Федеральное агентство по образованию РФ
Воронежский государственный университет

**В. И. Тинякова**

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРТНОЙ ИНФОРМАЦИИ

**П О С О Б И Е**
**по специальности 080116 (061800)**
**«Математические методы**
**в экономике»**
**СД.Р.09**

**Воронеж –** 2006

Утверждено научно-методическим советом
экономического факультета,
протокол № 1 от 12.01. 2006г.

Пособие подготовлено на кафедре информационных технологий и математических методов в экономике экономического факультета Воронежского государственного университета. Рекомендуется для студентов, обучающихся по специальности 080116 (061800) – «Математические методы в экономике», а также для студентов других специальностей, применяющих методы экспертного оценивания при подготовке курсовых и выпускных квалификационных работ.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Принято считать, что необходимость в экспертных оценках возникает каждый раз, когда отсутствует тот объем и то качество информации, которые мог ли бы гарантировать однозначность результатов принимаемых решений. Это имеет место в тех случаях, когда недостаточно хорошо изучена вся совокупность обстоятельств (либо их, в принципе, нельзя изучить), в которых хозяйствующий субъект вынужден осуществлять свою управленческую деятельность.

По сути, эти обстоятельства представляют собой своеобразные проявления неопределенности. Сама же неопределенность многолика, имеет различную природу и требует специальных подходов для преодоления тех барьеров, которые не позволяют обосновать и оценить рациональность принимаемых решений. Экспертное оценивание как раз и есть один из таких подходов.

Вследствие того, что данное пособие ориентировано на тех студентов, которым в будущем будет присвоена квалификация «экономист-математик», в нем особое внимание уделено именно математическим методам, применяемым для обобщения и анализа экспертной информации. В пособии с достаточной степенью детализации излагается метод парных сравнений, обсуждаются вопросы, связанные с оценкой компетентности экспертов, описываются процедуры проверки согласованности их мнений, а также рассматривается один из возможных вариантов анализа причин несогласованности точек зрений экспертов.

Все теоретические выкладки иллюстрируются практическими расчетами в MS Excel и STATISTICA, а для проверки знаний и закрепления навыков в пособии приведено достаточно большое число заданий и тестовых вопросов для самостоятельной работы.

В результате изучения математических методов обработки экспертной информации студент должен знать ключевые положения теории измерения и уметь корректно осуществлять преобразование данных в различных шкалах, грамотно обрабатывать результаты индивидуального и группового экспертного оценивания, а также проводить проверку согласованности групповых экспертных оценок и анализировать причины их несогласованности с использованием современных пакетов прикладных программ.

# 1. СУБЪЕКТИВНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

## 1.1. Основные понятия и проблемы теории измерений

*Информация*, как известно, является одним из свойств материи, определяемым через меру уменьшения неопределенности знания о свершении какого-либо события и понимаемым как совокупность сведений о некотором объекте.

Причем любая, в том числе и экспертная, информация имеет ценность только тогда, когда ее можно правильно интерпретировать, а для этого прежде всего необходимо корректно измерить полученную информацию.

*Измерение* – это процедура, с помощью которой измеряемый объект сравнивается с некоторым эталоном и получает числовое выражение в определенном масштабе и шкале. Разработкой методов и подходов, обеспечивающих объективность сравнений в различных ситуациях, занимается *теория измерений*.

Рассмотрим основные понятия теории измерений. Для этого дадим определение следующим терминам: объект измерения, показатель (признак), процедуры сравнения.

*Объектами измерения* могут быть предметы, явления, решения. В качестве *показателей* используются характеристики объектов различной природы (пространственно-временные, физические, физиологические, психологические и др.).

*Процедуры сравнения* включают определенные отношения между объектами и способ сравнения объектов. Так как сравнение количественных данных не вызывает затруднений, то рассмотрим сравнение объектов не имеющих количественного описания. Сравнение таких объектов, как правило, носит качественный характер: «больше», «меньше», «равны», «лучше», «хуже», «одинаковы», «предпочтительнее» и т.п. Способ сравнения определяет, например, сравнение всех объектов последовательно с одним объектом или сравнение всех объектов друг с другом в произвольной последовательности.

Для формального описания множества объектов и отношений между ними вводится *понятие эмпирической системы с отношениями*

$$M = \langle O; R \rangle, \tag{1.1}$$

где $O = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ – множество объектов;

$R = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$ – множество отношений.

Запись $O_i R_k O_j$ означает, что объект $O_i$ находится в отношении $R_k$ к объекту $O_j$. Такое отношение называется *двуместным (бинарным)*. Могут быть трехместные отношения.

Реально применяемые отношения обычно обладают определенным набором свойств. В качестве основных свойств можно назвать следующие:

1) отношение $R$ рефлексивно, если $O_i R O_i$ истинно;
2) отношение $R$ антирефлексивно, если $O_i R O_i$ ложно;
3) отношение $R$ симметрично, если из $O_i R O_j$ следует $O_j R O_i$;
4) отношение $R$ антисимметрично, если из $O_i R O_j$ и $O_j R O_i$ следует $O_i = O_j$;
5) отношение $R$ несимметрично (асимметрично), если из истинности $O_i R O_j$ следует, что $O_j R O_i$ ложно;
6) отношение $R$ транзитивно, если из $O_i R O_j$ и $O_j R O_k$ следует $O_i R O_k$, где $O_i, O_j, O_k \in O$;
7) отношение $R$ линейно (связно), если для любых $O_i, O_j \in O$ либо $O_i R O_j$, либо $O_j R O_i$ истинно, либо они оба истинны.

В практике проведения различных исследований часто используются отношения, обладающие не всем набором свойств, а только некоторыми из выше перечисленных. Примерами подобных отношений являются отношения, определения которых приводятся ниже.

Отношение $R$ называется *отношением частичного порядка,* если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношение $R$ называется *отношением линейного порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично, транзитивно и связно, т.е. отношение линейного порядка, обладающее свойством связности.

Иногда рассматривают *отношения строго частичного или линейного порядка*, обладающие свойством антирефлексивности, а также *отношения квазипорядка* (предпорядка, почти порядка), не обладающие свойством антисимметричности.

Отношение $R$ называется *толерантностью,* если оно рефлексивно и симметрично.

Отношение $R$ называется *эквивалентностью,* если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. эквивалентность – это толерантность, обладающая свойством транзитивности.

Интерес вызывают возможные способы представления результатов таких сравнений. В принципе информация об отношениях может быть задана различными способами. Например, можно перечислить объекты, принадлежащие отношению. Но это не всегда удобно. Более распространен *матричный способ представления информации об отношениях*.

Суть задания отношения с помощью такого способа в следующем. Строки и столбцы матрицы $\|r_{ij}\|$ отношения $R$ соответствуют элементам всего множества объектов, т.е. матрица квадратная. Иногда матрицу отношений обозначают $M(R)$.

Пусть $R$ – отношение частичного или линейного порядка. Тогда, если объект $O_i$ предшествует $O_j$, т.е. принадлежит отношению $R$, то на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца в матрице отношений ставится 1, в противном случае – 0.

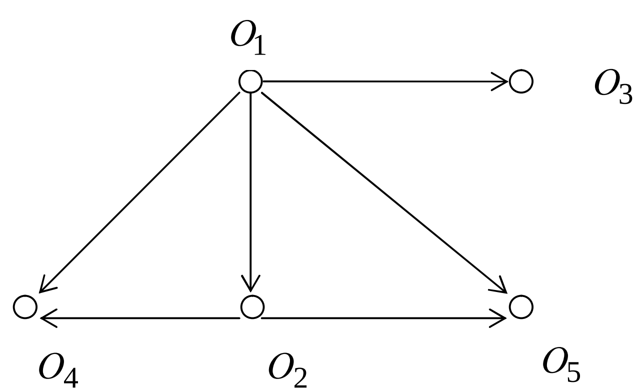
$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad (O_i, O_j) \in R \\ 0, & \textit{если} \quad (O_i, O_j) \notin R \end{cases}. \tag{1.2}$$

Аналогично, с помощью матрицы $\|r_{ij}\|$, можно задать информацию об отношениях толерантности или эквивалентности.

Рассмотрим пример матричного задания отношения частичного порядка. С этой целью элементы матрицы, задающей это отношение, будем определять в соответствии с правилом

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad (O_i, O_j) \in R, \quad (O_j, O_i) \notin R \\ 0, & \textit{если} \quad (O_i, O_j) \notin R, \quad (O_j, O_i) \notin R \\ -1 & \textit{если} \quad (O_i, O_j) \notin R, \quad (O_j, O_i) \in R \end{cases}. \tag{1.3}$$

Пусть для 5 объектов задано отношение частичного порядка. Граф, иллюстрирующий это отношение, изображен на рис. 1.1.




Р и с. 1.1. Граф, иллюстрирующий отношение частичного порядка

Матрица, содержащая информацию об отношении частичного порядка $R$, в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathbf{M}(R)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично для линейного порядка элементы матрицы задаются в соответствии со следующим правилом:

$$r_{ij}=\begin{cases} 1, \textit{если} & (O_i,O_j)\in R, \quad (O_j,O_i)\notin R \\ 0, \textit{если} & (O_i,O_j)\in R, \quad (O_j,O_i)\in R \\ -1\ \textit{если} & (O_i,O_j)\notin R, \quad (O_j,O_i)\in R \end{cases}. \qquad (1.4)$$

Подобные правила без труда можно записать для любого другого отношения.

Для того чтобы понять, устанавливает или нет эмпирическая система с отношениями некоторый порядок между сравниваемыми объектами, необходимо сравнить полученный порядок с числовой системой. С этой целью наша привычная числовая система представляется некой универсальной системой с отношениями вида

$$H=\langle N;S\rangle, \qquad (1.5)$$

где $N$ – множество действительных чисел;

$S=(S_1, S_2, \mathbf{K}, S_m)$ – множество отношений между числами («больше», «меньше», «равно» и т.д.).

Числовая система называется *полной*, если $N$ есть множество всех действительных чисел.

Сравнение эмпирической системы с отношением и числовой системы позволяют осуществить «оцифровку» субъективных измерений. Ниже рассматриваются проблемы, возникающие при трансформации субъективных измерений в количественные.

Количественные данные, уже являясь элементами числовой системы, не требуют специальных процедур своего числового представления. Проблемы возникают при обработке нечисловой информации. Чаще других для ее получения используются экспертные методы. Условимся, что данные, полученные экспертным путем, являются результатом субъективных измерений.

Основные проблемы субъективных измерений – проблемы представления и единственности.

*Проблема представления* заключается в доказательстве того, что для эмпирической системы с отношениями, выбранной с целью измерения определенных свойств объектов, можно построить числовую систему с отношениями, описывающую свойства объектов и отношений между ними с помощью чисел.

Для того чтобы числовая система сохраняла свойства и отношения объектов, необходимо, чтобы она была изоморфной или, по крайней мере, гомоморфной эмпирической системе.

Две системы с отношениями $M = \langle 0; R_1, R_2, \mathbf{K}, R_k \rangle$ и $H = \langle N; S_1, S_2, \mathbf{K}, S_m \rangle$ называются *подобными*, если число отношений одинаково $(k = m)$ и местность отношений одинакова (например, $R_i$ и $S_i$ – двуместные отношения).

Эмпирическая система $M = \langle 0; R_1, R_2, \mathbf{K}, R_k \rangle$ *изоморфна* числовой системе с отношениями $H = \langle N; S_1, S_2, \mathbf{K}, S_m \rangle$, если эти системы подобны и существует взаимнооднозначное отображение (функция) $f$ объектов на числовое множество такое, что отношение $R_k$ между объектами имеет место тогда и только тогда, когда имеет место отношение $S_k$ между числами, являющимися отображением объектов на числовую ось. (Например, для двуместных отношений $O_i O_k O_j$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место $r_i S_k r_j$, где числа $r_i$, $r_j$ получены отображением объектов $r_i = f(O_i)$, $r_j = f(O_j)$.

Условие взаимной однозначности отображения $f$ является в ряде случаев слишком жестким и не всегда необходимым. Если устранить это условие из предыдущего определения, то приходим к понятию *гомоморфизма*.

*Проблема единственности* заключается в определении всех возможных способов представления заданной эмпирической системы различными числовыми системами. Эта проблема может быть сформулирована как проблема определения типа шкал.

*Шкалой* называется совокупность эмпирической системы, числовой системы и отображения, т.е. $\langle M, H, f \rangle$.

Обобщая вышесказанное, можно дать следующее определение понятию «измерение». *Измерение* – процесс, в ходе которого характеристики объекта измерения получают представление (гомоморфное отображение) в некоторой шкале измерений.

Пусть $\langle M, H, f \rangle$ и $\langle M, H, g \rangle$ – две шкалы с разными отображениями. Возникает вопрос о взаимосвязи числовых значений, полученных с использованием отображений $f$ и $g$. Например, если $r_j = f(O_j)$,

$r'_j = g(O_j)$ и связь между числами задается функцией $j$ , т.е. $r_j = j\,(r'_j)$ или $f(O_j) = j\;[g(O_j)]$, то функцию $j$ называют *допустимым преобразованием шкалы*. Свойства функции $j$ определяют связи между всеми числовыми системами, выбранными для описания эмпирической системы. Более того, в зависимости от свойств функции $j$ определяется тип шкалы, что позволяет в нижеследующем параграфе провести классификацию шкал измерения.

## 1.2. Шкалы измерений

Из всего множества теоретически возможных шкал для получения экспертной информации в количественном виде чаще всего используются следующие типы шкал: номинальная, порядковая, интервальная, шкалы отношений и разностей, абсолютная.

Каждая из этих шкал определяется наличием или отсутствием четырех характеристик: 1) описание; 2) порядок; 3) расстояние; 4) начальная точка.

*Описание шкалы* предполагает использование единого способа записи информации, т.е. характеризует составляющие шкалу элементы, например, степень удовлетворенности («полностью удовлетворен», «в общем удовлетворен», «скорее не удовлетворен», «совсем не удовлетворен») или семейное положение («состою в браке», «не состою в браке»). При этом между данными элементами не вводится какая-либо характеристика сравнений, а осуществляется только идентификация информации.

*Порядок* характеризует наличие отношений в способах записи информации, наличия крайних точек зрения («очень нравится», «нравится», «не нравится», «очень не нравится»). При этом предусматриваются некоторые сравнительные характеристики, позволяющие, например, упорядочить отношение к предмету исследования.

*Расстояние шкалы* – измеряемая величина. Это означает, что оно существует только в тех случаях, когда информация определена количественно, а между описанием информации имеются интервалы, расстояние между которыми имеет смысловое значение.

*Начальная точка* задает уровень соотношений между элементами шкалы. Следует различать начальную точку и точку отсчета. Каждая начальная точка является точкой отсчета, но не каждая точка отсчета может быть начальной. Шкала имеет начальную точку, если она имеет единственное начало отсчета.

Приведем краткое описание всех типов шкал, используемых в маркетинговых исследованиях и позволяющих результаты любых измерений представлять в количественном виде.

Ш к а л а  н а и м е н о в а н и й (иногда ее называют: «номинальная шкала», «шкала классификаций», «категориальная шкала», «ординарная шкала»), используется для описания принадлежности объекта к определенному классу. Строится эта шкала по следующему правилу: всем объектам одного и того же класса присваивается одно и то же число, а объектам разных классов – разные числа. Шкала наименований обладает только характеристикой описания – дается множество элементов, из которых следует указать один элемент, причем не как результат сравнения, а как результат идентификации. Данной шкале не присущ порядок, расстояние и начальная точка. Номинальная шкала сохраняет отношения эквивалентности и различия между объектами. Она обладает свойством симметричности, т.е. отношения, существующие между градациями $x_1$ и $x_2$, имеют место и между $x_2$ и $x_1$, и свойством транзитивности, в соответствии с которым, если $x_1 = x_2$ и $x_2 = x_3$, то $x_1 = x_3$.

Однако существует большое число способов присвоения чисел классам эквивалентности объектов. В связи с этим понятие единственности отображения $f$ состоит для данной шкалы в однозначности допустимого преобразования $j$. Это означает, что если имеются два отображения $f$ и $g$, т.е. два варианта приписывания классам числовых значений, то эти числовые значения должны быть связаны между собой однозначным преобразованием $j$. Таким образом, шкала наименований единственна с точностью до однозначного преобразования.

Номинальная шкала широко используется в маркетинговых исследованиях, например, когда респондента просят выбрать из пронумерованного списка наиболее предпочтительный товар. Вопрос и варианты ответов в этом случае могут выглядеть следующим образом:

*Какой сок чаще всего Вы покупаете?*

1. *«Фруктовый сад».*
2. *«Чемпион».*
3. *«Моя семья».*
4. *«Любимый».*
5. *«Долька».*
6. *«Я».*
7. *«Тонус».*

Другим примером использования шкалы наименований является опрос респондентов с целью анализа их социально-демографических характеристик. В этом случае просьбу-вопрос и возможные варианты ответов на него можно выразить так:

*Назовите Ваш род занятий:*

1. *Предприниматель, коммерсант.*

2. *Руководитель фирмы, предприятия.*
3. *Служащий с высшим образованием.*
4. *Служащий со средним образованием.*
5. *Квалифицированный рабочий.*
6. *Неквалифицированный рабочий.*
7. *На инвалидности.*
8. *Домохозяйка.*
9. *Студент, учащийся.*
10. *Безработный.*

Ш к а л а п о р я д к а (или ординальная шкала ранга) имеет наряду с описанием еще и порядок, в результате чего возможно установление приоритетов или сравнений. Она применяется для отражения упорядоченности объектов по одному или совокупности признаков. Эта шкала широко используется при экспертном оценивании, проводимом с целью упорядочения объектов, а также при определении предпочтений покупателей, установлении рейтинга того или иного кандидата, измерении полезности, оценки уровня интеллекта т.д. Для порядковой шкалы допустимым преобразованием $j$ является любое монотонное преобразование. Числа в этой шкале отражают только порядок следования объектов и не дают возможности сказать, на сколько и во сколько один объект предпочтительнее другого. Это вызвано тем, что в шкалу порядка не вводится расстояние как элемент шкалы.

Порядковая шкала может использоваться для «измерения» критериев отношения к чему-либо. Например,

*Определите, пожалуйста, Ваше отношение к продегустированному натуральному соку:*

1. *Очень хороший сок, буду покупать.*
2. *Неплохой сок, буду покупать.*
3. *Неплохой сок, но покупать не буду.*
4. *Сок не понравился, покупать не буду.*
5. *В моей семье никто не пьет натуральные соки.*
6. *Я не пью натуральный сок.*

или:

*Как Вы оцениваете материальное положение Вашей семьи?*

1. *Не хватает денег даже на еду.*
2. *Хватает на еду, но покупать одежду не можем.*
3. *Хватает на еду и на одежду, но не можем покупать дорогие вещи.*
4. *Можем иногда покупать дорогие вещи, но не можем купить все, что захотим.*
5. *Можем позволить себе приобрести все, что захотим.*

Ш к а л а и н т е р в а л о в используется для отражения величины различия между свойствами объектов. Измерения в этих шкалах в известном смысле более совершенны, чем в порядковых. Применение смысле более совершенны, чем в порядковых. Применение шкал интервалов дает возможность не только упорядочить объекты по количеству свойства, но и сравнить между собой разности количеств. Это возможно в силу того, что в дополнение к характеристике порядка введено расстояние как элемент шкалы. Таким образом, исследователю предоставляется возможность не только указать категорию, к которой относится объект по измеряемому признаку, установить его место в ранжированном ряду, но и описать его отличие от других объектов, рассчитав разность (интервал) между соответствующими позициями на шкале. Ярким примером использования этого типа шкал является измерение температуры в градусах по Фаренгейту и Цельсию. Что касается экономических показателей, то измеряемыми в интервальной шкале можно считать производительность труда, ликвидность, рентабельность, себестоимость и др. Основное свойство этой шкалы – равенство интервалов. В то же время интервальная шкала может иметь произвольные точки отсчета и масштаб. Допустимым преобразованием является линейное преобразование, т.е. эта шкала единственна с точностью до линейного преобразования $j(x) = a\ x + b$.

В качестве примера использования интервальной шкалы в маркетинге можно привести ситуацию, когда респондента просят оценить в баллах тот или иной товар или какую-либо его характеристику:

*Оцените, пожалуйста, продегустированный сок по 10-балльной шкале:*

| *№ пробы* | *№* | *№* | *№* |
|---|---|---|---|
| *Балл* | | | |

Однако не всякую балльную шкалу можно считать шкалой равных интервалов. Так, например, для большинства студентов разница между двойкой и тройкой существенно больше, чем между четверкой и пятеркой, так как получение двойки неизбежно влечет пересдачу экзамена. Следовательно, данная пятибалльная шкала является порядковой, а не интервальной. Но, в общем случае, если нет резких границ между некоторыми оценками, то балльную шкалу допустимо рассматривать в качестве интервальной.

Ш к а л а  о т н о ш е н и й (или пропорциональная шкала) применяется для измерения массы, длины, веса. В ней числа отражают отношения свойств объектов, т.е. во сколько раз свойство одного объекта превосходит это же свойство другого объекта. Допустимым преобразованием этой шкалы является преобразование подобия $j(x) = ax$. Фактически шкала отношений представляет собой частный случай шкалы интервалов при выборе нулевой точки в качестве начала отсчета.

В качестве примеров таких шкал можно привести следующие формулировки вопросов, задаваемых респондентам в процессе проведения маркетинговых исследований:

*Пожалуйста, укажите Ваш возраст _________ лет*

или

*Приблизительно укажите, сколько раз за последний месяц Вы делали покупки в дежурном магазине от 20 до 23 часов:*

*0 1 2 3 4 5 Другое число раз ________*

Ш к а л а р а з н о с т е й получается в том случае, когда фиксируется единица измерения, но может изменяться начало отсчета. Шкала используется для измерения свойств объектов при необходимости выражения, на сколько один объект превосходит другой по одному или нескольким признакам. К этой шкале относятся логарифмические и процентные шкалы, а также другие шкалы, задающие безразмерные величины. Шкала разностей является частным случаем шкалы интервалов при выборе единичного масштаба. Допустимое преобразование – преобразование сдвига $j(x) = x + b$.

Примером шкалы разностей является измерение отношения потребителя к товару с помощью графического изображения:

***совершенно не*** *удовлетворен (-2)* | ***затрудняюсь*** *ответить (0)* | ***полностью*** *удовлетворен (2)*

**I---------------------I---------------------I---------------------I---------------------I**

*скорее не удовлетворен (-1)* | *скорее удовлетворен (1)*

Потребителю рекомендуется отметить каким-нибудь знаком на данной прямой свое отношение к товару. При обработке этой информации она может быть измерена с помощью обыкновенной измерительной линейки, затем ее легко можно привести к разным масштабам.

А б с о л ю т н а я ш к а л а является частным случаем шкалы интервалов с нулевой точкой отсчета и единичным масштабом. В ней имеются все четыре характеристики. Допустимое преобразование – тождественное преобразование $j(x) = x$. Это означает, что существует одно и только одно отображение $f$, переводящее объекты в числовую систему. Эта шкала является наиболее полной для целей обработки информации.

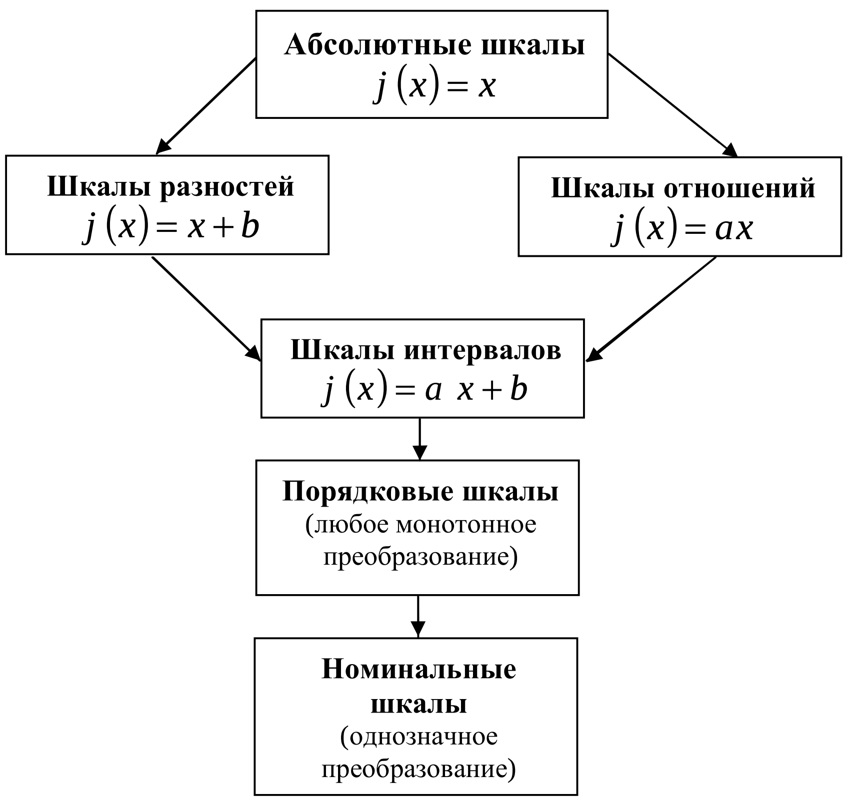
Абсолютную шкалу дают результаты счета. Предположим, что с целью исследования социально-демографических характеристик респондентов был задан вопрос: *«Сколько всего человек в Вашей семье, включая Вас и детей, проживает вместе?»* и предложены следующие варианты ответов:

1. *Один человек.*

2. *Два человека.*
3. *Три человека.*
4. *Четыре человека.*
5. *Пять человек.*
6. *Иной ответ.*

Рассмотрим вопрос о сравнении введенных типов шкал.

Назовем тип одной шкалы более высоким, чем тип другой, если совокупность допустимых преобразований второй шкалы включается в совокупность допустимых преобразований первой. Если принять это определение, то между всеми типами шкал можно установить соответствующее отношение порядка. Правда, при этом несравнимыми оказываются шкалы отношений и шкалы разностей: ни одна из соответствующих совокупностей допустимых преобразований не включается в другую. Частично-упорядоченное множество типов шкал и соответствующие им допустимые преобразования можно представить в виде рис. 1.2.




Р и с. 1.2. Отношение частичного порядка между шкалами в зависимости от допустимых преобразований (чем выше расположен прямоугольник, тем более высокому типу шкал он отвечает)

Заметим, что наличие такого многообразия шкал не обеспечивает получение абсолютно точных измерений показателей, характеризующих социально-экономические процессы. Основной причиной этого является неконтролируемость погрешности измерений экспертной информации. Естественно, что разработать универсальный критерий точности не удается. Поэтому критерий точности каждого вида измерения стараются определить согласно целям этого измерения. Причем нужно помнить, что погрешности измерения не сводятся к арифметическим погрешностям.

### 1.3. Методы шкалирования

Методы получения от респондента необходимой для шкалирования информации делятся на две группы: сравнительные и несравнительные. К группе сравнительных методов относятся: метод попарного сравнения, метод упорядочения, шкалирование с постоянной суммой и др.

Метод попарного сравнения будет более подробно рассмотрен в следующей главе.

В случае использования *метода упорядочения* респондентам предлагается упорядочить не пару, а сразу несколько объектов: самому предпочтительному объекту приписать значение 1, следующему – 2 и т.д. При упорядочении обязательно присутствует транзитивность ответов (если объект А оценен выше объекта В, а объект В – выше С, то, естественно, А на шкале рангов будет находиться выше объекта С), в то время как, применяя метод попарных сравнений, можно получить искаженное представление о «соотношении сил» между объектами, не заметив частичных предпочтений. Процедура упорядочения приводит к измерению свойств ранжируемого ряда в шкале отношений.

При *распределении постоянной суммы* респондентов просят проставить каждому из содержащихся в списке объектов балльные оценки таким образом, чтобы их сумма равнялась определенному числу, например, 100 баллам. Так, в исследовании рынка винной продукции нужно было распределить 100 баллов между шестью различными показателями качества вина

| *Показатели качества вина* | *Количество баллов* |
|---|---|
| *Вкус вина (букет)* | |
| *Известность марки* | |
| *Страна-производитель* | |
| *Высокая цена* | |
| *Сорт винограда* | |
| *Оформление бутылки* | |
| *Всего баллов* | *100* |

Данные, полученные по этой методике, более приближены к интервальной шкале, так как в ответах респондентов уже содержится информация о величине ощущаемых ими различий между оцениваемыми объектами или характеристиками объекта.

При несравнительном шкалировании используются два вида шкал: непрерывные и дискретные. При использовании непрерывных шкал респонденты могут поставить отметку в любой точке отрезка.

В случае использования дискретных шкал респондент должен выбрать один ответ из определенного упорядоченного набора. Основные типы дискретных шкал – шкала Лайкерта, шкала семантического дифференциала, шкала Стапеля.

*Шкала Лайкерта* – это оценка некоторого высказывания или характеристики какого-либо объекта Чаще всего оценка проводится по симметричной, обычно пятибалльной шкале со значениями:

1) *безусловно согласен;*
2) *скорее согласен;*
3) *согласен и не согласен в равной мере;*
4) *скорее не согласен;*
5) *абсолютно не согласен.*

или:

1) *безусловно нравится;*
2) *скорее нравится;*
3) *нравится и не нравится в равной мере;*
4) *скорее не нравится;*
5) *безусловно не нравится.*

*Шкала семантического дифференциала* – это чаще всего семибалльная шкала, крайним точкам которой поставлены в соответствие два диаметрально противоположных по семантическому значению понятия, например: *холодный* и *горячий*, *слабый* и *сильный* и т.д. Позиции нумеруются от –3 до +3 или от 1 до 7. В первом случае нейтральное значение равно нулю, во втором – 4. Информация, используемая в шкалах семантического дифференциала, измеряется в шкале отношений. Ее преобразование в информацию, заключающуюся в семантическом дифференциале, относится к шкале разностей.

Например:

*Оцените, пожалуйста, по предложенным шкалам вкус этого продукта:*

| | | |
|---|---|---|
| *сладкий* | 1 2 3 4 5 6 7 | *не сладкий* |
| *соленый* | 1 2 3 4 5 6 7 | *не соленый* |
| *терпкий* | 1 2 3 4 5 6 7 | *не терпкий* |
| *приятный* | 1 2 3 4 5 6 7 | *неприятный* |
| *острый* | 1 2 3 4 5 6 7 | *пресный* |
| *натуральный* | 1 2 3 4 5 6 7 | *искусственный* |

*Шкала Стапеля* – симметричная, обычно десятибалльная, шкала: от –5 до +5. В отличие от первых двух шкал здесь нет нейтральной точки.

Респондента просят сказать, в какой мере относится или не относится к объекту та или иная характеристика. Если она полностью относится к объекту, выбирается значение +5, если наоборот, то –5.

*Оцените, в какой степени характеризуется выбранное Вами мыло следующими показателями*:

+5 +4 +3 +2 +1 *увлажняющая способность* –1 –2 –3 –4 –5
+5 +4 +3 +2 +1 *отмывающая способность* –1 –2 –3 –4 –5
+5 +4 +3 +2 +1 *пенистость* –1 –2 –3 –4 –5
+5 +4 +3 +2 +1 *мягкость* –1 –2 –3 –4 –5

Исходя из указанных принципов можно разработать различные варианты шкал. Окончательный выбор варианта делается на основе испытания уровня надежности измерения. Данная проблема решается путем выявления точности измерения, устойчивости и обоснованности.

Понятие *точности* связано с возможностью учета в результате измерения различного рода систематических ошибок. Систематические ошибки имеют некоторую стабильную природу возникновения: либо они являются постоянными, либо меняются по определенному закону. Например, если исходный признак не обладает дифференцирующей способностью в отношении объекта измерения, то прежде всего необходимо ликвидировать или уменьшить такого рода недостатки шкалы и только затем использовать ее в исследовании.

*Устойчивость* характеризует степень совпадения результатов измерения при повторных применениях измерительной процедуры и описывается величиной случайной ошибки. Она определяется постоянством подхода респондента к ответам на одинаковые или подобные вопросы. Для оценки устойчивости используют повторное тестирование или включение в анкету эквивалентных вопросов, т.е. вопросов по той же проблеме, но сформулированных по-другому.

*Обоснованность* связана с доказательством соответствия между тем, что измерено, и тем, что должно быть измерено. В отличие от точности и устойчивости, которые могут быть измерены достаточно строго, критерии обоснованности определяются либо на основе логических рассуждений, либо на основе косвенных показателей. Обычно применяется сравнение данных одной методики с данными других методик или исследований.

Кроме того, к выше названным критериям выбора шкалы необходимо отнести еще один – связанный с возможностью математической обработки результатов экспертного оценивания, которые измерены в выбранной шкале.

# 2. МЕТОДЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО И ГРУППОВОГО ЭКСПЕРТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

## 2.1. Метод парных сравнений

*Метод парных сравнений* впервые был разработан психофизиологом Л. Терстоуном в 1927г. для ранжирования преступлений по степени серьезности. Согласно этому методу, респонденту предъявляют два объекта и просят выбрать наиболее из них предпочтительный согласно его собственным критериям. При таком способе сравнения объектов удается получить наиболее точное отражение субъективных предпочтений, поскольку на выбор здесь налагается гораздо меньше ограничений, чем при других видах экспертного оценивания. Кроме того, каждый раз эксперту приходится делать выбор всего из двух альтернатив, т.е. решать задачу, уровень неопределенности которой не превышает одного бита. Естественно, это облегчает работу экспертов, но одновременно ставит вопрос о возможно недостаточном объеме информации для получения надежных оценок. Опасения по этому поводу напрасны. Один бит информации требуется при сравнении только одной пары из $n$ объектов, а сравниваемых пар $n(n–1)/2$ и, следовательно, так как $n(n-1)/2 > \log_2(n!)$, то и объем информации, затраченный на решение задачи ранжирования, в сумме превосходит тот, который затрачивается при других способах ее решения.

Для получения парных сравнений объектов $A_i$ $(i=\overline{1,n})$ используется анкетирование, предусматривающее заполнение таблицы, в которой количество строк равно количеству столбцов.

Т а б л и ц а 2.1

**Матрица парных сравнений**

| *Объекты* | $A_1$ | $A_2$ | . . . . . . | $A_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | . . . . . . | $a_{1n}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | . . . . . . | $a_{2n}$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . . . . | . . . |
| $A_n$ | $a_{n1}$ | $a_{n2}$ | . . . . . . | $a_{nn}$ |

Значение элемента, стоящего на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца, определяется по формуле

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \mathrm{A}_i \prec \mathrm{A}_j \\ 1, & \mathrm{A}_i \sim \mathrm{A}_j \\ 2, & \mathrm{A}_i \succ \mathrm{A}_j \end{cases}. \qquad (2.1)$$

В соответствии с этой формулой на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца должен стоять 0, если объект с номером $i$, по мнению эксперта, менее значим, чем объект с номером $j$; должна стоять 1, если объекты равнозначны, и 2, если $i$-й объект превосходит $j$-й. Полностью заполненная таблица в этом случае представляет собой квадратную матрицу $\mathbf{A}$, элементы которой удовлетворяют соотношению $a_{ij} + a_{ji} = 2$.

В некоторых случаях, когда эксперт имеет возможность более дифференцированно оценивать сравниваемые объекты, для заполнения матрицы можно использовать следующее правило:

$$a_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \mathrm{A}_i \prec \mathrm{A}_j \\ 1, & \mathrm{A}_i \sim \mathrm{A}_j, \\ 1/x_{ij}, & \mathrm{A}_i \succ \mathrm{A}_j \end{cases} \qquad (2.2)$$

где $x_{ij}$ показывает, во сколько раз объект с номером $i$, по мнению эксперта, предпочтительнее объекта с номером $j$. Так заполненная таблица представляет собой квадратную матрицу $\mathbf{A}$, элементы которой удовлетворяют соотношению $a_{ij} a_{ji} = 1$.

Метод вычисления весовых коэффициентов, в соответствии со значениями которых ранжируются объекты, представляет собой итерационную процедуру

$$\mathbf{p}^t = \mathbf{A}\mathbf{p}^{t-1}, \qquad (2.3)$$

где $\mathbf{p}^0 = (1, 1, \ldots, 1)'$.

Чтобы избежать в процессе итерирования получения чрезвычайно больших весовых значений, компоненты вектора $\mathbf{p}^t$ на каждом шаге нормируются путем деления на сумму

$$l^t = \sum_i p_i^t = \sum_i \sum_j a_{ij} p_j^{t-1}. \qquad (2.4)$$

С учетом нормирующего множителя процедура вычисления весовых коэффициентов записывается следующим образом:

$$\mathbf{p}^t = \frac{1}{l^t} \mathbf{A}\mathbf{p}^{t-1}. \qquad (2.5)$$

Ее применение приводит к получению весовых коэффициентов $p_i$ в виде относительных величин, так как $\sum_i p_i^t = 1$. Вычислительный процесс продолжается до момента, когда весовые коэффициенты, полученные на двух соседних итерациях, будут незначительно отличаться друг от друга, т.е.

$$\max_i \left| p_i^t - p_i^{t-1} \right| < e \,, \qquad (2.6)$$

где $e$ – достаточно малое положительное число, задающее точность расчетов.

Матрица парных сравнений неотрицательна ($a_{ij} \geq 0$ для любых $i$, $j$) и неразложима, т.е. среди номеров строк и столбцов нельзя выделить такие подмножества $\mathrm{I}$ и $\mathrm{J}$, что $a_{ij} = 0$ для всех $i \in \mathrm{I}$ и $j \in \mathrm{J}$. Другими словами неразложимость матрицы $\mathbf{A}$ означает, что любыми перестановками строк и столбцов нельзя ее привести к виду

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \qquad (2.7)$$

где $\mathbf{A}_{11}$ и $\mathbf{A}_{22}$ – квадратные подматрицы.

В соответствии с широко известной теоремой Фробениуса – Перрона у таких матриц максимальное собственное значение является действительным положительным числом $l$, которому отвечает собственный вектор $\mathbf{p}$ с положительными компонентами. Причем, и собственное число, и собственный вектор получаются в виде предельных значений

$$l = \lim_{t \to \infty} l^t, \qquad \mathbf{p} = \lim_{t \to \infty} \mathbf{p}^t, \qquad (2.8)$$

представляя, по сути, результат применения итерационной процедуры.

Содержательную интерпретацию итерационной процедуры рассмотрим на простом примере. Пусть требуется оценить степень значимости пяти объектов $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \mathrm{A}_5$. В результате опроса одного из экспертов была получена следующая матрица парных сравнений

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последовательность итераций без учета нормирующего множителя выглядит следующим образом:

$$\mathbf{p}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^2 = \begin{pmatrix} 33 \\ 21 \\ 18 \\ 29 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^3 = \begin{pmatrix} 147 \\ 93 \\ 94 \\ 137 \\ 94 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^4 = \begin{pmatrix} 709 \\ 469 \\ 462 \\ 617 \\ 462 \end{pmatrix}, \ \dots$$

Итерированная значимость первого порядка $\mathbf{p}^1$ (так будем называть промежуточные результаты итерационного процесса) представляет собой сумму «очков», набранных каждым объектом в результате экспертного сравнения. Расчеты показали, что одинаковое количество очков набрали $A_2$, $A_4$ и $A_3, A_5$. Если предпочтение устанавливать по итерированной значимости первого порядка, то эти пары объектов следует считать одинаково значимыми. Однако, как показывают дальнейшие расчеты, это не так.

При подсчете итерированной значимости второго порядка каждому объекту засчитываются не только собственные «очки», но и те, причем удвоенные, которые набрали проигравшие ему сравнение. Поэтому очень важно, в сравнении с какими «противниками» (сильными или слабыми) были заработаны «очки». Эти рассуждения хорошо иллюстрируют следующие расчеты:

$$p_2^2 = 0 \cdot 7 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 21;$$
$$p_4^2 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 = 29,$$

из которых становится понятным механизм формирования итерированных предпочтений, обеспечивший превосходство 4-го объекта над 2-ым.

Метод парных сравнений был рассмотрен применительно к обработке результатов опроса одного эксперта. Индивидуальные экспертные оценки имеют право на существование и даже практическое использование, но уверенность в их объективности очень низкая. Поэтому предпочтение отдают групповым экспертным оценкам. В простейшем случае за групповую оценку принимают усредненные значения индивидуальных оценок. Применение такого способа предполагает, что компетентность экспертов, принимавших участие в экспертизе, одинакова.

## 2.2. Групповое оценивание с одновременным анализом компетентности экспертов

Высказанное в предыдущем параграфе предположение о том, что «компетентность экспертов, принимавших участие в экспертизе, одинакова», в подавляющей большинстве случаев следует признать несостоятельным. Нетрудно указать и причины несостоятельности. Во-первых, сформировать однородную группу экспертов практически невозможно. Во-вторых, однородная группа совсем необязательно обеспечивает высокую объективность результатов экспертизы. Скорее наоборот, результаты опроса такой группы могут оказаться смещенными, хотя и согласованными. Поэтому рациональный взгляд на эту проблему подсказывает решение, суть которого в том, чтобы при построении групповой оценки не стремиться к созданию однородной группы, а предусмотреть возможность учитывать компетентность каждого эксперта. В связи с этим возникает вопрос о процедуре определения весовых коэффициентов, характеризующих компетентность экспертов.

Пусть опрос группы из $m$ экспертов позволил получить оценки значимости $n$ объектов. Результаты опроса представлены в виде прямоугольной табл. 2.2, в каждой строке которой, как нетрудно понять, стоят оценки, полученные соответствующим объектом, а в столбце – оценки, поставленные соответствующим экспертом.

Т а б л и ц а 2.2

**Результаты опроса группы экспертов**

| *Объекты* | *Эксперты* | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $Э_1$ | $Э_2$ | . . . . . . | $Э_m$ |
| $A_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | . . . . . . | $p_{1m}$ |
| $A_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | . . . . . . | $p_{2m}$ |
| ⋮ | | ⋮ | . . . . . . | ⋮ |
| $A_n$ | $p_{n1}$ | $p_{n2}$ | . . . . . . | $p_{nm}$ |

Изложение формальной процедуры итерационного уточнения групповой оценки и коэффициентов компетентности начнем с обозначений:

$\mathbf{P}$ – прямоугольная $n \times m$ матрица с элементами $p_{ij}$, представляющими собой оценки $i$-го объекта $j$-м экспертом;

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \mathbf{K}, p_n)'$ – вектор групповой оценки;

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \mathbf{K}, v_m)'$ – вектор весовых коэффициентов компетентности;

$\mathbf{p}_{i\bullet}$ – $i$-я строка матрицы $\mathbf{P}$;

$\mathbf{p}_{\bullet j}$ – $j$-й столбец матрицы $\mathbf{P}$.

В качестве начального приближения весовых коэффициентов компетентности удобно взять вектор

$$\mathbf{v}^0 = (v_1^0, v_2^0, \mathbf{K}, v_m^0)' = ({}^1\!/_m, {}^1\!/_m, \mathbf{K}, {}^1\!/_m)', \tag{2.9}$$

равенство компонент которого означает, что эксперты не различимы по уровню компетентности. С помощью этого вектора легко определяется групповая оценка

$$\mathbf{p}^1 = v_1\mathbf{p}_{\bullet 1} + v_2\mathbf{p}_{\bullet 2} + \mathbf{L} + v_m\mathbf{p}_{\bullet m} = \mathbf{P}\mathbf{v}^0. \qquad (2.10)$$

Затем полученные значения групповой оценки используются для уточнения коэффициентов компетентности. С этой целью строки матрицы $\mathbf{P}$ умножаются на оценки первой итерации $\mathbf{p}^1$ и суммируются

$$\mathbf{v}^1 = p_{1\bullet}^1\mathbf{p}_{1\bullet} + p_{2\bullet}^1\mathbf{p}_{2\bullet} + \mathbf{L} + p_{n\bullet}^1\mathbf{p}_{n\bullet}. \qquad (2.11)$$

Так как коэффициенты компетентности являются нормированными величинами, то и полученный результат необходимо пронормировать, разделив его на сумму

$$l^1 = \sum_{j=1}^{m} v_j^1 . \qquad (2.12)$$

После нормирования расчеты повторяются в той же последовательности, образуя таким образом итерационную процедуру параллельных расчетов. В матричной форме эта процедура записывается следующим образом:

$$\mathbf{p}^t = \mathbf{P}\,\mathbf{v}^{t-1} \qquad (2.13)$$

$$\mathbf{v}^t = \frac{1}{l^t}[\mathbf{p}^t]'\mathbf{P}. \qquad (2.14)$$

Если в (2.13) подставить (2.14) с измененным порядком сомножителей, а в (2.14) подставить (2.13), то окончательно итерационный процесс записывается в виде

$$\mathbf{p}^t = \frac{1}{l^t}\mathbf{P}\,\mathbf{P}'\mathbf{p}^{t-1} \qquad (2.15)$$

$$\mathbf{v}^t = \frac{1}{l^t}\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{v}^{t-1}. \qquad (2.16)$$

Так как столбцы матрицы $\mathbf{P}$ в силу того, что получены с помощью метода парных сравнений, неотрицательны, то и сама матрица неотрицательна и, следовательно, неотрицательны матрицы $\mathbf{P}\,\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}'\mathbf{P}$. Кроме того, можно показать, что в случае неразложимости $\mathbf{P}$ , они тоже неразложимы.

Таким образом, и групповая оценка значимости объектов $\mathbf{p}$ , и весовые коэффициенты компетентности экспертов $\mathbf{v}$ могут быть получены как характеристические векторы матриц $\mathbf{P}\,\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}'\mathbf{P}$, причем эти векторы являются предельными величинами

$$\mathbf{p} = \lim_{t\to\infty}\mathbf{p}^t, \qquad \mathbf{v} = \lim_{t\to\infty}\mathbf{v}^t. \qquad (2.17)$$

Как и в случае обработки матрицы парных сравнений, расчеты ведутся до достижения заданной точности.

В тех случаях, когда проводилась самооценка или взаимная оценка компетентности, полученные с помощью итерационной процедуры результаты могут сравниваться с ними для уточнения общих характеристик экспертной группы.

В качестве примера рассмотрим ситуацию, предусматривающую вычисление групповой оценки коэффициентов относительной важности, позволяющих сравнивать между собой восемь объектов. Групповая оценка вычисляется по результатам индивидуального оценивания. Табл. 2.3 содержит эти результаты.

Т а б л и ц а 2.3

**Индивидуальные экспертные оценки в виде весовых коэффициентов**

| *Объекты* | *Эксперты* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 0,3679 | 0,1840 | 0,3679 | 0,3679 | 0,3679 | 0,1840 |
| 2 | 0,1840 | 0,3679 | 0,1226 | 0,0920 | 0,0920 | 0,3679 |
| 3 | 0,1226 | 0,0920 | 0,1840 | 0,1840 | 0,1840 | 0,0920 |
| 4 | 0,0920 | 0,1226 | 0,0613 | 0,1226 | 0,1226 | 0,1226 |
| 5 | 0,0736 | 0,0736 | 0,0920 | 0,0613 | 0,0736 | 0,0736 |
| 6 | 0,0613 | 0,0613 | 0,0736 | 0,0736 | 0,0526 | 0,0526 |
| 7 | 0,0526 | 0,0526 | 0,0460 | 0,0460 | 0,0460 | 0,0613 |
| 8 | 0,0460 | 0,0460 | 0,0526 | 0,0526 | 0,0613 | 0,0460 |

$$\mathbf{PP'} = \begin{pmatrix} 0{,}6092 & 0{,}3159 & 0{,}2820 & 0{,}1918 & 0{,}1376 & 0{,}1170 & 0{,}0911 & 0{,}0951 \\ 0{,}3159 & 0{,}3366 & 0{,}1467 & 0{,}1373 & 0{,}0914 & 0{,}0738 & 0{,}0657 & 0{,}0592 \\ 0{,}2820 & 0{,}1467 & 0{,}1335 & 0{,}0903 & 0{,}0643 & 0{,}0547 & 0{,}0423 & 0{,}0447 \\ 0{,}1918 & 0{,}1373 & 0{,}0903 & 0{,}0724 & 0{,}0470 & 0{,}0396 & 0{,}0329 & 0{,}0327 \\ 0{,}1376 & 0{,}0914 & 0{,}0643 & 0{,}0470 & 0{,}0339 & 0{,}0280 & 0{,}0227 & 0{,}0227 \\ 0{,}1170 & 0{,}0738 & 0{,}0547 & 0{,}0396 & 0{,}0280 & 0{,}0239 & 0{,}0189 & 0{,}0190 \\ 0{,}0911 & 0{,}0657 & 0{,}0423 & 0{,}0329 & 0{,}0227 & 0{,}0189 & 0{,}0156 & 0{,}0153 \\ 0{,}0951 & 0{,}0592 & 0{,}0447 & 0{,}0327 & 0{,}0227 & 0{,}0190 & 0{,}0153 & 0{,}0156 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P'P} = \begin{pmatrix} 0{,}2068 & 0{,}1720 & 0{,}2023 & 0{,}2000 & 0{,}2000 & 0{,}1719 \\ 0{,}1720 & 0{,}2068 & 0{,}1534 & 0{,}1474 & 0{,}1474 & 0{,}2067 \\ 0{,}2023 & 0{,}1534 & 0{,}2068 & 0{,}2040 & 0{,}2040 & 0{,}1531 \\ 0{,}2000 & 0{,}1474 & 0{,}2040 & 0{,}2068 & 0{,}2064 & 0{,}1471 \\ 0{,}2000 & 0{,}1474 & 0{,}2040 & 0{,}2064 & 0{,}2068 & 0{,}1473 \\ 0{,}1719 & 0{,}2067 & 0{,}1531 & 0{,}1471 & 0{,}1473 & 0{,}2068 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0{,}3105 \\ 0{,}1996 \\ 0{,}1445 \\ 0{,}1067 \\ 0{,}0747 \\ 0{,}0627 \\ 0{,}0506 \\ 0{,}0508 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0{,}1759 \\ 0{,}1562 \\ 0{,}1717 \\ 0{,}1700 \\ 0{,}1701 \\ 0{,}1561 \end{pmatrix}.$$

## 2.3. Экспертное оценивание объектов с автоматическим отражением значимости их частных характеристик

Проиллюстрируем прикладные возможности изложенной выше процедуры и в случае экспертного оценивания с заранее незаданными величинами значимости частных характеристик объектов.

Как известно, одним из условий эффективного функционирования web-сайта является то, что он должен обладать теми характеристиками, которые имеют для пользователей Интернета первостепеннейшее значение. Такие характеристики, как правило, являются качественными, что, безусловно, затрудняет применение формализованных методов для их оценки и анализа. Единственно удобной процедурой является экспертное парное сравнение характеристик web-сайта с последующим вычислением Интегральной его оценки и установлением значимости каждой из этих характеристик.

Проведем оценивание web-сайтов пяти крупнейших российских банков (см. табл. 2.4) по таким критериям, не имеющим количественного выражения, как дизайн, степень информативности и удобство навигации для пользователя.

Таблица 2.4

**Интернет-адреса банков**

| № | Наименование банка | Адрес web-сайта |
|---|---|---|
| 1. | Промсвязьбанк | www.psbank.ru |
| 2. | МДМ-Банк | www.mdmbank.ru |
| 3. | Сбербанк России | www.sbrf.ru |
| 4. | Внешторгбанк | www.vtb.ru |
| 5. | Банк «МЕНАТЕП СПб» | www.menatepspb.com |

*Решение в MS Excel*

1. Заполнение матриц парных сравнений web-сайтов банков по каждому из выбранных для оценки критериев (см. табл. 2.5).

Т а б л и ц а 2.5

**Матрицы парных сравнений web-сайтов банков $(A_1, A_2, A_3)$**

| Характеристики web-сайтов | | | Информа-тивность | | | | | Дизайн | | | | | Удобство навигации | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Наименование банка | *web-сайты* | | *web-сайты* | | | | | *web-сайты* | | | | | *web-сайты* | | | | |
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Промсвязьбанк | | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| МДМ-Банк | | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 |
| Сбербанк России | | 3 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| Внешторгбанк | | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Банк «МЕНАТЕП СПб» | | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

2. «Оцифровка» характеристик сайта (вычисление векторов весовых коэффициентов) и нахождение интегральной оценки web-сайта по формуле (2.15).

Результаты расчетов по этим формулам представлены в табл. 2.6.

Т а б л и ц а 2.6

**Промежуточные расчеты, интегральная оценка web-сайтов, их ранги**

| Наименование банка | «Оцифровка» характеристик web-сайта | | | Интегральная оценка web-сайта | Ранг web-сайта |
|---|---|---|---|---|---|
| | Информа-тивность | Дизайн | Удобство навигации | | |
| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | | |
| Промсвязьбанк | 0,9096 | 0,0021 | 0,8764 | 0,8794 | 1 |
| МДМ-Банк | 0,0842 | 0,0001 | 0,0108 | 0,0474 | 3 |
| Сбербанк России | 0,0059 | 0,8225 | 0,0007 | 0,0161 | 4 |
| Внешторгбанк | 0,0003 | 0,1536 | 0,1120 | 0,0568 | 2 |
| Банк «МЕНАТЕП СПб» | 0,0000 | 0,0217 | 0,0000 | 0,0004 | 5 |

3. Определение значимости каждой из характеристик web-сайтов по формуле (2.16)

Т а б л и ц а 2.7

**Значимость характеристик web-сайта**

| Характеристика web-сайта | Весовой ко-эффициент |
|---|---|
| Информативность | 0,5008 |
| Дизайн | 0,0148 |
| Удобство навигации | 0,4844 |

Анализ табл. 2.7 позволяет сделать вывод о том, что, согласно мнению данного эксперта, в наибольшей степени с интегральной оценкой коррелирует «информативность», а в наименьшей – «удобство навигации».

# 3. ПРОВЕРКА СОГЛАСОВАННОСТИ МНЕНИЙ ЭКСПЕРТОВ

## 3.1. Ранговые коэффициенты корреляции

Не вызывает сомнений тезис о том, что групповые экспертные оценки должны отражать согласованное мнение экспертов. Следовательно, перед формированием групповой оценки необходимо выяснить, можно ли для этих целей использовать полученные в результате опроса индивидуальные оценки. Выясняется этот вопрос с помощью рангового коэффициента корреляции и коэффициента конкордации. Эти коэффициенты применимы в тех случаях, когда результаты экспертного опроса представимы в ранговой шкале.

С помощью *рангового коэффициента корреляции* устанавливается теснота связи между двумя ранжированными рядами, интерпретируемая как согласованность мнений двух экспертов. В практике анализа согласованности применяется два коэффициента: Спирмена и Кендалла.

Ранговый коэффициент корреляции Спирмена определяется формулой, аналогичной обычному коэффициенту корреляции

$$r = \frac{\mathrm{K}_{12}}{\sqrt{\mathrm{D}_1 \mathrm{D}_2}}\ , \tag{3.1}$$

где $\mathrm{K}_{12}$ – величина ковариации между первой и второй ранжировками;

$\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ – дисперсии ранжировок.

Ковариация и дисперсии вычисляются по данным ранжировок с использованием известных формул

$$\mathrm{K}_{12} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(p_{i1} - \bar{p}_1)(p_{i2} - \bar{p}_2), \tag{3.2}$$

$$\mathrm{D}_k = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(p_{ik} - \bar{p}_k)^2, \quad \bar{p}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_{ik}, \quad k = 1, 2. \tag{3.3}$$

Рассмотрим случай, когда обе ранжировки не содержат связных рангов, т.е. когда нет повторяющихся рангов, и мы имеем строгое упорядочивание объектов. В этом случае средний ранг представляет собой сумму натуральных чисел от 1 до $n$, деленную на $n$, вне зависимости от порядка, задаваемого ранжировкой, т.е. средние равны между собой

$$\bar{p} = \bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}. \tag{3.4}$$

При вычислении дисперсии, если произвести возведение в квадрат, то под знаком суммы будут стоять натуральные числа и их квадраты. Два ранжированных ряда одинаковой длины могут отличаться друг от друга только перестановкой рангов, но сумма натуральных чисел и их квадратов не зависит от порядка, в котором следуют слагаемые. Из этого следует, что дисперсии любых ранжировок, не имеющих связных рангов, равны между собой

$$\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ik} - 2\overline{p}_k \sum p_{ik} + n\overline{p}_k^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{(n+1)(2n+1)n}{6} - 2\overline{p}_k^2 n + \overline{p}_k^2 n\right] =$$

$$= \frac{n^3 - n}{12(n-1)} = \frac{n(n+1)}{12}, \quad k = 1, 2. \qquad (3.5)$$

Если полученные выражения для $\mathrm{K}_{12}$ и $\mathrm{D}$ собрать вместе, подставив их в (3.1), то выражение для рангового коэффициента корреляции примет следующий вид:

$$r = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} (p_{i1} - \overline{p})(p_{i2} - \overline{p}) =$$

$$= \frac{12}{n^3 - n} \sum_{i=1}^{n} (p_{i1} - \overline{p})(p_{i2} - \overline{p}). \qquad (3.6)$$

Дальнейшее упрощение формулы получается, если использовать легко проверяемое тождество

$$2\sum_{i=1}^{n} (p_{i1} - \overline{p})(p_{i2} - \overline{p}) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} (p_{i1} - \overline{p})^2 + \sum_{i=1}^{n} (p_{i2} - \overline{p})^2 - \sum_{i=1}^{n} (p_{i1} - p_{i2})^2. \qquad (3.7)$$

Первые две суммы правой части одинаковы и, как нетрудно понять, равны

$$\sum_{i=1}^{n} (p_{i1} - \overline{p})^2 + \sum_{i=1}^{n} (p_{i2} - \overline{p})^2 = \frac{2(n^3 - n)}{12}. \qquad (3.8)$$

Заменив в тождестве первые две суммы полученной формулой для их расчета, можем записать

$$\sum_{i=1}^{n} (p_{i1} - \overline{p})(p_{i2} - \overline{p}) = \frac{(n^3 - n)}{12} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (p_{i1} - p_{i2})^2. \qquad (3.9)$$

Подставив данное выражение в (3.6), получаем формулу коэффициента корреляции Спирмена, удобную для практических расчетов

$$r = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{i=1}^{n} (p_{i1} - p_{i2})^2. \qquad (3.10)$$

Возможные значения коэффициента изменяются от – 1 до +1. Из формулы нетрудно понять, что $r = 1$, в тех случаях, когда ранжировки совпадают, т.е. $p_{i1} = p_{i2}$ для всех $i$. Значение $r = -1$ получается, если ранжировки имеют противоположный порядок. В отличие от предыдущего, это не тривиальный случай, требующий специального рассмотрения. Доказательство основано на подсчете суммы квадратов для случаев нечетного и четного $n$.

Пусть $n$ нечетное. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}(p_{i1}-p_{i2})^2 =$$

$$=[(-(n-1))^2+\mathbf{K}+(-4^2)+(-2^2)+0+2^2+4^2+\mathbf{K}+(n-1)^2]=$$

$$=2\cdot 2^2\cdot\left[1^2+2^2+\mathbf{K}+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right]=$$

$$=2\cdot 2^2\cdot\frac{1}{6}\left[\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(\frac{2(n-1)}{2}+1\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]=$$

$$=2\cdot 2^2\cdot\frac{1}{6}\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot n\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]=\frac{2(n+1)\cdot n(n-1)}{6}=$$

$$=\frac{n^3-n}{3}. \qquad (3.11)$$

Полученное выражение позволяет сделать вывод, что, действительно, в случае обратных ранжировок при нечетном числе ранжируемых объектов коэффициент корреляции Спирмена равен $-1$. Покажем, что этот же самый результат получается и в случае четного числа ранжируемых объектов.

Для любого $n$, в том числе и четного, можно записать очевидное соотношение

$$\frac{(n-1)^3-(n-1)}{3}=\frac{n^3-n}{3}-(n^2-n). \qquad (3.12)$$

Пользуясь этим соотношением, сумму квадратов отклонений для четного числа ранжируемых объектов можно представить в виде суммы для нечетного $n$ и добавочного слагаемого

$$\sum_{i=1}^{n}(p_{i1}-p_{i2})^2=\frac{n^3-n}{3}+[(n+1)^2-(n+1)]=\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3}. \qquad (3.13)$$

Таким образом, и для четного числа ранжируемых объектов ($n+1$ четное) в случае обратных ранжировок коэффициент корреляции Спирмена равен $-1$.

Проиллюстрируем расчеты по формуле (3.10) числовым примером.

Пусть два эксперта провели оценку сравнительной значимости семи объектов. Каждому объекту в соответствии с полученной оценкой приписали ранг. Требуется оценить с помощью рангового коэффициента уровень согласованности мнений экспертов. Полученные ранжировки и промежуточные расчеты приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

**Результаты ранжирования**

| Эксперты | Объекты | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ |
| $Э_1$ | 2 | 1 | 4 | 3 | 5 | 7 | 6 |
| $Э_2$ | 1 | 2 | 5 | 4 | 3 | 6 | 7 |
| $p_{i1}-p_{i2}$ | 1 | -1 | -1 | -1 | 2 | 1 | -1 |
| $(p_{i1}-p_{i2})^2$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 |

$$r = 1-\frac{6}{n^3-n}\sum_{i=1}^{n}(p_{i1}-p_{i2})^2 = 1-\frac{6}{336}\cdot 10 = 0{,}821.$$

Полученная оценка рангового коэффициента корреляции является случайной величиной и, следовательно, необходимо проверить ее значимость. Для этого определяется порог, ниже которого коэффициент корреляции считается незначимым. Определение порога осуществляется в предположении, что имеет место независимость ранжировок, т.е. $H_0: r=0$. При выполнении нуль-гипотезы отклонения расчетных значений коэффициента корреляции от нуля носят случайный характер и подчиняются нормальному распределению. Только в том случае, если отклонение окажется очень большим, нуль-гипотеза отклоняется, и коэффициент корреляции считается значимым. Очень большим считается отклонение, превосходящее по величине установленный порог. Для установления порога $d$ используется приближенная формула

$$d = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\Psi\left(1-\frac{a}{2}\right), \qquad (3.14)$$

в которой $n$ – количество ранжированных объектов;

$a$ – вероятность, задающая уровень возможной ошибки;

$\Psi(x)=\Phi^{-1}(x)$ – функция обратная функции нормального закона распределения.

В практических расчетах чаще всего $a = 0{,}05$. В аргумент функции вероятность $a$ входит деленной на 2, так как отклонения коэффициента корреляции от нуля возможно в обе стороны (двусторонний критерий).

Определим пороговое значение для нашего примера

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}\Psi\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right) = \frac{1}{2{,}449}\Psi(0{,}975) = 0{,}800.$$

Так как $r = 0{,}821 > 0{,}800 = d$, то нуль-гипотеза о независимости экспертных мнений отвергается, а коэффициент корреляции признается значимым.

В тех случаях, когда ранжировки содержат связные ранги, коэффициент корреляции корректируется. Прежде чем записать формулу для вычисления коэффициента корреляции, поясним механизм введения связных рангов.

Связные ранги вводятся в тех случаях, когда в ранжируемой совокупности некоторые объекты получили одинаковые оценки. Тогда каждому из этих объектов приписывается средняя величина порядковых номеров, которые должны получить одинаково оцененные объекты. Например, пусть оценивались семь объектов, два из которых признаны одинаково значимыми. Если их выстроить в порядке значимости, то объекты с одинаковой значимостью делят между собой второе и третье место. Так как их нельзя предпочесть друг другу, то каждому из них приписывается средний ранг

$$\bar{r}_{23} = (r_2 + r_3)/2 = (2+3)/2 = 2{,}5$$

и последовательность рангов, соответствующая значимости объектов, выглядит следующим образом:

1; 2,5; 2,5; 4; 5; 6; 7.

Расчет скорректированного на наличие связанных рангов коэффициента корреляции осуществляется по следующей формуле:

$$\tilde{r} = \frac{r + \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2}{\sqrt{(1-\mathrm{T}_1)(1-\mathrm{T}_2)}}, \qquad (3.15)$$

в которой $r$ – оценка коэффициента ранговой корреляции, рассчитанная в соответствии с (3.10), а величины $\mathrm{T}_1$ и $\mathrm{T}_2$ вычисляются по формулам

$$\mathrm{T}_1 = \frac{3}{n^3 - n}\sum_i k_{1i}(k_{1i} - 1) \quad \text{и} \quad \mathrm{T}_2 = \frac{3}{n^3 - n}\sum_i k_{2i}(k_{2i} - 1), \qquad (3.16)$$

где $k_{1i}$, $k_{2i}$ – количество повторяющихся рангов в $i$-й подпоследовательности соответствующих ранжировок, полученных от 1-го и 2-го эксперта.

Данные для вычисления скорректированного коэффициента ранговой корреляции с промежуточными расчетами приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

**Данные для вычисления скорректированного коэффициента ранговой корреляции**

| Эксперты | Объекты | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ |
| $Э_1$ | 2 | 1 | 4 | 5 | 5 | 5 | 7 |
| $Э_2$ | 1 | 2,5 | 2,5 | 5 | 4 | 7 | 6 |
| $(p_{i1} - p_{i2})^2$ | 1 | 2,25 | 2,25 | 0 | 1 | 4 | 1 |

$$r = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{i=1}^{n} (p_{i1} - p_{i2})^2 = 1 - \frac{6}{336} \cdot 11{,}5 = 0{,}795;$$

$$\mathrm{T}_1 = \frac{3}{n^3 - n} \sum_i k_{1i}(k_{1i} - 1) = \frac{3}{336} \cdot 3 \cdot (3 - 1) = 0{,}054;$$

$$\mathrm{T}_2 = \frac{3}{n^3 - n} \sum_i k_{2i}(k_{2i} - 1) = \frac{3}{336} \cdot 2 \cdot (2 - 1) = 0{,}018;$$

$$\tilde{r} = \frac{r + \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2}{\sqrt{(1 - \mathrm{T}_1)(1 - \mathrm{T}_2)}} = \frac{0{,}795 + 0{,}054 + 0{,}018}{\sqrt{0{,}946 \cdot 0{,}982}} = \frac{0{,}866}{0{,}964} = 0{,}898.$$

*Коэффициент корреляции Кендалла* в практических расчетах используется гораздо реже, чем коэффициент Спирмена. Поэтому, опуская подробный вывод, приведем только окончательную формулу для его расчета

$$t = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{sign}[(p_{i1} - p_{j1})(p_{i2} - p_{j2})], \qquad (3.17)$$

где $n$ – количество ранжируемых объектов; $p_{ik}$ – ранги объектов;

$$\mathrm{sign}\, x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Как нетрудно понять, с помощью коэффициентов ранговой корреляции нельзя установить согласованность между всеми экспертными оценками. Да они и не предназначены для этого. Но с их помощью удается описать структуру согласованности индивидуальных оценок. Это описание в виде корреляционной матрицы может быть использовано как для более детального анализа однородности всей группы экспертов, так и для деления ее на подгруппы, имеющие более высокий уровень согласованности, чем вся группа.

## 3.2. Коэффициенты конкордации

В целом согласованность мнений всей группы экспертов принято оценивать с помощью дисперсионного или энтропийного коэффициентов конкордации. Рассмотрим сначала *дисперсионный коэффициент*. Он определяется как отношение дисперсии $\mathrm{D}$, характеризующей реальный разброс между ранжировками к величине $\mathrm{D}_{\max}$, характеризующей максимально возможный разброс

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}_{\max}}. \qquad (3.18)$$

Будем считать, что результаты ранжирования представлены табл. 2.2. Тогда дисперсия может быть вычислена по формуле

$$\mathrm{D} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(p_i - \bar{p})^2\,, \qquad (3.19)$$

где $$p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\,,\ \ (i = \overline{1,\ n}); \qquad \bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\,.$$

При вычислении дисперсии, каждый раз приходится вычислять среднее. Чтобы упростить эти вычисления, выразим среднее значение через количество оцениваемых объектов $n$ и количество экспертов $m$, принявших участие в экспертизе. Для этого сначала вычислим сумму рангов, которые приписываются объектам каждым экспертом

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \frac{n(n+1)}{2}\,, \qquad j = \overline{1,m}\,, \qquad (3.20)$$

а затем средний ранг представим в удобном для расчетов виде

$$\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)m}{2}\,. \qquad (3.21)$$

Для вычисления максимально возможного значения дисперсии проведем, используя очевидное равенство

$$\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m} p_{ij} = n\bar{p}\,, \qquad (3.22)$$

преобразование формулы (3.19)

$$\mathrm{D} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(p_i - \bar{p})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\right)^2 - 2\bar{p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} + n\bar{p}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\right)^2 - n\bar{p}^2\right]. \qquad (3.23)$$

Преобразованная формула позволяет понять, что максимальное значение дисперсии достигается при наибольшем значении первого члена в квадратных скобках. В свою очередь, наибольшее значение этого члена достигается в том случае, когда у всех экспертов оценки оказались одинаковыми, т.е. все ранжировки одинаковые. В случае одинаковых ранжировок каждая строка табл. 3.2 будет содержать одинаковые целые числа (ранги) $i$ и, следовательно, величину, возводимую в квадрат, можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = im\,, \qquad (3.24)$$

где $i$ – по сути, величина среднего ранга, которая для данного случая целая.

Теперь величина первого члена в квадратных скобках может быть выражена через $n$ и $m$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\right)^2 = m^2\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{m^2(n+1)(2n+1)n}{6}. \qquad (3.25)$$

Это максимально возможное значение для случая, когда оценивалось $n$ объектов группой из $m$ экспертов, и их точки зрения полностью совпали. Если изменится хотя бы одна из ранжировок, то сумма уменьшится. Действительно, перестановка рангов в одной из ранжировок приведет к изменению некоторых $i$ под знаком суммирования. Причем, если $i_1 < i_2$, то $i_1$ возрастет на величину $(i_2 - i_1)/m$, а $i_2$ – уменьшается на эту же величину. Тогда с помощью простых вычислений можно показать, как изменяется в целом вся сумма в зависимости от тех изменений, которые произошли с двумя слагаемыми

$$\left(i_1 + \frac{i_2 - i_1}{m}\right)^2 + \left(i_2 - \frac{i_2 - i_1}{m}\right)^2 =$$
$$= i_1^2 + i_2^2 + 2\left(\frac{i_2 - i_1}{m}\right)\left(-(i_2 - i_1) + \frac{i_2 - i_1}{m}\right). \qquad (3.26)$$

Из полученного выражения очевидным образом следует, что она уменьшается на величину дополнительного слагаемого, которое всегда имеет отрицательное значение. Следовательно, дисперсия имеет максимальное значение только в случае полного совпадения мнений экспертов.

Окончательно, подставляя (3.21) в (3.19) и подробно расписывая $\bar{p}$, получаем формулу для вычисления значения максимальной дисперсии

$$\mathrm{D}_{\max} = \frac{m^2(n+1)(2n+1)n}{6} - \frac{n(n-1)^2 m^2}{4} = \frac{m^2(n^3 - n)}{12(n-1)}. \qquad (3.27)$$

Случай, когда дисперсия равна нулю, имеет смысл рассматривать для $m = n$. Именно в этом случае возникает ситуация, когда один и тот же объект оценивается экспертами по-разному, т.е. все $n$ ранжировок разные. А для разных ранжировок первый член в выражении (3.25) равен

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 = \frac{m^2(m+1)^2 n}{4}. \qquad (3.28)$$

При $m = n$ полученное выражение полностью совпадает с выражением для $n\bar{p}^2$ и, следовательно, величина дисперсии в рассматриваемом случае равна нулю.

Если ввести обозначение

$$\mathrm{D} = \frac{1}{n-1}\mathrm{S}, \qquad (3.29)$$

где $\quad \mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{m} p_{ij} - \overline{p} \right)^2,$

то коэффициент конкордации можно записать в компактном виде следующим образом:

$$\mathrm{W} = \frac{12\,\mathrm{S}}{m^2(n^3 - n)}\ . \tag{3.30}$$

Если в полученных ранжировках есть связные ранги, то коэффициент конкордации нужно корректировать, так как максимальное значение дисперсии становится меньше, чем в случае отсутствия связных рангов. Скорректированный коэффициент конкордации вычисляется по формуле

$$\mathrm{W} = \frac{12\,\mathrm{S}}{m^2(n^3 - n) - m\sum_{j=1}^{m} \mathrm{T}_j}, \tag{3.31}$$

где $\mathrm{T}_j$ – показатель связных рангов в $j$-й ранжировке, вычисляемый следующим образом:

$$\mathrm{T}_j = \sum_{k=1}^{H_j} (h_k^3 - h_k)\,.$$

В приведенных формулах $H_j$ – число групп равных рангов в $j$-й ранжировке, $h_k$ – число равных рангов в $k$-й группе связных рангов в ранжировке, полученной от $j$-го эксперта.

Коэффициент конкордации равен 1 в тех случаях, когда мнения экспертов по всем объектам полностью совпадают, и равен нулю, когда все ранжировки различны. В остальных случаях его значения удовлетворяют неравенству $0 \le \mathrm{W} \le 1$, причем, чем ближе это значение к 1, тем теснее связь между ранжировками и надежней групповая оценка.

Коэффициент конкордации, вычисляемый по выведенной формуле, является, по сути, оценкой истинного значения и представляет собой случайную величину. Естественно, возникает необходимость в проверке его значимости.

Для небольших значений $m$ и $n$ разработана специальная таблица распределения частот. Эту таблицу можно найти в Приложении.

Если число объектов $n > 7$, то значимость оценки коэффициента конкордации проверяется с помощью критерия $c^2$. Доказано, что величина

$$c^2 = \mathrm{W}\, m(n-1) \tag{3.32}$$

имеет $c^2$- распределение с $n = (n-1)$ степенями свободы.

Если в некоторых ранжировках есть связанные ранги, то для проверки значимости коэффициента конкордации используется статистика

$$c^2 = \frac{12\,S}{mn(n+1) - (n-1)^{-1}\sum_{j=1}^{m} T_j}. \qquad (3.33)$$

Проверка значимости коэффициента конкордации гарантирует получение статистически надежных результатов.

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий процедуру вычисления коэффициента конкордации. Исходные данные и промежуточные результаты расчетов приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

**Исходные данные и промежуточные расчеты**

| Объекты | Эксперты | | | | | | Сумма рангов | Отклонение от среднего | Квадрат отклонений |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 8 | -19 | 361 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 4 | 4 | 1 | 15 | -12 | 144 |
| 3 | 3 | 4 | 2 | 2 | 2 | 4 | 17 | -10 | 100 |
| 4 | 4 | 3 | 6 | 3 | 3 | 3 | 22 | -5 | 25 |
| 5 | 5 | 5 | 4 | 6 | 5 | 5 | 30 | 3 | 9 |
| 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 7 | 7 | 36 | 9 | 81 |
| 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 6 | 44 | 17 | 289 |
| 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 6 | 8 | 44 | 17 | 289 |
| **Сумма квадратов отклонений S** | | | | | | | | | 1298 |

Количество ранжируемых объектов $n = 8$, количество экспертов, принявших участие в экспертном опросе $m = 6$. Средний ранг равен

$$\overline{p} = \frac{(n+1)m}{2} = \frac{(8+1)\cdot 6}{2} = 27.$$

Отклонения от среднего и квадраты отклонений представлены в двух последних столбцах таблицы. Используя итог последнего столбца, окончательно получаем

$$W = \frac{12\,S}{m^2(n^3 - n)} = \frac{12\cdot 1298}{6^2\cdot(8^3 - 8)} = 0{,}8585.$$

Для проверки значимости коэффициента конкордации вычислим статистику хи-квадрат

$$c^2 = W\,m(n-1) = 0{,}8585\cdot 6\cdot(8-1) = 36{,}0556.$$

Сравнение расчетного значения $c^2$ с табличным значением $c^2 = 36{,}0556 > 14{,}07 = c^2_{табл}$ позволяет отвергнуть гипотезу $W = 0$ и признать, что мнения экспертов согласованы.

*Энтропийный коэффициент конкордации* определяется через величину энтропии $H$ с помощью формулы

$$\mathrm{W}_э = 1 - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}_{\max}}, \qquad (3.34)$$

где $\mathrm{H} = -\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\log_2 p_{ij}$.

В формуле для вычисления энтропии $p_{ij}$ представляет собой оценку вероятности, с которой $i$-му объекту приписывается $j$-й ранг. Вычисляется эта вероятность как отношение числа экспертов $m_{ij}$, приписавших объекту $\mathrm{A}_i$ ранг $j$, к общему числу экспертов

$$p_{ij} = \frac{m_{ij}}{m}. \qquad (3.35)$$

Как известно, максимальное значение энтропии достигается при равновероятном распределении рангов. Если в опросе принимает участие $m$ экспертов, то в случае равномерного распределения число экспертов, приписавших $i$-му объекту $j$-й ранг, равно их среднему числу, приходящемуся на один объект, т.е. $m_{ij} = m/n$. Тогда вероятность определяется с помощью простой формулы

$$p_{ij} = \frac{m}{mn} = \frac{1}{n}. \qquad (3.36)$$

Подставляя эту вероятность в формулу энтропии, получаем

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{n}\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\log_2\frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{m}\log_2 n = m\cdot\log_2 n. \qquad (3.37)$$

Значение энтропийного коэффициента конкордации заключено между нулем и единицей. Если $\mathrm{W}_э = 0$, то это означает, что между ранжировками нет связи. В этом случае ранги равномерно распределены между объектами и, следовательно, $\mathrm{H} = \mathrm{H}_{\max}$. Противоположный случай $\mathrm{W}_э = 1$ соответствует ситуации, когда все эксперты идентично оценили значимость объектов и ранжировки оказались совпадающими между собой. При совпадающих ранжировках $p_{kl} = 1$, а все остальные $p_{ij} = 0$ ($i \neq k,\ j \neq l,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$). Поэтому $\mathrm{H} = 0$ и, следовательно, $\mathrm{W}_э = 1$.

Процедура вычисления энтропийного коэффициента конкордации более громоздкая, чем дисперсионного. Проиллюстрируем основные ее этапы на данных предыдущего примера.

На первом этапе по данным табл. 3.3 сформируем квадратную матрицу размера $n \times n$ с элементами $m_{ij}$, представляющими количество экспертов, приписавших $i$-му объекту $j$-й ранг (см. табл. 3.4).

Т а б л и ц а 3.4

**Частоты экспертных предпочтений**

| О б ъ е к т ы | Р а н г и | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |

Разделив все элементы этой матрицы на число экспертов

$$p_{ij} = \frac{m_{ij}}{m}, \tag{3.38}$$

получим матрицу, элементы которой есть вероятности, с которыми эксперты присваивают ранги соответствующим объектам (см. табл. 3.5).

Т а б л и ц а 3.5

**Вероятности, с которыми эксперты проводят ранжировку объектов**

| О б ъ е к т ы | Р а н г и | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 0,667 | 0,333 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0,333 | 0,167 | 0,167 | 0,333 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0,5 | 0,167 | 0,333 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0,667 | 0,167 | 0 | 0,167 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0,167 | 0,667 | 0,167 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,333 | 0,333 | 0,333 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,167 | 0,333 | 0,5 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,167 | 0,333 | 0,5 |

Из матрицы вероятностей применением преобразования

$$h_{ij} = -p_{ij} \log_2 p_{ij} \tag{3.39}$$

легко получается матрица энтропийных характеристик полученных ранжировок, представленная соответствующей частью табл. 3.6.

Величина максимальной энтропии для рассматриваемого случая равна

$$\mathrm{H}_{\max} = 6 \cdot \log_2 8 = 18.$$

Окончательно получаем

$$\mathrm{W}_{э} = 1 - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}_{\max}} = 1 - \frac{11{,}3022}{18} = 0{,}6279.$$

Т а б л и ц а 3.6

**Энтропийные характеристики ранжировок**

| Объекты | Ранги | | | | | | | | Сумма |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| 1 | 0,39 | 0,528 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,918296 |
| 2 | 0,528 | 0,431 | 0,431 | 0,528 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,918296 |
| 3 | 0 | 0,5 | 0,431 | 0,528 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,459148 |
| 4 | 0 | 0 | 0,39 | 0,431 | 0 | 0,431 | 0 | 0 | 1,251629 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0,431 | 0,39 | 0,431 | 0 | 0 | 1,251629 |
| 6 | | | | | 0,528 | 0,528 | 0,528 | 0 | 1,584963 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,431 | 0,528 | 0,5 | 1,459148 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,431 | 0,528 | 0,5 | 1,459148 |
| Суммарная энтропия H | | | | | | | | | 11,30226 |

Значения дисперсионного и энтропийного коэффициентов корреляции не совпадают. Причем их значения сближаются по мере увеличения степени согласованности мнений экспертов, т.е. чем ближе к единице, тем меньше различие между ними. Самое большое различие между этими коэффициентами имеет место в случае, когда эксперты разделились на две группы с полностью противоположными точками зрения. По дисперсионному коэффициенту конкордации степень согласованности в этой ситуации будет равна нулю, а по энтропийному – 0,5.

## 3.3. Анализ несогласованности мнений экспертов

Пусть сотрудникам отдела маркетинга крупной корпорации необходимо выбрать медиа-план рекламной кампании минеральной воды новой марки в рамках отведенного бюджета. В соответствии с поставленными целями возможны разные варианты этого плана, которые различаются между собой типом телепрограммы, охватом аудитории, стоимостью, а также долей средств рекламного бюджета, направляемых на размещение рекламы в той или иной телепрограмме. Бюджет данной корпорации обычно распределяется в соответствии с согласованным мнением сотрудников, личностные характеристики которых представлены в табл. 3.7. Для выяснения мнений сотрудников был проведен их опрос по типу телепрограмм с использованием методики парных сравнений (см. табл. 3.8). Результаты обработки опроса в виде весовых коэффициентов отражены в табл. 3.9. Требуется проверить согласованность мнений сотрудников для того, чтобы понять, можно ли использовать полученные оценки для распределения рекламного бюджета по телепрограммам.

Т а б л и ц а 3.7

| **Эксперт** | **Пол** | **Квалификация по диплому** | **Возраст, лет** | **Стаж работы в качестве специалиста** |
|---|---|---|---|---|

| | | | | **по рекламе, лет** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | мужской | экономист | 32 | 8 |
| 2 | женский | рекламист | 28 | 6 |
| 3 | мужской | математик | 35 | 8 |
| 4 | женский | журналист | 25 | 2 |
| 5 | женский | дизайнер | 27 | 5 |
| 6 | мужской | экономист | 24 | 1 |
| 7 | мужской | экономист | 38 | 10 |
| 8 | женский | экономист | 33 | 9 |
| 9 | мужской | экономист | 40 | 11 |
| 10 | женский | журналист | 28 | 8 |
| 11 | мужской | программист | 36 | 10 |

Т а б л и ц а 3.8

**Результаты парного сравнения телепрограмм 11 экспертами**

| | **Научно-популярные передачи** | **Аналитические обзоры** | **Юмористические передачи** | **Развлекательные шоу** | **Спортивные шоу** | **Сериалы** | **Художественные фильмы** | **Документальные фильмы** | **Музыкальные шоу** | **Новости** | **Научно-популярные передачи** | **Аналитические обзоры** | **Юмористические передачи** | **Развлекательные шоу** | **Спортивные шоу** | **Сериалы** | **Художественные фильмы** | **Документальные фильмы** | **Музыкальные шоу** | **Новости** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| | **1-й эксперт** | | | | | | | | | | **7-й эксперт** | | | | | | | | | |
| **1** | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| **2** | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **4** | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| **7** | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| **8** | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 |
| **9** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **10** | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| | **2-й эксперт** | | | | | | | | | | **8-й эксперт** | | | | | | | | | |
| **1** | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| **2** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| **3** | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **4** | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **5** | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| **6** | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| **7** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 |
| **8** | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| **9** | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **10** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |

О к о н ч а н и е т а б л. 3.8

| | 3-й эксперт | | | | | | | | | | 9-й эксперт | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| **4** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| **5** | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| **7** | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **8** | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| **9** | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| **10** | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| | **4 эксперт** | | | | | | | | | | **10-й эксперт** | | | | | | | | | |
| **1** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| **2** | 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| **3** | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| **4** | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| **5** | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| **6** | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| **7** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| **8** | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| **9** | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| **10** | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | **5-й эксперт** | | | | | | | | | | **11-й эксперт** | | | | | | | | | |
| **1** | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| **2** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| **3** | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **4** | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **5** | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| **6** | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **7** | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| **8** | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 |
| **9** | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **10** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| | **6-й эксперт** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **1** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | |
| **2** | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | |
| **3** | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | | | | | | | | | | |
| **4** | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | | | | | | | | | | |
| **5** | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 | | | | | | | | | | |
| **6** | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | | | | | | | | | | |
| **7** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | |
| **8** | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | | | | | | | | | | |
| **9** | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | | | | | | | | | | |
| **10** | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | |

Т а б л и ц а 3.9

**Результаты обработки экспертных опросов (весовые коэффициенты)**

| Тип телепрограммы | | Научно-популярные передачи | Аналитические обзоры | Юмористические передачи | Развлекательные шоу | Спортивные шоу | Сериалы | Художественные фильмы | Документальные фильмы | Музыкальные шоу | Новости |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Эксперты | **1** | 0,0182 | 0,1313 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0022 | 0,0000 | 0,8480 |
| | **2** | 0,0000 | 0,0000 | 0,7364 | 0,2010 | 0,0108 | 0,0020 | 0,0003 | 0,0000 | 0,0494 | 0,0000 |
| | **3** | 0,0743 | 0,2226 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0083 | 0,0009 | 0,0028 | 0,0248 | 0,0003 | 0,6660 |
| | **4** | 0,0000 | 0,0024 | 0,6120 | 0,2504 | 0,0316 | 0,0005 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0938 | 0,0094 |
| | **5** | 0,0108 | 0,0000 | 0,4936 | 0,2510 | 0,0640 | 0,0322 | 0,0108 | 0,0108 | 0,1270 | 0,0000 |
| | **6** | 0,0000 | 0,0000 | 0,7844 | 0,1739 | 0,0001 | 0,0061 | 0,0009 | 0,0000 | 0,0346 | 0,0000 |
| | **7** | 0,1251 | 0,2501 | 0,0026 | 0,0078 | 0,0625 | 0,0026 | 0,0156 | 0,0313 | 0,0026 | 0,4997 |
| | **8** | 0,1322 | 0,2500 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0024 | 0,0473 | 0,0473 | 0,0473 | 0,0008 | 0,4712 |
| | **9** | 0,0741 | 0,2223 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0009 | 0,0247 | 0,0082 | 0,0027 | 0,0003 | 0,6666 |
| | **10** | 0,0000 | 0,0001 | 0,7040 | 0,2168 | 0,0149 | 0,0032 | 0,0006 | 0,0000 | 0,0604 | 0,0000 |
| | **11** | 0,1181 | 0,2494 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0559 | 0,0109 | 0,0061 | 0,0265 | 0,0068 | 0,5265 |

Представленные в ранговой шкале результаты этого опроса приведены в табл. 3.10.

Т а б л и ц а 3.10

**Результаты экспертного опроса в ранговой шкале**

| № | Тип телепрограммы | Эксперты | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| 1. | **Научно-популярные передачи** | 3 | 8 | 3 | 8 | 6 | 8 | 3 | 3 | 3 | 7 | 3 |
| 2. | **Аналитические обзоры** | 2 | 9 | 2 | 6 | 7 | 7 | 2 | 2 | 2 | 8 | 2 |
| 3. | **Юмористические передачи** | 10 | 1 | 9 | 1 | 1 | 1 | 9 | 6 | 9 | 1 | 9 |
| 4. | **Развлекательные шоу** | 9 | 2 | 9 | 2 | 2 | 2 | 7 | 6 | 9 | 2 | 9 |
| 5. | **Сериалы** | 8 | 4 | 7 | 7 | 5 | 4 | 8 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 6. | **Художественные фильмы** | 6 | 6 | 6 | 9 | 6 | 5 | 6 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 7. | **Документальные фильмы** | 4 | 7 | 4 | 10 | 6 | 9 | 5 | 4 | 6 | 9 | 5 |
| 8. | **Спортивные шоу** | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 6 | 4 | 5 | 7 | 4 | 4 |
| 9. | **Музыкальные шоу** | 7 | 3 | 8 | 3 | 3 | 3 | 8 | 6 | 8 | 3 | 8 |
| 10. | **Новости** | 1 | 10 | 1 | 5 | 7 | 10 | 1 | 1 | 1 | 10 | 1 |

Учитывая то, что табл. 3.10 содержит связные ранги, для проверки согласованности мнений экспертов рассчитаем скорректированный коэффициент конкордации по формуле (3.31). Для этого прежде всего вычислим средний ранг

$$\overline{p} = \frac{(n+1)m}{2} = \frac{(10+1)\cdot 11}{2} = 60{,}5\,.$$

Промежуточные расчеты для расчета величины $S$ представлены в табл. 3.11.

Т а б л и ц а 3.11

**Промежуточные расчеты коэффициента конкордации**

| **Теле-прог-рамма** | **Э к с п е р т ы** | | | | | | | | | | | **Сумма рангов** | **Отклонение от среднего** | **Квадрат отклонений** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | | | |
| **1** | 3 | 8 | 3 | 8 | 6 | 8 | 3 | 3 | 3 | 7 | 3 | 55 | -6 | 30 |
| **2** | 2 | 9 | 2 | 6 | 7 | 7 | 2 | 2 | 2 | 8 | 2 | 49 | -12 | 132 |
| **3** | 10 | 1 | 9 | 1 | 1 | 1 | 9 | 6 | 9 | 1 | 9 | 57 | -4 | 12 |
| **4** | 9 | 2 | 9 | 2 | 2 | 2 | 7 | 6 | 9 | 2 | 9 | 59 | -2 | 2 |
| **5** | 8 | 4 | 7 | 7 | 5 | 4 | 8 | 4 | 4 | 5 | 6 | 62 | 2 | 2 |
| **6** | 6 | 6 | 6 | 9 | 6 | 5 | 6 | 4 | 5 | 6 | 7 | 66 | 6 | 30 |
| **7** | 4 | 7 | 4 | 10 | 6 | 9 | 5 | 4 | 6 | 9 | 5 | 69 | 9 | 72 |
| **8** | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 6 | 4 | 5 | 7 | 4 | 4 | 53 | -8 | 56 |
| **9** | 7 | 3 | 8 | 3 | 3 | 3 | 8 | 6 | 8 | 3 | 8 | 60 | -1 | 0 |
| **10** | 1 | 10 | 1 | 5 | 7 | 10 | 1 | 1 | 1 | 10 | 1 | 48 | -13 | 156 |
| **Сумма квадратов отклонений S** | | | | | | | | | | | | | | 494,5 |

Далее вычислим сумму показателей связных рангов

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{T}_j = \left(2^3-2\right)+\left(\left(2^3-2\right)+\left(3^3-3\right)\right)+\left(2^3-2\right)+$$

$$+\left(\left(3^3-3\right)+\left(3^3-3\right)\right)+\left(2^3-2\right)+\left(2^3-2\right)=102\,.$$

Окончательно получаем

$$\mathrm{W}=\frac{12\mathrm{S}}{m^2(n^3-n)-m\sum_{j=1}^{m}\mathrm{T}_j}=\frac{12\cdot 494{,}5}{11^2\left(10^3-10\right)-11\cdot 102}=0{,}05.$$

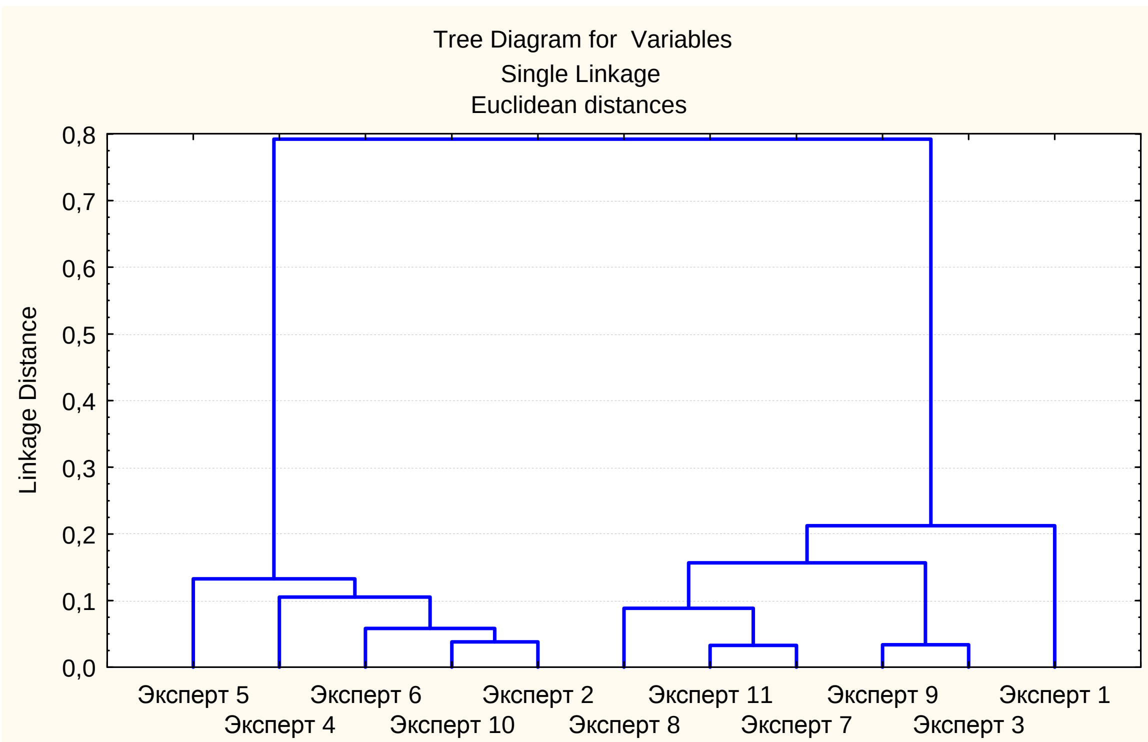
Расчетное значение дисперсионного коэффициента конкордации свидетельствует о низкой степени согласованности мнений экспертов. Выясним, можно ли выделить среди них группы экспертов, чьи мнения согласованны. С этой целью проведем кластерный анализ в пакете STATISTICA, предполагающий выполнение следующих шагов:

1) копирование значений весовых коэффициентов (см. табл. 3.9) из MS Excel в STATISTICA;
2) выбор меню «Статистика» – «Многомерные исследовательские методы» – «Анализ кластера» – «Древовидная кластеризация» – «ОК» – «Переменные» – «Выбрать все переменные» – «ОК» – «Вертикальная дендрограмма объединения» (см. рис. 3.1).

Построенная дендрограмма позволяет сделать вывод о том, что рассматриваемую группу экспертов можно разделить на две группы. В первую входят 1, 3, 7, 8, 9, 11, а остальные – во вторую.

Более глубокий анализ личностных характеристик экспертов показал, что большую часть первой группы составляют сотрудники мужского пола, возраст которых – от 32 до 40 лет. Они имеют базовое экономическое и математическое образование, их стаж работы в качестве специалистов – от 8 до 11 лет. Сотрудники этой группы отдают предпочтение новостным и научно-популярным программам, а также аналитическим обзорам.

Вторую же группу составляют в основном сотрудники-женщины в возрасте от 24 до 28 лет, имеющие филологическое образование и стаж работы – от 1 до 8 лет. Они признают наиболее целесообразным размещение рекламы в различного рода развлекательных программах, а также сериалах и художественных фильмах.




Р и с. 3.1. Вертикальная дендрограмма объединения

Точку зрения какой же группы следует признать верной? Очевидно, у руководства корпорации существует, по крайней мере, пять возможных вариантов действий: 1) положиться на опыт сотрудников первой группы; 2) довериться «молодежи»; 3) разработать комбинированный медиа-план, в котором будут учтены точки зрения экспертов обеих групп; 4) переопросить сотрудников еще раз с целью получения согласованного мнения; 5) провести опрос сотрудников других отделов для того, чтобы установить предпочтения одного варианта над другим.

# ТЕСТ

| | Вопрос | Варианты ответа |
|---|---|---|
| 1. | Отношение $R$ называется толерантностью, если оно: | 1) рефлексивно и транзитивно;<br>2) рефлексивно и симметрично;<br>3) рефлексивно, симметрично и транзитивно;<br>4) рефлексивно, антисимметрично, транзитивно;<br>5) антисимметрично, транзитивно и связно;<br>6) рефлексивно, антисимметрично, транзитивно и связно. |
| 2. | Отношение $R$ называется эквивалентностью, если оно: | 1) рефлексивно и транзитивно;<br>2) рефлексивно и симметрично;<br>3) рефлексивно, симметрично и транзитивно;<br>4) рефлексивно, антисимметрично, транзитивно;<br>5) антисимметрично, транзитивно и связно;<br>6) рефлексивно, антисимметрично, транзитивно и связно. |
| 3. | Такая проблема субъективных измерений, как проблема представления, заключается: | 1) в выборе подходящего типа шкалы;<br>2) в определении всех возможных способов представления заданной эмпирической системы различными числовыми системами;<br>3) в доказательстве того, что для эмпирической системы с отношениями можно построить числовую систему с отношениями |
| 4. | Шкалой называется совокупность: | 1) эмпирической и числовой систем;<br>2) числовой системы, логической системы и отображения;<br>3) эмпирической системы, информационной системы и отображения;<br>4) эмпирической системы, числовой системы и отображения. |
| 5. | Какая шкала используется для описания принадлежности объекта к определенному классу? | 1) порядковая;<br>2) интервальная;<br>3) шкала отношений;<br>4) шкала разностей;<br>5) абсолютная;<br>6) номинальная. |
| 6. | Какая шкала применяется для отражения упорядоченности объектов по одному или совокупности признаков? | 1) порядковая;<br>2) интервальная;<br>3) шкала отношений;<br>4) шкала разностей;<br>5) абсолютная;<br>6) номинальная. |
| 7. | Какая шкала используется при необходимости выражения, на сколько один объект превосходит другой по одному или нескольким признакам? | 1) порядковая;<br>2) интервальная;<br>3) шкала отношений;<br>4) шкала разностей;<br>5) абсолютная;<br>6) номинальная. |

| | | |
|---|---|---|
| 8. | Какая шкала используется для отражения величины различия между свойствами объектов? | 1) порядковая;<br>2) интервальная;<br>3) шкала отношений;<br>4) шкала разностей;<br>5) абсолютная;<br>6) номинальная. |
| 9. | Какую шкалу дают результаты счета? | 1) порядковая;<br>2) интервальная;<br>3) шкала разностей;<br>4) шкала отношений;<br>5) абсолютная;<br>6) номинальная. |
| 10. | В какой шкале числа отражают отношения свойств объектов? | 1) порядковая;<br>2) интервальная;<br>3) шкала разностей;<br>4) шкала отношений;<br>5) абсолютная;<br>6) номинальная. |
| 11. | Для номинальной шкалы допустимым преобразованием является: | 1) однозначное преобразование;<br>2) монотонное преобразование;<br>3) линейное преобразование;<br>4) преобразование подобия;<br>5) преобразование сдвига;<br>6) тождественное преобразование. |
| 12. | Для порядковой шкалы допустимым преобразованием является: | 1) однозначное преобразование;<br>2) монотонное преобразование;<br>3) линейное преобразование;<br>4) преобразование подобия;<br>5) преобразование сдвига;<br>6) тождественное преобразование. |
| 13. | Для интервальной шкалы допустимым преобразованием является: | 1) однозначное преобразование;<br>2) монотонное преобразование;<br>3) линейное преобразование;<br>4) преобразование подобия;<br>5) преобразование сдвига;<br>6) тождественное преобразование. |
| 14. | Для абсолютной шкалы допустимым преобразованием является: | 1) однозначное преобразование;<br>2) монотонное преобразование;<br>3) линейное преобразование;<br>4) преобразование подобия;<br>5) преобразование сдвига;<br>6) тождественное преобразование. |
| 15. | Для шкалы отношений допустимым преобразованием является: | 1) однозначное преобразование;<br>2) монотонное преобразование;<br>3) линейное преобразование;<br>4) преобразование подобия;<br>5) преобразование сдвига;<br>6) тождественное преобразование. |
| 16. | Для шкалы разностей допус- | 1) однозначное преобразование; |

| | | |
|---|---|---|
| | тимым преобразованием является: | 2) монотонное преобразование;<br>3) линейное преобразование;<br>4) преобразование подобия;<br>5) преобразование сдвига;<br>6) тождественное преобразование. |
| 17. | Какой из методов относится к группе несравнительных методов получения необходимой для шкалирования информации? | 1) метод парного сравнения;<br>2) распределение постоянной суммой;<br>3) метод упорядочения;<br>4) использование шкалы семантического дифференциала. |
| 18. | Метод парных сравнений разработал: | 1) А. Осборн;<br>2) Л. Терстоун;<br>3) О. Хелмер;<br>4) Т. Гордон. |
| 19. | При использовании метода парных сравнений эксперту при каждом сравнении приходится решать задачу, уровень неопределенности которой: | 1) не превышает половины бита;<br>2) не превышает одного бита;<br>3) не превышает двух бит. |
| 20 | Значение элемента, стоящего на пересечении *i*-ой строки и *j*-го столбца матрицы парных сравнений, определяется по формуле: | 1) $a_{ij}=\begin{cases}1, & A_i\ \mathbf{p}\ A_j\\ 0, & A_i\ \sim\ A_j\\ 2, & A_i\ \mathbf{f}\ A_j\end{cases}$; 2) $a_{ij}=\begin{cases}0, & A_i\ \mathbf{p}\ A_j\\ 1, & A_i\ \sim\ A_j\\ 2, & A_i\ \mathbf{f}\ A_j\end{cases}$;<br>3) $a_{ij}=\begin{cases}1, & A_i\ \mathbf{p}\ A_j\\ 0, & A_i\ \sim\ A_j\\ 1, & A_i\ \mathbf{f}\ A_j\end{cases}$. |
| 21. | Полностью заполненная матрица парных сравнений представляет собой квадратную матрицу $\mathbf{A}$, элементы которой удовлетворяют соотношению: | 1) $a_{ij}+a_{ji}=0$;<br>2) $a_{ij}+a_{ji}=1$;<br>3) $a_{ij}+a_{ji}=2$. |
| 22. | Матрица парных сравнений: | 1) неотрицательна и разложима;<br>2) неотрицательна и неразложима;<br>3) положительна и неразложима;<br>4) положительна и разложима. |
| 23. | Компоненты вектора весовых коэффициентов на каждом шаге итерационной процедуры в методе парных сравнений нормируются для того, чтобы избежать получения: | 1) чрезвычайно маленьких весовых значений;<br>2) чрезвычайно больших весовых значений;<br>3) нулевых значений весовых значений. |
| 24. | Значение элемента, стоящего на пересечении *i*-ой строки и *j*-го столбца матрицы парных сравнений, определяется по формуле: | 1) $a_{ij}=\begin{cases}0, & A_i\ \mathbf{p}\ A_j\\ 1, & A_i\ \sim\ A_j\\ 1/x_{ij}, & A_i\ \mathbf{f}\ A_j\end{cases}$; |

| | | |
|---|---|---|
| | | 2) $a_{ij}=\begin{cases}x_{ij}, & \mathrm{A}_i\ \mathbf{p}\ \mathrm{A}_j\\ 0, & \mathrm{A}_i \sim \mathrm{A}_j\\ 1/x_{ij}, & \mathrm{A}_i\ \mathbf{f}\ \mathrm{A}_j\end{cases}$; 3) $a_{ij}=\begin{cases}x_{ij}, & \mathrm{A}_i\ \mathbf{p}\ \mathrm{A}_j\\ 1, & \mathrm{A}_i \sim \mathrm{A}_j\\ 1/x_{ij}, & \mathrm{A}_i\ \mathbf{f}\ \mathrm{A}_j\end{cases}$ |
| 25. | Полностью заполненная матрица парных сравнений представляет собой квадратную матрицу $\mathbf{A}$, элементы которой удовлетворяют соотношению: | 1) $a_{ij}+a_{ji}=1$;<br>2) $a_{ij}a_{ji}=1$;<br>3) $a_{ij}\dfrac{1}{a_{ji}}=1$. |
| 26. | Итерированная значимость первого порядка в методе парных сравнений (для случая $a_{ij}+a_{ji}=2$) представляет собой: | 1) сумму «очков», набранных каждым объектом в результате экспертного сравнения;<br>2) сумму «очков», набранных каждым объектом в результате экспертного сравнения, а также сумма «очков», которые набрали проигравшие ему сравнение;<br>3) сумму «очков», набранных каждым объектом в результате экспертного сравнения, а также сумма удвоенных «очков», которые набрали проигравшие ему сравнение. |
| 27. | Групповая оценка значимости объектов $\mathbf{p}$ может быть получена как характеристический вектор матрицы: | 1) $\mathbf{P}'\mathbf{P}$;<br>2) $\mathbf{P}\mathbf{P}'$;<br>3) $(\mathbf{PP})'$ |
| 28. | Весовые коэффициенты компетентности экспертов $\mathbf{v}$ могут быть получены как компоненты характеристического вектора матрицы: | 1) $\mathbf{P}'\mathbf{P}$;<br>2) $\mathbf{P}\mathbf{P}'$;<br>3) $(\mathbf{PP})'$. |
| 29. | Могут ли весовые коэффициенты в методе парных сравнений получиться отрицательными? | 1) да; 2) нет;<br>2) да, если в матрице парных сравнений есть строка с отличным от нуля элементом только на диагонали. |
| 30. | Какая теорема гарантирует получение содержательно интерпретируемой групповой оценки экспертов? | 1) Коши;<br>2) Фробениуса – Перрона;<br>3) Гамильтона – Кэли;<br>4) Якоби. |
| 31. | Коэффициент конкордации представляет собой: | 1) случайную величину;<br>2) детерминированную величину;<br>3) переменную величину. |
| 32. | При сравнении $n$ объектов какое наименьшее число сравнений должен сделать эксперт? | 1) $n^2/2$; 2) $(n-1)/2$;<br>3) $n(n-1)/2$; |
| 33. | Если в процедуре нахождения весовых коэффициентов использовать квадрат матрицы парных сравнений, то количество итераций по сравнению с обычной процедурой будет: | 1) больше;<br>2) меньше;<br>3) равно. |

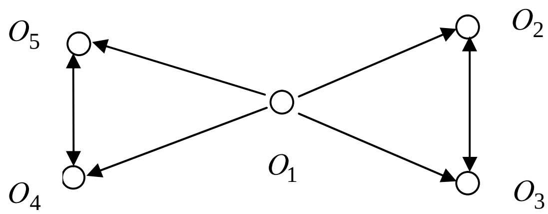
| | | |
|---|---|---|
| 34. | Если в матрице парных сравнений размером $5\times5$ неизвестны элементы $a_{23}$ и $a_{35}$, то можно ли эти элементы восстановить? | 1) нет;<br>2) да;<br>3) да, но эти значения будут искаженными. |
| 35. | С помощью рангового коэффициента корреляции устанавливается: | 1) теснота связи между двумя ранжированными рядами;<br>2) теснота связи между любыми рядами, содержащими связные ранги;<br>3) согласованность мнений всей группы экспертов. |
| 36. | Согласованность мнений всей группы экспертов принято оценивать с помощью: | 1) коэффициента Спирмена;<br>2) коэффициента Кендалла;<br>3) коэффициента конкордации. |
| 37. | В каких границах изменяется коэффициент корреляции Спирмена? | 1) от –1 до 0;<br>2) от –1 до +1;<br>3) от 0 до +1. |
| 38. | В случае обратных ранжировок коэффициент корреляции Спирмена равен: | 1) –1;<br>2) 0;<br>3) +1. |
| 39. | Связные ранги вводятся: | 1) при нечетном числе ранжируемых объектов;<br>2) при четном числе ранжируемых объектов;<br>3) когда в ранжируемой совокупности некоторые объекты получили одинаковые оценки;<br>4) когда значения дисперсионного и энтропийного коэффициентов конкордации совпадают. |
| 40. | Если в полученных ранжировках есть связные ранги, то коэффициент конкордации нужно корректировать, так как: | 1) максимальное значение дисперсии становится больше, чем в случае отсутствия связных рангов;<br>2) максимальное значение дисперсии становится меньше, чем в случае отсутствия связных рангов;<br>3) минимальное значение дисперсии становится больше, чем в случае отсутствия связных рангов. |
| 41. | Дисперсия, при вычислении коэффициента конкордации, может быть равна нулю только в том случае, когда: | 1) число объектов меньше числа экспертов;<br>2) число объектов равно числу экспертов;<br>3) число объектов больше числу экспертов. |
| 42. | Совпадают ли значения дисперсионного и энтропийного коэффициентов корреляции? | 1) да;<br>2) никогда не совпадают;<br>3) совпадают в некоторых случаях. |
| 43. | Значение энтропийного коэффициента конкордации заключено между: | 1) –1 и 0;<br>2) –1 и +1;<br>3) 0 и +1. |
| 44. | Если число объектов $n>7$, то значимость оценки коэффициента конкордации проверяется с помощью: | 1) критерия $c^2$;<br>2) дисперсионного отношения Фишера;<br>3) специальных таблиц. |
| 45. | Если число объектов $n<7$, то значимость оценки коэффициента конкордации проверяется с помощью: | 1) критерия $c^2$;<br>2) дисперсионного отношения Фишера;<br>3) специальных таблиц. |

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Нарисуйте граф, иллюстрирующий отношение частичного порядка, для следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Ниже представлен граф, иллюстрирующий отношение линейного порядка. Запишите соответствующую ему матрицу.




3. Возможна ли ситуация, когда матрица парных сравнений равна своей транспонированной матрице? Если да, то опишите эту ситуацию.
4. Объясните, в каком случае ранжировка, полученная по матрице парных сравнений, совпадет с ранжировкой, полученной по транспонированной матрице парных сравнений.
5. Какое место по результатам обработки транспонированной матрицы парных сравнений займет объект, лидирующий в ранжированном ряду, полученным по результатам парных сравнений? Обоснуйте свой ответ.
6. Чему равен ранговый коэффициент корреляции между двумя ранжировками, одна из которых получена по матрице парных сравнений, а другая – по транспонированной матрице? Подтвердите свой ответ соответствующими расчетами.
7. Сравните с позиций информационной емкости результаты решения задачи ранжирования пяти объектов, получаемые с помощью непосредственного ранжирования и с использованием метода парных сравнений. Предполагается, что исходная ситуация характеризуется равновероятным предпочтением объектов.
8. Известно, что все сравниваемые объекты неравнозначны. В заполненной матрице парных сравнений отсутствуют результаты сравнения $A_i$ и $A_j$ объектов, т.е. в матрице отсутствуют два элемента $a_{ij}$ и $a_{ji}$. Разработайте процедуру, которая позволит восстановить отсутствующие значения. Всегда ли с ее помощью можно найти однозначное решение?
9. Верно ли, что высокий уровень согласованности оценок означает высокий уровень компетентности экспертов? Дайте обоснованный ответ.

# КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ

**Решение типовой задачи.**

*Постановка задачи.* В торговой чайной компании «Аромат жизни» появилась вакантная должность менеджера по оптовым продажам. На эту должность подали заявления пять претендентов: Иванов, Петров, Лосев, Кузнецов и Лугин. Сотрудники отдела кадров определили деловые качества, которыми должен обладать будущий менеджер по оптовым продажам. Сами деловые качества и их весовые коэффициенты приведены в табл. 1. С целью повышения объективности отбора претендента на вакантную должность сотрудники отдела кадров компании решили применить метод парных сравнений.

Таблица 1

| № п.п. | Деловые качества | Весовые коэффициенты |
|---|---|---|
| 1. | Коммуникабельность | 0,30 |
| 2. | Ответственность | 0,10 |
| 3. | Организаторские способности | 0,25 |
| 4. | Компетентность | 0,35 |

*Решение задачи в MS Excel:*

1. Заполнение матриц парных предпочтений $k$-м экспертом по $l$-му деловому качеству (см. табл. 2).

Таблица 2

| Матрицы парных сравнений по коммуникабельности | | | | | Матрицы парных сравнений по ответственности | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-й эксперт | | | | | 1-й эксперт | | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| 2-й эксперт | | | | | 2-й эксперт | | | | |
| 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| 3 эксперт | | | | | 3-й эксперт | | | | |
| 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 |

Окончание табл. 2

| **Матрицы парных сравнений по организаторским способностям** | | | | | **Матрицы парных сравнений по компетентности** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-й эксперт | | | | | 1-й эксперт | | | | |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| 2-й эксперт | | | | | 2-й эксперт | | | | |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3-й эксперт | | | | | 3-й эксперт | | | | |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |

2. Расчет индивидуальных экспертных оценок. В качестве примера приведем расчет оценок первого эксперта по коммуникабельности.

2.1. Ввод единичного вектора в качестве начальных значений экспертных оценок (табл. 3).

Таблица 3

| *Претенденты* | Иванов | Петров | Лосев | Кузнецов | Лугин | Начальные значения |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **A** | | | | | $\mathbf{p}^0$ |
| Иванов | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| Петров | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| Лосев | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| Кузнецов | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Лугин | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 |

2.2. Выполнение операции умножения матрицы парных значений на единичный вектор начальных значений с использованием функции **МУМНОЖ** (см. табл. 4).

2.3. Нормирование результатов умножения матрицы на вектор путем деления каждой компоненты полученного вектора на сумму его компонент (табл. 5).

2.4. Повторение операций, предусматриваемых пунктами 2.2 и 2.3 путем копирования значений нормированного вектора в блок начальных экспертных оценок (замечание: вставку копируемых значений необходимо осуществлять с помощью опции *Специальная вставка – Значения*). Расчет продолжается до получения стационарных значений с заданной точностью.

Индивидуальные оценки всех экспертов представлены в табл. 6.

Т а б л и ц а 4

| *Претенденты* | Иванов | Петров | Лосев | Кузнецов | Лугин | Начальные значения | Весовые коэффициенты |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **A** | | | | | $\mathbf{p}^0$ | $\mathbf{Ap}^0$ |
| Иванов | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 4 |
| Петров | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 5 |
| Лосев | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 8 |
| Кузнецов | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| Лугин | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 5 |

Т а б л и ц а 5

| *Претенденты* | Иванов | Петров | Лосев | Кузнецов | Лугин | Начальные значения | Весовые коэффициенты | Нормированные весовые коэффициенты |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **A** | | | | | $\mathbf{p}^0$ | $\mathbf{Ap}^0$ | $\frac{1}{l}\,\mathbf{Ap}^0$ |
| Иванов | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 4 | 0,16 |
| Петров | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 5 | 0,20 |
| Лосев | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 8 | 0,32 |
| Кузнецов | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 0,12 |
| Лугин | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 5 | 0,20 |
| | | | | | | | $l = 25$ | |

Т а б л и ц а 6

| **Претенденты** | **Индивидуальные экспертные оценки претендентов по коммуникабельности** | | | **Индивидуальные экспертные оценки претендентов по ответственности** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 эксперт | 2 эксперт | 3 эксперт | 1 эксперт | 2 эксперт | 3 эксперт |
| Иванов | 0,1976 | 0,2707 | 0,2246 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1742 |
| Петров | 0,1822 | 0,2221 | 0,2126 | 0,0016 | 0,0011 | 0,1407 |
| Лосев | 0,3318 | 0,3015 | 0,2815 | 0,9536 | 0,9608 | 0,3461 |
| Кузнецов | 0,1151 | 0,0494 | 0,1006 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1122 |
| Лугин | 0,1733 | 0,1562 | 0,1808 | 0,0448 | 0,0380 | 0,2267 |
| **Претенденты** | **Индивидуальные экспертные оценки претендентов по организаторским способностям** | | | **Индивидуальные экспертные оценки претендентов по компетентности** | | |
| | 1 эксперт | 2 эксперт | 3 эксперт | 1 эксперт | 2 эксперт | 3 эксперт |
| Иванов | 0,1341 | 0,1253 | 0,1262 | 0,1495 | 0,1421 | 0,0269 |
| Петров | 0,1872 | 0,2211 | 0,2383 | 0,1148 | 0,1134 | 0,0231 |
| Лосев | 0,4175 | 0,3218 | 0,2638 | 0,4343 | 0,3421 | 0,5372 |
| Кузнецов | 0,0962 | 0,1264 | 0,1580 | 0,0881 | 0,0963 | 0,0198 |
| Лугин | 0,1651 | 0,2054 | 0,2137 | 0,2132 | 0,3061 | 0,3929 |

3. Проверка согласованности мнений экспертов.

3.1. Ранжирование претендентов по каждому из деловых качеств в соответствии с экспертными оценками.

3.2. Расчет среднего ранга

$$\overline{p} = \frac{(n+1)m}{2} = \frac{(5+1)\cdot 3}{2} = 9.$$

3.3. Вычисление величины $S$ по формуле:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij} - \overline{p}\right)^2.$$

Оформление промежуточных и итоговых расчетов в виде табл. 7.

Таблица 7

| | **Оценки экспертов в ранговой шкале по коммуникабельности** | | | Сумма квадратов отклонений | **Оценки экспертов в ранговой шкале по ответственности** | | | Сумма квадратов отклонений |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | | **1** | **2** | **3** | |
| Иванов | 2 | 2 | 2 | 9 | 4 | 4 | 3 | 4 |
| Петров | 3 | 3 | 3 | 0 | 3 | 3 | 4 | 1 |
| Лосев | 1 | 1 | 1 | 36 | 1 | 1 | 1 | 36 |
| Кузнецов | 5 | 5 | 5 | 36 | 5 | 5 | 5 | 36 |
| Лугин | 4 | 4 | 4 | 9 | 2 | 2 | 2 | 9 |
| | | | $S_1$ = | 90 | | | $S_2$ = | 86 |
| | **Оценки экспертов в ранговой шкале по организаторским способностям** | | | Сумма квадратов отклонений | **Оценки экспертов в ранговой шкале по компетентности** | | | Сумма квадратов отклонений |
| | **1** | **2** | **3** | | **1** | **2** | **3** | |
| Иванов | 4 | 5 | 5 | 25 | 3 | 3 | 3 | 0 |
| Петров | 2 | 2 | 2 | 9 | 4 | 4 | 4 | 9 |
| Лосев | 1 | 1 | 1 | 36 | 1 | 1 | 1 | 36 |
| Кузнецов | 5 | 4 | 4 | 16 | 5 | 5 | 5 | 36 |
| Лугин | 3 | 3 | 3 | 0 | 2 | 2 | 2 | 9 |
| | | | $S_3$ = | 86 | | | $S_4$ = | 90 |

3.4. Расчет коэффициентов конкордации по формуле $\mathrm{W} = \frac{12\mathrm{S}}{m^2(n^3 - n)}$;

$$\mathrm{W}_1 = \frac{12\cdot 90}{3^2(5^3-5)} = 1; \quad \mathrm{W}_2 = \frac{12\cdot 86}{3^2(5^3-5)} = 0{,}956;$$

$$\mathrm{W}_3 = \frac{12\cdot 86}{3^2(5^3-5)} = 0{,}956; \qquad \mathrm{W}_4 = \frac{12\cdot 90}{3^2(5^3-5)} = 1.$$

Полученные коэффициенты конкордации свидетельствуют о высокой степени согласованности мнений экспертов. В силу малости $m$ и $n$ статистическая значимость этих коэффициентов проверяется по специальной таблице, представленной в Приложении (см. табл. П.4). Из данной таблицы видно, что величины $S_1, S_4$ достигаются с вероятностью 0,000069, а величины $S_2, S_3$ – с вероятностью 0,00090. Таким образом, можно судить о достаточно высоком уровне статистической значимости коэффициентов конкордации.

4. Расчет векторов групповых оценок с помощью функции **СУММ/З**. Оформление результатов расчетов в виде табл. 8.

Таблица 8

| Претенденты | Групповая оценка экспертов | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **по коммуникабельности** | **по организаторским способностям** | **по ответственности** | **по компетентности** |
| Иванов | 0,2310 | 0,1286 | 0,0581 | 0,1062 |
| Петров | 0,2057 | 0,2155 | 0,0478 | 0,0838 |
| Лосев | 0,3049 | 0,3344 | 0,7535 | 0,4379 |
| Кузнецов | 0,0884 | 0,1269 | 0,0374 | 0,0681 |
| Лугин | 0,1701 | 0,1947 | 0,1032 | 0,3041 |

5. Расчет интегральной оценки пригодности кандидатов с учетом весовых коэффициентов деловых качеств (см. табл. 2) путем суммирования групповых оценок (замечание: для этих целей удобно использовать формулу **СУММПРОИЗВ).** Оформление результатов расчетов в виде табл. 9.

Таблица 9

| Претенденты | Интегральная оценка пригодности |
|---|---|
| Иванов | 0,1444 |
| Петров | 0,1497 |
| Лосев | 0,4037 |
| Кузнецов | 0,0858 |
| Лугин | 0,2164 |

Таким образом, по результатам расчетов наиболее предпочтительным претендентом на вакантную должность менеджера по продажам является Лосев.

**Задания для самостоятельной работы.**

*Задание 1.* ОАО «Жемчужина» имеет возможность открыть одну точку общественного питания (ресторан, кафе или бистро) либо в центре г. Воронежа, либо в городском районе, удаленном от центра, либо на Ростовской автотрассе (недалеко от города). На эффективность выбранного варианта влияют различные факторы, среди которых можно выделить фактор, связанный с выбором типа кухни (национальной, традиционной и смешанной). Проведите экспертное оценивание инвестиционных проектов, представленных в табл. 10, с целью выбора такого проекта, который с наименьшим риском обеспечит прибыльное долговременное функционирование соответствующей точки общественного питания.

Таблица 10

| № проекта | Точка общ. питания | Место | Кухня | № проекта | Точка общ. питания | Место | Кухня | № проекта | Точка общ. питания | Место | Кухня |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | кафе | центр | национальная | 10 | бистро | центр | национальная | 19 | ресторан | центр | национальная |
| 2 | | | традиционная | 11 | | | традиционная | 20 | | | традиционная |
| 3 | | | смешанная | 12 | | | смешанная | 21 | | | смешанная |
| 4 | | городской район | национальная | 13 | | городской район | национальная | 22 | | городской район | национальная |
| 5 | | | традиционная | 14 | | | традиционная | 23 | | | традиционная |
| 6 | | | смешанная | 15 | | | смешанная | 24 | | | смешанная |
| 7 | | автотрасса | национальная | 16 | | автотрасса | национальная | 25 | | автотрасса | национальная |
| 8 | | | традиционная | 17 | | | традиционная | 26 | | | традиционная |
| 9 | | | смешанная | 18 | | | смешанная | 27 | | | смешанная |

*Задание 2.* Установите, существует ли взаимосвязь между рейтингами семи крупнейших банков России и их web-сайтами. Необходимые для анализа данные представлены в табл. 11.

Таблица 11

| Наименование банка | Рейтинг банка | Адрес web-сайта банка | Рейтинг web-сайта банка |
|---|---|---|---|
| Сбербанк России | 1 | www.sbrf.ru | 2 |
| Внешторгбанк | 2 | www.vtb.ru | 1 |
| Газпромбанк | 3 | www.gazprombank.ru | 4 |
| Альфа-банк | 4 | www.alfabank.ru | 3 |
| Банк Москвы | 5 | www.mmbank.ru | 7 |
| Росбанк | 6 | www.ROSBANK.ru | 5 |
| МДМ-банк | 7 | www.mdmbank.ru | 6 |

*Задание 3.* Сотрудники отдела маркетинга ОАО «Сладкоежка» попросили двух опытных продавцов из своих фирменных магазинов, расположенных в разных районных города, в проранжировать ряд факторов, на которые обращают внимание потребители при выборе той или иной коробки конфет, когда они приобретают ее к праздничному столу. Результаты опроса продавцов представлены в табл. 12. Оцените согласованность их мнений.

Таблица 12

| Факторы | Эксперты | |
|---|---|---|
| | 1-й | 2-й |
| Цена | 9 | 1 |
| Дизайн, оформление коробки | 4 | 2 |
| Форма коробки | 8 | 9 |
| Начинки конфет | 2 | 6 |
| Размер коробки | 7 | 8 |
| Марка/ производитель | 1 | 3 |
| Разнообразие конфет в коробке | 5 | 7 |
| Ингредиенты, входящие в состав конфет | 3 | 5 |
| Вес конфет в коробке | 6 | 4 |

*Задание 4.* В табл. 13 представлены рейтинги банков двух агентств: ИЦ «Рейтинг» и ИА «Мобиле». Определите согласованность их оценок.

Таблица 13

| Банк | Рейтинговое агентства | | Банк | Рейтинговое агентство | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ИЦ «Рейтинг» | ИА «Мобиле» | | ИЦ «Рейтинг» | ИА «Мобиле» |
| Сбербанк России | 1 | 1 | Инвестиционный банк | 5 | 2 |
| Внешторгбанк | 2 | 1 | ИНГ Банк | 5 | 3 |
| Газпромбанк | 3 | 1 | Петрокоммербанк | 5 | 3 |
| Альфа-банк | 3 | 2 | Номос-банк | 5 | 3 |
| Международный банковский банк | 4 | 2 | Никойл | 5 | 4 |
| Гута-банк | 4 | 3 | Металлинвест-банк | 6 | 4 |
| МДМ-банк | 4 | 3 | Промторгбанк | 6 | 5 |
| Банк Зенит | 5 | 3 | Диалог-Оптима | 6 | 5 |

*Задание 5.* Установите, существует ли статистически значимая взаимосвязь между рангами регионов по устойчивости и рангами по степени их инвестиционной привлекательности. Необходимые для расчетов данные приведены в табл. 14.

Таблица 14

| Регион | Ранг по устойчивости | Ранг по степени инвестиционной привлекательности |
|---|---|---|
| Липецкая область | 2 | 2 |
| Ярославская область | 1 | 3 |
| Смоленская область | 4 | 15 |
| Белгородская область | 3 | 1 |
| Тульская область | 7 | 5 |

Окончание табл. 14

| | | |
|---|---|---|
| Орловская область | 8 | 8 |
| Воронежская область | 9 | 9 |
| Тверская область | 5 | 7 |
| Калужская область | 11 | 6 |
| Курская область | 6 | 12 |
| Рязанская область | 12 | 4 |
| Тамбовская область | 14 | 10 |
| Костромская область | 10 | 14 |
| Владимирская область | 13 | 11 |
| Брянская область | 15 | 16 |
| Ивановская область | 16 | 13 |

*Задание 6.* Используя метод парных сравнений, оцените вместе со своим другом каких-либо 8 известных вам рекламных видеороликов по таким критериям, как оригинальность идеи, запоминаемость, эффективность (замечание: под эффективностью в данном случае следует понимать достижение главной цели рекламной кампании – побуждение потребителя к покупке). Оцените степень согласованности ваших мнений и вычислите интегральную оценку видеороликов.

*Задание 7.* Осуществите (с помощью метода парных сравнений) от имени трех экспертов оценку пяти марок растворимого кофе по таким критериям, как аромат, вкус, цена. В соответствии с их мнением рассчитайте интегральную оценку кофе и определите лучший.

*Задание 8.* Используя метод парных сравнений, осуществите от имени четырех экспертов оценку пяти учебников (учебных пособий) по эконометрике исходя из следующих критериев: 1) доступность для понимания изложенного материала; 2) логика построения; 3) глубина раскрытия материала; 4) оформление (обложка, качество бумаги и т.п.). Выберите из них наиболее удачный для обучения, по мнению экспертов.

*Задание 9.* Торговая компания ОАО «Радуга» в течение 5 лет функционирует на территории Воронежской области. За это время она имела успех в Аннинском, Богучарском, Нижнедевицком, Новоусманском районах, и, к сожалению, потерпела неудачу (убытки) в Верхнехавском и Каширском районах. В связи с тем, что в стратегические планы ОАО «Радуга» входило расширение сферы деятельности за счет освоения новых рынков сбыта, было решено обследовать другие районы Воронежской области (а именно: Борисоглебский, Острогожский, Ольховатский, Петропавловский, Рамонский, Терновский) с целью выбора наиболее перспективного для ведения торговли. Чтобы минимизировать затраты на проведение маркетинговых исследований, руководство компании обратилось к группе экспертов, результаты опросов которых в виде матриц парных сравнений представлены в табл. 15. Вычислите групповую экспертную оценку районов области и проанализируйте компетентность самих экспертов в этом вопросе.

Т а б л и ц а 15

| **Районы Воронежской области** | Борисоглебский | Острогожский | Ольховатский | Петропавловский | Рамонский | Терновский | Борисоглебский | Острогожский | Ольховатский | Петропавловский | Рамонский | Терновский |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1-й эксперт** | | | | | | **4-й эксперт** | | | | | |
| Борисоглебский | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Острогожский | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Ольховатский | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Петропавловский | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Рамонский | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Терновский | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | **2-й эксперт** | | | | | | **5-й эксперт** | | | | | |
| Борисоглебский | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Острогожский | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 |
| Ольховатский | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Петропавловский | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Рамонский | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Терновский | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | **3-й эксперт** | | | | | | **6-й эксперт** | | | | | |
| Борисоглебский | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Острогожский | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Ольховатский | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| Петропавловский | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| Рамонский | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Терновский | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

*Задание 10.* Дайте субъективную интегральную оценку шоколада следующих кондитерских фабрик: «Красный Октябрь», «Бабаевская», «Рот Фронт», «Победа», «Русский шоколад». Оценивание осуществите по таким характеристикам, как вкус, цена и упаковка с использованием процедуры, предусматривающей автоматическое отражение значимости этих характеристик.

*Задание 11.* Рассчитайте субъективную интегральную оценку web-сайтов 10 крупнейших российских интернет-магазинов по следующим характеристикам: полнота информации о предлагаемых товарах; полнота информации о компании; дизайн; удобство навигации. Определите значимость этих характеристик.

*Задание 12.* Вычислите с использованием процедуры, описанной в п. 2.4, интегральную оценку следующих факторов, влияющих на покупку чая потребителем: упаковка (расфасовка); страна-производитель; марка; цена; реклама; польза для здоровья; наличие полной информации на упаковке чая; качество.

*Задание 13.* Рассчитайте субъективную оценку наименований минеральной воды (например, «Липецкая, «Архыз», «Углянческая», «Ессентуки 17», «Икорецкая», «Меркурий», «Боржоми», «Нарзан») по таким критериям, как вкус, запах, польза для здоровья, тара. Используйте для этого процедуры экспертного оценивания с автоматическим отражением значимости этих критериев.

*Задание 14.* После завершения строительства или приобретения очередного офисного здания перед его собственником или управляющей компанией неизбежно встает вопрос о назначении адекватного размера арендной ставки за предлагаемые помещения, которая будет принята рынком, позволит обеспечить быструю наполняемость здания и высокую ликвидность офисных площадей, и, вместе с тем, не будет являться заниженной ценой, что позволит обеспечить возврат вложенных средств в максимально короткий срок. С целью изучения механизма определения арендных ставок руководство ООО «Бизнес-центры» постановило прежде всего изучить факторы, влияющие на размер арендных ставок. Учитывая то, что большинство этих факторов не имеет количественного выражения, было решено провести опрос экспертов. В качестве экспертов выступили специалисты по сдаче в аренду офисных помещений (сотрудники ряда управляющих компаний, менеджеры риэлтерских агентств). Результаты их опроса в виде матриц парных сравнений представлены в табл. 16. Обработайте эти результаты, проверьте согласованность мнений экспертов. В случае несогласованности выясните, можно ли разбить их на несколько групп согласованных.

Таблица 16

| **Факторы** | Внутренняя отделка и состояние задания | Качество парковки | Качество менеджмента | Расстояние до ближайшей станции метрополитена | Расстояние до центра города | Внутренняя отделка и состояние задания | Качество парковки | Качество менеджмента | Расстояние до ближайшей станции метрополитена | Расстояние до центра города |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1-й эксперт | | | | | 6-й эксперт | | | | |
| Внутренняя отделка и состояние задания | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| Качество парковки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| Качество менеджмента | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Расстояние до ближайшей станции метрополитена | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |

Окончание табл. 16

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Расстояние до центра города | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| | 2-й эксперт | | | | | 7-й эксперт | | | | |
| Внутренняя отделка и состояние задания | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| Качество парковки | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 |
| Качество менеджмента | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| Расстояние до ближайшей станции метрополитена | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Расстояние до центра города | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 3-й эксперт | | | | | 8-й эксперт | | | | |
| Внутренняя отделка и состояние задания | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| Качество парковки | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 |
| Качество менеджмента | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| Расстояние до ближайшей станции метрополитена | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Расстояние до центра города | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 4-й эксперт | | | | | 9-й эксперт | | | | |
| Внутренняя отделка и состояние задания | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| Качество парковки | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| Качество менеджмента | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Расстояние до ближайшей станции метрополитена | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 |
| Расстояние до центра города | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| | 5-й эксперт | | | | | 10-й эксперт | | | | |
| Внутренняя отделка и состояние задания | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| Качество парковки | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| Качество менеджмента | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Расстояние до ближайшей станции метрополитена | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 |
| Расстояние до центра города | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |

*Задание 15.* Проверьте согласованность мнений экспертов в каждой из двух получившихся групп в п. 3.3.

*Задание 16.* В рамках выполняемой выпускной работы сформулируйте управленческую задачу, которую можно было бы решить с использованием процедуры экспертного оценивания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

***Основная литература:***

1. Б е ш е л е в С. Д. Математико-статистические методы экспертных оценок / С. Д. Бешелев, Ф. Г. Гурвич. – М. : Статистика, 1980. – 263 с.
2. Л и т в а к Б. Г. Экспертная информация: методы получения и анализа / Б. Г. Литвак. – М. : Радио и связь, 1982. – 184 с.

***Дополнительная литература:***

1. Г о х м а н О. Г. Экспертное оценивание : учеб. пособие / О. Г. Гохман. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 1991. – 152 с.
2. Д а в н и с В. В. Прогнозные модели экспертных предпочтений : монография / В. В. Давнис, В. И. Тинякова. – Воронеж : Изд-во Воронеж гос. ун-та, 2005. – 248 с.
3. Е в л а н о в Л. Г. Экспертные оценки в управлении / Л. Г. Евланов, В.А. Кутузов. – М. : Экономика, 1978. – 133 с.
4. Л е д е н е в а Т. М. Модели и методы принятия решений : учеб. пособие / Т.М. Леденева. – Воронеж : Воронеж. гос. техн. ун-т, 2004. – 189 с.
5. Л и т в а к Б. Г. Экспертные технологии в управлении : учеб. пособие / Б. Г. Литвак. – М. : Дело, 2004. – 398 с.
6. Л и т в а к Б. Г. Разработка управленческого решения : учебник / Б. Г. Литвак. – М. : Дело, 2003.– 392 с.
7. М и р к и н Б. Г. Проблема группового выбора / Б. Г. Миркин. – М. : Наука, 1974. – 256 с.
8. П а н к о в а Л. А. Организация экспертиз и анализ экспертной информации / Л. А. Панкова, А. М. Петровский, М. В. Шнейдерман. – М. : Наука, 1984. – 120 с.
9. С и д е л ь н и к о в Ю. В. Теория и организация экспертного прогнозирования / Ю. В. Сидельников. – М. : ИМЭМО АН СССР, 1990. – 196 с.
10. Э й т и н г о н В. Н. Методы организации экспертизы и обработки экспертных оценок в менеджменте : учеб.-метод. пособие / В. Н. Эйтингон, М. А. Кравец, Н. П. Панкратова. – Воронеж : Экон. ф-т Воронеж. гос. ун-та, 2004. – 43 с.

***Электронные ресурсы:***

1. Электронный каталог научной библиотеки Воронежского государственного университета. – http: //www.lib.vsu.ru/
2. Социальные и гуманитарные науки. Экономика : Библиографическая база данных. 1986-2004гг. / ИНИОН РАН. – М. : 2006. – (CD-ROM).

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Т а б л и ц а П.1

**Коэффициент конкордации. Вероятность того, что данная величина *S* будет достигнута или превышена (для *n* = 3)**

| *S* | *m* | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| 0 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 2 | 0,833 | 0,944 | 0,931 | 0,954 | 0,956 | 0,964 | 0,967 | 0,971 | 0,971 |
| 6 | 0,500 | 0,528 | 0,653 | 0,691 | 0,740 | 0,768 | 0,794 | 0,814 | 0,830 |
| 8 | 0,167 | 0,361 | 0,431 | 0,522 | 0,570 | 0,620 | 0,654 | 0,685 | 0,710 |
| 14 | | 0,194 | 0,273 | 0,367 | 0,430 | 0,486 | 0,531 | 0,569 | 0,601 |
| 18 | | 0,028 | 0,125 | 0,182 | 0,252 | 0,305 | 0,355 | 0,398 | 0,436 |
| 24 | | | 0,069 | 0,124 | 0,184 | 0,237 | 0,285 | 0,328 | 0,368 |
| 26 | | | 0,042 | 0,093 | 0,142 | 0,192 | 0,236 | 0,278 | 0,316 |
| 32 | | | 0,0046 | 0,039 | 0,072 | 0,112 | 0,149 | 0,187 | 0,222 |
| 38 | | | | 0,024 | 0,052 | 0,085 | 0,120 | 0,154 | 0,187 |
| 42 | | | | 0,0085 | 0,029 | 0,051 | 0,079 | 0,107 | 0,135 |
| 50 | | | | 0,00077 | 0,012 | 0,027 | 0,047 | 0,069 | 0,092 |
| 54 | | | | | 0,0081 | 0,021 | 0,038 | 0,057 | 0,078 |
| 56 | | | | | 0,0055 | 0,016 | 0,030 | 0,018 | 0,066 |
| 62 | | | | | 0,0017 | 0,0084 | 0,018 | 0,031 | 0,046 |
| 72 | | | | | 0,00013 | 0,0036 | 0,0099 | 0,019 | 0,030 |
| 74 | | | | | | 0,0027 | 0,0080 | 0,016 | 0,026 |
| 78 | | | | | | 0,0012 | 0,0048 | 0,010 | 0,018 |
| 86 | | | | | | 0,00032 | 0,0024 | 0,0060 | 0,012 |
| 96 | | | | | | 0,00032 | 0,0011 | 0,0035 | 0,0075 |
| 98 | | | | | | 0,000021 | 0,00086 | 0,0029 | 0,0063 |
| 104 | | | | | | | 0,00026 | 0,0013 | 0,0034 |
| 114 | | | | | | | 0,000061 | 0,00066 | 0,0020 |
| 122 | | | | | | | 0,000061 | 0,00035 | 0,0013 |
| 126 | | | | | | | 0,000061 | 0,00020 | 0,00083 |
| 128 | | | | | | | 0,0000036 | 0,000097 | 0,00051 |
| 134 | | | | | | | | 0,000054 | 0,00037 |
| 146 | | | | | | | | 0,000011 | 0,00018 |
| 150 | | | | | | | | 0,000011 | 0,00011 |
| 152 | | | | | | | | 0,000011 | 0,000085 |
| 158 | | | | | | | | 0,000011 | 0,000044 |
| 162 | | | | | | | | 0,000006 | 0,000020 |
| 168 | | | | | | | | | 0,000011 |
| 182 | | | | | | | | | 0,0000021 |
| 200 | | | | | | | | | 0,000000099 |

Т а б л и ц а П.2

**Коэффициент конкордации. Вероятность того, что данная величина *S* будет достигнута или превышена (для *n* = 4)**

| *S* | *m* | | *S* | *m* = 5 |
|---|---|---|---|---|
| | **3** | **5** | | |
| 1 | 1,000 | 1,000 | 61 | 0,055 |
| 3 | 0,958 | 0,975 | 65 | 0,044 |
| 5 | 0,910 | 0,944 | 67 | 0,034 |

Окончание табл. П.2

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 0,727 | 0,857 | 69 | 0,031 |
| 11 | 0,608 | 0,771 | 73 | 0,023 |
| 13 | 0,524 | 0,709 | 75 | 0,020 |
| 17 | 0,446 | 0,652 | 77 | 0,017 |
| 19 | 0,342 | 0,561 | 81 | 0,012 |
| 21 | 0,300 | 0,521 | 83 | 0,0087 |
| 25 | 0,207 | 0,445 | 85 | 0,0067 |
| 27 | 0,175 | 0,408 | 89 | 0,0055 |
| 29 | 0,148 | 0,372 | 91 | 0,0031 |
| 33 | 0,075 | 0,298 | 93 | 0,0023 |
| 35 | 0,054 | 0,260 | 97 | 0,0018 |
| 37 | 0,033 | 0,226 | 99 | 0,0016 |
| 41 | 0,017 | 0,210 | 101 | 0,0014 |
| 43 | 0,0017 | 0,162 | 105 | 0,00064 |
| 45 | 0,0017 | 0,141 | 107 | 0,00033 |
| 49 | | 0,123 | 109 | 0,00021 |
| 51 | | 0,107 | 113 | 0,00014 |
| 53 | | 0,093 | 117 | 0,000048 |
| 57 | | 0,075 | 125 | 0,0000030 |
| 59 | | 0,067 | | |

Таблица П.3

**Коэффициент конкордации. Вероятность того, что данная величина *S* будет достигнута или превышена (для *n* = 4)**

| ***S*** | ***m*** | | | ***S*** | ***m* = 6** |
|---|---|---|---|---|---|
| | **2** | **4** | **6** | | |
| 0 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 82 | 0,035 |
| 2 | 0,958 | 0,992 | 0,996 | 84 | 0,032 |
| 4 | 0,833 | 0,928 | 0,957 | 86 | 0,029 |
| 6 | 0,792 | 0,900 | 0,940 | 88 | 0,023 |
| 7 | 0,625 | 0,800 | 0,874 | 90 | 0,022 |
| 10 | 0,542 | 0,751 | 0,844 | 94 | 0,017 |
| 12 | 0,458 | 0,677 | 0,789 | 96 | 0,014 |
| 14 | 0,375 | 0,649 | 0,772 | 98 | 0,013 |
| 16 | 0,208 | 0,524 | 0,679 | 100 | 0,010 |
| 18 | 0,167 | 0,508 | 0,668 | 101 | 0,0096 |
| 20 | 0,042 | 0,432 | 0,609 | 104 | 0,0085 |
| 22 | | 0,389 | 0,574 | 106 | 0,0073 |
| 24 | | 0,355 | 0,541 | 108 | 0,0061 |
| 26 | | 0,324 | 0,512 | 110 | 0,0057 |
| 30 | | 0,242 | 0,431 | 114 | 0,0040 |
| 32 | | 0,200 | 0,386 | 116 | 0,0033 |
| 34 | | 0,190 | 0,375 | 118 | 0,0028 |
| 36 | | 0,158 | 0,338 | 120 | 0,0023 |
| 38 | | 0,141 | 0,317 | 122 | 0,0020 |

Окончание табл. П.3

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 40 | | 0,105 | 0,270 | 126 | 0,0015 |
| 42 | | 0,094 | 0,256 | 128 | 0,00090 |
| 44 | | 0,077 | 0,230 | 130 | 0,00087 |
| 46 | | 0,068 | 0,218 | 132 | 0,00073 |
| 48 | | 0,054 | 0,197 | 134 | 0,00065 |
| 50 | | 0,052 | 0,194 | 136 | 0,00040 |
| 52 | | 0,036 | 0,163 | 138 | 0,00036 |
| 54 | | 0,033 | 0,155 | 140 | 0,00028 |
| 56 | | 0,019 | 0,127 | 144 | 0,00024 |
| 58 | | 0,014 | 0,114 | 146 | 0,00022 |
| 62 | | 0,012 | 0,108 | 148 | 0,00012 |
| 64 | | 0,0069 | 0,089 | 150 | 0,000095 |
| 66 | | 0,0062 | 0,083 | 152 | 0,000062 |
| 68 | | 0,0027 | 0,073 | 154 | 0,000046 |
| 70 | | 0,0027 | 0,066 | 158 | 0,000024 |
| 72 | | 0,0016 | 0,060 | 160 | 0,000016 |
| 74 | | 0,00094 | 0,056 | 162 | 0,000012 |
| 76 | | 0,00094 | 0,043 | 164 | 0,0000080 |
| 78 | | 0,00094 | 0,041 | 170 | 0,0000024 |
| 80 | | 0,000072 | 0,037 | 180 | 0,00000013 |

Таблица П.4

**Коэффициент конкордации. Вероятность того, что данная величина *S* будет достигнута или превышена (для *n* = 5)**

| *S* | *m* = 3 | *S* | *m* = 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,000 | 44 | 0,236 |
| 2 | 1,000 | 46 | 0,213 |
| 4 | 0,988 | 48 | 0,172 |
| 6 | 0,972 | 50 | 0,163 |
| 7 | 0,941 | 52 | 0,127 |
| 10 | 0,914 | 54 | 0,117 |
| 12 | 0,845 | 56 | 0,096 |
| 14 | 0,831 | 58 | 0,080 |
| 16 | 0,768 | 60 | 0,063 |
| 18 | 0,720 | 62 | 0,056 |
| 20 | 0,682 | 64 | 0,045 |
| 22 | 0,619 | 66 | 0,038 |
| 24 | 0,595 | 68 | 0,028 |
| 26 | 0,559 | 70 | 0,026 |
| 28 | 0,493 | 72 | 0,017 |
| 30 | 0,475 | 74 | 0,015 |
| 32 | 0,432 | 76 | 0,0078 |
| 34 | 0,406 | 78 | 0,0053 |
| 36 | 0,347 | 80 | 0,0040 |
| 38 | 0,326 | 82 | 0,0028 |
| 40 | 0,291 | 86 | 0,00090 |
| 42 | 0,253 | 90 | 0,000069 |

Т а б л и ц а П.5

**Квантили распределения $c^2(n)$**

**($n$ – число степеней свободы, $a$ - доверительный интервал)**

| | **0,005** | **0,010** | **0,025** | **0,050** | **0,100** | **0,900** | **0,950** | **0,975** | **0,990** | **0,995** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,000039 | 0,00016 | 0,00098 | 0,0039 | 0,0158 | 2,71 | 3,84 | 5,02 | 6,63 | 7,88 |
| **2** | 0,0100 | 0,0201 | 0,0506 | 0,1026 | 0,2107 | 4,61 | 5,99 | 7,38 | 9,21 | 10,60 |
| **3** | 0,0717 | 0,115 | 0,216 | 0,352 | 0,584 | 6,25 | 7,81 | 9,35 | 11,34 | 12,84 |
| **4** | 0,207 | 0,297 | 0,484 | 0,711 | 1,064 | 7,78 | 9,49 | 11,14 | 13,28 | 14,86 |
| **5** | 0,412 | 0,554 | 0,831 | 1,15 | 1,61 | 9,24 | 11,07 | 12,83 | 15,09 | 16,75 |
| **6** | 0,676 | 0,872 | 1,24 | 1,64 | 2,20 | 10,64 | 12,59 | 14,45 | 16,81 | 18,55 |
| **7** | 0,989 | 1,24 | 1,69 | 2,17 | 2,83 | 12,02 | 14,07 | 16,01 | 18,48 | 20,28 |
| **8** | 1,34 | 1,65 | 2,18 | 2,73 | 3,49 | 13,36 | 15,51 | 17,53 | 20,09 | 21,96 |
| **9** | 1,73 | 2,09 | 2,70 | 3,33 | 4,17 | 14,68 | 16,92 | 19,02 | 21,67 | 23,59 |
| **10** | 2,16 | 2,56 | 3,25 | 3,94 | 4,87 | 15,99 | 18,31 | 20,48 | 23,21 | 25,19 |
| **11** | 2,60 | 3,05 | 3,82 | 4,57 | 5,58 | 17,28 | 19,68 | 21,92 | 24,73 | 26,76 |
| **12** | 3,07 | 3,57 | 4,40 | 5,23 | 6,30 | 18,55 | 21,03 | 23,34 | 26,22 | 28,30 |
| **13** | 3,57 | 4,11 | 5,01 | 5,89 | 7,04 | 19,81 | 22,36 | 24,74 | 27,69 | 29,82 |
| **14** | 4,07 | 4,66 | 5,63 | 6,57 | 7,79 | 21,06 | 23,68 | 26,12 | 29,14 | 31,32 |
| **15** | 4,60 | 5,23 | 6,26 | 7,26 | 8,55 | 22,31 | 25,00 | 27,49 | 30,58 | 32,80 |
| **16** | 5,14 | 5,81 | 6,91 | 7,96 | 9,31 | 23,54 | 26,30 | 28,85 | 32,00 | 34,27 |
| **18** | 6,26 | 7,01 | 8,23 | 9,39 | 10,86 | 25,99 | 28,87 | 31,53 | 34,81 | 37,16 |
| **20** | 7,43 | 8,26 | 9,59 | 10,85 | 12,44 | 28,41 | 31,41 | 34,17 | 37,57 | 40,00 |
| **24** | 9,89 | 10,86 | 12,40 | 13,85 | 15,66 | 33,20 | 36,42 | 39,36 | 42,98 | 45,56 |
| **30** | 13,79 | 14,95 | 16,79 | 18,49 | 20,60 | 40,26 | 43,77 | 46,98 | 50,89 | 53,67 |
| **40** | 20,71 | 22,16 | 24,43 | 26,51 | 29,05 | 51,81 | 55,76 | 59,34 | 63,69 | 66,77 |
| **60** | 35,53 | 37,48 | 40,48 | 43,19 | 46,46 | 74,40 | 79,08 | 83,30 | 88,38 | 91,95 |
| **80** | 51,17 | 53,54 | 57,15 | 60,39 | 64,28 | 96,58 | 101,88 | 106,63 | 112,33 | 116,32 |
| **100** | 67,33 | 70,06 | 74,22 | 77,93 | 82,36 | 118,5 | 124,34 | 129,56 | 135,81 | 140,17 |
| **120** | 83,85 | 86,92 | 91,58 | 95,7 | 100,62 | 140,23 | 146,57 | 152,21 | 158,95 | 163,64 |

*Пример*. Пусть $c^2$– случайная величина, распределенная по закону $c^2$ с пятью степенями свободы. $c^2_{0,95}(5) = 11{,}07$, т.е. $P(c^2 < 11{,}07) = 0{,}95$ (см. пятая строка, седьмой столбец).

Автор: канд. экон. наук, преп. Тинякова Виктория Ивановна

Рецензент: Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики и экономико-математических методов Воронежской государственной технологической академии
Матвеев Михаил Григорьевич

Редактор Бунина Т.Д.