_1$  выберем из задачи желаемого преобразования ведущего столбца и  $S_2$  — из задачи желаемого преобразования ведущей строки, а именно: при действии  $Q_1$  — получение ненулевого диагонального элемента и нулевых элементов ниже него в первом (ведущем) столбце; при действии  $S_2$  — сохранение диагонального элемента, получение в смежной с ним позиции ненулевого элемента и нулевых элементов правее него в первой (ведущей) строке.

**ЛЕММА А.4.** Пусть дана матрица  $A = A(n, n)$ . Тогда существуют ортогональное преобразование  $Q_1$  (Хаусхолдера или Гивенса) и ортогональное преобразование  $S_2$  (Хаусхолдера или Гивенса) такие, что

$$Q^{(1)}AS^{(1)} = \begin{matrix} \overbrace{1} & \overbrace{1} & \overbrace{n-2} \\ \left\{ \begin{array}{c|cc} s_1 & a_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{A} & \end{array} \right. \end{matrix}, \quad \begin{cases} Q^{(1)} = Q_1, \\ S^{(1)} = \left[ \begin{array}{c|c} I_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_2 \end{array} \right]. \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

**ТЕОРЕМА А.4** (*Бидиагонализация квадратной матрицы*). Пусть дана квадратная матрица  $A = A(n, n)$ ,  $A_1 := A$  и для каждого  $j = 1, \dots, k$ , где  $k \leq n - 2$ , выбраны элементарное преобразование  $Q_j$  (Хаусхолдера типа  $T_j$  или Гивенса типа  $P_j$ ) и элементарное преобразование  $S_{j+1}$  (Хаусхолдера



типа  $T_{j+1}$  или Гивенса типа  $P_{j+1}$ ) таким образом, что в результате получаем

$$Q_j A_j \left[ \begin{array}{c|c} I_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_{j+1} \end{array} \right] = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n-j \end{array} \left\{ \left[ \begin{array}{c|cc} s_j & a_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & A_{j+1} \end{array} \right] \right. \quad (\text{A.47})$$

Тогда в процессе после  $k$  повторных применений леммы А.4 имеем отвечающие этому моменту процесса итоговые матрицы преобразований

$$\left. \begin{array}{l} Q^{(k)} = \left[ \begin{array}{cc} I_{k-1} & 0 \\ 0 & Q_k \end{array} \right] Q^{(k-1)}, \quad k \leq n-2, \quad Q^{(0)} = I_n, \quad Q^{(1)} = Q_1, \\ S^{(k)} = S^{(k-1)} \left[ \begin{array}{cc} I_k & 0 \\ 0 & S_{k+1} \end{array} \right], \quad k \leq n-2, \quad S^{(1)} = \left[ \begin{array}{cc} I_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{A.48})$$

и промежуточный результат bidiagonalизации данной матрицы  $A$  в виде

$$Q^{(k)} A S^{(k)} = \left[ \begin{array}{cccc} s_1 & a_1 & & \\ & s_2 & a_2 & \\ & & \dots & \dots \\ & & & s_k & a_k \\ & & & & \boxed{A_{k+1}} \\ \mathbf{0} & & & & \end{array} \right].$$

Выполнив после  $k = n - 2$  еще одно левостороннее преобразование  $Q_{n-1}$  (что отвечает применению верхней формулы (А.48) для  $k = n - 1$ ), получаем окончательно

$$Q^{(n-1)} A S^{(n-2)} = \left[ \begin{array}{cccc} s_1 & a_1 & & \\ & s_2 & a_2 & \\ & & \dots & \dots \\ & & & s_{n-1} & a_{n-1} \\ \mathbf{0} & & & & s_n \end{array} \right].$$

# Приложение В

## Название приложения В

### В.1 Название подраздела В.1 в приложении В

Как показано в приложении В, подразд. В.2, пункт В.2.1 ...

#### В.1.1 Название пункта В.1.1 в приложении В, подразд. В.1

Название подпункта пункта В.1.1 в приложении В, подразд. В.1

#### В.1.2 Название

Название

### В.2 Название подраздела в приложении 2

#### В.2.1 Название

Название

#### В.2.2 Название

Название

Дипломный проект

*Фамилия Имя Отчество*  
Название дипломной работы

Дипломная работа выполнена мною самостоятельно. Используемые в работе материалы из опубликованной научной, учебной литературы и Интернет имеют ссылки на них.

Отпечатано в \_\_\_\_ экземплярах.

Библиография \_\_\_\_ наименований.

Один экземпляр сдан на кафедру.

---

Дата

---

подпись