

Министерство Образования Российской Федерации

Новосибирский Государственный Университет

Экономический Факультет

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Предтеченский Аркадий Григорьевич

Построение моделей авторегрессионной условной
гетероскедастичности (ARCH) некоторых индикаторов российского
финансового рынка.

Научные руководители

д.э.н., член-корр. РАН Суслов В.И.

к.э.н., Цыплаков А.А.

Зав. кафедрой

д.э.н., профессор Мкртчян Г.М.

Новосибирск, 2000

СОДЕРЖАНИЕ.

ВВЕДЕНИЕ

ГЛАВА 1. ARCH ПРОЦЕССЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, МОДЕЛИ, ПРИЛОЖЕНИЯ.

1.1 Основные одномерные параметризации.

1.2 Стационарность.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ.

2.1 Оценивание ARCH-N модели: метод максимального правдоподобия.

2.2 Нарушения гипотезы об условной нормальности: метод квази-максимального правдоподобия.

2.3 Обобщенный метод моментов.

ГЛАВА 3. ЭМПИРИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

3.1 Одномерные модели.

3.2 Многомерные модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

ВВЕДЕНИЕ.

Шестидесятые и семидесятые годы в эконометрике временных рядов были ознаменованы созданием и плодотворным применением моделей линейной фильтрации. Внимание исследователей было приковано к динамическому поведению первого момента. Использование функции условного среднего (в отличие от безусловного среднего) обеспечило успех линейных моделей, которые, однако, игнорировали любые межвременные зависимости в высших моментах. Такой акцент в эконометрическом моделировании диктовался экономической теорией, традиционно специфицирующей структурные взаимозависимости между ожидаемыми величинами. Однако развитие представлений о риске и неопределенности в экономике и финансах вызвали необходимость в таких эконометрических методах, которые позволяли бы описать динамику высших моментов, и особенно вариаций и ковариаций.

Хорошо известно, что присущая рынку неопределенность, измеряемая вариациями или ковариациями, изменяется во времени. Изучение этих изменений приобрело систематический характер лишь с появлением моделей авторегрессионной условной гетероскедастичности (*AutoRegressive Conditionally Heteroskedastic, ARCH*). Основная идея *ARCH* модели состоит в различии между условными и безусловными моментами второго порядка. Тогда как безусловные вариации и ковариации постоянны, условные моменты нетривиально зависят от прошлых состояний мира и развиваются во времени. Эта концепция и конкретная спецификация были впервые представлены в работе Engle Robert F. (1982), за которой последовали бесчисленные модификации базовой конструкции и примеры применения новой модели к финансовым и макроэкономическим временным рядам.

Первым объектом моделирования стала инфляционная неопределенность. Впоследствии *ARCH* модели нашли применение в анализе волатильности цен и доходностей спекулятивных активов. Применением *ARCH* моделей установлено, что динамика волатильности многих финансовых переменных подчиняется устойчивым закономерностям.

Целью данной работы является изучение динамики волатильности некоторых индикаторов финансового рынка России с применением методов *ARCH* моделирования.

В качестве *индикаторов финансового рынка* мы принимаем наиболее агрегированные переменные, характеризующие доходность или цену рыночного портфеля, но не отдельных активов, составляющих этот портфель. Индикаторами рынка акций выступают индекс Российской Торговой Системы (РТС) и доходность вложений в индекс РТС, индикаторами рынка ГКО – взвешенные доходности и цены государственных краткосрочных обязательств. Термином «волатильность» охвачены условные дисперсии и ковариации.

Условная дисперсия финансовых индикаторов отражает уровень системного риска, измеряет неопределенность, связанную с прогнозированием динамики рынка. Традиционная модель ценообразования для капитальных активов и ее динамическая модификация указывают на пропорциональную зависимость между ожидаемой избыточной отдачей рыночного портфеля и его условным

стандартным отклонением. *ARCH* модель является естественным инструментом для изучения этой проблемы в динамическом контексте, когда отдача и условная дисперсия развиваются во времени.

Условные корреляции между сегментами финансового рынка позволяют оценить эффективность диверсификации средств как способ страхования рисков. Низкая корреляция указывает на эффективность диверсификации, тогда как высокая корреляция свидетельствует об обратном.

Поставлены *задачи*:

1. По данным литературных отчетов выделить устойчивые закономерности динамики волатильности финансовых индикаторов, установленные применением *ARCH* моделей.
2. Найти адекватный метод оценивания *ARCH* моделей с учетом специфики российских данных. Выбор метода оценивания неизбежно является компромиссным между эффективностью и технической простотой.
3. Изучить динамику условной дисперсии индикаторов рынка. Выделить периоды повышенной турбулентности и относительной стабилизации.
4. Проверить гипотезу о пропорциональной зависимости между ожидаемой доходностью рыночного портфеля и условным стандартным отклонением. Выделить премию за риск.
5. С применением многомерных *ARCH* моделей изучить динамику условных корреляций между индикаторами рынка. Оценить эффективность диверсификации средств с позиции страхования рисков на характерных временных интервалах.

Диплом состоит из введения, трех глав и заключения.

Глава 1 является обзорной. В параграфе 1.1 обсуждаются общее определение *ARCH* процессов и возможные параметризации условной дисперсии; выделены некоторые эмпирические закономерности, установленные применением *ARCH* моделей. В параграфе 1.2 сформулированы условия стационарности.

В главе 2 рассматриваются методы оценивания одномерной *ARCH* модели, спецификация которой допускает любой способ совместной параметризации функций условного среднего и дисперсии. Описаны методы максимального правдоподобия и квази-максимального правдоподобия; особое внимание уделено состоятельному оцениванию матрицы ковариации оценок. Представлен разработанный автором способ оценивания неизвестных параметров модели на основе обобщенного метода моментов.

В части 1 главы 3 представлены результаты применения одномерных моделей. Анализ результатов проведен по схеме, используемой наиболее часто в зарубежных отчетах. Обсуждаются: условные распределения процессов; динамика условной дисперсии; асимметричное влияние инноваций на динамику условной дисперсии; зависимость между условным средним и условной дисперсией; присутствие единичного корня в дисперсии. Методы квази-максимального правдоподобия и моментов сравниваются с точки зрения эффективности оценок модели для изучаемых временных рядов.

В части 2 главы 3 представлены результаты применения многомерных моделей. Обсуждаются оцененные корреляции и причинные связи между сегментами рынка ГКО и фондовым рынком.

ГЛАВА 1. ARCH ПРОЦЕССЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, МОДЕЛИ, ПРИЛОЖЕНИЯ.

1.1 ОСНОВНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ.

Если задано распределение вероятностей y_t , условное по предопределенным к моменту t величинам y_{t-1}, y_{t-2}, \dots , составляющим информационное множество Ω_t , то одношаговым прогнозом значения y_t на основе этой информации является условное математическое ожидание $E(y_t | \Omega_t)$, ошибкой прогноза – условная дисперсия $V(y_t | \Omega_t)$. Оба этих выражения в принципе допускают зависимость от Ω_t . Если же условная дисперсия в действительности постоянна и не зависит от истории процесса, то такой процесс обладает свойством *условной гомоскедастичности*.

Рассмотрим в качестве примера авторегрессию

$$y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$$

где ε - белый шум с дисперсией σ^2 . Условное среднее равно γy_{t-1} , тогда как условная дисперсия равна σ^2 и не зависит от истории процесса, который является поэтому условно гомоскедастичным. Являются таковыми и все процессы авторегрессии – скользящего среднего.

Известно, что вариабельность экономических переменных широко изменяется во времени, соответственно, изменяется и точность эконометрических прогнозов. Гипотеза гомоскедастичности остатков, как правило, не выдерживает тестирования. Ниже изучаются процессы, обладающие свойством *условной гетероскедастичности*, т.е. такие, условная дисперсия которых нетривиально зависит от истории процесса и более точно характеризует степень присущей прогнозам неопределенности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{t=+\infty}$ – скалярный стохастический процесс, Ω_t – набор переменных, которым обусловлены математические ожидания¹:

$$\Omega_t = (\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, X_t),$$

где X_t - экзогенные переменные. Процесс ε является авторегрессионно условно гетероскедастичным (*Autoregressive Conditionally Heteroskedastic, ARCH*), если

¹ Ω_t называют также информационным множеством (*information set*), или информацией, доступной к моменту t .

$$(1.1.a) \quad E(\varepsilon_t | \Omega_t) = 0$$

$$(1.1.b) \quad E(\varepsilon_t^2 | \Omega_t) = V(\varepsilon_t | \Omega_t) = \sigma_t^2(\Omega_t)$$

и $\sigma_t^2(\cdot)$ нетривиально зависит от Ω_t ; аргумент функции далее будем опускать. Данное определение будет уточнено в последующих параграфах.

Лишь немногие экономические переменные имеют постоянное условное среднее, равное нулю. Как правило, процесс ε_t соответствует возмущениям менее ограничительной модели какой-либо переменной y_t :

$$(1.2) \quad \varepsilon_t \equiv y_t - E(y_t | \Omega_t).$$

В этом случае условные дисперсии y_t и ε_t совпадают.

Стандартизованный процесс

$$(1.3) \quad z_t = \varepsilon_t \sigma_t^{-1}$$

имеет неизменные во времени нулевое условное среднее и единичную условную дисперсию.

Приведенное определение охватывает чрезвычайно широкий класс процессов. Ниже рассматриваются некоторые возможные параметризации условной дисперсии.

Пусть, например, $\sigma_t^2 = \alpha \varepsilon_{t-1}^2$, $\alpha > 0$. Тогда при $\alpha < 1$ безусловная дисперсия равна нулю, при $\alpha > 1$ бесконечна. Такие свойства безусловного распределения ε_t делают данную параметризацию непривлекательной, однако некоторые обобщения позволяют избежать подобных проблем.

GARCH

В формулировке, предложенной Энглем (Engle, 1982), условная дисперсия ε_t описывается линейной функцией квадратов предшествующих ε_t реализаций ряда:

$$(1.4) \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2.$$

Для того, чтобы эта величина оставалась положительной с вероятностью единица, требуется $\omega > 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$.

Высокие по абсолютному значению реализации процесса в непосредственном прошлом влекут увеличение условной дисперсии в данный момент, и, следовательно, условной вероятности появления вновь высокой по модулю реализации ε . Напротив, относительно небольшие значения $\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ приводят к снижению этой вероятности. Таким образом, можно ожидать, что вслед за большими (по абсолютному значению) наблюдениями вновь последуют большие наблюдения, за малыми - малые. Выбросы имеют тенденцию следовать один за другим, формируя периоды экстремально высокой

волатильности. История процесса, однако, не позволяет прогнозировать знак ε_t , поскольку ряд серийно не коррелирует. Серийная некоррелированность следует из требования (1.1.a), традиционно предъявляемого к возмущениям в эконометрической модели.

На графике *ARCH* процесса могут быть обнаружены периоды спокойного движения переменной, характеризующиеся относительно низкой дисперсией, и турбулентные периоды, в течение которых дисперсия высока. В западной литературе такое поведение временного ряда получило название *clustering volatility*: образование «пучков», концентрация волатильности. Термин «волатильность» (*volatility* - изменчивость, непостоянство, *англ.*) используется, как правило, для неформального обозначения степени вариабельности, разброса переменной. Формальной мерой волатильности служит дисперсия (или стандартное отклонение). Эффект *clustering volatility* отмечен для многих высокочастотных рядов, таких как изменение цен акций, валютных курсов, доходности спекулятивных активов. Наиболее цитируемым в данной связи является наблюдение Манделброта (Mandelbrot, 1963):

«...большие изменения имеют тенденцию следовать за большими изменениями - любого знака, - и малые изменения имеют тенденцию следовать за малыми, ...».

На рисунке 1 изображены темпы приростов фондового индекса *PTC*. Имеются три ярко выраженных и продолжительных всплеска волатильности, которые чередуются с периодами относительно предсказуемого развития переменной; в целом *PTC* демонстрирует поведение, характерное для *ARCH* процесса.

Память *ARCH*(q) процесса ограничена q периодами. При использовании модели часто требуется длинный лаг q и большое число параметров α . Обобщенный *ARCH* процесс (*Generalized ARCH, GARCH*), предложенный Т. Боллерслевом (Bollerslev, 1986), имеет бесконечную память и допускает более экономную параметризацию:

$$(1.5) \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

ARCH процесс, очевидно, является частным случаем (1.5). Помимо (1.5), часто используются следующие представления процесса:

- При помощи оператора сдвига L и многочленов

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^q \alpha_i x^i \quad \beta(x) = \sum_{j=1}^p \beta_j x^j :$$

$$(1.6) \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2.$$

- В виде процесса авторегрессии – скользящего среднего. Перегруппировав члены (1.6), приходим к уравнениям

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= \omega + (\alpha(L) + \beta(L))\varepsilon_t^2 + (1 - \beta(L))v_t, \\ v_t &\equiv \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2, \end{aligned}$$

которые говорят о том, что квадраты ошибок подчиняются *ARMA* модели с полиномом авторегрессии $\alpha(x)+\beta(x)$ степени $p \wedge q$, полиномом скользящего среднего $-\beta(x)$ степени p и серийно некоррелированными инновациями v_t . Для *ARCH* процесса (при $p=0$) представление (1.7) сводится к авторегрессии порядка q :

$$\varepsilon_t^2 = \omega + A(L)\varepsilon_t^2 + v_t.$$

- В виде распределенного лага значений ε_t^2 .

$$(1.8) \quad \sigma_t^2 = \delta_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \varepsilon_{t-j}^2.$$

Такое представление допустимо, если все корни $1-\beta(x)$ лежат вне единичного круга и не совпадают с корнями $\alpha(x)$. Полином бесконечной степени, участвующий в (1.8), соответствует разложению в ряд Тейлора $\alpha(x)/(1-\beta(x))$. *GARCH* процесс является корректно определенным, лишь если все коэффициенты δ данного разложения неотрицательны, что для *GARCH*(1,1) равносильно условию $\omega, \alpha_1, \beta_1 \geq 0$.

EGARCH

Простая структура *GARCH* модели существенно ограничивает динамику временного ряда. Как правило, указывается на три недостатка моделей данного типа.

I. Отмечено, что отдача вложений в акции имеет отрицательную корреляцию с изменениями волатильности. Благодаря предложенному экономическому объяснению феномен получил название «левередж-эффекта» (*leverage effect*). Снижение рыночной стоимости акционерного капитала увеличивает отношение заемных средств к собственным и, следовательно, повышает рискованность вложений в фирму. Последнее проявляется увеличением волатильности. В результате, будущие значения волатильности отрицательно коррелируют с текущей отдачей. Nelson (1991) описывает феномен таким образом:

“Отрицательные инновации², или «плохие новости» – ситуация, в которой фактическая отдача ниже ожидаемой – приводят к увеличению волатильности. Напротив, положительные инновации («хорошие новости» – фактическая отдача выше ожидаемой) влекут снижение волатильности.”

Речь идет, таким образом, об отрицательной корреляции между ε_t и σ_{t+1}^2 . Корреляция между этими величинами, однако, игнорируется *GARCH* моделью. Действительно, σ_t^2 есть функция собственных лагов и значений ε_t^2 и поэтому

² Инновации, определенные формулой (1.2), показывают расхождение фактического и ожидаемого значений переменной y_t .

инвариантна к изменениям алгебраического знака ε_t : лишь абсолютные значения, но не отрицательность или положительность ошибок определяют условную дисперсию. Если распределение ε симметрично, то будущее значение условной дисперсии не коррелирует с текущей ошибкой прогноза.

II. Применительно к процессам типа *GARCH* различные определения стационарности не согласованы. Строго стационарный *GARCH* процесс не всегда слабо стационарен. Различие между строгой и слабой стационарностью несущественно для линейных моделей: традиционно проверяемый набор условий является необходимым и достаточным как для ковариантной, так и строгой стационарности. Некоторые утверждения, устанавливающие ту или иную форму стационарности *GARCH* и *EGARCH* процессов, обсуждаются далее в параграфе 3.

III. Наконец, ограничения области допустимых значений параметров α и β создают трудности при оценивании *GARCH* модели.

В экспоненциальной модели (*exponential GARCH*, *EGARCH*), предложенной Д.Нельсоном (Nelson, 1991), логарифм условной дисперсии определяется с помощью некоторой функции $g(\cdot)$ стандартизованных ошибок:

$$(1.9) \quad \ln \sigma_t^2 = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k g(z_{t-k})$$

Описанные выше эффекты учтены через данную функцию, которая зависит как от абсолютной величины, так и знака z :

$$(1.10) \quad g(z) = \theta z + \gamma [|z| - E|z|].$$

Процесс $g(z_t)$ имеет нулевое условное математическое ожидание, поэтому логарифм условной дисперсии является *процессом линейной фильтрации*. Соотношением (1.9) $\ln \sigma_t^2$ представлен как скользящее среднее бесконечной степени, однако для практических целей применяется *ARMA(p,q)* репрезентация:

$$(1.11) \quad \ln \sigma_t^2 = \delta_0 + \frac{1 + \alpha(L)}{1 - \beta(L)} g(z_{t-1}).$$

Запись (1.11) корректна, если полиномы $1 + \alpha(x)$ и $1 - \beta(x)$ не имеют общих корней. Никаких ограничений на параметры, связанных с требованием неотрицательности условной дисперсии, в (1.9)-(1.11) не налагается.

Оба слагаемых $g(z_t)$ имеют нулевое среднее; если распределение z симметрично, они ортогональны. В интервале $0 < z < +\infty$ $g(z)$ линейна по z с коэффициентом наклона $\theta + \gamma$; в интервале $-\infty < z < 0$ $g(z)$ линейна по z с коэффициентом наклона $\theta - \gamma$. Таким образом, условная дисперсия реагирует асимметрично на неожиданные падения и подъемы рынка.

Член $\gamma [|z| - E|z|]$ представляет «эффект абсолютного значения» в духе *GARCH* моделей. Предположим, $\theta = 0, \gamma > 0$. Тогда инновация логарифма условной дисперсии $g(z)$ положительна (отрицательна), если абсолютное значение z больше (меньше) ожидаемого. Член θz ответствен за «эффект

алгебраического знака». Предположим, $\theta < 0, \gamma = 0$. Инновация условной дисперсии положительна (отрицательна), если ошибка прогноза доходности отрицательна (положительна).

Если распределение z симметрично, то $E(z|z)$ равно нулю и

$$\text{Cov}(\ln \sigma_t^2, z_{t-k}) = \delta_k \theta.$$

Леввередж-эффект имеет место, если $\theta < 0$. Гипотеза об отрицательной ковариации между $\ln \sigma_t^2$ и z_{t-k} находит эмпирическое подтверждение в работах Nelson (1991) и Bollerslev, Engle и Nelson (1993), отдельные результаты которых более подробно обсуждаются в следующих разделах.

ДРУГИЕ ОДНОМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ.

Одним из представлений условной дисперсии *GARCH* процесса служит распределенный лаг квадратов остатков. Бесчисленные модификации базовой модели были получены применением различных функциональных форм для $h(\cdot)$ в рамках более общего представления:

$$\sigma_t^n = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k h(\varepsilon_{t-k}).$$

Так, Higgins и Bera (1992) определяют класс нелинейных *ARCH* процессов (*Non-linear ARCH*), для которых $h(\varepsilon) = |\varepsilon|^n$.

Если $h(\varepsilon) = |\varepsilon - \kappa|^n$, то условная дисперсия асимметрично реагирует на ошибки разных знаков; в частности, при $\kappa > 0$ возникает леввередж-эффект, однако в отличие от *EGARCH* спецификации, инновации σ_t^n всегда неотрицательны. Возможная модификация, соответствующая $n=2$: $h(\varepsilon) = \alpha \varepsilon^2 + \theta \varepsilon$. Другая параметризация, допускающая эффекты асимметрии:

$$(1.12) \quad h(\varepsilon) = [\alpha^+ I(\varepsilon > 0) + \alpha^- I(\varepsilon < 0)] |\varepsilon|^n,$$

где $I(\cdot)$ обозначает индикаторную функцию. Такая параметризация допускает неодинаковую чувствительность условной дисперсии к ошибкам разных знаков, однако утверждает, что минимум волатильности достигается при отсутствии ошибок.

Bollerslev, Engle и Nelson (1993) отмечают два недостатка параметризации *EGARCH* (1.9)-(1.10). *I.* Условные по Ω_t вариация $\ln \sigma_{t+1}^2$ и ковариация $\ln \sigma_{t+1}^2$ и z_t постоянны. Желательно, чтобы оба момента могли изменяться в зависимости от σ_t^2 . *II.* Условная дисперсия излишне чувствительна к выбросам. Авторы предлагают модификацию базовой модели

$$\ln \sigma_t^2 = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k g(z_{t-k}, \sigma_{t-k}^2)$$

$$g(z_t, \sigma_t^2) = \sigma_t^{2\theta_0} \theta_1 \frac{z_t}{1 + \theta_2 |z_t|} + \sigma_t^{2\gamma_0} \gamma_1 \left[\frac{|z_t|^p}{1 + \gamma_2 |z_t|^p} - E \left(\frac{|z_t|^p}{1 + \gamma_2 |z_t|^p} \middle| \Omega_t \right) \right]$$

Параметры θ_0 и γ_0 отвечают первому требованию, θ_2 , γ_2 и ρ регулируют уровень чувствительности условной дисперсии к инновациям в зависимости от их абсолютного значения. Положительные θ_2 и γ_2 приписывают хвостовым реализации z_t относительно небольшой вес.

ARCH-M

Зависимость между ожидаемой отдачей и риском - центральный аспект финансовой теории. Традиционная модель ценообразования для капитальных активов (Capital Asset Pricing Model) и ее динамическая модификация Р. Мертона, арбитражная теория ценообразования С. Росса указывают на пропорциональную зависимость между ожидаемой избыточной отдачей рыночного портфеля и его условной дисперсией. *ARCH-M*, или *ARCH in Mean* модель является естественным инструментом для изучения этой проблемы в динамическом контексте, когда отдача и условная дисперсия развиваются во времени.

Модель типа *ARCH-M* предполагает явную функциональную зависимость условного среднего случайной величины y_t от собственной условной дисперсии. Отвлекаясь от прочих регрессоров, возможно, участвующих в уравнении для условного среднего, можно записать

$$(1.13) \quad E(y_t | \Omega_t) = \mu(\sigma_t^2).$$

Как правило, используется линейная от σ_t , σ_t^2 , или $\ln \sigma_t^2$ форма функциональной зависимости, например $\mu(\sigma_t^2) = \tau + \delta \sigma_t^2$, которая допускает следующую интерпретацию. Ожидаемая отдача рыночного портфеля распадается на две компоненты: безрисковый доход τ и премию за риск $\delta \sigma_t^2$. Экономические агенты ожидают увеличения доходности в связи с нарастанием неопределенности, коэффициент чувствительности ожидаемой доходности к изменениям условного стандартного отклонения связан с мерой относительного неприятия риска (*relative risk aversion*) и предполагается положительным.

Феномен положительной связи между условным средним и условной дисперсией может быть проиллюстрирован наблюдениями за доходностью *ГКО* в период январь 97 – август 98. Очевидно синхронное развитие условных моментов: наименьший уровень доходности зафиксирован в интервале июнь - сентябрь 97 года, этот же период характеризуется наименьшей турбулентностью, после чего увеличение доходности сопровождается видимым ростом волатильности.

Многочисленные примеры применения *ARCH-M* модели к отдаче вложений в различные фондовые индексы приводят к неоднозначным

результатам. French, Schwert и Stambaugh (1987) для ежедневного индекса S&P, Chou (1988) для еженедельного NYSE, другие авторы для индексов США и Великобритании обнаружили положительную зависимость между отдачей и риском: полученные в этих работах оценки коэффициентов неприятия риска положительны и значимо отличаются от нуля. Напротив, Glosten, Jagannathan и Runkle (1991), Nelson (1991), Bollerslev, Engle и Nelson (1993) указывают на отсутствие такой зависимости, причем оцененный коэффициент неприятия риска в работе Nelson (1991) оказался отрицательным. Кроме того, некоторые регрессоры, например, лаги зависимой переменной, остаются значимыми в присутствии *ARCH-M* эффекта, величина и даже знак которого чувствительны к выбору инструментов, включаемых в уравнение среднего или дисперсии³.

В связи с моделированием фондовых индексов особый интерес представляют работы Nelson (1991), Bollerslev, Engle и Nelson (1993). Нельсон моделирует отдачу вложений в средневзвешенный индекс CRSP за период 1962-1987⁴. Исследованием Боллерслева и др. охвачена динамика фондовых индексов США на протяжении более чем столетнего периода: Dow Jones за два отдельных периода 1985-1914 и 1914-28, Standard 90 (1928-52), S&P (1953-90)⁵.

В обеих работах применяются *EGARCH* модели. По критерию Schwartz для логарифма условной дисперсии четырех временных рядов выбрана *ARMA(2,1)* репрезентация, исключением стал *DJ* (1914-28), для которого выбрана *AR(1)* репрезентация. Все пять оцененных моделей свидетельствуют о леввередж-эффекте (в обозначениях (1.10) $\theta < 0, \gamma > 0$).

Функции условного среднего параметризованы как

$$\mu(y_{t-1}, \sigma_t^2) = \mu_0 + \mu_1 y_{t-1} + \mu_3 \sigma_t^2 \quad (\text{Nelson})$$

$$\mu(y_{t-1}, \sigma_t^2) = \mu_0 + [\mu_1 + \mu_2 \exp(-\sigma_t^2/u^2)] y_{t-1} + \mu_3 \sigma_t^2 \quad (\text{Bollerslev}).$$

Обе параметризации отвергают наличие связи между уровнем доходности и ее волатильностью за единственным исключением. *t*-статистики коэффициента μ_3 составляют

³ Более полный перечень литературных источников и обсуждение данного вопроса представлены Bollerslev, Chou и Kroner (1992).

⁴ Автор сравнивает поведение двух временных рядов:

- избыточной отдачи (*excess return*) вложений в индекс с учетом дивидендов d_t по сравнению с доходностью безрисковых вложений r_t

$$\ln((P_t + d_t)/P_{t-1}) - r_t,$$

- дохода от прироста рыночной стоимости капитала (*capital gain*), игнорирующего дивидендные выплаты и возможность безрисковых вложений

$$\ln(P_t/P_{t-1}).$$

Два временных ряда и наборы оцененных параметров практически идентичны, так что пренебрежение d_t и r_t не приводит к сколько-нибудь серьезным ошибкам прогноза волатильности фондового индекса.

⁵ Рассматривается доходность от прироста рыночной стоимости капитала, см. сноску 5. В обеих работах используются ежедневные данные.

-1,6588	для избыточной доходности вложений в CRSP (1962-1987)
-0,9826	для дохода от увеличения рыночной стоимости CRSP (1962-1987)
0,0287	для DJ (1985-1914)
0,7149	для DJ (1914-1928)
2,7941	для Standard 90 (1928-1952)
0,2347	для S&P (1953-1990).

Подтверждение получила гипотеза об отрицательной зависимости между серийной корреляцией и волатильностью, возможность которой учтена при помощи множителя в квадратных скобках (u^2 обозначает выборочную безусловную дисперсию y_i): для DJ (1985-1914 и 1914-28), Standard 90 и для S&P параметр μ_2 положителен и значимо отличается от нуля. Для Standard 90, например, оцененная условная корреляция составляет 0.17, если $\sigma_i^2/u^2 = 0.1$ и - 0.07, если $\sigma_i^2/u^2 = 0.9$.

ARCH-M модель привлекалась также для идентификации премии за риск во временной структуре процентных ставок и в связи с гипотезой эффективности валютного рынка.

Под временной структурой процентных ставок понимается соотношение между доходностью ценных бумаг с различными сроками погашения. Такая структура может быть проиллюстрирована в виде кривой дохода и демонстрирует меньший доход для краткосрочных ценных бумаг и больший - для долгосрочных. Рост ставок при движении от кратко- к долгосрочным бумагам можно объяснить возрастающим риском инвестирования. Engle, Lilien, Robins (1987) моделируют разницу в доходности 6-ти и 3-х месячных казначейских векселей (используются поквартальные данные за период 1960-1984, применяется *ARCH(12)* спецификация условной дисперсии). Динамика *сверхдоходности* относительно более длинных бумаг (*excess holding yield*) обнаружила значимую компоненту, связанную с изменением условной дисперсии; однако, среднее значение этой компоненты составляет лишь 0.14 процента за квартал.

Гипотеза эффективности валютного рынка утверждает, что форвардный валютный курс является лучшим несмещенным прогнозом будущего курса наличной валюты. Однако практические наблюдения вселяют сомнения относительно эффективности валютного рынка в этом смысле. Смещенность форвардного курса не обязательно свидетельствует о нерациональности участников рынка и может быть манифестацией премии за риск. Эмпирически тестировались различные аппроксимации премии за риск, в том числе связанные непосредственно с условной дисперсией курса спот (Domowitz и Nakkio (1985); Kendall и McDonald (1989)); эти работы приводят к противоречивым результатам относительно адекватности *ARCH-M* спецификации.

1.2 СТАЦИОНАРНОСТЬ.

В данном параграфе мы обратимся к некоторым утверждениям, устанавливающим ту или иную форму стационарности *GARCH* и *EGARCH* процессов. Строгая форма стационарности предполагает, что все вероятностные характеристики процесса ε_t не меняются с течением времени; в частности, безусловное распределение вероятностей при всех t является одним и тем же. При слабой (ковариантной) форме стационарности безусловная дисперсия ε_t ограничена и совпадает для всех t .

Вернемся к определению параграфа 1.1 и рассмотрим *ARCH-N* – процесс, т.е. такой, условное распределение которого является нормальным:

$$(2.1) \quad \varepsilon_t | \Omega_t \sim N(0, \sigma_t^2).$$

Соответствующий стандартизованный процесс z_t имеет условно нормальное распределение с параметрами 0 и 1: $z_t | \Omega_t \sim N(0, 1)$. Поскольку нормальная плотность определяется лишь двумя своими параметрами, плотность распределения $z_t | \Omega_t$ неизменна при всевозможных значениях Ω_t . Следовательно, z_t независимы от входящих в набор Ω_t случайных величин и любых функций от этих случайных величин. В частности, z_t не зависит от $\sigma_t^2, \varepsilon_{t-1}, z_{t-1}, \sigma_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}, z_{t-2}, \dots$. Это наблюдение позволяет сформулировать эквивалентное (2.1) определение *ARCH-N* процесса:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= z_t \sigma_t \\ z_t &\stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1) \end{aligned}$$

В общем случае (без предположения об условной нормальности) свойство одинаковой распределенности и независимости стандартизованных остатков не является следствием определения, данного в параграфе 1. Однако это свойство упрощает изучение вопросов данного параграфа. Поэтому мы усилим определение *ARCH* процесса:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

$\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{t=+\infty}$ является *ARCH* процессом, если

$$(2.2.a) \quad \varepsilon_t = z_t \sigma_t(\Omega_t)$$

$$(2.2.b) \quad z_t \sim i.i.d. \quad E(z_t) = 0, \quad V(z_t) = 1.$$

GARCH

Теорема 1 описывает множество таких значений параметров α и β , при которых *GARCH*(1,1) является стационарным в строгом смысле.

Теорема 1 (Nelson, 1990).

Пусть процессы z_t , ε_t , σ_t^2 определены (2.2) и (1.5), причем $p=1$, $q=1$, $\omega>0$.
Процесс ε_t строго стационарен если и только если

$$(2.3) \quad E\left(\ln(\beta_1 + \alpha_1 z_t^2)\right) < 0.$$

Условие ковариантной стационарности для $GARCH(p,q)$ установлено теоремой 2. Свойство ограниченности безусловной дисперсии представляется желательным из соображений экономического порядка, однако для реальных процессов является скорее исключением, чем правилом.

Теорема 2 (Bollerslev, 1986).

Пусть процессы ε_t , σ_t^2 определены (1.1) и (1.5). Процесс ε_t ковариантно стационарен если и только если все корни $1-\beta(x)-\alpha(x)=0$ лежат вне единичного круга. Безусловная дисперсия равна

$$V(\varepsilon_t) = \omega(1 - \alpha(1) - \beta(1))^{-1}.$$

Условие теоремы очевидно в свете представления (1.7). Для $GARCH(1,1)$ критерий ковариантной стационарности сводится к

$$(2.4) \quad \alpha_1 + \beta_1 < 1.$$

Применением неравенства Иенсена в (2.3) можно установить, что слабая форма стационарности является достаточным, но не является необходимым условием для строгой формы стационарности. Например, процессы, для которых $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, или $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 0$ являются строго стационарными, однако безусловная дисперсия этих процессов бесконечна.

Указания на ковариантную нестационарность высокочастотных временных рядов объединяют большую часть эмпирической литературы. О возможной ковариантной нестационарности говорит близость оцененного значения $\alpha(1)+\beta(1)$ к единице. Формальные тесты на единичный корень в дисперсии представлены рядом авторов, включая French, Schwert и Stambaugh (1987) для индекса S&P, Chou (1988) для средневзвешенного NYSE; нулевая гипотеза не была отвергнута ни в этих, ни во многих других работах⁶.

Engle и Bollerslev (1986) определяют процессы с единичным корнем в дисперсии как интегрированные $GARCH$ (*Integrated GARCH*, *IGARCH*), например, для $IGARCH(1,1)$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha) \sigma_{t-1}^2.$$

⁶ Перечень литературных источников и обсуждение проблемы представлено Bollerslev, Chou и Kroner (1992).

IGARCH процессы строго стационарны, однако не имеют ограниченной безусловной дисперсии. Прогноз волатильности на s шагов вперед определен как

$$E(\sigma_{t+s}^2 | \Omega_t) = \omega s + \sigma_t^2,$$

так что текущая информация остается значимой, каков бы ни был горизонт прогнозирования.

Определенный интерес представляет четвертый безусловный момент: согласно многочисленным свидетельствам, распределения цен / доходностей различных финансовых активов имеют положительный куртозис⁷. Это наблюдение столь распространено в литературе, что Bollerslev, Engle и Nelson (1993) относят его к эмпирически установленным закономерностям (необходимые ссылки представлены Bollerslev, Chou и Kroner (1992)). Пусть *ARCH-N* процесс (2.1) имеет конечный безусловный момент четвертого порядка. Тогда, поскольку z_t и σ_t^2 независимы, и в силу неравенства Йенсена

$$E(\varepsilon_t^4) = E(z_t^4)E(\sigma_t^4) = 3E(\sigma_t^4) \geq 3E(\sigma_t^2)^2 = 3E(\varepsilon_t^2)^2,$$

причем равенство выполняется, лишь если σ_t^2 – константа, т.е. условная гетероскедастичность не имеет места. В противном случае безусловное распределение ε_t характеризуется положительным куртозисом. Для *GARCH(1,1)-N* безусловный куртозис

$$\kappa = 6\alpha_1^2 [1 - (3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2)]^{-1},$$

если $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$ и $\kappa = +\infty$, иначе. В обоих случаях условная гетероскедастичность является источником безусловного избыточного куртозиса.

EGARCH

В экспоненциальной модели логарифм условной дисперсии является *линейным процессом*, поэтому свойства стационарности (как строгой, так и ковариантной) и эргодичности могут быть проверены сравнительно легко. Если шоки $\ln \sigma_t^2$ угасают достаточно быстро, то логарифм условной дисперсии, условная

⁷ Куртозис – характеристика «толщины хвостов» плотности унимодального распределения вероятностей, которую используют в качестве некоторой меры отклонения данного распределения от нормального. Куртозис вычисляется по формуле

$$\kappa = \eta / \sigma^4 - 3,$$

где σ^2 и η – центральные моменты второго и четвертого порядка, соответственно, 3 - отношение η / σ^4 для нормального распределения. Если $\kappa > 0$, то плотность данного распределения, которое в таком случае называют лептокуртическим, имеет более тяжелые хвосты, чем плотность нормального распределения с той же дисперсией. Это означает, что частота выбросов для случайной величины с данным распределением вероятностей выше, чем для нормальной случайной величины.

дисперсия и сам *ARCH* процесс являются строго стационарными и эргодическими.

Теорема 3 (Nelson, 1991).

Пусть процессы $z_t, \varepsilon_t, \sigma_t^2$ определены (2.2) и (1.9)-(1.10), положим, γ и θ не равны нулю одновременно. Тогда процессы $\ln \sigma_t^2, \sigma_t^2, \varepsilon_t$ строго стационарны и эргодичны, и $\ln \sigma_t^2$ ковариантно стационарен если и только если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^2 < \infty.$$

Критерий теоремы 3 является традиционным для линейных процессов. Если логарифм условной дисперсии задан в форме авторегрессии – скользящего среднего соотношением (1.11), то условие теоремы сводится к требованию, чтобы все корни $1-\beta(x)$ лежат вне единичного круга. Так, например, если в (1.11) присутствует единственная авторегрессионная компонента ($p=1$), то критерий состоит в $|\beta_1| < 1$.

Будучи строго стационарными, изучаемые процессы могут не иметь конечных безусловных моментов и, следовательно, не быть слабо стационарными. Это, в частности, так, если z_t имеет распределение Стьюдента. Если же распределение z_t принадлежит семейству *GED* (*Generalized Error Distribution* - Обобщенное Распределение Ошибки), то при условии строгой стационарности безусловное распределение обладает конечными моментами произвольного порядка.

Семейство *GED* охватывает симметричные распределения с различными коэффициентами куртозиса. Плотность распределения *GED*

$$(2.5) \quad f(z) = \frac{\nu \exp(-0.5|z/\lambda|^\nu)}{\lambda 2^{(1+1/\nu)} \Gamma(1/\nu)}$$

где $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция, и

$$\lambda = \left(2^{(-2/\nu)} \Gamma(1/\nu) \Gamma(3/\nu) \right)^{1/2}.$$

параметризована ν , регулирующим «толщину хвоста». При $\nu=2$ *GED* совпадает со стандартным нормальным распределением, при $\nu < 2$ плотность *GED* имеет более толстые, при $\nu > 2$ – более тонкие хвосты, чем нормальная плотность. В частности, при $\nu=1$ z имеет двойное экспоненциальное распределение, при $\nu=\infty$ z равномерно распределен на интервале $[-3^{1/2}, 3^{1/2}]$.

Теорема 4 (Nelson, 1991).

Пусть процессы $z_t, \varepsilon_t, \sigma_t^2$ определены (2.2) и (1.9)-(1.10), положим, γ и θ не равны нулю одновременно, кроме того, z_t имеют распределение *GED* с

параметром $\nu > 1$. Пусть выполнено требование теоремы 3. Тогда процессы σ_t^2 , ε_t обладают конечными, неизменными во времени моментами любого порядка.

Свидетельства нестационарности основных фондовых индексов США были получены в работах Nelson (1991), Bollerslev, et al (1993) применением EGARCH параметризации. Авторы указывают, что один из оцененных авторегрессионных корней ARMA(2,1) модели для логарифма условной дисперсии близок к единице, тогда как другой корень имеет невысокое абсолютное значение.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ.

СПЕЦИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ.

$\{y_t\}_{t=1}^{t=+\infty}$ – последовательность наблюдаемых скалярных случайных величин.

$\Omega_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1; X_t)$ – набор предопределенных к моменту t переменных.

Функции условных мат. ожидания и дисперсии y_t совместно параметризованы вектором $\theta \in \Theta \subset R^m$: $\mu(t; \Omega_t; \theta)$, $\sigma^2(t; \Omega_t; \theta)$. $\mu(\cdot)$, $\sigma^2(\cdot)$ – известные функции, которые далее будем обозначать, опуская аргумент Ω_t и используя нижний индекс t . Существует единственный $\theta_0 \in \Theta$ такой, что

$$(M.1) \quad E(y_t | \Omega_t) = \mu_t(\theta_0)$$

$$(M.2) \quad V(y_t | \Omega_t) = \sigma_t^2(\theta_0),$$

θ_0 называется вектором истинных параметров. Определим также функции остатков и стандартизованных остатков

$$\varepsilon_t(\theta) = y_t - \mu_t(\theta)$$

$$z_t(\theta) = \varepsilon_t(\theta) \sigma_t^{-1}(\theta)$$

Условия (M.1)-(M.2) позволяют вычислить математическое ожидание и дисперсию $\varepsilon_t(\cdot)$ в произвольной точке параметрического пространства. Например, в точке θ_0

$$(M.3) \quad E(\varepsilon_t(\theta_0) | \Omega_t) = 0$$

$$(M.4) \quad E(\varepsilon_t^2(\theta_0) | \Omega_t) = \sigma_t^2(\theta_0).$$

Процедура, используемая наиболее часто для оценки θ_0 , состоит в максимизации функции правдоподобия, построенной в предположении о том, что распределение y_t при условии Ω_t нормально со средним и дисперсией, определенными (M.1)-(M.2). Гипотеза об условной нормальности, однако, часто не выдерживает тестирования; в этой связи возникает проблема выбора метода, устойчивого к различным ее нарушениям.

Обоснован метод квази-максимального правдоподобия, который предполагает максимизацию нормальной функции правдоподобия при том, что распределение $y_t | \Omega_t$ в действительности не является нормальным. При этом оценки сохраняют свойства состоятельности и асимптотической нормальности, однако утрачивают свойство асимптотической эффективности.

В данной работе предпринята попытка оценить модель обобщенным методом моментов. Оказалось возможным построить оптимальные инструменты, приводящие к оценкам, асимптотически более эффективным, чем оценки метода квази-максимального правдоподобия.

2.1 ОЦЕНИВАНИЕ ARCH-N МОДЕЛИ: МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ.

Применение метода максимального правдоподобия требует явного задания функции плотности распределения случайных величин y_t . Предположение о нормальном характере распределения $y_t | \Omega_t$ позволяет воспользоваться простой и детально разработанной процедурой оценивания неизвестных параметров, которая и является предметом рассмотрения настоящего параграфа. Гипотеза об условной нормальности процесса формально записывается как

$$(N) \quad y_t | \Omega_t \sim N(\mu_t(\theta_0), \sigma_t^2(\theta_0)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Оценки метода максимального правдоподобия (ММП) доставляют максимум критериальной функции, составленной из вкладов отдельных наблюдений:

$$(3.1) \quad l(\theta) = \sum_{t=1}^n l_t(\theta),$$

где вклад t -го наблюдения определяется как

$$(3.2) \quad l_t(\theta) = -\frac{1}{2} \ln \sigma_t^2(\theta) - \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{2\sigma_t^2(\theta)}.$$

$l(\theta_0)$ совпадает с логарифмом совместной плотности распределения вектора y_n, \dots, y_1 . Градиент и гессиан критериальной функции также составлены из вкладов отдельных наблюдений:

$$g(\theta) = \sum_{t=1}^n g_t(\theta) \quad H(\theta) = \sum_{t=1}^n h_t(\theta),$$

вклады наблюдения t записываются как

$$(3.3) \quad g_t(\theta) \equiv \nabla_{\theta} l_t(\theta) = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{\sigma_t^2(\theta)} - 1 \right] \nabla_{\theta} \ln \sigma_t^2(\theta) + \left[\frac{\varepsilon_t(\theta)}{\sigma_t^2(\theta)} \right] \nabla_{\theta} \mu_t(\theta)$$

$$(3.4) \quad h_t(\theta) \equiv \nabla_{\theta\theta}^2 l_t(\theta) = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{\sigma_t^2(\theta)} - 1 \right] \nabla_{\theta\theta}^2 \ln \sigma_t^2(\theta) + \left[\frac{\varepsilon_t(\theta)}{\sigma_t^2(\theta)} \right] \nabla_{\theta\theta}^2 \mu_t(\theta) -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{\sigma_t^2(\theta)} \nabla_{\theta} \ln \sigma_t^2(\theta) \nabla_{\theta} \ln \sigma_t^2(\theta)^T$$

$$-\left[\frac{\varepsilon_t(\theta)}{\sigma_t^2(\theta)} \right] \left(\nabla_{\theta} \mu_t(\theta) \nabla_{\theta} \ln \sigma_t^2(\theta)^T + \nabla_{\theta} \mu_t(\theta)^T \nabla_{\theta} \ln \sigma_t^2(\theta) \right)$$

$$-\frac{1}{\sigma_t^2(\theta)} \nabla_{\theta} \mu_t(\theta) \nabla_{\theta} \mu_t(\theta)^T.$$

Вычислим условные ожидания (3.3) и (3.4) в точке истинных параметров. Значения функций μ_t и σ_t^2 , производные этих функций по θ предопределены к

моменту t . Выражения, заключенные в квадратные скобки, обращаются в нуль. Имеем

$$(3.5) \quad E(g_t(\theta_0)|\Omega_t) = 0$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} H_t &\equiv E(h_t(\theta_0)|\Omega_t) = \\ &= -0.5 \nabla_{\theta} \ln \sigma_t^2(\theta_0) \nabla_{\theta} \ln \sigma_t^2(\theta_0)^T - \sigma_t^{-2}(\theta_0) \nabla_{\theta} \mu_t(\theta_0) \nabla_{\theta} \mu_t(\theta_0)^T \end{aligned}$$

Обозначим I_t матрицу условной ковариации вклада t -го наблюдения градиент:

$$(3.7) \quad I_t \equiv V(g(\theta_0)|\Omega_t) = E(g_t(\theta_0)g_t(\theta_0)^T|\Omega_t).$$

Вследствие (3.5) безусловное ожидание градиента критериальной функции равно нулю:

$$(3.8) \quad E(g(\theta_0)) = 0.$$

Определим информационную матрицу как безусловную ковариацию градиента в точке θ_0 :

$$(3.9) \quad I \equiv V(g(\theta_0)) = E(g(\theta_0)g(\theta_0)^T).$$

Поскольку последовательность вкладов наблюдений в градиент критериальной функции серийно не коррелирует (равенство (3.5)), информационная матрица может быть также вычислена по формуле

$$(3.10) \quad I = \sum_{t=1}^n E(g_t(\theta_0)g_t(\theta_0)^T).$$

Для дальнейшего изложения существенно, что соотношения (3.3)-(3.10) были выведены вне связи с гипотезой (N).

ИНФОРМАЦИОННАЯ МАТРИЦА.

В теории метода максимального правдоподобия известно равенство

$$(3.11) \quad I_t = -H_t,$$

которое нетрудно установить и в данном случае. Внешнее произведение вклада t -го наблюдения в градиент $g_t g_t^T$ содержит ε_t в степени от первой до четвертой. Условные мат. ожидание и дисперсия истинных остатков определены равенствами (M.3)-(M.4), тогда как для вычисления третьего и четвертого моментов необходимо прибегнуть к дополнительному предположению (N). (3.11) влечет равенство

$$(3.12) \quad I = -E(H(\theta_0)),$$

однако вычислить полные ожидания не представляется возможным.

В некоторых случаях вектор θ можно разделить на компоненты b и γ , первая из которых параметризует условное среднее, вторая – условную дисперсию. Тогда $\nabla_{\gamma} \mu_t(\theta) = \mathbf{0}$, однако даже в этом случае $\nabla_b \sigma_t^2(\theta) \neq \mathbf{0}$. Если, кроме того, распределение $y_t | \Omega_t$ симметрично, выполнены некоторые ограничения на функциональную форму σ^2 , то информационная матрица является блочно-диагональной:

$$I_{b\gamma} = \mathbf{0}.$$

Engle (1982) приводит набор достаточных условий и формальное доказательство для $ARCH(q)$ - N модели. Блочная диагональность информационной матрицы между параметрами b и γ означает, что оценки параметров среднего состоятельны даже при неверной спецификации функции условной дисперсии. В частности, оценки методом наименьших квадратов являются состоятельными, однако, выигрыш в эффективности от использования ММП по сравнению с МНК может оказаться сколь угодно великим. Более того, оценки γ , полученные на основе состоятельных, но не эффективных оценок b (например, на основе МНК), сохраняют свойство асимптотической эффективности.

Не обладают свойством блочной диагональности информационные матрицы $ARCH$ - M моделей: для них разбиения $\theta=(b,\gamma)$ не существует. Иное исключение составляют $EGARCH$ модели и другие, в которых σ_t^2 является асимметричной функцией остатков. Присутствие ошибок в спецификации функции условной дисперсии приводит к несостоятельности оценок параметров среднего, и наоборот. Состоятельное оценивание требует верной спецификации полной модели.

При определенных условиях регулярности⁸ оценки максимального правдоподобия состоятельны, асимптотически нормальны и эффективны с асимптотической матрицей ковариации⁹

$$(3.13) \quad \lim_n V(\sqrt{n}(\hat{\theta}^{ML} - \theta_0)) = \left(\text{plim}_n n^{-1} \sum_{t=1}^n I_t \right)^{-1} = - \left(\text{plim}_n n^{-1} \sum_{t=1}^n H_t \right)^{-1}.$$

Существуют два базовых способа состоятельно оценить информационную матрицу¹⁰. Первый способ основан на связи информационной матрицы и гессиана (равенства (3.11)-(3.12)). В качестве оценки приемлема матрица $-\hat{H}$, где

⁸ Проверка условий регулярности, обеспечивающих свойства оптимальности оценок максимального правдоподобия, оказалась экстремально сложной для класса $ARCH$ моделей.

⁹ Формально (3.12) есть асимптотическая матрица ковариации $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0)$, а не $\hat{\theta}$, но для простоты изложения мы будем называть ее асимптотической матрицей ковариации оценок.

¹⁰ Здесь и далее под состоятельной понимаем такую оценку \hat{I} , что $\text{plim} n^{-1} \hat{I} = \text{plim} n^{-1} I$.

$$(3.14) \quad \hat{H} = -\sum_{t=1}^n \left(0.5 \nabla_{\theta} \ln \sigma_t^2(\hat{\theta}) \nabla_{\theta} \ln \sigma_t^2(\hat{\theta})^T + \sigma_t^{-2}(\hat{\theta}) \nabla_{\theta} \mu_t(\hat{\theta}) \nabla_{\theta} \mu_t(\hat{\theta})^T \right).$$

Данная оценка построена как сумма выражений вида $-H_t$, причем участвующие в H_t функции исчислены в точке $\hat{\theta}$.

Второй способ вытекает из равенства (3.10) для информационной матрицы. Опустив знаки мат. ожиданий и воспользовавшись оценками неизвестных параметров, приходим к

$$(3.15) \quad \hat{B} = \sum_{t=1}^n g_t(\hat{\theta}) g_t(\hat{\theta})^T.$$

Второй способ восходит к статье Berndt, Hall, Hall, and Hausman и потому называется *ВННН*. Другое название - метод внешнего произведения градиента (*outer product of the gradient, OPG*).

Как $-\hat{H}$, так и \hat{B} состоятельны для I . Обратная информационная матрица служит оценкой матрицы ковариации оценок максимального правдоподобия $V(\hat{\theta})$. Возможны, следовательно, два выражения:

$$(3.16.a) \quad \hat{V}^{ML} = -\hat{H}^{-1}$$

$$(3.16.b) \quad \hat{V}^{ML} = \hat{B}^{-1}.$$

2.2 НАРУШЕНИЯ ГИПОТЕЗЫ ОБ УСЛОВНОЙ НОРМАЛЬНОСТИ: МЕТОД КВАЗИ-МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ.

Гипотезу (N) позволяет протестировать верное в нуле свойство независимости и нормальной распределенности стандартизованных остатков. Как правило, гипотеза отклоняется из-за того, что оцененные $z_t(\hat{\theta})$ демонстрируют положительный куртозис. Реже причиной отклонения нулевой гипотезы становится асимметрия (необходимые ссылки представлены Bollerslev, Chou и Kroner (1992)).

Рядом авторов реализован ММП в предположении о том, что плотность распределения $z_t(\theta_0)$ принадлежит некоторому параметризованному семейству $f(z, \nu)$. Так, Bollerslev (1987), Nelson (1990), Bollerslev, Engle и Nelson (1993) применяют, соответственно, t -Стьюдента, GED , и обобщенное t -Стьюдента распределения. Плотности t и GED имеют единственный параметр, регулирующий величину куртозиса, плотность обобщенного t -распределения имеет два параметра и включает t и GED как частные случаи (свойства GED обсуждались в параграфе 2). Параметры ν и θ оцениваются одновременно максимизацией логарифмической функции правдоподобия

$$l(\theta, \nu) = \sum_{t=1}^n \left[\ln f(z_t(\theta); \nu) - 0.5 \ln \sigma_t^2(\theta) \right].$$

С точки зрения асимптотической эффективности ММП с корректно определенной функцией плотности $f(\cdot, \cdot)$ является наилучшим решением. Реализация его, однако, технически крайне трудна: производные соответствующих функций правдоподобия не могут быть представлены аналитически, для максимизации их прибегают к методам численного дифференцирования.

Качество подбора функции плотности $f(\cdot, \cdot)$ можно установить, сравнивая фактическое и ожидаемое количества таких значений $|z_t|$, которые превосходят некоторое заданное Z . В этом смысле *GED* не вполне адекватно отражает частоту «хвостовых событий»: фактическое число выбросов гораздо больше, чем если бы z_t были реализациями *GED*-распределенной случайной величины со значением параметра ν , равным оцененному. Кроме того, t и *GED* симметричны, тогда как асимметрия – одна из важных особенностей изучаемых в данной работе российских финансовых активов. По этим причинам ММП был предпочтен методам квази-максимального правдоподобия и моментов. Среди других распределений, примененных при оценивании *ARCH* модели, – смесь нормального и логнормального, нормального и Пуассона распределений.

Установлено, что максимизация критериальной функции (3.1)-(3.2) приводит к состоятельным и асимптотически нормальным оценкам независимо от того, как именно распределены случайные величины y_t . В тех случаях, когда истинное распределение y_t неизвестно, эту процедуру принято называть методом квази- (псевдо-) максимального правдоподобия (МКМП). Отличие ее от традиционного ММП состоит в матрице ковариации оценок:

$$(3.17) \quad \lim_n V(\sqrt{n}(\hat{\theta}^{OML} - \theta_0)) = \\ = \left(\text{plim}_n n^{-1} \sum_{t=1}^n H_t \right)^{-1} \left(\text{plim}_n n^{-1} \sum_{t=1}^n I_t \right) \left(\text{plim}_n n^{-1} \sum_{t=1}^n H_t \right)^{-1}.$$

Равенство $I_t = -H_t$ неверно в общем случае без предположения об условной нормальности, поэтому (3.17) не эквивалентно (3.13). МКМП неизбежно приводит к потере асимптотической эффективности. Потери эффективности, возникающие, в частности, при t -распределенных ошибках невелики, однако могут быть весьма существенными, если распределение ошибок асимметрично.

Для вывода равенств (3.5), (3.6), (3.8), и (3.10) предположение (N) не привлекалось, все они являются следствием верной спецификации функций условного среднего и дисперсии, т.е. (M.1)-(M.2). Поэтому матрица \hat{H} остается состоятельной для гессиана, \hat{B} – состоятельной для информационной матрицы. Однако $-\hat{H}$ и \hat{B} не являются асимптотически эквивалентными, как не являются асимптотически эквивалентными минус гессиан и информационная матрица. Оценкой ковариационной матрицы КМП-оценок служит

$$(3.18) \quad \hat{V}^{OML} = \hat{H}^{-1} \hat{B} \hat{H}^{-1}.$$

Оценка (3.18) устойчива к нарушению гипотезы об условной нормальности в том смысле, что остается состоятельной для ковариации оценок, полученных

максимизацией (3.1)-(3.2). Оценки $-\hat{H}^{-1}$ и \hat{B}^{-1} при указанном нарушении свойства состоятельности не сохраняют.

ТЕСТИРОВАНИЕ

Асимптотическая нормальность оценок КМП позволяет воспользоваться стандартными процедурами. Пусть нулевая гипотеза формулируется как

$$(3.19) \quad r(\theta_0) = \mathbf{0},$$

где $r: \Theta \rightarrow R^l$ дифференцируема на $\text{int}(\Theta)$ и $l < m$. Если $\theta_0 \in \text{int}(\Theta)$ и матрица $\nabla_{\theta} r(\theta_0)$ имеет ранг l , то применима статистика Вальда

$$(3.20) \quad W = nr(\hat{\theta})^T \left(\nabla_{\theta} r(\hat{\theta}) \hat{V}^{-1} \nabla_{\theta} r(\hat{\theta})^T \right)^{-1} r(\hat{\theta}),$$

где $\hat{\theta}$ - оценки параметров при альтернативной гипотезе (оценки полной модели, без ограничений (3.19)), \hat{V} - состоятельная оценка ковариации $\hat{\theta}$. При верной гипотезе (N) следует использовать \hat{V}^{ML} , в противном случае - \hat{V}^{QML} . Верно предположение (N) или нет, в нуле статистика Вальда имеет асимптотическое хи-квадрат распределение с $m-l$ степенями свободы. Тест Вальда

$$(3.21) \quad \begin{aligned} W < \tau_{0.05} &\Rightarrow H_0 \text{ принимается} \\ W > \tau_{0.05} &\Rightarrow H_0 \text{ отвергается,} \end{aligned}$$

где $\tau_{0.05}$ - 5%-й квантиль χ_{m-l}^2 распределения, характеризуется асимптотической ошибкой первого рода 5%: вероятность отвергнуть H_0 тогда как она верна

$$P(W > \tau_{0.05} | H_0)$$

при увеличении числа наблюдений сходится к

$$P(\chi_{m-l}^2 > \tau_{0.05} | H_0) = 0.05.$$

Асимптотические результаты могут оказаться неприемлемыми для малых выборок и при некорректном выборе матрицы \hat{V} . Bollerslev и Wooldridge (1992) сообщают результаты имитационных экспериментов, проливающих свет на характер искажений, связанных с использованием в тестировании несостоятельных оценок \hat{V}^{ML} при нарушении гипотезы (N). Общий вывод исследования состоит в следующем: ковариационные матрицы \hat{V}^{ML} систематически недооценивают истинные размеры стандартных ошибок.

Схема исследования такова. Построены 1000 реализаций $AR(1)$ - $GARCH(1,1)$ процесса, имеющего условное t_5 распределение. Для каждой реализации вычислены

- оценки параметров истинной модели;
- ковариационные матрицы оценок трех типов: $\hat{H}^{-1} \hat{B} \hat{H}^{-1}$, $-\hat{H}^{-1}$, \hat{B} . Эти типы будем вслед за авторами называть соответственно RB (от *robust* -

устойчивый), HE (от *hessian* - гессиан), OPG (от *outer product of the gradient* - внешнее произведение градиента).

- статистики Вальда для верной нулевой гипотезы H_0 (3.19) трех типов по общей формуле (3.20). Тип статистики определяется типом оценки вариационной матрицы, применяемой в (3.20) - RB , HE , или OPG .

Имитационные эксперименты позволяют построить эмпирические распределения трех вариантов статистики Вальда при верной нулевой гипотезе, которые затем сопоставляются с хи-квадрат распределением. Полученные распределения имеют более толстые хвосты, чем χ_{m-l}^2 . Так, например, доля реализаций статистики Вальда типов HE и OPG , лежащих правее 5%-го квантиля χ_{m-l}^2 , больше 0.05, скажем, 0.1. Это означает, что тест (3.18) имеет ошибку первого рода 10%, а не 5%. Иными словами, вероятность отвергнуть нулевую гипотезу H_0 в то время как она верна составляет 0.1:

$$P(W > \tau_{0.05} | H_0) = 0.1.$$

Распределение RB -статистики близко к χ_{m-l}^2 . Использование устойчивой формы статистики Вальда, как и следовало ожидать, предпочтительнее двух других, причем OPG -статистика наименее точна. Таким образом, как $-\hat{H}^{-1}$, так и \hat{B}^{-1} систематически *преуменьшают вариацию* оценок и вводят в заблуждение относительно того уровня значимости, с которым нуль может быть отвергнут.

Точность всех форм статистик снижается при переходе к несимметричному χ_1^2 распределению $y_i | \Omega_i$. Аналогичные результаты были получены и для LM статистики.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ОЦЕНОК

Значения, доставляющие максимум критериальной функции (с соответствующими оговорками), удовлетворяют условиям первого порядка

$$(3.22) \quad g(\theta) = \mathbf{0}.$$

Нахождение численного решения системы (3.22) предполагает реализацию алгоритма, i -й шаг которого задается формулой

$$(3.23) \quad \theta^{i+1} = \theta^i + (\Phi^i)^{-1} g(\theta^i).$$

Φ^i - некоторая симметричная, положительно определенная матрица размерности $m \times m$. В качестве Φ^i могут быть использованы гессиан или оценка информационной матрицы, вычисленные на i -м шаге с использованием θ^i . Стационарная точка последовательности $\{\theta^i\}$ удовлетворяет (3.22).

Для упрощения вычислений разработан прием, называемый искусственной регрессией (*auxiliary regression*): вектор приращений параметров $\theta^{i+1} - \theta^i$ приводится к характерному виду $(A^T A)^{-1} A^T C$ при помощи некоторых искусственных переменных A и C .

Запишем в форме искусственной регрессии шаг алгоритма, использующего в качестве взвешивающей матрицы минус условный гессиан $-\hat{H}$. Воспользуемся матрицей регрессоров размерности $2n \times m$ и $2n$ -компонентным вектором зависимой переменной

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \left(2^{-0.5} \nabla_{\theta} \ln \sigma_t^2(\theta)\right)_{t=1}^n \\ \left(\sigma_t^{-1}(\theta) \nabla_{\theta} \mu_t(\theta)\right)_{t=1}^n \end{bmatrix}, \quad C(\theta) = \begin{bmatrix} \left(2^{-0.5} (\sigma_t^{-2}(\theta) \varepsilon_t^2(\theta) - 1)\right)_{t=1}^n \\ \left(\sigma_t^{-1}(\theta) \varepsilon_t(\theta)\right)_{t=1}^n \end{bmatrix}.$$

Градиент и минус гессиан записываются через переменные A и C как

$$\begin{aligned} g(\theta) &= A(\theta)^T C(\theta) \\ -\hat{H}(\theta) &= A(\theta)^T A(\theta) \end{aligned}$$

Шаг алгоритма приобретает вид

$$\theta^{i+1} - \theta^i = \left(A(\theta^i)^T A(\theta^i) \right)^{-1} A(\theta^i)^T C(\theta^i).$$

Запишем искусственную регрессию для алгоритма со взвешивающей матрицей вида \hat{B} . Независимые переменные данной регрессии формируют $n \times m$ матрицу вкладов в градиент $G(\theta)$ со строками $g_t(\theta)$. В качестве независимой переменной выступает $n \times 1$ вектор $\mathbf{1}$, все компоненты которого равны единице. Тогда

$$\begin{aligned} g(\theta) &= G(\theta)^T \mathbf{1} \\ \hat{B}(\theta) &= G(\theta)^T G(\theta) \end{aligned}$$

Шаг алгоритма приобретает вид

$$\theta^{i+1} - \theta^i = \left(G(\theta^i)^T G(\theta^i) \right)^{-1} G(\theta^i)^T \mathbf{1}.$$

Выбор матрицы Φ в (3.22) влияет на скорость сходимости алгоритма. С этой точки зрения рассмотренная выше форма HE взвешивающей матрицы предпочтительнее OPG . Для оптимизации скорости сходимости алгоритма можно корректировать длину вектора изменения параметров в заданном направлении с помощью дополнительного параметра λ :

$$\theta^{i+1} = \theta^i + \lambda (\Phi^i)^{-1} g(\theta^i).$$

Целесообразно выбирать λ , максимизируя по нему критериальную функцию:

$$\lambda = \arg \max_{\lambda} l\left(\theta^i + \lambda (\Phi^i)^{-1} g(\theta^i)\right).$$

Использование λ особенно полезно тогда, когда точка максимума критериальной функции лежит вблизи границы Θ . В этих случаях промежуточные оценки, вычисляемые с помощью (3.23), могут оказаться вне Θ , что приводит к остановке алгоритма.

2.3 ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД МОМЕНТОВ

Обобщенный метод моментов (ОММ) обладает следующими достоинствами:

- (i) не требует явных предположений относительно плотности условного распределения и допускает присутствие ненулевых куртозиса и асимметрии;
- (ii) использует лишь производные первого порядка функций μ_t и σ_t^2 и позволяет избежать тем самым применения методов численного дифференцирования;
- (iii) асимптотически более эффективен, чем МКМП. Проверка метода на выборочных данных, демонстрирующих экстремально высокие коэффициенты асимметрии и куртозиса, свидетельствует о значительном выигрыше в эффективности.

Дополним модель (M.1)-(M.4) предположениями относительно третьего и четвертого моментов распределения $y_t|\Omega_t$:

$$(M.5) \quad E(\varepsilon_t^3(\theta_0)|\Omega_t) = a_0\sigma_t^3(\theta_0)$$

$$(M.6) \quad E(\varepsilon_t^4(\theta_0)|\Omega_t) = (k_0 + 3)\sigma_t^4(\theta_0),$$

где a_0, k_0 - постоянные коэффициенты асимметрии и куртозиса. Стандартизованные остатки в точке θ_0 тогда имеют первые четыре момента, равные соответственно 0, 1, $a_0, k_0 + 3$. Гипотеза нормальности формулируется как $a_0 = 0, k_0 = 0$.

Спецификация (M) обеспечивает две группы уравнений, идентифицирующих истинные значения параметров. Пусть

$$f_t(y_t, \Omega_t; \theta) = (\varepsilon_t(\theta) \quad \varepsilon_t^2(\theta) - \sigma_t^2(\theta))$$

– строка из двух элементов, которую далее будем обозначать, опуская аргументы Ω_t и y_t . Мат. ожидания $E(f_t(\theta)|\Omega_t)$ существуют для всех $\theta \in \Theta$ и обращаются в ноль единственным $\theta_0 \in \Theta$. В этом смысле система уравнений

$$(3.19) \quad E(f_t(\theta)|\Omega_t) = 0$$

идентифицирует истинный вектор параметров¹¹. Определим условные матрицу ковариации и якобиан f_t в точке θ_0 как

¹¹ Систематическое изложение метода моментов приведено в Davidson, McKinnon, откуда заимствованы многие обозначения. Авторы учебника ограничиваются теми моделями, для которых имеется единственный набор уравнений, определяющий параметры (это модели условного среднего). Рассмотрение двух или более уравнений (3.19) не приводит к концептуальным трудностям, но требует несколько более сложной системы обозначений.

$$(3.20) \quad \Lambda_t \equiv V(f_t(\theta_0)|\Omega_t) = \begin{bmatrix} \sigma_t^2(\theta_0) & a_0 \sigma_t^3(\theta_0) \\ a_0 \sigma_t^3(\theta_0) & (k_0 + 2) \sigma_t^4(\theta_0) \end{bmatrix}$$

$$(3.21) \quad J_t \equiv E(\nabla_{\theta} f_t(\theta_0)|\Omega_t) = \begin{pmatrix} -\nabla_{\theta} \mu_t(\theta_0) & -\nabla_{\theta} \sigma_t^2(\theta_0) \end{pmatrix}.$$

Класс оценок ОММ порождается различными наборами инструментальных переменных, выбор которых ограничен последовательностью Ω_t . Асимптотическая ковариационная матрица ОММ оценок ограничена снизу, причем существует набор оптимальных инструментов, приводящий к эффективным оценкам.

Пусть l инструментов могут быть организованы в матрицу $[W_1: \dots : W_n]$ размерности $l \times 2n$, где W_t - часть матрицы размерности $l \times 2$, относящаяся к наблюдению t (вклад данного наблюдения в матрицу инструментов). Требуется, чтобы число инструментов было не меньше числа оцениваемых параметров, т.е. $l \geq m$, и чтобы к моменту t значения W_t были известны: $W_t \subset \Omega_t$; можно указать бесконечное число инструментальных переменных. Эмпирические моменты, соответствующие данному набору инструментов могут быть выражены как

$$(3.21) \quad \sum_{t=1}^n W_t f_t(\theta)^T.$$

Матрица условной ковариации эмпирических моментов в точке θ_0 равна

$$(3.22) \quad \sum_{t=1}^n V(W_t f_t(\theta_0)^T | \Omega_t) = \sum_{t=1}^n W_t \Lambda_t W_t^T.$$

Если $l=m$, то оценки $\hat{\theta}$ находятся решением системы m уравнений

$$(3.23) \quad \sum_{t=1}^n W_t f_t(\theta)^T = \mathbf{0},$$

если $l > m$, то минимизацией критериальной функции – квадратичной формы, построенной из (3.21) и (3.22):

$$(3.24) \quad Q(\theta) = n^{-2} \left(\sum_{t=1}^n f_t(\theta) W_t^T \right) \left(\sum_{t=1}^n W_t \Lambda_t W_t^T \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^n W_t f_t(\theta)^T \right).$$

При любом выборе инструментов оценки, определяемые (3.23) или (3.24), состоятельны и асимптотически нормальны с асимптотической матрицей ковариации

$$(3.25) \quad \lim V(\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0)) = \left[\left(p \lim n^{-1} \sum_{t=1}^n J_t W_t^T \right) \left(p \lim n^{-1} \sum_{t=1}^n W_t \Lambda_t W_t^T \right)^{-1} \left(p \lim n^{-1} \sum_{t=1}^n W_t J_t^T \right) \right]^{-1}.$$

Инструменты W , такие что $W_t = J_t \Lambda_t^{-1}$, приводят к оценкам, эффективным в классе ОММ. Существует ровно m оптимальных инструментов, поэтому эффективные оценки находятся решением системы

$$(3.26) \quad \sum_{t=1}^n J_t \Lambda_t^{-1} f_t(\theta)^T = \mathbf{0}.$$

Асимптотическая матрица ковариации таких оценок меньше, чем при любом ином выборе инструментов:

$$(3.27) \quad \lim V(\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0)) = \left(p \lim n^{-1} \sum_{t=1}^n J_t \Lambda_t^{-1} J_t^T \right)^{-1}.$$

Воспользуемся матрицами $W = [W_1; \dots; W_n]$ размерности $l \times 2n$, $J = [J_1; \dots; J_n]$ размерности $m \times 2n$, блочно-диагональной матрицей Λ размерности $2n \times 2n$ с диагональными блоками Λ_t . Тогда участвующие в (3.25) и (3.27) суммы записываются как WJ^T , $W\Lambda W^T$, $J\Lambda^{-1}J^T$. Опустим знаки $p \lim$, множители n^{-1} и рассмотрим разность

$$J\Lambda^{-1}J^T - JW^T(W\Lambda W^T)^{-1}WJ^T$$

между обращенными матрицами ковариации, относящимися к оптимальному и произвольному наборам инструментов, соответственно. Если симметричная $2n \times 2n$ матрица Ψ такова, что $\Psi^2 = \Lambda$, то разность данная равна

$$J\Psi^{-1}(I - \Psi W^T(W\Psi^2 W^T)^{-1}W\Psi)\Psi^{-1}J^T.$$

Эта матрица положительно полуопределена, поскольку матрица в больших скобках идемпотентна. Отсюда немедленно следует положительная полуопределенность

$$\left[JW^T(W\Lambda W^T)^{-1}WJ^T \right]^{-1} - [J\Lambda^{-1}J^T]^{-1}.$$

Оптимальные в классе *ОММ* оценки асимптотически более эффективны, чем оценки *МКМП*. Достаточно показать, что асимптотическая матрица ковариации последних приводима к виду (3.25) с помощью какого-либо набора неоптимальных инструментов. Вклад наблюдения t в этот набор инструментов представляет собой матрицу $J_t \Lambda_t^{-1}$, вычисленную при $a_0 = 0$, $k_0 = 0$:

$$(3.28) \quad W_t = J_t \Lambda_t^{-1} \Big|_{\substack{a_0=0 \\ k_0=0}} = \left(-\sigma_t^{-2}(\theta_0) \nabla_{\theta} \mu_t(\theta_0) \quad -0.5 \sigma_t^{-2}(\theta_0) \nabla_{\theta} \ln \sigma_t^2(\theta_0) \right).$$

Если коэффициенты асимметрии и куртозиса действительно равны нулю, то такой набор инструментов является оптимальным. Следовательно, при верной гипотезе (N) методы моментов и максимального правдоподобия асимптотически эквивалентны.

Выбор инструментов (3.28) приводит к следующим совпадениям:

- эмпирических моментов и градиента критериальной функции (3.1)-(3.2) в точке истинных параметров с точностью до знака «минус»:
 $W_t f_t(\theta_0) = -g_t(\theta_0)$;
- их условных ковариационных матриц: $W_t \Lambda_t W_t^T = I_t$, и

- условных вторых производных: $J_t W_t^T = H_t$.

Следовательно, совпадают и вероятностные пределы, участвующие в (3.15) и (3.25). Итак, (3.25) при соответствующем выборе инструментальных переменных характеризует асимптотическую ковариационную матрицу МКМП -оценок.

Davidson и MacKinnon предлагают двухшаговую или итеративную процедуры вычисления оценок ОММ. Требуется построить состоятельные, но, возможно, неэффективные оценки, используя их, определить приблизительно оптимальные инструменты; с помощью найденных инструментов вычислить оценки параметров. Если исходные оценки не очень точны, желательно повторить процедуру несколько раз.

Пусть имеются $\hat{\theta}$, с помощью которых можно состоятельно оценить коэффициенты асимметрии и куртозиса выборочными моментами стандартизованных остатков:

$$(3.29) \quad \hat{a} = \frac{\hat{\eta}_3}{\hat{\eta}_2^{1.5}}, \quad \hat{k} = \frac{\hat{\eta}_4}{\hat{\eta}_2^2} - 3.$$

Для всех $\theta \in \Theta$ определим выражения $\Lambda_t(\theta)$ и $J_t(\theta)$, причем для вычисления первого из них вместо истинных значений a_0, k_0 будем использовать оценки (3.29). Новые оценки параметров θ предлагается вычислять как решение системы

$$\sum_{t=1}^n J_t(\theta) \Lambda_t^{-1}(\theta) f_t(\theta)^T = \mathbf{0},$$

где t -е слагаемое равно

$$(3.31) \quad (\hat{k} - \hat{a}^2 + 2)^{-1} \nabla_{\theta} \mu_t(\theta) \left[\hat{a} \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{\sigma_t^3(\theta)} - (\hat{k} + 2) \frac{\varepsilon_t(\theta)}{\sigma_t^2(\theta)} - \hat{a} \frac{1}{\sigma_t(\theta)} \right] +$$

$$+ (\hat{k} - \hat{a}^2 + 2)^{-1} \nabla_{\theta} \ln \sigma_t^2(\theta) \left[1 + \hat{a} \frac{\varepsilon_t(\theta)}{\sigma_t(\theta)} - \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{\sigma_t^2(\theta)} \right].$$

При этом оценки оптимальных инструментов и оценки параметров определяются одновременно. Такое вычисление эквивалентно реализации итеративной процедуры, в которой оценки на i -м шаге θ^i определяются с помощью инструментов, оцененных на $(i-1)$ -м шаге как решение

$$\sum_{t=1}^n J_t(\theta^{i-1}) \Lambda_t^{-1}(\theta^{i-1}) f_t(\theta)^T = \mathbf{0}.$$

Полученные оценки приводят к новым значениям коэффициентов асимметрии и куртозиса, и процедура может быть повторена. На практике уже после третьей итерации достигается вполне удовлетворительная сходимость.

В качестве исходных оценок приемлемы оценки максимального правдоподобия. При $a = 0, k = 0$ вклад t -го наблюдения в эмпирический момент (3.31) совпадает со вкладом в градиент логарифмической функции правдоподобия.

Следовательно, оценки максимального правдоподобия могут быть получены на первом шаге решением (3.30) при $a = 0$, $k = 0$.

Оценкой ковариационной матрицы для $\hat{\theta}$ служит

$$\hat{V}^{GMM} = \left(\sum_{i=1}^n J_i(\hat{\theta}) \Lambda_i^{-1}(\hat{\theta}) J_i(\hat{\theta})^T \right)^{-1},$$

где

$$\begin{aligned} J_i(\theta) \Lambda_i^{-1}(\theta) J_i(\theta)^T &= \\ &= (\hat{k} - \hat{a}^2 + 2)^{-1} (\hat{k} + 2) \sigma_i^{-2}(\theta) \nabla_{\theta} \mu_i(\theta) \nabla_{\theta} \mu_i(\theta)^T - \\ &- (\hat{k} - \hat{a}^2 + 2)^{-1} \hat{a} \sigma_i^{-1}(\theta) (\nabla_{\theta} \mu_i(\theta) \nabla_{\theta} \ln \sigma_i^2(\theta)^T + \nabla_{\theta} \ln \sigma_i^2(\theta) \nabla_{\theta} \mu_i(\theta)^T) + \\ &+ (\hat{k} - \hat{a}^2 + 2)^{-1} \nabla_{\theta} \ln \sigma_i^2(\theta) \nabla_{\theta} \ln \sigma_i^2(\theta)^T. \end{aligned}$$

ГЛАВА 3. ЭМПИРИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

3.1 ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ.

Настоящий раздел посвящен моделированию временных рядов, относящихся к российскому финансовому рынку и изображенных на рисунках 1-3.

Применяется *EGARCH* параметризация, логарифм условной дисперсии представлен как процесс *AR(1)*. Функция условного среднего включает авторегрессионную и *ARCH in mean* компоненты.

$$(M) \quad \begin{aligned} z_t &\sim i.i.d., \quad E(z_t) = 0, \quad V(z_t) = 1 \\ y_t &= \mu_t + \sigma_t z_t \\ \ln \sigma_t^2 &= \omega + \theta z_{t-1} + \gamma(|z_{t-1}| + E|z_{t-1}|) + \phi \ln \sigma_{t-1}^2 \\ \mu_t &= b + \beta y_{t-1} + \delta \sigma_t. \end{aligned}$$

Анализ результатов проведен по схеме:

- I. Распределение z_t .
- II. Динамика условной дисперсии.
- III. *ARCH-M* эффект: связь условного среднего и условного стандартного отклонения.
- IV. Зависимость логарифма условной дисперсии от инноваций z_t .
- V. Гипотеза о единичном корне в дисперсии.
- VI. Тестирование спецификации модели.

Далее методы квази-максимального правдоподобия и моментов сравниваются с точки зрения эффективности оценок модели (M).

ИНДЕКС РТС.

Привлечены ежедневные (на момент закрытия) данные по индексу Российской Торговой Системы за период 04.05.95–05.11.98; временной ряд содержит 793 наблюдения. Переменная *РТС* была получена на основе этих данных как

$$y_t = 100[P_t/P_{t-1} - 1]$$

и отражает доходность от прироста рыночной стоимости капитала.

(i) Коэффициенты асимметрии и куртозиса стандартизованных остатков \hat{z}_t равны 0,1231 и 1,7533. Гипотеза

$$(N) \quad z_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0,1)$$

отклонена в пользу симметричного лептокуртического распределения. Данный вывод согласуется с многочисленными наблюдениями, относящимися к отдаче

вложений в фондовые индексы США: плотность распределения симметрична, но по сравнению с нормальной имеет более толстые хвосты. Сформулирована альтернативная гипотеза: стандартизованные ошибки имеют распределение t -Стьюдента

$$(t) \quad z_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} ((\lambda - 2) / \lambda)^{0.5} t_\lambda.$$

Число степеней свободы $\lambda=7.35$ подобрано таким образом, что куртозис модельного распределения $6(\lambda - 4)^{-1}$ совпадает с выборочным куртозисом 1,7533.

В таблице 1 приведены фактическое и ожидаемое количества наблюдений, превосходящих по абсолютному значению N условных стандартных отклонений. Ожидаемая частота рассчитана для двух конкурирующих гипотез (N) и (t). Распределение Стьюдента достаточно точно аппроксимирует толщину хвостов эмпирического распределения, тогда как нормальное распределение недооценивает частоту выбросов.

Для цели построения доверительного интервала по значениям асимметрии и куртозиса было подогнано распределение из семейства Пирсона. Фактический ряд и 98 процентный доверительный интервал представлены на рисунках 5 и 6.

(ii) На графике 4 можно наблюдать три периода экстремально высокой волатильности: июнь и начало июля 96 года, конец октября 97 года, лето (особенно июнь и август) 98 года. Соответствующие им локальные максимумы условного стандартного отклонения перечислены (в хронологическом порядке) ниже в таблице.

28 октября 97 года индекс РТС опустился на 19,02 процента в результате агрессивной продажи акций нерезидентами. Столь катастрофическое падение не предсказано моделью: нижняя граница 98 процентного доверительного интервала на этот день составляла -11,81. Также неожиданным оказался провал 12 января 98 года: -14,35 процентов при нижней границе доверительного интервала -9,74. Как следует из приведенной таблицы, оба выброса явились причиной резкого увеличения условной дисперсии (см. иллюстрацию 6).

РТС. Локальные максимумы условной дисперсии.

Дата	Значение σ_t	Комментарий.
30.05.96	8,5713	Связан с неопределенностью относительно исхода президентских выборов.
18.06.96	8,2729	Последовал за выбросом $z_t = 4.98$ 17 июня 96 года и связан с объявлением результатов первого тура выборов.
09.07.96	7,8664	Объявлены результаты второго тура президентских выборов.

29.10.9 7	9,9315 12,0664	Данный всплеск волатильности последовал за выбросом $z_t = -4.20$ 28 октября 97 года и отмечает достигшую России волну финансового кризиса.
30.10.9 7		
14.01.9 8	8,3429	Последовал за выбросом $z_t = -3.69$ 12 января 98 года.
03.06.9 8	9,0460	Последовал за обострением ситуации на рынке ГКО и повышением ставки рефинансирования до 150 процентов 27 мая 98 года.
18.08.9 8	8,2477	
28.08.9 8	9,7891	

(iii) По результатам применения МКМП t статистика коэффициента δ составляет лишь 0.32 и не позволяет отклонить нулевую гипотезу об отсутствии связи между условным средним и условной дисперсией отдачи вложений в РТС. Данный вывод неудивителен в свете работ Nelson (1991), Bollerslev, Engle, Nelson (1993), также использовавших *EGARCH* модель и также не обнаруживших искомой связи для важнейших фондовых индексов США.

В таблице 2 приведены оценки ОММ сокращенной модели с ограничением $\delta=0$.

(iv) Инновации, такие что $|z_t| > E|z_t|$, вне зависимости от алгебраического знака приводят к увеличению условной дисперсии.

По результатам применения ОММ коэффициент θ равен -0,0309 при стандартном отклонении 0,0489, тогда как γ равен 0,4851 при стандартном отклонении 0,0745. Таким образом, российский фондовый индекс не обнаруживает статистически значимого леввередж-эффекта.

(v) Коэффициент авторегрессии ϕ в уравнении для логарифма условной дисперсии равен 0.9193 при стандартном отклонении 0.0250, так что t статистика для гипотезы о единичном корне в дисперсии ($1-\phi=0$) составляет 3.22. Такое значение не позволяет уверенно отклонить нулевую гипотезу, поскольку распределение статистики неизвестно, но дает основание предполагать стационарность процесса.

(vi) С целью обнаружения ошибок в спецификации модели мы проверяем набор из 12 условий ортогональности, сформулированных относительно z_t . Тестируются предположения о нулевом среднем, единичной дисперсии, отсутствии автокорреляции в стандартизованных ошибках и их квадратах до 5-го порядка. При 10 процентном уровне значимости ни одно из условий не может быть отвергнуто.

Таблица 1.

РТС. Частота "хвостовых событий"

N	Ожидаемая (N)	Ожидаемая (t)	Фактическая
1	251,6272	221,7093	218
2	36,0816	40,8865	41
3	2,1410	7,7595	9
4	0,0503	1,7771	2

Таблица 2.

РТС. Обобщенный метод моментов.

	Estimate	St.Dev.	t.Stat
ω	0,175348	0,057123	3,0697
θ	-0,030853	0,048906	-0,6309
γ	0,485103	0,074509	6,5107
ϕ	0,919309	0,025042	36,7099
β	0,272529	0,039843	6,8400
c	0,109164	0,086201	1,2664
k	1,786948		
a	0,129092		
$E z $	0,749024		

Таблица 3.

РТС. Тестирование спецификации модели.

Условия ортогональности	Выборочное среднее	Стандартная ошибка	t статистика
$E(z_t) = 0$	-0,0153	0,0357	-0,4297
$E(z_t z_{t-1}) = 0$	0,0579	0,0378	1,5339
$E(z_t z_{t-2}) = 0$	0,0106	0,0357	0,2958
$E(z_t z_{t-3}) = 0$	0,0546	0,0333	1,6391
$E(z_t z_{t-4}) = 0$	-0,0054	0,0373	-0,1460
$E(z_t z_{t-5}) = 0$	-0,0019	0,0346	-0,0537
$E(z_t^2) - 1 = 0$	0,0098	0,0696	0,1412
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-1}^2 - 1)] = 0$	0,1115	0,1277	0,8727
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-2}^2 - 1)] = 0$	-0,0165	0,1041	-0,1589
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-3}^2 - 1)] = 0$	-0,1451	0,1142	-1,2705
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-4}^2 - 1)] = 0$	0,0710	0,1342	0,5290
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-5}^2 - 1)] = 0$	-0,0859	0,1066	-0,8055

ДОХОДНОСТЬ ГКО.

Переменная представляет собой взвешенное среднее доходности по выпускам ГКО со сроками погашения от 1 до 360 дней; в качестве весов приняты текущие доли выпусков в суммарном обороте торгов. Временной ряд содержит 403 наблюдения за период 5.01.97-14.08.98.

(i) Стандартизированные остатки демонстрируют экстремальные коэффициенты асимметрии и кurtозиса: 1,9308 и 9,2601. Правая асимметрия наглядно представлена таблицей 4: положительные выбросы обладают большей частотой, чем отрицательные.

(ii) В динамике фактической доходности и ее условного стандартного отклонения имеется выраженная синхронность (рисунок 7).

Доходность государственных ценных бумаг достигает наименьших значений в интервале июнь – октябрь 97 года, стабилизация рыночной конъюнктуры проявляется относительно низким уровнем условной дисперсии. Период спокойного движения переменной прервался 28 октября неожиданным увеличением доходности на 5,88 процентных пунктов до значения 24,47, причиной чего послужила массовая продажа нерезидентами госбумаг; положительный выброс вызвал стремительное увеличение условной дисперсии 29 октября. На протяжении ноября и декабря 97 года повышательная тенденция доходности и условной дисперсии сохранялась. Необратимая дестабилизация рынка наступила в конце мая 98 года.

(iii) Наблюдаемая синхронность в развитии фактической доходности и условного стандартного отклонения подтверждена статистически: оцененный коэффициент δ равен 1,0298 при стандартной ошибке 0,3380.

Авторегрессионная компонента в уравнении условного среднего усложняет интерпретацию зависимости между ожидаемой доходностью и условной дисперсией: воздействие риска на ожидания инвесторов не является мгновенным, оно распределено во времени. Прибегая к традиционной аргументации моделей распределенного лага, можно утверждать, что ожидаемая доходность и условное стандартное отклонение находятся в долгосрочной зависимости вида

$$\mu = 14.57 + 4.61\sigma .$$

Коэффициенты зависимости получены как $c/(1-\beta)$ и $\delta/(1-\beta)$. Поскольку условная дисперсия ассоциирована с уровнем системного (рыночного или недиверсифицируемого) риска, полученное уравнение характеризует *долгосрочную связь между ожидаемой доходностью и риском рынка ГКО*.

Таким образом, безрисковая (гарантированная) доходность рынка составляет 14,57 процентов годовых. Увеличение стандартного отклонения на единицу в долгосрочной перспективе приводит к росту ожидаемой доходности на 4,61 процент. Среднее значение фактической доходности на модельном интервале составляет 31,13 процентов и распадается на безрисковую составляющую (14,57 процентов) и премию за риск - 16,47 процентов.

Диаграмма в пространстве σ - μ представлена на рисунках 9-10. На рисунке 10 отмечена линия долгосрочной зависимости.

(iv) Положительные инновации приводят к увеличению условной дисперсии, тогда как отрицательные инновации не оказывают статистически значимого влияния.

Логарифм условной дисперсии является линейной функцией инноваций z с неодинаковыми коэффициентами наклона для положительных и

отрицательных z . В отрицательной области коэффициент наклона равен $\theta-\gamma=0,1372$ при стандартной ошибке $0,1040$, в положительной области равен $\theta+\gamma=0,2417$ при стандартной ошибке $0,0602$. Статистика Вальда для гипотезы $\theta-\gamma=0$ соответствует уровню значимости $0,1870$. Следовательно, нельзя с уверенностью отклонить гипотезу об отсутствии влияния отрицательных инноваций на условную дисперсию, в то же время как положительные инновации несомненно являются влияющими. Таким образом, знак ошибок прогноза доходности существенно определяет динамику условной дисперсии.

Можно предложить весьма простое объяснение такой зависимости: превышение фактической доходности над ожидаемой на рынке государственных облигаций является тревожным сигналом, тогда как обратное соотношение говорит скорее о стабилизации конъюнктуры. По своему воздействию на условную дисперсию положительные ошибки прогнозов следует признать «негативными новостями», отрицательные ошибки – «нейтральными известиями». Заметим, что негативные новости обладают гораздо большей частотой, чем нейтральные.

(v) Коэффициент ϕ равен $0,9963$ при стандартном отклонении $0,0073$, так что t статистика для гипотезы о единичном корне в дисперсии составляет лишь $0,50$.

(vi) Достоверно могут быть отвергнуты два условия ортогональности (таблица 6):

$$E(z_t z_{t-2}) = 0$$

$$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-5}^2 - 1)] = 0$$

Нарушение первого из них сигнализирует о пропущенной переменной y_{t-2} в уравнении условного среднего. Нарушение второго условия свидетельствует об ограниченности $AR(1)$ репрезентации логарифма условной дисперсии.

В более общей постановке $\ln \sigma_t^2$ моделируется как процесс $ARMA(p,q)$, причем степени авторегрессии и скользящего среднего определяются на основе критериев Schwartz или Akaike. Так, например, $ARMA(2,1)$ репрезентация логарифма условной дисперсии была выбрана по критерию Schwartz для многих фондовых индексов США (Nelson (1991), Bollerslev, Engle, Nelson (1993)). Выбор $p=1, q=0$ в настоящей работе обусловлен лишь техническими ограничениями: формального тестирования порядков p и q не проводилось.

Таблица 4.

Доходность ГКО. Частота "хвостовых
событий"

Событие	Частота	Событие	Частота
$z < -1$	34	$z > 1$	47
$z < -2$	3	$z > 2$	19
$z < -3$	1	$z > 3$	7
$z < -4$	1	$z > 4$	3
$z < -5$	0	$z > 5$	2
$z < -6$	0	$z > 6$	2

Таблица 5.

Доходность ГКО. Обобщенный метод
моментов.

	Estimate	St. Dev.	t. Stat
ω	0,009005	0,017849	0,5045
θ	0,189461	0,065258	2,9033
γ	0,052284	0,054374	0,9616
ϕ	0,996323	0,007308	136,3258
β	0,776934	0,067986	11,4278
c	3,250043	0,961844	3,3790
δ	1,029808	0,337989	3,0469
$\theta - \gamma$	0,137177	0,103959	1,3195
$\theta + \gamma$	0,241746	0,060191	4,0163
k	9,260128		
a	1,930805		
$E z $	0,687588		

Таблица 6.

Условия ортогональности	Выборочное среднее	Стандартная ошибка	t статистика
$E(z_t) = 0$	0,0458	0,0525	0,8719
$E(z_t z_{t-1}) = 0$	0,0237	0,0716	0,3303
$E(z_t z_{t-2}) = 0$	-0,1243	0,0629	-1,9756
$E(z_t z_{t-3}) = 0$	0,0137	0,0565	0,2427
$E(z_t z_{t-4}) = 0$	0,0523	0,0646	0,8085
$E(z_t z_{t-5}) = 0$	0,0406	0,0426	0,9534
$E(z_t^2) - 1 = 0$	0,1090	0,1870	0,5830
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-1}^2 - 1)] = 0$	0,8378	0,6268	1,3365
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-2}^2 - 1)] = 0$	0,4863	0,3084	1,5769
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-3}^2 - 1)] = 0$	0,1605	0,3061	0,5244
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-4}^2 - 1)] = 0$	0,5538	0,7486	0,7398
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-5}^2 - 1)] = 0$	-0,3923	0,2157	-1,8189

ЦЕНЫ ГКО.

Переменная представляет собой взвешенное среднее цен выпусков ГКО со сроками погашения от 1 до 360 дней; в качестве весов приняты текущие доли выпусков в суммарном обороте торгов. Временной ряд содержит 403 наблюдения за период 5.01.97-14.08.98. Цены и доходность данного выпуска связаны обратным соотношением (τ – число дней до погашения):

$$y = \left(\frac{100}{p} - 1 \right) \frac{365}{\tau}.$$

Можно ожидать, что усредненные цены и доходности находятся также в обратной зависимости.

(i) Коэффициенты асимметрии и куртозиса стандартизованных остатков равны, соответственно, 2,5162 и -0,8475. Таблица 7 иллюстрирует левую асимметрию: отрицательные выбросы обладают большей частотой, чем положительные.

(ii) Развитие во времени условной дисперсии цен (рисунок 11) и условной дисперсии доходности ГКО подчинено общим для двух процессов тенденциям.

(iii) Существует статистически значимая обратная зависимость между ожидаемой ценой и условным стандартным отклонением: коэффициент δ равен

-2,4992 при стандартной ошибке 0,3736. Уравнение *долгосрочной зависимости* имеет вид

$$\mu = 96,59 - 3,52\sigma.$$

В ситуации полной определенности ($\sigma=0$) средневзвешенные цены находятся на уровне 96,59, увеличение стандартного отклонения на единицу в долгосрочной перспективе влечет снижение цен на 3,52. Диаграмма в пространстве μ - σ изображена на рисунке 12.

(iv) Отрицательные инновации приводят к увеличению условной дисперсии, тогда как положительные инновации не оказывают статистически значимого влияния.

Коэффициент чувствительности логарифма условной дисперсии к отрицательным z равен $\theta-\gamma = -0,1117$ при стандартной ошибке 0,0270, к положительным z – $\theta+\gamma = 0,0044$ при стандартной ошибке 0,0316. По своему влиянию на условную дисперсию отрицательные инновации следует признать «негативными известиями», тогда как положительные инновации – «нейтральными известиями».

(v) Коэффициент авторегрессии ϕ в уравнении для логарифма условной дисперсии равен 0.9969 при стандартном отклонении 0.0040, t статистика для гипотезы о единичном корне в дисперсии ($1-\phi=0$) составляет лишь 0.77.

(vi) Нарушены два условия ортогональности (таблица 9):

$$E(z_t z_{t-2}) = 0$$

$$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-1}^2 - 1)] = 0$$

Автокорреляция стандартизованных остатков второго порядка вызвана отсутствием y_{t-2} в уравнении условного среднего. Автокорреляция квадратов стандартизованных остатков первого порядка свидетельствует, по-видимому, о неудовлетворительности *EGARCH* параметризации условной дисперсии; в частности, простая *GARCH(1,1)* модель приводит к меньшей t статистике данного теста. Поскольку ковариационная матрица оценок *EGARCH-M* модели не является блочно-диагональной между параметрами среднего и дисперсии, ошибка в спецификации функции условной дисперсии может привести к несостоятельности оценок как условной дисперсии, так и условного среднего.

Таблица 7.

Цены ГКО. Частота "хвостовых событий".

Событие	Частота	Событие	Частота
$z < -1$	49	$z > 1$	50
$z < -2$	14	$z > 2$	4
$z < -3$	7	$z > 3$	1
$z < -4$	2	$z > 4$	0

Таблица 8.

Цены ГКО. Обобщенный метод моментов.

	<i>Estimate</i>	<i>St. Dev.</i>	<i>t. Stat</i>
ω	0,005152	0,006651	0,7746
θ	-0,053641	0,020155	-2,6614
γ	0,058078	0,021354	2,7198
ϕ	0,996885	0,004042	246,6537
β	0,289070	0,054709	5,2838
c	68,669918	5,313474	12,9237
δ	-2,499164	0,373585	-6,6897
$\theta-\gamma$	-0,111718	0,026966	-4,1430
$\theta+\gamma$	0,004437	0,031579	0,1405
k	2,516185		
a	-0,847506		
$E z $	0,732585		

Таблица 9.

Условия ортогональности	Выборочное среднее	Стандартная ошибка	t статистика
$E(z_t) = 0$	-0,0064	0,0503	-0,1271
$E(z_t z_{t-1}) = 0$	0,0440	0,0633	0,6958
$E(z_t z_{t-2}) = 0$	-0,0788	0,0471	-1,6717
$E(z_t z_{t-3}) = 0$	-0,0649	0,0483	-1,3434
$E(z_t z_{t-4}) = 0$	0,0472	0,0638	0,7397
$E(z_t z_{t-5}) = 0$	0,0794	0,0581	1,3670
$E(z_t^2) - 1 = 0$	0,0193	0,1076	0,1793
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-1}^2 - 1)] = 0$	0,5763	0,2722	2,1175
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-2}^2 - 1)] = 0$	-0,1329	0,1457	-0,9125
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-3}^2 - 1)] = 0$	-0,0933	0,1520	-0,6135
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-4}^2 - 1)] = 0$	0,5911	0,4412	1,3396
$E[(z_t^2 - 1)(z_{t-5}^2 - 1)] = 0$	0,3319	0,2507	1,3239

*МЕТОДЫ КВАЗИ-МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ И МОМЕНТОВ:
ОЦЕНКИ МОДЕЛИ (M).*

Провал гипотезы (N) в каждом из рассмотренных случаев мотивирует применение метода квази-максимального правдоподобия (МКМП) и обобщенного метода моментов (ОММ).

Результаты оценивания модели (M) данными методами представлены в таблицах 10-12. Приведены стандартные отклонения оценок параметров, соответствующие трем различным ковариационным матрицам:

- $-\hat{H}^{-1}$. Данная форма (HE) ковариационной матрицы основана на гессiane логарифмической функции правдоподобия, используется в методе максимального правдоподобия и теряет свойство состоятельности при нарушении гипотезы (N).
- $\hat{H}^{-1}\hat{B}\hat{H}^{-1}$. Такая форма (RB) устойчива к нарушению гипотезы (N) и является ковариационной матрицей МКМП.
- Ковариационной матрице ОММ.

В последнем столбце показаны отношения стандартных отклонений оценок ОММ к стандартным отклонениям оценок МКМП. Таблицы 10-12 позволяют сформулировать важные замечание и гипотезу.

Замечание. *HE*-форма ковариационной матрицы систематически преуменьшает стандартные отклонения оценок метода квази-максимального правдоподобия. Смещение особенно велико, если распределение инноваций асимметрично. Данное сравнение иллюстрирует результаты Bollerslev и Wooldridge (1992).

Для большинства параметров стандартные отклонения оценок ОММ меньше стандартных отклонений оценок МКМП. Отношения их лежат в интервале: от 0,8077 до 1,0194 (РТС), от 0,5458 до 1,0647 (доходность ГКО), от 0,4824 до 1,1572 (цены ГКО). Общую закономерность нарушают: константа в модели для РТС (1,0194), θ для доходности ГКО (1,0647), δ для цен ГКО (1,1572).

Гипотеза. Обобщенный метод моментов более эффективен, чем метод квази-максимального правдоподобия не только асимптотически, но также и *для конечных выборок*. Выигрыш в эффективности тем больше, чем сильнее отклонение условного распределения процесса от нормального.

Проведение экспериментов Монте Карло с целью верификации данной гипотезы, однако, не входит в план настоящей работы и остается перспективной задачей.

Таблица 10.

РТС. Методы квази-максимального правдоподобия и моментов.

	<i>QMLE Estimate</i>	<i>ML St.Dev.</i>	<i>QMLE St.Dev.</i>	<i>GMM Estimate</i>	<i>GMM St.Dev.</i>	<i>GMM / QML *</i>
ω	0,211110	0,044967	0,070720	0,175348	0,057123	0,8077
θ	-0,024720	0,035895	0,060395	-0,030853	0,048906	0,8098
γ	0,498193	0,055513	0,086180	0,485103	0,074509	0,8646
ϕ	0,913217	0,019045	0,030457	0,919309	0,025042	0,8222
β	0,210746	0,038514	0,041496	0,272529	0,039843	0,9602
c	0,104878	0,083227	0,084562	0,109164	0,086201	1,0194

Таблица 11.

Доходность ГКО. Методы квази-максимального правдоподобия и моментов.

	<i>QMLE Estimate</i>	<i>ML St.Dev.</i>	<i>QMLE St.Dev.</i>	<i>GMM Estimate</i>	<i>GMM St.Dev.</i>	<i>GMM / QML *</i>
ω	0,017306	0,016070	0,025163	0,009005	0,017849	0,7093
θ	0,241774	0,036985	0,061292	0,189461	0,065258	1,0647
γ	0,149522	0,034811	0,076191	0,052284	0,054374	0,7137
ϕ	0,991597	0,007343	0,011836	0,996323	0,007308	0,6175
β	0,724297	0,066200	0,118685	0,776934	0,067986	0,5728
c	3,980118	0,939140	1,484244	3,250043	0,961844	0,6480
δ	1,202641	0,328083	0,619242	1,029808	0,337989	0,5458

Таблица 12.

Цены ГКО. Методы квази-максимального правдоподобия и моментов.

	<i>QML Estimate</i>	<i>ML St.Dev.</i>	<i>QML St.Dev.</i>	<i>GMM Estimate</i>	<i>GMM St. Dev.</i>	<i>GMM / QML *</i>
ω	0,013897	0,006430	0,009478	0,005152	0,006651	0,7017
θ	-0,057667	0,018708	0,041778	-0,053641	0,020155	0,4824
γ	0,086991	0,021409	0,031387	0,058078	0,021354	0,6803
ϕ	0,991719	0,004039	0,005536	0,996885	0,004042	0,7301
β	0,296550	0,058415	0,075724	0,289070	0,054709	0,7225
c	67,684135	5,663298	7,186756	68,669918	5,313474	0,7393
δ	-2,321332	0,340737	0,322848	-2,499164	0,373585	1,1572

* Отношение стандартного отклонения оценки ОММ к стандартному отклонению оценки МКМП.

3.2 МНОГОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ.

В этом параграфе мы анализируем взаимосвязи между фондовым рынком и несколькими сегментами рынка ГКО. Изучаются переменные во времени условные корреляции, тестируется наличие причинной (по Гранжеру) связи между рынками.

ОЦЕНИВАНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ARCH МОДЕЛИ МЕТОДОМ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ.

Определение многомерного *ARCH* процесса не представляет никакой теоретической сложности: рассматривается m -компонентный наблюдаемый случайный вектор y_t , m -компонентный вектор его условного математического ожидания, $m \times m$ матрица условной вариации. Оценивание многомерной *ARCH* модели, однако, сопряжено со значительными трудностями.

В настоящей работе применяется полупараметрическая *ARCH* модель, предложенная Ф. Клаассеном (F. Klaassen, 1999); модель привлекательна своей предельной технической простотой. Наблюдаемые процессы преобразуются в главные компоненты. Для каждой главной компоненты по отдельности применяется одномерная *ARCH* модель. Обратным преобразованием оцененные условные моменты главных компонент трансформируются в условные моменты наблюдаемых процессов. Оценивание m -мерной модели, таким образом, сводится к построению m одномерных моделей.

Последовательность операций такова. Вычисляется матрица безусловной вариации $V(y_t)$ и ее собственные вектора. Собственные вектора формируют ортонормированный базис W в пространстве переменных. Вычисляются главные компоненты облака наблюдений по формуле

$$f_t = y_t W.$$

Безусловные ковариации между главными компонентами равны нулю. Основное предположение модели состоит в равенстве нулю условных ковариаций между главными компонентами. Условные ожидания и дисперсии главных компонент оцениваются с помощью m независимых одномерных моделей. Вне-диагональные элементы $V(f_t | \Omega_t)$ заполняются нулями. Наконец, условные моменты f_t преобразуются в условные моменты y_t по формулам

$$E(y_t | \Omega_t) = E(f_t | \Omega_t) W$$
$$V(y_t | \Omega_t) = W^T V(f_t | \Omega_t) W.$$

СЕГМЕНТЫ РЫНКА ГКО.

В данном разделе мы рассматриваем рынок ГКО как совокупность нескольких сегментов, объединяющих выпуски государственных облигаций с близкими сроками погашения. Нами принята следующая сегментация рынка: выпуски со сроками погашения 1-30, 31-90, 91-180 и 181-360 дней (соответственно GKO1,

GKO3, GKO6, GKO12). Такая сегментация обусловлена существенно различными инвестиционными свойствами кратко-, средне-, и долгосрочных выпусков ГКО. Вложения в краткосрочные выпуски, как правило, выполняли функции оперативного регулирования рублевой ликвидности, либо задачи спекулятивных операций арбитражного типа в течение торговой сессии. Долгосрочные выпуски ГКО в некоторой степени выступали как инструменты долгосрочных инвестиций. Среднесрочные облигации занимали промежуточное место.

В качестве переменных выбраны средневзвешенные по объему торгов *цены* облигаций. Такой выбор не является бесспорным. Более распространенный подход к анализу нескольких финансовых активов предполагает рассмотрение их одновременных доходностей. Так, Пересецкий и Ивантер (1999) вычисляют однодневные доходности ГКО и ОФЗ. Уровень цен ГКО, ОФЗ, акций используются Дорофеевым (1998), который отмечает, что применение темпов прироста цен не вполне оправдано с точки зрения временных задержек воздействия одних индикаторов на другие.

Оценки безусловной корреляции четырех сегментов рынка ГКО представлены в таблице 13. В наибольшей степени коррелируют смежные сегменты; так, корреляция GKO6 и GKO12 составляет 0,95.

Динамика условных дисперсий изучаемых переменных характеризуется выраженной синхронностью. Замечательно, что уровни волатильности в любой момент времени находятся в полном соответствии со срочностью сегментов (т.е. волатильность возрастает при движении от GKO1 к GKO12).

Наибольший интерес представляют оцененные условные корреляции между GKO12 и GKO6, GKO3, GKO1 (экспоненциально сглаженные корреляции представлены на рисунках 13 и 14). Двум обстоятельствам мы придаем особое значение:

1. В июне–октябре 97 года корреляции приближаются к нулю и в сентябре–октябре того же года принимают отрицательные значения. Данное обстоятельство говорит о возможности страхования рисков путем отрицательной диверсификации средств между государственными облигациями различной срочности и свидетельствует об устойчивости рынка в целом.

2. 29 октября 97 года корреляции переживают стремительный подъем и в течение второй половины модельного периода (ноябрь 97 – август 98) остаются стабильно высокими. Увеличение корреляции между сегментами рынка можно объяснить серией отрицательных инноваций, вызванных одновременной продажей нерезидентами крупных пакетов государственных облигаций различной срочности.

Смирнов, Нагпал и Нейман (1998) предполагают: *‘Корреляция между развивающимися рынками увеличивается в периоды падения по сравнению с периодами роста. Этому способствуют установки риск-менеджмента, принятые в западных финансовых институтах. Ценные бумаги развивающихся стран относятся к рискованной части портфеля, и в кризисные моменты они сбрасываются с целью перевода капитала в менее рискованные активы; т.о., происходит отток капиталов со всех развивающихся рынков одновременно’*. Вероятно, такие рассуждения справедливы и в отношении нескольких

сегментов в рамках национального финансового рынка. Продажа нерезидентами крупных пакетов национальных ценных бумаг влечет одновременное падение цен и увеличение корреляции между ними.

В краткосрочной динамике оцененных условных корреляций имеются видимые различия, однако сравнение их средних значений на характерных интервалах времени приводит к общим выводам (таблица 14). Цены ГКО коррелировали слабее в течение первой половины модельного периода (январь–октябрь 97 года), чем во второй его половине (октябрь 97 года – август 98 года). В сентябре – октябре 97 года корреляции относительно низки. Все корреляции переживают резкое увеличение 29 октября 97 года; значения корреляций на 28 и 29 октября приведены в таблице 14.

Причинные (по Гранжеру) связи между сегментами рынка изучались попарно. Были оценены VAR-модели с четырьмя лагами. Тестирование проведено с учетом условной гетероскедастичности, для чего использовались оцененные матрицы условной ковариации между переменными. Для того, чтобы избежать ложной регрессии, все тесты проведены как для уровней, так и первых разностей.

Тесты для уровней обнаруживают двухстороннюю причинность между смежными сегментами среднесрочных и долгосрочных облигаций ($GKO12 \leftrightarrow GKO6$, $GKO6 \leftrightarrow GKO3$). Между несмежными сегментами имеются односторонние связи: долгосрочные и среднесрочные бумаги оказывают воздействие на краткосрочные бумаги, но не наоборот ($GKO12 \rightarrow GKO3$, $GKO12$, 6, и 3 $\rightarrow GKO1$). Тесты для первых разностей подтверждают двухсторонние причинные связи между $GKO12$ и $GKO6$, $GKO6$ и $GKO3$, однако не позволяют принять гипотезы о влиянии $GKO12 \rightarrow GKO1$ и 3. С другой стороны, обнаруживается обратная связь от коротких бумаг к длинным: $GKO1 \rightarrow GKO3$, $GKO6$.

Таблица 13.

Безусловные корреляции между сегментами рынка ГКО.

	GKO1	GKO3	GKO6	GKO12
GKO1	1,0000	0,8480	0,8242	0,7754
GKO3	0,8480	1,0000	0,9401	0,8952
GKO6	0,8242	0,9401	1,0000	0,9496
GKO12	0,7754	0,8952	0,9496	1,0000

Таблица 14.
Значения условных корреляций.

<i>Период</i>	<i>GKO12_ GKO1</i>	<i>GKO12_ GKO3</i>	<i>GKO12_ GKO6</i>	<i>GKO3_ GKO1</i>	<i>GKO6_ GKO1</i>	<i>GKO6_ GKO3</i>
<i>январь.97-28.10.97</i>	0,0722	0,1155	0,2013	0,3306	0,1941	0,3551
<i>сентябрь.97-28.10.97</i>	-0,0457	-0,1354	-0,1474	0,3058	0,1065	0,1475
<i>29.10.97-август.98</i>	0,2558	0,4375	0,5760	0,4464	0,3318	0,5428
<i>28.10.97</i>	-0,0411	-0,1640	-0,1454	0,2039	0,1070	0,2772
<i>29.10.97</i>	0,3202	0,6014	0,7343	0,4412	0,3788	0,6928

Таблица 15.
Тесты на причинность по Гранжеру.

<i>Нулевая гипотеза</i>	<i>Тесты для уровней</i>		<i>Тесты для разностей</i>	
<i>GKO12 does not cause GKO1</i>	12,8347	0,0121	9,4860	0,0500
<i>GKO1 does not cause GKO12</i>	4,4522	0,3483	3,6765	0,4516
<i>GKO12 does not cause GKO3</i>	11,6964	0,0198	7,9164	0,0947
<i>GKO3 does not cause GKO12</i>	6,3478	0,1746	6,7821	0,1479
<i>GKO12 does not cause GKO6</i>	24,1262	0,0001	23,8106	0,0001
<i>GKO6 does not cause GKO12</i>	29,6456	0,0000	26,6148	0,0000
<i>GKO6 does not cause GKO1</i>	40,6532	0,0000	31,6915	0,0000
<i>GKO1 does not cause GKO6</i>	5,1591	0,2714	10,8666	0,0281
<i>GKO6 does not cause GKO3</i>	28,5842	0,0000	19,6872	0,0006
<i>GKO3 does not cause GKO6</i>	18,4743	0,0010	21,5845	0,0002
<i>GKO3 does not cause GKO1</i>	19,1130	0,0007	8,4075	0,0777
<i>GKO1 does not cause GKO3</i>	7,5793	0,1083	10,8181	0,0287

РЫНОК ГКО И ФОНДОВЫЙ РЫНОК

В данном разделе изучается связь рынка акций с выделенными сегментами рынка ГКО. Используются средневзвешенные по рыночной капитализации *цены* акций (индекс РТС), средневзвешенные по объему торгов *цены* ГКО (ГКО - наиболее агрегированный показатель, включающий *цены* выпусков со сроком погашения 1- 360 дней). Два процесса представлены на рисунке 15.

В таблице 16 приведены оценки безусловной корреляции индекса РТС с различными индексами рынка ГКО. В наибольшей степени индекс РТС коррелирует с сегментами долгосрочных выпусков гособлигаций, в меньшей степени – с сегментом краткосрочных выпусков. Оцененные условные

корреляции подчинены той же закономерности, динамика их синхронна. На рисунке 16 представлен лишь один процесс: условная корреляция переменных RTS и GKO. Отметим два обстоятельства:

1. В среднем RTS и GKO коррелируют слабо: среднее значение оцененной условной корреляции составляет лишь 0,15, однако условная корреляция положительна на всем модельном интервале.
2. Имеется всплеск корреляции до значения 0,77 30 октября 97 года.

Дорофеев (1998) изучает поведение цен акций отдельных компаний на временном интервале январь 97 – июнь 98. В его работе построены регрессионные уравнения для цен акций, в качестве регрессоров выступают цены ГКО и ОФЗ и ряд других переменных. Относительно связи цен автор заключает: «Акции практически всех компаний (кроме металлургических) имеют значимую отрицательную корреляцию с рынком ГКО\ОФЗ. Этот феномен объясняется тем, что последний задает альтернативную требуемую ставку для активов РТС». Противоречивость результатов можно объяснить участием в регрессионных уравнениях таких переменных как индекс РТС и ВВП, которые и объясняют большую часть вариации цен акций.

В работе Пересецкого и Ивантера (1999а) приведены безусловные корреляции однодневных доходностей индексов двух рынков для интервала май 96 – октябрь 97. Внутри групп различных индексов, относящихся к одному и тому же рынку, имеется высокая корреляция. Корреляция между индексами, принадлежащими разным рынкам, весьма мала (но всегда положительна). Авторы объясняют это слабой интеграцией рынков или наличием временных лагов в их зависимости.

Смирнов и соавторы (1998) отмечают *параллельное движение рынков акций и госбумаг*: «Это (параллельное движение - АП) может характеризовать ситуацию, когда рост и падение котировок на этих рынках инспирируется *одновременным притоком или оттоком капитала*, а не перераспределением ресурсов внутри России». Автор настоящего диплома полагает, что всплеск корреляции между рынками акций и гособлигаций в конце октября 97 года объясняется (как и ранее для сегментов рынка ГКО) продажей нерезидентами крупных пакетов российских ценных бумаг, т.е. одновременным оттоком капитала с обоих рынков.

Тесты на причинность по Гранжеру проведены как для уровней, так и первых разностей с учетом гетероскедастичности. Тесты для уровней указывают на существование односторонних причинных связей по направлению от фондового рынка ко всем сегментам рынка ГКО. Тесты для первых разностей не подтверждают связей $RTS \rightarrow GKO3$ и $RTS \rightarrow GKO1$. По-видимому, индекс РТС оказывает воздействие на цены лишь долгосрочных выпусков ГКО.

Приведенные тесты на причинность позволяют сформулировать следующую **гипотезу**:

шоки распространялись от фондового рынка к сегменту долгосрочных выпусков ГКО, затем к сегменту краткосрочных выпусков. Такая их направленность обусловлена последовательностью, в которой российские ценные бумаги продавались при нарастании кризисных

явлений. В первую очередь из портфеля активов «удалялись» наиболее рискованные бумаги (корпоративные акции). По мере нарастания неопределенности за акциями последовали длинные выпуски ГКО, затем выпуски с меньшими сроками до погашения. Таким образом, цены акций в первую очередь испытали понижательное давление, которое затем распространилось на рынок гособлигаций.

Таблица 16.

*Корреляции индекса RTS
с индексами рынка ГКО*

<i>GKO</i>	0,7351
<i>GKO1</i>	0,5590
<i>GKO3</i>	0,7083
<i>GKO6</i>	0,7874
<i>GKO12</i>	0,8282

Таблица 17.

Тесты на причинность по Гранжеру.

<i>Нулевая гипотеза.</i>	<i>Лаги</i>	<i>Тесты для уровней</i>		<i>Тесты для разностей</i>	
<i>RTS does not cause GKO</i>	4	31,2114	0,0000	10,4671	0,0333
<i>GKO does not cause RTS</i>		6,6254	0,1571	1,8709	0,7595
<i>RTS does not cause GKO12</i>	2	14,2326	0,0008	9,1603	0,0103
<i>GKO12 does not cause RTS</i>		3,3872	0,1839	2,9659	0,2270
<i>RTS does not cause GKO6</i>	2	9,9871	0,0068	7,2538	0,0266
<i>GKO6 does not cause RTS</i>		2,0103	0,3660	0,1820	0,9130
<i>RTS does not cause GKO3</i>	2	12,6055	0,0018	3,8662	0,1447
<i>GKO3 does not cause RTS</i>		0,0293	0,9854	0,9048	0,6361
<i>RTS does not cause GKO1</i>	2	9,1174	0,0105	1,0067	0,6045
<i>GKO1 does not cause RTS</i>		0,1198	0,9419	2,9466	0,2292

***ЗАМЕЧАНИЕ К ОЦЕНИВАНИЮ МНОГОМЕРНОЙ ARСH МОДЕЛИ
МЕТОДОМ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ.***

В завершении настоящего раздела мы считаем нужным указать на возможность построения двух наборов оценок условных вторых моментов с помощью

изложенного выше метода главных компонент. Такая возможность была использована при построении моделей, результаты которых обсуждались в данном разделе. Основанием для нее служит следующий факт: условные вариации наблюдаемого процесса y_t и возмущающего процесса ε_t совпадают, тогда как их безусловные вариации различаются.

Два набора оценок могут быть получены последовательно за два шага. Первый шаг состоит в применении описанной выше модели. Второй шаг состоит в применении той же модели для остатков $\hat{\varepsilon}_t$, полученных на первом шаге. Вычисляются матрица безусловной вариации остатков $V(\hat{\varepsilon}_t)$, собственные вектора этой матрицы, набор главных компонент. Поскольку условные средние главных компонент равны нулю, оцениваются лишь условные дисперсии. Наконец, условные дисперсии главных компонент преобразуются в условные вторые моменты y_t .

Выбор между наборами оцененных условных моментов следует подчинить некоторому формальному критерию. Мы принимаем критерий максимума функции правдоподобия, построенной при вспомогательном предположении о том, что y_t при условии Ω_t имеет многомерное нормальное распределение.

Качество подбора условных моментов переменных GKO1, GKO3, GKO6 и GKO12 (модель для сегментов рынка ГКО) отражено таблицей 18. В столбце «Общий подбор» приведены значения логарифмической функции правдоподобия, для вычисления которых использовались оцененные условные средние, дисперсии и ковариации. В столбце «Подбор средних и дисперсий» приведены значения логарифмической функции правдоподобия, для вычисления которых использовались оцененные средние и дисперсии, а ковариации заменялись нулями.

Таблица 18 свидетельствует о необходимости реализации второго шага в рамках многомерной модели.

Качество подбора условных моментов переменных RTS и GKO представлено таблицей 19. Реализация второй шага в рамках двумерной модели не приносит желаемого улучшения качества подбора. Подбор условной дисперсии GKO многомерной моделью хуже, чем подбор одномерной моделью.

Таблица 18.

Качество модели для сегментов рынка ГКО

Модель	Общий подбор	Подбор средних и дисперсий
Одномерные GARCH-M	-1321,47	-1321,47
Многомерная модель:		
Шаг 1	-1205,52	-1270,43
Шаг 2	-1168,04	-1225,88

Таблица 19.

Качество модели для переменных RTS и GKO

Модель	Общий подбор	Подбор средних и дисперсий
Одномерные модели	-2279,35	-2279,35
<i>RTS</i>		-1512,56
<i>GKO</i>		-766,79
Двумерная модель		
<i>Шаг 1</i>	-2271,07	-2279,22
<i>RTS</i>		-1492,30
<i>GKO</i>		-786,92
<i>Шаг 2</i>	-2271,44	-2279,25

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

ОБЩИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ.

Обзор литературы позволяет выделить некоторые устойчивые закономерности, характеризующие отдачу финансовых активов как стохастический процесс:

- *Clustering Volatility*. Волатильность обладает инерцией, ее уровень предсказуем. Модели авторегрессионной условной гетероскедастичности адекватно отражают инертность и предсказуемость динамики условного второго момента.
- Плотность условного распределения отдачи финансовых активов характеризуется более толстыми хвостами, чем плотность нормального распределения. Это наблюдение является существенным при выборе метода оценивания *ARCH* модели.
- "Леввередж эффект". Отдача акций отрицательно коррелирует с изменениями волатильности. Отрицательные и положительные ошибки прогноза имеют различное воздействие на условную дисперсию.
- Нестационарность. Безусловная дисперсия процессов бесконечна.

УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Плотность условного распределения отдачи вложений в индекс РТС симметрична, но имеет более толстые хвосты, чем плотность нормального распределения. Такой тип функции плотности является общим для российского и основных фондовых индексов США.

Условные распределения средневзвешенных доходностей и цен ГКО имеют экстремально высокие коэффициенты асимметрии и куртозиса. Плотности таких распределений обладают более толстыми хвостами, чем плотность нормального распределения, причем один из хвостов (правый или левый, в зависимости от знака асимметрии) толще другого. Такой тип функции плотности специфичен для российских данных: указания на асимметричные распределения весьма редки в зарубежной литературе.

Причиной выраженной ненормальности условных распределений являются выбросы или "хвостовые события" (*tail events*) – ошибки прогнозов, многократно превосходящие стандартное отклонение. "Хвостовые события" часто связаны с бумагами, паниками, резкими изменениями политики Центрального Банка, реакцией рынка на политические известия. Так, 17 июня 1996 года на известие о победе Б.Ельцина в первом туре президентских выборов индекс РТС отозвался увеличением на 16 процентов. В результате продажи нерезидентами крупных пакетов российских ценных бумаг 28 октября 1997 года индекс потерял 19 процентов своей величины, в то время как доходность ГКО возросла на 5,88 процентных пунктов.

Нормальное распределение приписывает возникающим ошибкам прогноза незначительную вероятность, не сопоставимую с фактической частотой их появления. Условное распределение отдачи вложений в индекс РТС аппроксимировано распределением Стьюдента. Это распределение является лептокуртическим и адекватно отражает частоту "хвостовых событий".

Зарегистрированная для доходности ГКО положительная асимметрия свидетельствует о том, что положительные выбросы относительно более часты, чем отрицательные. Такая особенность отражает специфическую реакцию участников рынка на поступающие известия.

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД МОМЕНТОВ.

Метод квази-максимального правдоподобия не является асимптотически эффективным. Потери эффективности, возникающие, в частности, при t -распределенных ошибках невелики, однако могут быть весьма существенными, если распределение ошибок асимметрично.

Нарушение гипотезы об условной нормальности мотивирует применение обобщенного метода моментов. На основе данного метода построена процедура оценивания модели с параметризованными совместно функциями условного среднего и дисперсии. Обобщенный метод моментов обладает следующими достоинствами:

- (i) не требует явных предположений относительно плотности условного распределения и допускает присутствие ненулевых куртозиса и асимметрии;
- (ii) использует лишь производные первого порядка функций условного среднего и дисперсии и позволяет избежать тем самым применения методов численного дифференцирования;
- (iii) асимптотически более эффективен, чем метод квази-максимального правдоподобия.

ДИНАМИКА УСЛОВНЫХ ДИСПЕРСИЙ.

С целью изучения динамики условных дисперсий индикаторов финансового рынка построены одномерные *EGARCH-M* модели.

Модель для отдачи вложений в индекс РТС выделяет периоды экстремальной волатильности: июнь и начало июля 1996 года, 29-31 октября 1997 года, июнь и август 1998 года. Эти всплески волатильности можно содержательно связать с президентскими выборами, обвалом котировок 28 октября 1997 года и общей дестабилизацией финансового рынка летом 1998 года. Модели для доходности и цен ГКО выделяют период наименьшей волатильности: июнь-октябрь 1997 года. Отметим, что условные дисперсии всех изученных индикаторов переживают стремительное увеличение непосредственно после событий 28 октября 1997 года.

Следующий результат является специальным и был получен благодаря применению *EGARCH* параметризации: условные дисперсии доходности и цен ГКО реагируют асимметрично на ошибки разных знаков. Так, отрицательные ошибки прогноза цен приводят к нарастанию волатильности, тогда как положительные ошибки не оказывают статистически значимого влияния. Для доходности ГКО справедливо обратное: положительные инновации приводят к увеличению условной дисперсии, тогда как отрицательные инновации не оказывают статистически значимого влияния. Экономическая природа этого эффекта не ясна. Логарифм условной дисперсии отдачи вложений в индекс РТС симметрично зависит от инноваций; леввередж-эффект отсутствует.

Свойством ковариантной стационарности обладает лишь отдача вложений в индекс РТС. Безусловные дисперсии доходности и цен ГКО бесконечны.

РИСК И ОЖИДАЕМАЯ ДОХОДНОСТЬ.

Тип *ARCH-M* параметризации, примененный при построении одномерных моделей, позволяет изучить зависимость между условным средним и условной дисперсией.

Установлена статистически значимая пропорциональная зависимость между доходностью рыночного портфеля ГКО и ее условным стандартным отклонением. Уравнение долгосрочной зависимости разделяет ожидаемую доходность на постоянную компоненту (безрисковую или гарантированную доходность) и переменную премию за риск, которая зависит от уровня условной дисперсии. Среднее значение фактической доходности на модельном интервале составляет 31,13 процентов годовых и распадается на безрисковую составляющую - 14,57 процентов - и премию за риск - 16,47 процентов. Приращение условного стандартного отклонения на единицу приводит к увеличению премии за риск на 4,62 процента годовых.

Установлена статистически значимая обратная зависимость между ценой рыночного портфеля ГКО и ее условным стандартным отклонением. Безрисковая цена составляет 96,59, тогда как средний уровень фактической цены на модельном интервале равен 90,39. Разницу -6,20 можно трактовать как премию за риск. Приращение условного стандартного отклонения на единицу приводит к снижению ожидаемой цены на 3,52 единицы.

ДИНАМИК УСЛОВНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ.

С целью изучения динамики условных корреляций между сегментами рынка ГКО и рынком акций построены многомерные полупараметрические *ARCH* модели.

Близкая к нулю условная корреляция зафиксирована на временном интервале июнь-октябрь 1997 года между сегментами рынка ГКО, объединяющими выпуски со сроками погашения до полугода и более полугода. В сентябре-октябре 1997 года корреляция между данными сегментами принимает отрицательные значения.

Выделенный период уникален с точки зрения возможности страхования рисков путем диверсификации средств между выпусками ГКО различной срочности.

29-31 октября 1997 года зафиксирован всплеск условной корреляции между рынками ГКО и акций. Данный период характеризуется наименьшей эффективностью разделения средств между акциями и государственными облигациями с позиции страхования рисков. Стремительное увеличение переживают также корреляции между сегментами рынка ГКО.

Таким образом, находит подтверждение гипотеза об увеличении корреляции между сегментами финансового рынка в периоды падения по сравнению с периодами роста. Причиной его, предположительно, является продажа нерезидентами крупных пакетов национальных ценных бумаг, которая вызывает одновременное падение цен и увеличение корреляции между ними.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bollerslev Tim (1986) «Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity», *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
2. Bollerslev Tim (1987) «A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return», *Review of Economics and Statistics*, 69, 542-547.
3. Bollerslev Tim (1990) «Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach», *Review of Economics and Statistics*, 72, 498-505.
4. Bollerslev Tim and Jeffrey M. Wooldridge (1992), «Quasi Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances», *Econometric Reviews*, 11, 143-172.
5. Bollerslev Tim, Engle Robert F. and Nelson Daniel B. (1993). *ARCH Models* / University of California, San Diego.
6. Bollerslev Tim, Ray Y. Chou and Kenneth F. Kroner (1992) «ARCH modelling in finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence», *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.
7. Chou Ray Y. (1988). «Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH», *Journal of Applied Econometrics* 3, 279-294.
8. Davidson Russell, MacKinnon James G. *Estimation and Inference in Econometrics*./New York Oxford - Oxford University Press, 1993.
9. Domowitz Ian, Hakkio Craig S. (1985) «Conditional Variance and the Risk Premium in the Foreign Exchange Market», *Journal of International Economics*, 19, 47-66.
10. Engle Robert F. (1982) «Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with the Estimates of the Variance of U.K. Inflation», *Econometrica*, 50, 987-1008.
11. Engle Robert F. and Tim Bollerslev (1986). «Modelling the Persistence of Conditional Variances», *Econometric Reviews*, 5, 1-50, 81-87.
12. Engle Robert F., David M. Lilien and Russel P. Robins (1987) «Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M model», *Econometrica*, 55, 391-407.
13. Engle Robert F., Takatoshi Ito and Wen-Ling Lin (1990), «Meteor Showers or Heat Waves? Heteroskedastic Intra Daily Volatility in the Foreign Exchange Market», *Econometrica*, 58, 525-542.
14. French Kenneth R., G. William Schwert and Robert F. Stambaugh (1987). «Expected Stock Returns and Volatility», *Journal of Financial Economics*, 19, 3-30.
15. Glosten Larry R., Ravi Jagannathan and Runkle David (1991). «Relationship between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks» / J.L. Kellogg Graduate School, Northwestern University, Evanston, IL.

16. Higgins Michael L. and Anil K. Bera (1992). «A Class of Nonlinear ARCH Models», *International Economic Review*, 33, 137-158.
17. Kendall Jon D. and McDonald David A. (1989). «Univariate GARCH-M and the Risk Premium in a Foreign Exchange Market» / Department of Economics, University of Tasmania, Hobart.
18. Klaassen Franc (1999). Have Exchange Rates Become More Closely Tied? Evidence from a New Multivariate GARCH Model. / Tilburg University.
19. Nelson Daniel B. (1990), «Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model», *Econometric Theory*, 6, 318-334.
20. Nelson Daniel B. (1991), «Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach», *Econometrica*, 59, 347-370.
21. Дорофеев Е.А. (1998) «Влияние колебаний экономических факторов на динамику российского фондового рынка». Промежуточный отчет по гранту РПЭИ, дек. 1998.
22. Пересецкий А.А., Ивантер А.Е. (1999) «Анализ развития рынка ГКО». РПЭИ, серия научные доклады, июнь 1999 г.
23. Пересецкий А.А., Ивантер А.Е. (1999) «Российский финансовый рынок после кризиса в августе 1998 г.». Заявка на грант EERC, дек. 1999 г.
24. Смирнов С.Н., Нагпал А.Й., Нейман П.П. (1998). «Развитие финансового кризиса в России: ключевые рыночные факторы» . Заявка на грант EERC, дек. 1998 г.

СПИСОК ИЛЛЮСТРАЦИЙ.

1. Темпы приростов индекса РТС (проценты).
2. Доходность ГКО.
3. Цены ГКО.
4. РТС. Условное стандартное отклонение.
5. РТС. Фактические значения и 98 процентный доверительный интервал.
6. РТС. Фактические значения и 98 процентный доверительный интервал (фрагмент).
7. Доходность ГКО. Фактические значения и условное стандартное отклонение.
8. Доходность ГКО. Логарифмы условной дисперсии *EGARCH* (по обобщенному методу моментов) и *GARCH* (по методу квази-максимального правдоподобия).
9. Долгосрочная зависимость: доходность-риск.
10. Долгосрочная зависимость: доходность-риск (фрагмент).
11. Цены ГКО. Логарифм условной дисперсии.
12. Долгосрочная зависимость: ожидаемая цена - условное стандартное отклонение.
13. Сглаженные условные корреляции: GKO12-GKO1, GKO12_GKO3, GKO12_GKO6.
14. Сглаженные условные корреляции: GKO3-GKO1, GKO6_GKO1, GKO12_GKO1.
15. Индекс РТС и цены ГКО.
16. Условная корреляция РТС и ГКО.

Рисунок 1.

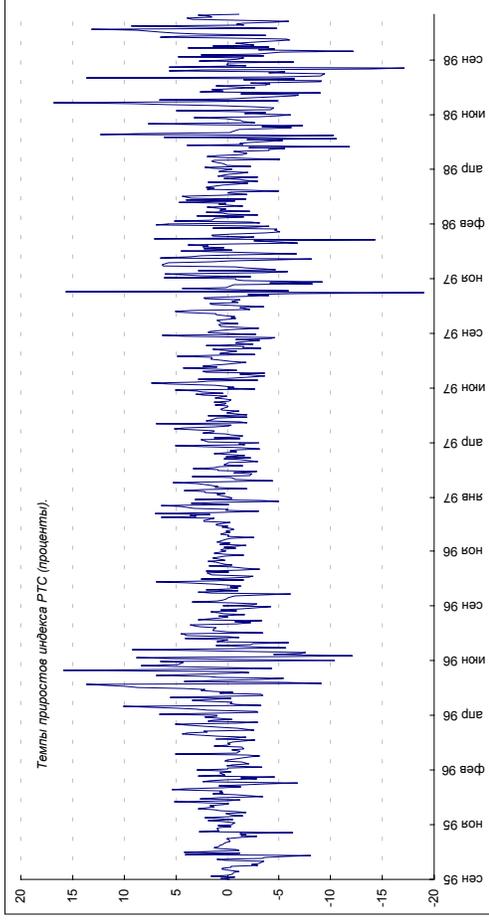


Рисунок 2.

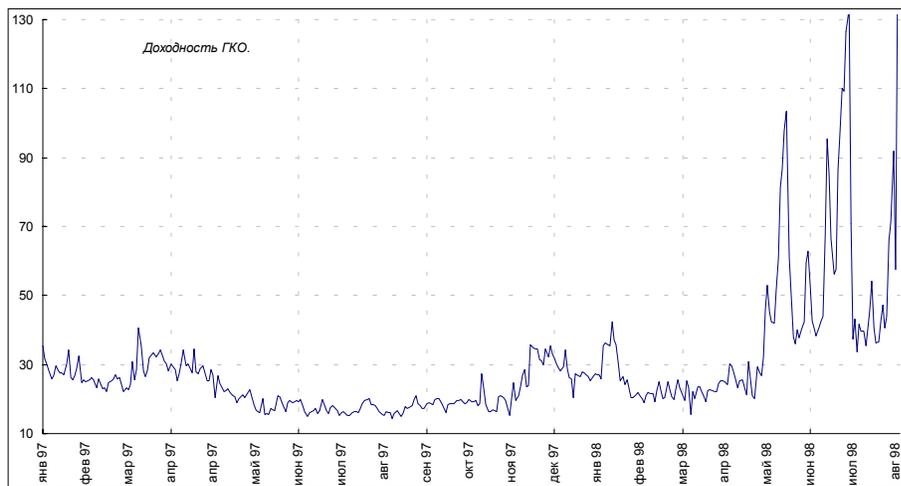


Рисунок 3.

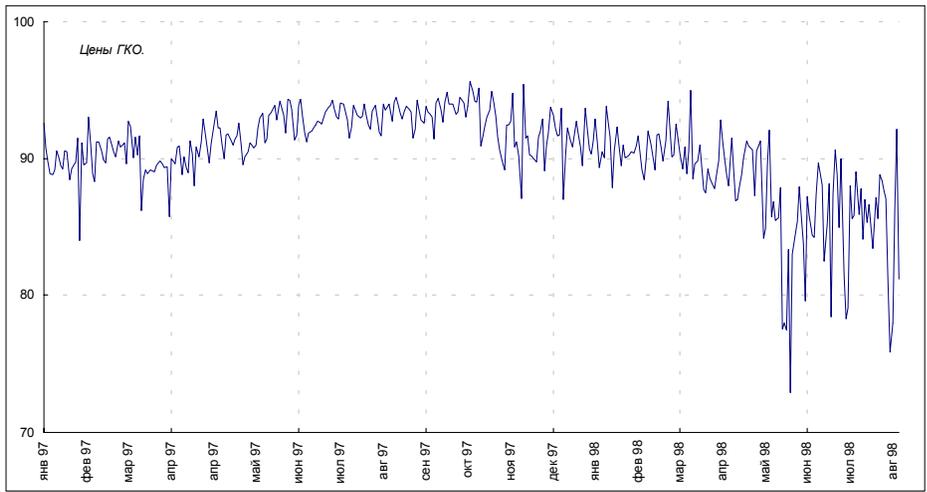


Рисунок 4.

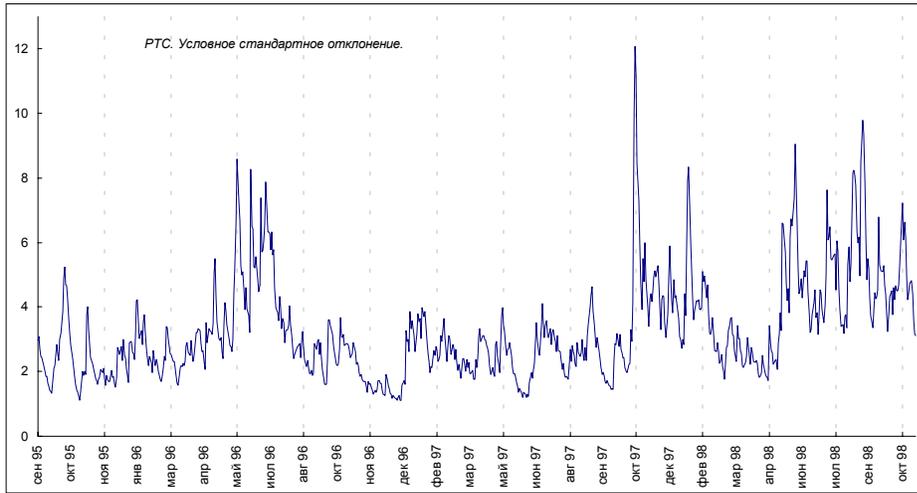


Рисунок 5.

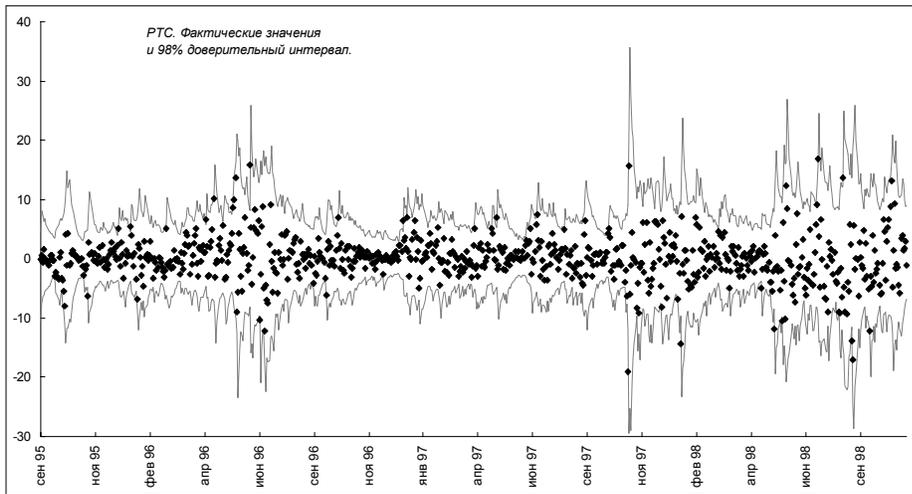


Рисунок 6.

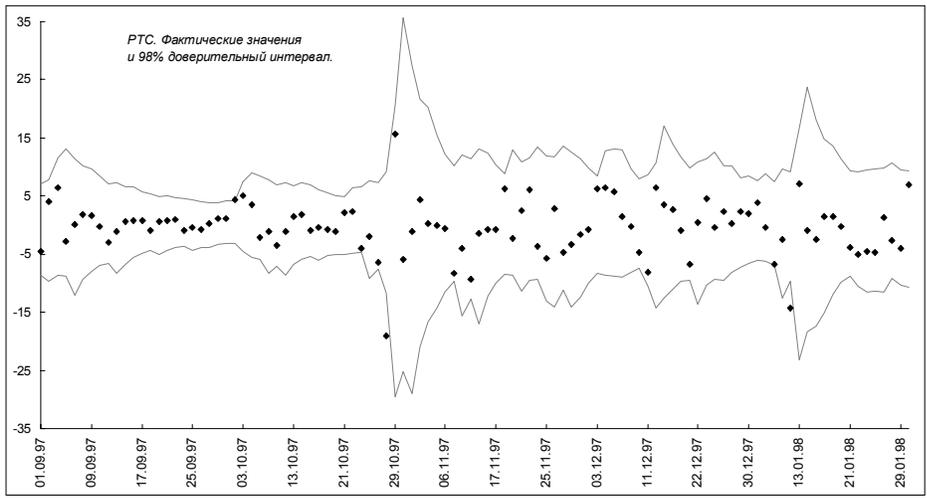


Рисунок 7.



Рисунок 8.

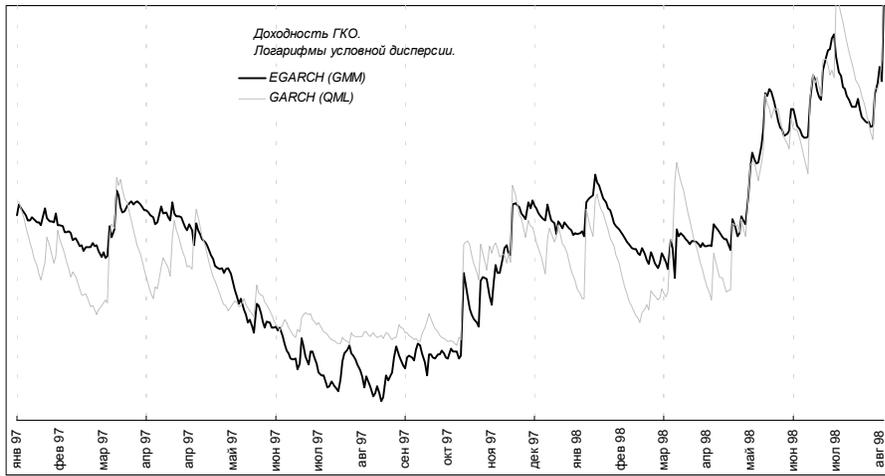


Рисунок 9.

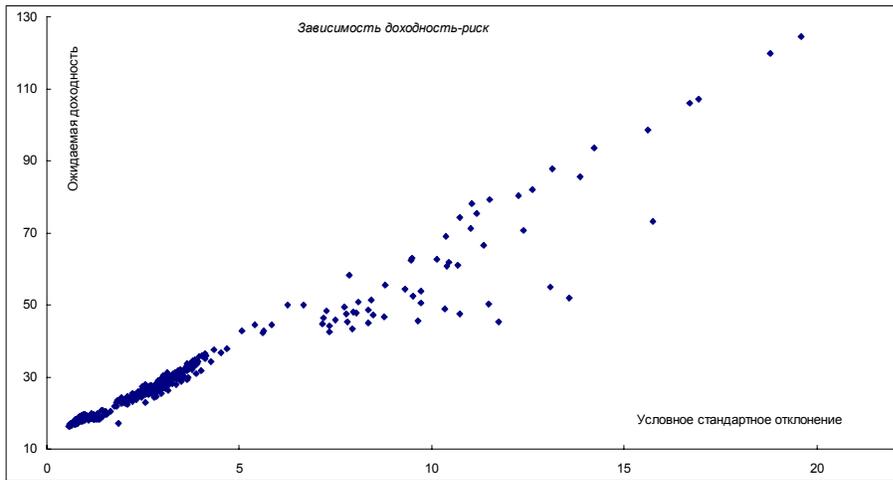


Рисунок 10.

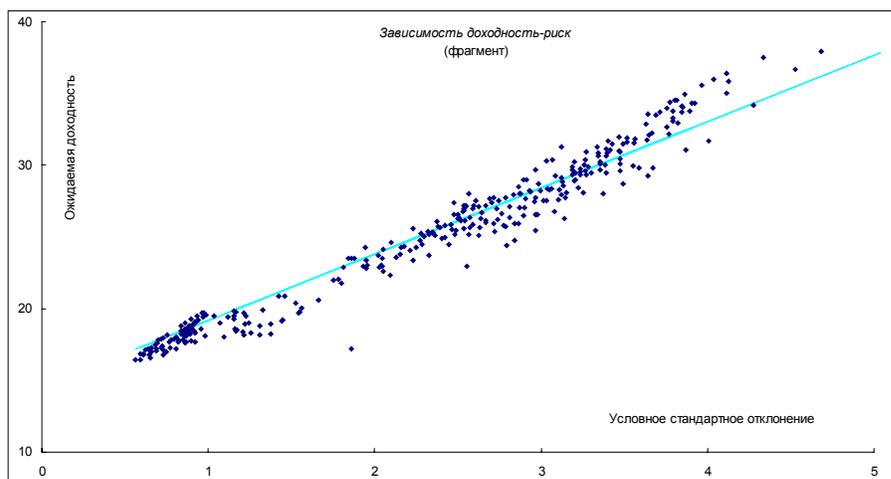


Рисунок 11.

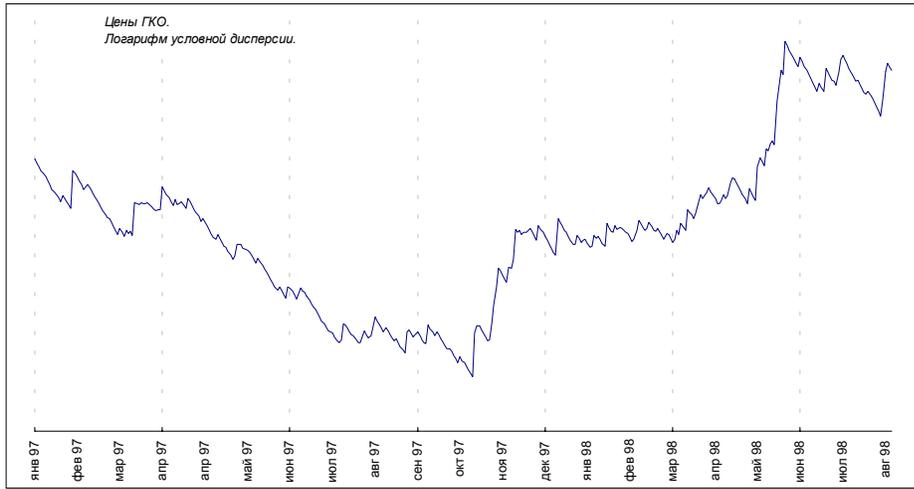


Рисунок 12.

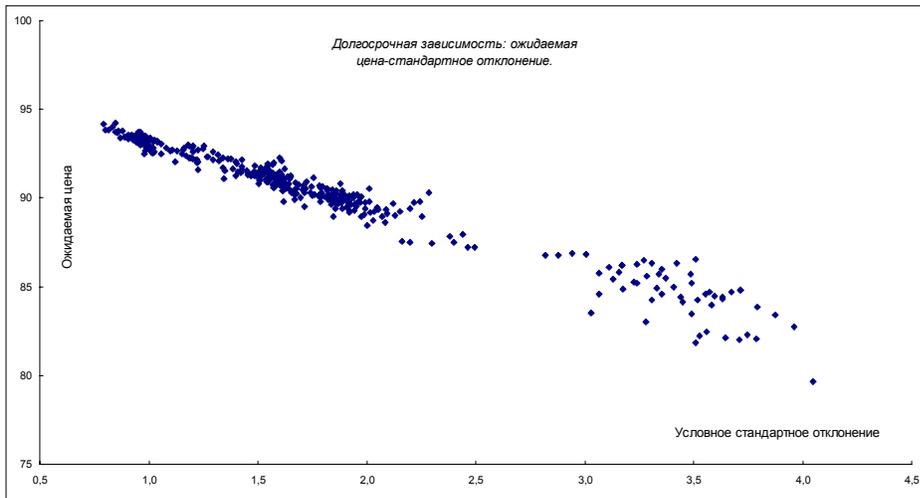


Рисунок 12.

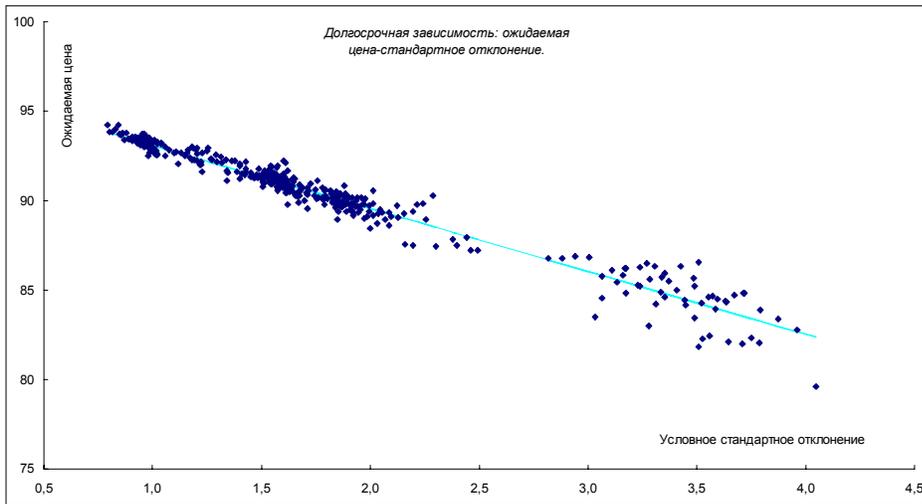


Рисунок 13.

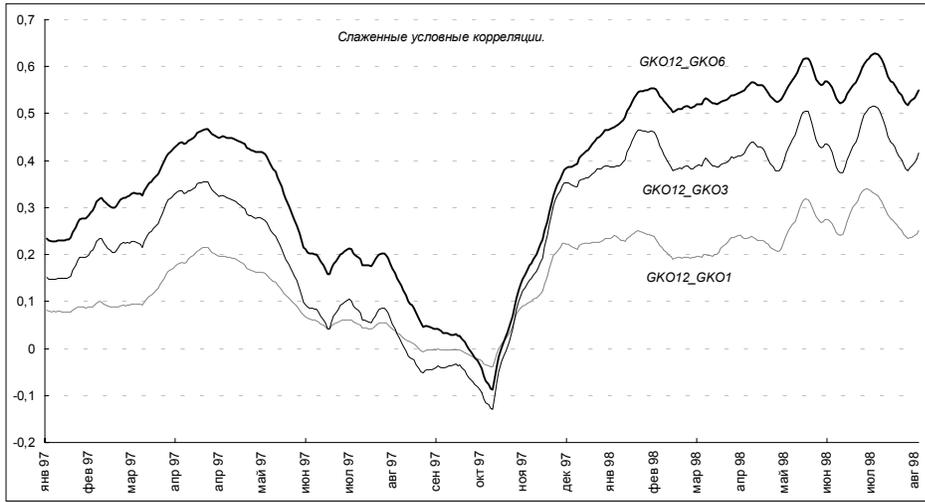


Рисунок 14.

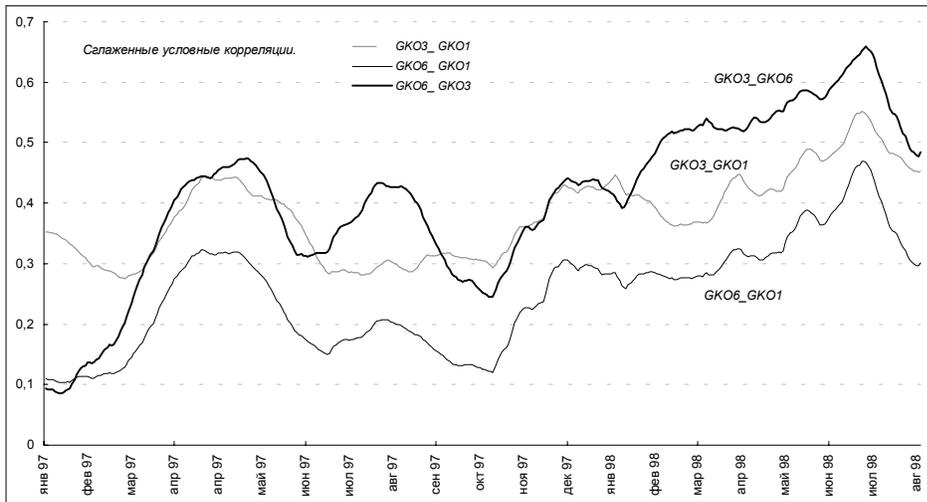


Рисунок 15.

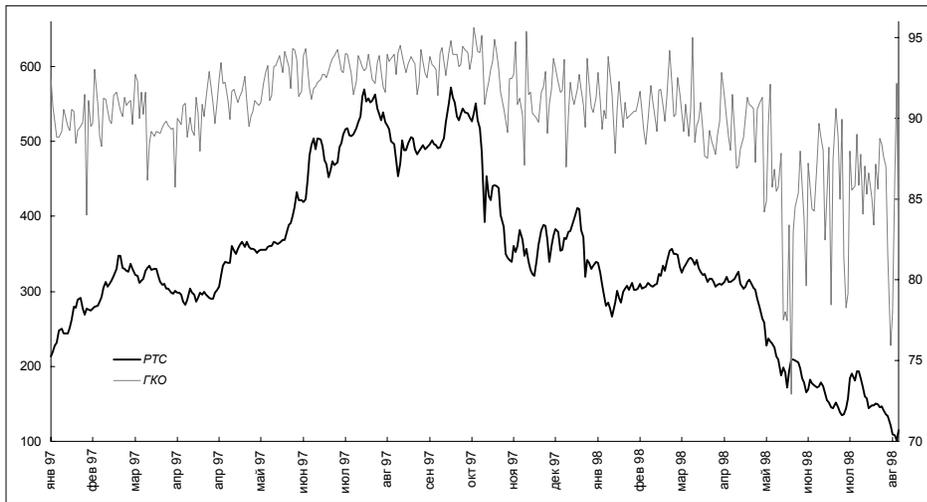


Рисунок 16.

