Итерационный алгоритм стохастического управления на основе наблюдаемого вспомогательного функционала

О. Ю. Горохов

Ульяновский государственный университет

В статье рассматриваются линейные стохастические системы управления в условиях параметрической неопределенности, предлагается итерационный алгоритм стохастического управления на основе наблюдаемого вспомогательного функционала и исследуется влияние различных факторов на характеристики процесса идентификации. Предложен метод идентификации фильтра Калмана в дискретном времени для стохастических систем управления с обратной связью.

Введение. Итерационные схемы в условиях параметрической неопределенности были признаны необходимыми и адекватными [1] для построения управления в классе линейных стохастических систем. На каждой итерации решается задача идентификации по наблюдаемым экспериментальным данным. Основные вопросы идентифицируемости систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, поставлены и решены в [2], обзору численных методов оценивания посвящены [3], [4].

В классических методах теории минимума ошибки предсказания ошибка предсказания $e(t_i)$ *доступна*, а множество моделей $\mathcal{M}(\theta)$, зависящее от параметра θ, определяется из критерия минимума этой ошибки. В случае стохастических систем управления ошибка предсказания *недоступна*, так как она определяет разность между выходом модели $\mathcal{M}(\theta)$ и оптимальной оценкой вектора состояния x. Объект, для которого необходимо построить множество моделей $\mathcal{M}(\theta)$, недоступен для наблюдения и его необходимо восстановить из наблюдаемых данных.

Для решения поставленной задачи определим вспомогательный процесс $\varepsilon(t_i)$ так, что выполнено следующее соотношение

$$J_\varepsilon(\theta) \stackrel{def}{=} \mathrm{E}\{||\varepsilon(t_i)||^2\} = \mathrm{E}\{||e(t_i)||^2\} + \mathrm{Const} \qquad (1)$$

где Const > 0 обозначает величину, независящую от $\mathcal{M}(\theta)$. Минимумы вспомогательного функционала $J_\varepsilon(\theta)$ и функционала $J_e(\theta) \stackrel{def}{=} \mathrm{E}\{||e(t_i)||^2\}$ совпадают [5]. Предложенный подход имеет практическую ценность для стохастических систем управления с обратной связью, которые описываются уравнениями

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= \Phi x(t_i) + \Psi u(t_i) + \Gamma w(t_i) \\ z(t_i) &= Hx(t_i) + v(t_i) \\ u(t_i) &= -G_0 \widetilde{x}(t_i^+) \end{aligned} \tag{2}$$

где $x(t_i) \in \mathbb{R}^n$ вектор состояния, $z(t_i) \in \mathbb{R}^m$ вектор наблюдения, $u(t_i) \in \mathbb{R}^r$ вектор управления, который вычисляется по субоптимальным значениям $\widetilde{x}(t_i^+)$ и G_0, $\{w(t_0), w(t_1), \dots\}$ и $\{v(t_1), v(t_2), \dots\}$ независимые последовательности одинаково распределенных случайных векторов $w(t_i) \in \mathbb{R}^q$, $v(t_i) \in \mathbb{R}^m$ с ковариациями Q и R соответственно. Предположим так же, что некоторые элементы матриц Φ,Γ,Q и R неизвестны и их значения должны быть определены в процессе идентификации.

Итерационный алгоритм. Оценки вектора состояния могут быть получены из соответствующего *субоптимального фильтра*, где вектор управления $u(t_i)$ вычисляется по субоптимальному закону управления $u(t_i) = -G_0 \tilde{x}(t_i^+)$. Коэффициент усиления заменяется значением, полученным на каждой итерации, а G_0 пересчитывается заново. Целью функционирования адаптивной модели является идентификация фильтра Калмана

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x_{i+1}) &= A\hat{g}(t_i) + Bu(t_i) \\ \hat{g}(t_i) &= \tilde{g}(t_i) + D\eta(t_i) \\ \eta(t_i) &= z(t_i) - H_* \tilde{g}(t_i) \end{aligned} \tag{3}$$

где $A = T\Phi T^{-1}, B = T\Psi, H_* = HT^{-1}$ и T матрица наблюдаемости, определенная в [5]. Пусть θ обозначает множество всех параметров, требующих оценки, а $\eta(t_j), t_j \in [t_{i-s+1}, t_i] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}(t_{i-s+1}, t_i)$, где s максимальный частный индекс наблюдаемости. Разница между адаптивной и субоптимальной моделями может быть представлена как

$$\varepsilon(t_i) = \mathcal{N}(D)\mathbb{H}(t_{i-s+1}, t_i) \tag{4}$$

где $\mathcal{N}(D)$ преобразование коэффициента усиления D [5].

Модель чувствительности отражает влияние настраиваемых параметров на ошибку (4) и может быть определена как частные производные вектора $\varepsilon(t_i)$ относительно параметров θ в рекурсивном виде. Пусть μ - вектор состояния модели чувствительности, тогда

$$\tilde{\mu}_j(t_i) = A\left[(I - DH_*)\tilde{\mu}_j(t_{i-1}) + \frac{\partial D}{\partial \theta_j}\eta(t_{i-1})\right], \quad \theta_j \in D \tag{5}$$

$$\tilde{\mu}_j(t_i) = \frac{\partial A}{\partial \theta_j}\hat{g}(t_{i-1}) + A(I - DH_*)\tilde{\mu}_j(t_{i-1}), \quad \theta_j \in A \tag{6}$$

с начальными значениями $\hat{\mu}_j(t_0) = 0$ для каждого θ_j. Последние s значений векторов $\xi_j(t_i) \overset{\text{def}}{=} -H_*\tilde{\mu}_j(t_i)$ и $\mathbb{H}(t_{i-s+1}, t_i)$ используются для построения матрицы чувствительности $\mathcal{S}(t_i)$

$$\mathcal{S}(t_i) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \mathcal{N}(D)}{\partial \theta_j}\mathbb{H}(t_{i-s+1}, t_i) + \mathcal{N}(D)\frac{\partial \mathbb{H}(t_{i-s+1}, t_i)}{\partial \theta_j}\right) \tag{7}$$

Экспоненциально сглаженная с коэффициентом β *оценка градиента* и пробная оценка для каждого параметра θ_j могут получены как

$$\hat{\mathcal{G}}(t_i) = \beta\hat{\mathcal{G}}(t_{i-1}) + (1-\beta)\mathcal{S}^T(t_i)\varepsilon(t_i) \tag{8}$$

$$\pi(t_i) = \hat{\theta}(t_i) - \operatorname{diag}\left(p_j(t_i) + \|\frac{\partial \varepsilon(t_i)}{\partial \theta_j}\|^2\right)\hat{\mathcal{G}}(t_i) \tag{9}$$

где $\pi(t_i)$ для $\hat{\theta}(t_{i+1})$, которая, в случае выполнения *условия устойчивости фильтра* $\rho\,[(I - DH_*)A] < 1$, становится оценкой на следующем шаге $\hat{\theta}(t_{i+1}) = \pi(t_i)$.

Заключение. Результаты численных экспериментов показывают применимость и практическую значимость предложенного в статье итерационного алгоритма стохастического управления для дискретных стохастических систем с обратной связью, определено влияние различных факторов (устойчивость объекта, отношения сигнал-шум, выбор начальных значений) на качество получаемых оценок.

[1] R. R. Schrama. “Accurate identification for control: the necessity of an iterative scheme". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37(7), pp. 991–994 (1992).

[2] Eykhoff, P. (1974); System Identification; Wiley (pp. 684)

[3] Saridis, G.N. (1977); Self-Organizing Control of Stochastic Systems; Marcel Dekker, Inc. (pp. 400)

[4] Tsypkin, Ya. Z., E.D. Avedyan and O.V. Gulinsky (1981); On Convergence of the Recursive Identification Algorithms; IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-26, No. 5 (pp. 1009–1017)

[5] Semoushin, I. V. and J. V. Tsyganova (2000); Indirect Error Control for Adaptive Filtering; Proc. 3$^{\text{rd}}$ European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, ENUMATH-99, World Scientific, Singapore (pp. 333-340)