И. В. Семушин, Г. Ю. Куликов

Сборник лабораторных работ и контрольных, тестовых заданий по курсу "Вычислительная линейная алгебра"

Ульяновск
2000

Министерство образования Российской Федерации
Ульяновский государственный технический университет

И. В. Семушин, Г. Ю. Куликов

Сборник лабораторных работ и контрольных, тестовых заданий по курсу “Вычислительная линейная алгебра”

Ульяновск
2000

УДК 519.852 + 517.977.5 (075)
ББК 73я7
С30

Рецензенты: д-р физ-мат. наук, профессор В.К. Горбунов
канд. физ.-мат. наук, А.С. Семенов

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Семушин И.В., Куликов Г.Ю.
С 30 Сборник лабораторных работ и контрольных, тестовых заданий по курсу “ Вычислительная линейная алгебра”. — Ульяновск: УлГУ, 2000. — 134с.
ISBN 5-89146-139-0

Содержит описание и широкий выбор вариантов заданий к лабораторным работам по темам алгоритмы исключения, разреженные системы, разложения Холесского, ортогональные преобразования, одновременные и последовательные наименьшие квадраты. Приведены контрольные, тестовые и экзаменационные задачи.

Для студентов специальностей “ Прикладная математика” и “ Информационные системы”, а также других специальностей, связанных с изучением численных методов и разработкой прикладного математического обеспечения ЭВМ.

УДК 519.852 + 517.977.5 (075)
ББК 73я7

ISBN 5-89146-139-0

Оглавление

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ

Данный Сборник содержит программу лабораторного практикума и набор контрольных, тестовых заданий при изучении предмета Вычислительной линейной алгебры как отдельного курса или же как первого раздела курса Численных методов. Лабораторный практикум предназначен для развития у студентов практических навыков в области вычислительной математики и обладает следующими особенностями:

1. Основу программы лабораторных работ составляют работы по численным методам линейной алгебры.

2. В оценке за каждый семестр обучения участвуют три лабораторные работы, которые называются зачетными. Для допуска к семестровому экзамену необходимо выполнить хотя бы одну работу в каждом семестре обучения.

3. Для выполнения и сдачи зачетных лабораторных работ в течение семестра отводятся следующие сроки:

— первая работа принимается в течение первых двух месяцев семестра;

— вторая работа принимается в течение третьего месяца семестра;

— третья работа принимается до начала сессии.

В другое время лабораторные работы не принимаются. При этом последующие работы принимаются только при сданной лабораторной работе No. 1.

4. Для выполнения и сдачи лабораторных работ каждый студент имеет 4 часа компьютерного времени в неделю: 2 часа по расписанию лабораторного практикума на ЭВМ и 2 часа самостоятельной работы в дисплейном классе.

5. За выполнение зачетных работ каждый студент получает оценку в соответствии со следующим критерием:

Число сданных работ	**Оценка**
1	“3”
2	“4”
3	“5”

Эта оценка влияет на финальную оценку по курсу, выставляемую на экзамене.

6. Результирующая оценка по курсу “Численные методы” рассчитывается, исходя из формулы:

$$\text{О}_{\text{чм}} = 0.3 \cdot \text{О}_{\text{лр}} + 0.3 \cdot \text{О}_{\text{в}1} + 0.3 \cdot \text{О}_{\text{в}2} + 0.1 \cdot \text{О}_{\text{кр}},$$

где $\text{О}_{\text{чм}}$ – результирующая оценка, $\text{О}_{\text{лр}}$ – оценка за лабораторные работы, $\text{О}_{\text{в}1}$ – оценка за ответ на первый вопрос в билете, $\text{О}_{\text{в}2}$ – оценка за ответ на второй вопрос в билете, $\text{О}_{\text{кр}}$ – оценка за контрольную работу или за решение задачи на экзамене.

Задачи для контрольных работ или для экзамена формируются по типу контрольных, тестовых заданий, приведенных в заключительном разделе данного сборника. Эти же задания могут использоваться в виде упражнений для самостоятельной работы.

Если данный предмет изучается в течение двух семестров, то оценка берется как 1/2 от суммы оценок за лабораторные работы в каждом семестре. Если контрольная работа не проводится, то в расчетной формуле берется 1/3 от суммы трех оставшихся частных оценок. При этом используется стандартное правило округления вычислений по формуле оценки. Однако действует следующее условие: неудовлетворительная оценка хотя бы за один вопрос в экзаменационном билете влечет общую неудовлетворительную оценку по курсу и необходимость повторного экзамена.

Каждая лабораторная работа выполняется как учебный программный и вычислительный проект, обладающий следующими особенностями:

1. Проект включает численный контрольный демонстрационный пример и формулировку алгоритма. Поощрительным (не обязательным) признаком считается включение в проект математического обоснования численного метода: формулировки и доказательства теоремы о соответствующем алгоритме.

2. Проект базируется на знаниях, полученных в области ЭВМ и программирования, поэтому программа должна демонстрировать индивидуальный подход студента, иметь хороший стиль программирования, наиболее полно использовать возможности ЭВМ и алгоритмического языка (PASCAL) в целях экономии машинного времени и оперативной памяти ЭВМ.

3. Проект требует сбора и анализа экспериментальных данных, полученных в ходе вычислений.

Программа лабораторного практикума предполагает шесть работ:

1. Изучение методов исключения.

2. Решение систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами.

3. Разложение Холесского положительно определенных матриц.

4. Изучение методов ортогонального приведения.

5. Метод наименьших квадратов для одновременного решения линейных уравнений.

6. Последовательные алгоритмы метода наименьших квадратов.

При обучении в течение одного семестра:

Включая работу No. 1, которая обязательна для допуска к экзамену, студент выполняет три зачетные работы по схеме 1-2-3, 1-2-4 или 1-3-4. В зависимости от количества сданных работ из трех зачетных студент получает оценку в сответствии с указанным выше критерием. При этой (односеместровой) схеме основного курса обучения работы No. 5 и No. 6 используются как зачетные по дополнительному, специальному курсу.

При обучении в течение двух семестров:

Работы No. 1, No. 2 и No. 3 являются зачетными для первого семестра, причем работа No. 1 должна быть выполнена первой. Работы No. 4, No. 5 и No. 6 являются зачетными для второго семестра, но любая из них может быть выбрана первой.

Лабораторная работа No. 1: ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДОВ ИСКЛЮЧЕНИЯ

1. Задание

Написать и отладить программу, реализующую заданный вариант метода исключения с выбором главного элемента, для численного решения систем линейных алгебраических уравнений $Ax = f$, вычисления $det(A)$ и A^{-1}. Предусмотреть сообщения, предупреждающие о невозможности решения указанных задач с заданной матрицей A. Отделить основные части программы:

а) подпрограмму факторизации матрицы A, отвечающую заданному варианту метода исключения;

б) подпрограмму решения систем линейных алгебраических уравнений;

в) подпрограмму вычисления определителя матриц;

г) подпрограммы обращения матриц;

д) сервисные подпрограммы.

Уделить особое внимание эффективности программы (в смысле экономии оперативной памяти). Предусмотреть пошаговое выполнение алгоритма исключения с выводом результата на экран.

Выполнить следующие пункты задания:

1. Провести подсчет фактического числа выполняемых операций умножения и деления при решении системы линейных алгебраических уравнений, сравнить его с оценочным числом $(n^3/3)$.

2. Определить скорость решения задач (решение систем линейных алгебраических уравнений, обращение матриц) с учетом времени, затрачиваемого на разложение матрицы. Для этого спроектировать и провести эксперимент, который охватывает матрицы порядка от 5 до 100 (через 5 порядков). Представить результаты в виде таблицы и графика зависи-

мости времени, выполнения (в минутах и секундах) от порядка матриц. Таблицу и график вывести на экран.

3. Оценить точность решения систем линейных алгебраических уравнений, имеющих тот же самый порядок, что и задачи из пункта 2. Для этого сгенерировать случайные матрицы A, выбрать точное решение x^* и образовать правые части $f = Ax^*$. Провести анализ точности вычисленного решения x от порядка матрицы. Результаты представить в виде таблицы и графика.

Для заполнения матрицы A использовать случайные числа из диапазона от -100 до 100. В качестве точного решения взять вектор $x^* = (1, 2, \dots, n)^T$, где n — порядок матрицы. Для оценки точности использовать норму вектора

$$\|x\|_\infty = \max_i(|x_i|). \tag{1.1}$$

4. Повторить пункт 3 задания для плохо обусловленных матриц (см. раздел 4), имеющих порядок от 4 до 40.

5. Вычислить матрицу A^{-1} двумя способами:

(1) через решение системы $AX = E$, где E — единичная матрица;

(2) через разложение матрицы A в произведение элементарных, обращение которых осуществляется аналитически, а их перемножение дает матрицу A^{-1}.

Сравнить затраты машинного времени и точность обращения способов (1) и (2). Эксперименты провести для матриц порядков от 5 до 100 через 5. Для оценки точности в обоих способах использовать формулу

$$\|A_{\text{т}}^{-1} - A_{\text{пр}}^{-1}\| \geq \|E - AA_{\text{пр}}^{-1}\| \cdot \|A\|^{-1} \tag{1.2}$$

и норму матрицы

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right), \tag{1.3}$$

где $A_{\text{т}}^{-1}$ — точное значение обратной матрицы, а $A_{\text{пр}}^{-1}$ — приближенное значение, полученное в результате обращения каждым из способов (1) и (2).

6. Провести подсчет фактического числа выполняемых операций умножения и деления при обращении матриц первым и вторым способами, сравнить его с оценочным числом (n^3).

Примечание. В результате проведения численных экспериментов на экран дисплея должны быть выведены следующие таблицы.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений:

Порядок	Время	Точность	Теоретическое число операций	Реальное число операций

Аналогичная таблица должна быть построена для плохо обусловленных матриц.

Для обращения матриц:

Порядок	Время		Точность		Число операций		
	сп. 1	сп. 2	сп. 1	сп. 2	сп. 1	сп. 2	теор.

Необходимо вывести на экран следующие графики.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений:

а) Зависимость реального и оценочного числа операций от порядка матрицы (для разных графиков использовать разные цвета).

б) Зависимость времени решения от порядка матриц.

в) Зависимость точности решения от порядка матриц. При построении графиков использовать данные из первой таблицы. Для этого их необходимо записать в текстовый файл.

Для обращения матриц:

а) Зависимость реального и оценочного числа операций от порядка матрицы (для разных графиков использовать разные цвета).

б) Зависимость времени обращения первым и вторым способом от порядка матриц.

в) Зависимость точности обращения первым и вторым способом от порядка матриц.

При построении графиков использовать данные из второй таблицы.

2. Алгоритмы исключения

Обычный метод Гаусса, осуществляющий LU-разложение матрицы A, заключается в последовательном исключении переменных из уравнений системы

$$Ax = f. \tag{1.4}$$

На первом шаге для исключения первой переменной x_1 в первом уравнении

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1 \tag{1.5}$$

достаточно потребовать выполнения условия $a_{11} \neq 0$. Тогда, разделив обе части (1.5) на a_{11}, получим уравнение, в котором коэффициент при x_1 равен 1. После этого, умножая полученное уравнение на a_{i1} и вычитая из i-го уравнения системы (1.4), $i = 2, \ldots, n$, последовательно исключаем переменную x_1 из всех уравнений системы кроме первого. На втором шаге описанный алгоритм повторяем для переменной x_2, т.е. нормируем второе уравнение преобразованной в результате первого шага метода Гаусса системы (1.4)

$$a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)}, \tag{1.6}$$

считая, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$. После этого исключаем переменную x_2 из оставшихся $n-2$ уравнений системы (1.4). Таким образом, за n шагов получим эквивалентную систему линейных алгебраических уравнений с верхней треугольной матрицей, на диагонали которой стоят единицы[1]

$$\bar{U}x = y. \tag{1.7}$$

Система (1.7) легко решается обратной подстановкой

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j, \quad i = n-1, \ldots, 1, \quad x_n = y_n. \tag{1.8}$$

При решении системы (1.4) на ЭВМ достаточно хранить коэффициенты матрицы A и элементы вектора f. Тогда каждый шаг метода Гаусса состоит в пересчете коэффициентов активной подматрицы матрицы A и соответствующих элементов вектора f. В результате прямого хода метода Гаусса на месте матрицы A образуются две треугольные матрицы: нижняя треугольная матрица L с ненулевыми элементами на главной диагонали и верхняя треугольная матрица U с единицами на главной диагонали, т.е. $\bar{U}$.

Алгоритм, дающий $L\bar{U}$-разложение матрицы A, кратко можно записать следующим образом.

Для $k = 1$ *до* n

  Нормируем первую строку матрицы $A^{(k-1)}$;

  Для $i = k+1$ *до* n

    Вычитаем первую строку матрицы $A^{(k-1)}$,

    умноженную на $a_{ik}^{(k-1)}$, *из* i*-й строки.*

Здесь $A^{(k-1)}$ означает активную подматрицу матрицы A после $k-1$-го шага метода Гаусса, $k = 1, 2, \ldots, n$, причем $A^{(0)} = A$.

Алгоритм, дающий $\bar{L}U$-разложение матрицы A, отличается только нормировкой элементов активной подматрицы, а именно:

[1]Здесь и далее черта над матрицей означает, что на главной диагонали стоят единицы.

Для $k = 1$ до $n - 1$

Нормируем первый столбец матрицы $A^{(k-1)}$;

Для $i = k + 1$ до n

Вычитаем первую строку матрицы $A^{(k-1)}$,

умноженную на $a_{ik}^{(k-1)}$, из i-й строки.

Описанные выше алгоритмы в том виде, в котором они приведены. на практике используются очень редко: только в том случае, если можно гарантировать, что в результате гауссова исключения на диагонали не появятся нулевые элементы. Однако это можно гарантировать только для матриц специального вида, поэтому в общем случае используется метод Гаусса с выбором главного (ведущего) элемента.

Существуют три стратегии выбора главного элемента: по столбцу, по строке и по активной подматрице. Первая стратегия подразумевает, что в качестве главного на k-ом шаге метода Гаусса выбирается максимальный по модулю элемент первого столбца активной подматрицы. Затем этот элемент меняется местами с диагональным элементом, что соответствует перестановке строк матрицы $A^{(k-1)}$ и элементов вектора $f^{(k-1)}$. На самом деле строки матрицы $A^{(k-1)}$ и элементы вектора $f^{(k-1)}$ остаются на своих местах, а переставляются только элементы дополнительного вектора, в котором хранятся номера строк исходной матрицы, соответствующие номерам строк переставленной матрицы, т.е. вектора перестановок. Все обращения к элементам матриц L, U и вектора f осуществляются через вектор перестановок.

Следующая стратегия заключается в выборе в качестве главного максимального по модулю элемента первой строки активной подматрицы. Затем этот элемент обменивается местами с диагональным, что соответствует перестановке столбцов матрицы $A^{(k-1)}$ и элементов вектора x. Как и предыдущем случае, реально обмениваются только элементы дополнительного вектора, в котором хранятся перестановки столбцов матрицы A. Доступ к элементам матриц L, U и вектора x осуществляется с использованием этого вектора.

Последняя стратегия выбора главного элемента как бы объединяет две первых. Здесь в качестве главного выбирается максимальный по модулю элемент активной подматрицы. В общем случае, чтобы поставить этот элемент на место диагонального, требуется обменивать столбцы и строки матрицы $A^{(k-1)}$, что связано с введением двух дополнительных векторов. В первом хранятся перестановки столбцов, а во втором — перестановки строк матрицы A, и через них осуществлятся доступ к элементам матриц и векторов.

Приведенные выше алгоритмы LU-разложения с учетом выбора главного элемента будут иметь следующий вид.

Алгоритм 1. $L\bar{U}$-разложение по методу Гаусса

Для $k = 1$ *до* n

  Выбираем главный элемент в $A^{(k-1)}$*;*

  Нормируем первую строку матрицы $A^{(k-1)}$*;*

  Для $i = k + 1$ *до* n

    Вычитаем первую строку матрицы $A^{(k-1)}$*,*

    умноженную на $a_{ik}^{(k-1)}$*, из* i*-й строки.*

Под выбором главного элемента здесь и далее понимается любая из трех стратегий, описанных выше.

Алгоритм 2. $\bar{L}U$-разложение по методу Гаусса

Для $k = 1$ *до* $n - 1$

  Выбираем главный элемент в $A^{(k-1)}$*;*

  Нормируем первый столбец матрицы $A^{(k-1)}$*;*

  Для $i = k + 1$ *до* n

Вычитаем первую строку матрицы $A^{(k-1)}$
умноженную на $a_{ik}^{(k-1)}$ *из* i*-й строки.*

Под гауссовым исключением по строкам с выбором главного элемента по строке понимается такая разновидность метода Гаусса, в которой на каждом шаге исключения изменяется одна строка — первая строка активной подматрицы.

Первый шаг этого метода заключается в выборе главного элемента в первой строке матрицы A и нормировке этой строки. На следующем шаге из второй строки вычитается первая, умноженная на a_{21}. Затем во второй строке ищется главный элемент и строка нормируется. На третьем шаге из третьей строки матрицы A вычитаются две первых. Сначала вычитается первая строка, умноженная на a_{31}, затем — вторая строка, умноженная на a_{32}. Потом в измененной третьей строке отыскивается главный элемент и строка нормируется. Повторяя описанный алгоритм n раз, получим $L\bar{U}$-разложение матрицы A.

Алгоритм 3. $L\bar{U}$-разложение по методу Гаусса (по строкам)

Для $k = 1$ *до* n
    Для $i = 1$ *до* $k - 1$
        Вычитаем i*-ю строку матрицы* A*,*
        умноженную на a_{ki}*, из* k*-й строки;*
    Выбираем главный элемент в k*-й строке;*
    Нормируем k*-ю строку матрицы* A*.*

Следующей разновидностью метода Гаусса являются компактные схемы. Первая называется методом Краута, а вторая — компактной схемой " строка за строкой". В методе Краута на каждом шаге исключения изменяются только первый столбец и первая строка активной подматрицы. В схеме " строка за строкой" на k-м шаге изменяется только k-я строка матрицы A.

Выведем формулы метода Краута для k-го шага. Предположим, что уже сделаны первые $k-1$ шагов, т.е. определены $k-1$ столбец матрицы L и $k-1$ строка матрицы $\bar{U}$. Из соотношения

$$A = L\bar{U} \tag{1.9}$$

для (i, j)-го элемента имеем

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^{n} l_{ip} u_{pj}. \tag{1.10}$$

В силу треугольности матриц L и $\bar{U}$ при $p > i \quad l_{ip} = 0$ и при $p > j$ $u_{pj} = 0$. Тогда с учетом того, что $u_{kk} = 1$, для k-го столбца матрицы A имеем

$$a_{ik} = l_{ik} + \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} u_{pk}, \quad i \geq k. \tag{1.11}$$

Из (1.11) следует

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} u_{pk}, \quad i \geq k. \tag{1.12}$$

Таким образом, k-й столбец матрицы L известен. Теперь из (1.10) для k-й строки матрицы A имеем

$$a_{kj} = l_{kk} u_{kj} + \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} u_{pj}, \quad j > k. \tag{1.13}$$

Из (1.13) находим

$$u_{kj} = \left(a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} u_{pj} \right) \Big/ l_{kk}, \quad j > k. \tag{1.14}$$

Итак, (1.14) дает способ нахождения k-й строки матрицы $\bar{U}$.

В результате, зная первые $k-1$ столбцов матрицы L и $k-1$ строк матрицы $\bar{U}$, мы можем по формулам (1.12) и (1.14) определить k-й столбец матрицы L и затем k-ю строку матрицы $\bar{U}$. Первый столбец матрицы L определяется равенствами

$$l_{i1} = a_{i1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.15}$$

Это следует из (1.12) и того, что первым столбцом матрицы $\bar{U}$ является первый координатный вектор e_1. Здесь предполагается, что если нижний предел суммирования меньше верхнего, то значение суммы равно нулю. После этого в первом столбце выбирается главный элемент. Затем по формулам

$$u_{1j} = a_{1j}/l_{1j}, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \tag{1.16}$$

вычисляется первая строка матрицы $\bar{U}$. Повторяя указанную последовательность действий n раз, с помощью формул (1.12) и (1.14) получаем $L\bar{U}$-разложение матрицы A.

Алгоритм 4. $L\bar{U}$-разложение по компактной схеме Краута

Для $k = 1$ *до* n

По формулам (1.12) вычисляем k*-й столбец матрицы* L*;*

Выбираем среди элементов k*-го столбца главный элемент;*

По формулам (1.14) вычисляем k*-ю строку матрицы* $\bar{U}$*.*

Чтобы получить метод Краута, дающий $\bar{L}U$-разложение, с выбором главного элемента по строке достаточно поменять местами формулы (1.12) и (1.14), а также последовательность вычисления столбцов матрицы $\bar{L}$ и строк матрицы U. Таким образом, на k-м шаге сначала по формулам

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} u_{pj}, \quad j \geq k. \tag{1.17}$$

вычисляется строка матрицы U. Затем в этой строке выбирается главный элемент и находится столбец матрицы $\bar{L}$ по следующим формулам:

$$l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} u_{pk} \right) \Big/ u_{kk}, \quad i \geq k. \tag{1.18}$$

Алгоритм 5. $\bar{L}U$-разложение по компактной схеме Краута

Для $k = 1$ *до* n

По формулам (1.17) вычисляем k-ю строку матрицы U;

Выбираем среди элементов k-й строки главный элемент;

По формулам (1.18) вычисляем k-й столбец матрицы $\bar{L}$.

Компактная схема " строка за строкой", дающая $L\bar{U}$-разложение матрицы A, использует те же самые формулы (1.12) и (1.14). Меняется только последовательность вычисления элементов матрицы L.

Пусть уже обработаны по этому методу первые $k-1$ строк матрицы A. Следовательно, мы имеем $k-1$ строку матрицы L и $k-1$ строку матрицы $\bar{U}$. Далее по формулам (1.12) вычисляем ненулевые элементы k-й строки матрицы L. По формулам (1.14) без деления на диагональный элемент l_{kk} вычисляем ненулевые элементы k-й строки матрицы $\bar{U}$. Затем среди вновь вычисленных элементов, от диагонального до n-го, определяем главный элемент, меняем его местами с диагональным и делим элементы k-й строки матрицы $\bar{U}$ на этот элемент. В результате получаем требуемое разложение.

Алгоритм 6. $L\bar{U}$-разложение по компактной схеме "строка за строкой"

Для $k = 1$ до n

По формулам (1.12) вычисляем элементы k-й строки матрицы L;

По формулам (1.14) без деления на диагональный элемент l_{kk}, вычисляем k-ю строку матрицы $\bar{U}$;

Среди элементов k-й строки (от диагонального до n-го) определяем главный;

Делим на главный элемент k-ю строку матрицы $\bar{U}$.

К последней группе методов типа Гаусса относятся методы Жордана. Эти методы используют те же самые формулы, что и обычный метод

Гаусса, но в отличие от последнего на k-м шаге метода Жордана изменяются все строки матрицы A, а не только строки активной подматрицы. Это соответствует исключению i-й переменной из всех уравнений кроме i-го. Таким образом, методы Жордана дают решение системы линейных алгебраических уравнений за один проход.

Чтобы получить $L\bar{U}^{-1}$-разложение по методу Жордана, надо воспользоваться следующим алгоритмом. На первом шаге в активной подматрице $A^0 = A$ выбирается главный элемент. Затем первая строка нормируется, домножается на a_{i1} и вычитается из i-й строки, $i = 2, 3, \ldots, n$. На втором шаге главный элемент определяется среди элементов активной подматрицы $A^{(1)}$. Потом вторая строка нормируется и после домножения на a_{i2} вычитается из i-й, где $i = 1, 3, \ldots, n$. В общем случае на k-м шаге в подматрице $A^{(k-1)}$ выбирается главный элемент. Затем k-я строка нормируется, домножается на a_{ik} и вычитается из i-й, где $i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$. В результате, чтобы получить требуемое разложение, остается поменять знак на противоположный у всех элементов, лежащих выше главной диагонали. Единственно, надо понимать, что в отличие от всех рассмотренных ранее случаев LU-разложения $L\bar{U}^{-1}$-разложение не является разложением в обычном смысле, т.е. $L\bar{U}^{-1} \neq A$. Здесь под $L\bar{U}^{-1}$-разложением понимается то, что на месте матрицы A образуются две треугольные матрицы: нижняя треугольная матрица L и верхняя треугольная матрица $\bar{U}^{-1}$, причем $L\bar{U} = A$.

Алгоритм 7. $L\bar{U}^{-1}$-разложение по методу Жордана

Для $k = 1$ *до* n

Выбираем главный элемент в $A^{(k-1)}$*;*

Нормируем первую строку матрицы $A^{(k-1)}$*;*

Для $i = 1$ *до* $k-1$

Вычитаем первую строку матрицы $A^{(k-1)}$,

умноженную на $a_{ik}^{(k-1)}$, *из* i*-й строки;*

Для $i = k+1$ *до* n

Вычитаем первую строку матрицы $A^{(k-1)}$

умноженную на $a^{(k-1)}$, *из* i*-й строки;*

Для $i = 1$ *до* n

Для $j = i+1$ *до* n

$a_{ij} = -a_{ij}$.

Таким образом, мы рассмотрели основные типы алгоритмов гауссова исключения, дающие LU - разложение матрицы A. Аналогичные алгоритмы для UL - разложения легко получаются из рассмотренных выше алгоритмов, если исключение проводить, начиная с последней переменной и до первой. На матричном языке это означает модификацию строк и столбцов матрицы A, начиная с последних и до первых. Под активной подматрицей $A^{(k)}$ в этом случае понимаются первые k строк и столбцов матрицы A. $\bar{L}^{-1}U$ - разложение Жордана кроме этого подразумевает смену знака на противоположный у всех элементов, находящихся ниже главной диагонали.

3. Варианты метода исключения

1. $L\bar{U}$ — разложение на основе гауссова исключения по столбцам с выбором главного элемента по столбцу.

2. $L\bar{U}$ — разложение на основе гауссова исключения по столбцам с выбором главного элемента по строке.

3. $L\bar{U}$ — разложение на основе гауссова исключения по столбцам с выбором главного элемента по активной подматрице.

4. $\bar{L}U$ — разложение на основе гауссова исключения по столбцам с

выбором главного элемента по столбцу.

5. $\bar{L}U$ — разложение на основе гауссова исключения по столбцам с выбором главного элемента по строке.

6. $\bar{L}U$ — разложение на основе гауссова исключения по столбцам с выбором главного элемента по активной подматрице.

7. $L\bar{U}$ — разложение на основе гауссова исключения по строкам с выбором главного элемента по строке.

8. $L\bar{U}$ — разложение по компактной схеме Краута с выбором главного элемента по столбцу.

9. $\bar{L}U$ — разложение по компактной схеме Краута с выбором главного элемента по строке.

10. $L\bar{U}$ — разложение по компактной схеме " строка за строкой" с выбором главного элемента по строке.

11. $L\bar{U}^{-1}$ — разложение на основе жорданова исключения с выбором главного элемента по столбцу.

12. $L\bar{U}^{-1}$ — разложение на основе жорданова исключения с выбором главного элемента по строке.

13. $L\bar{U}^{-1}$ — разложение на основе жорданова исключения с выбором главного элемента по активной подматрице.

14. $\bar{U}L$ — разложение на основе гауссова исключения по столбцам с выбором главного элемента по столбцу.

15. $\bar{U}L$ — разложение на основе гауссова исключения по столбцам с выбором главного элемента по строке.

16. $\bar{U}L$ — разложение на основе гауссова исключения по столбцам с выбором главного элемента по активной подматрице.

17. $U\bar{L}$ — разложение на основе гауссова исключения по столбцам с выбором главного элемента по столбцу.

18. $U\bar{L}$ — разложение на основе гауссова исключения по столбцам с выбором главного элемента по строке.

19. $U\bar{L}$ — разложение на основе гауссова исключения по столбцам с выбором главного элемента по активной подматрице.

20. $U\bar{L}$ — разложение на основе гауссова исключения по строкам с выбором главного элемента па строке.

21. $U\bar{L}$ — разложение по компактной схеме Краута с выбором главного элемента по столбцу.

22. $\bar{U}L$ — разложение по компактной схеме Краута с выбором главного элемента по строке.

23. $U\bar{L}$ — разложение по компактной схеме " строка за строкой" с выбором главного элемента по строке.

24. $\bar{L}^{-1}U$ — разложение на основе жорданова исключения с выбором главного элемента по столбцу.

25. $\bar{L}^{-1}U$ — разложение на основе жорданова исключения с выбором главного элемента по строке.

26. $\bar{L}^{-1}U$ — разложение на основе жорданова исключения с выбором главного элемента по активной подматрице.

4. Матрицы, чувствительные к вычислениям

Обозначения: a_{ij} — элемент матрицы A, n — ее порядок.

1. Матрица Гильберта.

$a_{ij} = 1/(i + j - 1)$.

2. $a_{ii} = 1$ для $i = 1, 2, \dots, 20$,

$a_{ii+1} = 1$ для $i = 1, 2, \dots, 19$,

$_{ij} = 0$ для остальных значений i и j.

3. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 5 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 12 & 8 & 7 & 8 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & 10 & 9 & 8 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & 9 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & 8 & 9 & 10 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 7 & 7 & 8 & 10 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 5 & 9 & 10 & 10 \end{bmatrix}.$

4. $a_{ii} = 0.01/(n-i+1)/(i+1),$

$_{ij} = 0$ для $i < j$,

$a_{ij} = i(n-j)$ для $i > j$.

5. Матрица из пункта 4, но

$a_{ij} = j(n-i)$ для $i < j$.

6. $\begin{bmatrix} R & S & T & T \\ S & R & S & T \\ T & S & R & S \\ T & T & S & R \end{bmatrix}$, где $R = \begin{bmatrix} \operatorname{ctg}(\Theta) & \operatorname{cosec}(\Theta) \\ -\operatorname{cosec}(\Theta) & \operatorname{ctg}(\Theta) \end{bmatrix}$,

$$S = \begin{bmatrix} 1-\operatorname{ctg}(\Theta) & \operatorname{cosec}(\Theta) \\ -\operatorname{cosec}(\Theta) & 1+\operatorname{ctg}(\Theta) \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисления проводить при Θ близком к нулю или π.

7. Матрица с параметром α:

$a_{ii} = \alpha^{|n-2i|/2}$,

$a_{1j} = a_{j1} = a_{11}/\alpha^j$,

$a_{nj} = a_{jn} = a_{nn}/\alpha^j$,

$a_{ij} = 0$ для остальных значений i и j.

8. $a_{ij} = e^{i \cdot j \cdot h}$.

Вычисления проводить при h близких к нулю или 1000.

9. $a_{ij} = c + \log_2(i \cdot j)$.

Вычисления проводить при больших c.

10. $$\begin{bmatrix} 0.9143 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0.8762 & 0.7156 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0.7943 & 0.8143 & 0.9504 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0.8017 & 0.6123 & 0.7165 & 0.7123 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

Лабораторная работа No. 2: РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЕЖЕННЫМИ МАТРИЦАМИ

1. Задание

Написать и отладить программу, реализующую заданный вариант метода исключения с заданной схемой хранения разреженных матриц и заданной стратегией выбора главного элемента, для численного решения систем вида $Ax = f$. Отделить основные части программы:

а) подпрограмму упаковки матрицы A;

б) подпрограмму метода исключения;

в) подпрограмму выбора главного элемента;

г) сервисные подпрограммы.

Уделить особое внимание эффективности программы (в смысле скорости счета). Программа должна решать систему линейных алгебраических уравнений 150-го порядка не более, чем за время, указанное ниже для процессоров следующего вида:

80386SX, 40 MHz	180	сек.
80486, 66 MHz	50	сек.
80486, 120 MHz	30	сек.
80486, 160 MHz	26	сек.
AMD K5, 166 MHz	23	сек.
AMD K6, 200 MHz	16	сек.
Intel Celeron, 333 MHz	14	сек.

Предусмотреть пошаговое выполнение алгоритма исключения с выводом результата на экран.

Выполнить следующие пункты задания:

1. Для заданной матрицы A выдать на экран упакованную форму в соответствии со своим вариантом, построить таблицу зависимости оце-

ночного и реального локального заполнения от номера шага исключения (для этого предусмотреть ввод матрицы с экрана).

2. Оценить точность решения систем линейных алгебраических уравнений, имеющих порядок от 100 до 200 (через 5). Для этого сгенерировать случайные матрицы A (не более 10 ненулевых элементов в строке), выбрать x^* — точное решение и образовать правые части $f = Ax^*$. Провести анализ точности решения как функцию от порядка матрицы A. Результаты представить в виде таблицы и графика.

Для случайного заполнения матрицы A использовать следующий алгоритм:

а) Ненулевыми целыми числами, выбранными случайным образом из интервала $[-100; 100]$, заполнить обратную диагональ матрицы A.

б) В каждой строке случайным образом определяется число ненулевых элементов (от 1 до 10 с учетом заполненых в пункте а)), их местоположение (номер столбца от 1 до порядка матрицы) и значение (ненулевые целые числа, лежащие в интервале от -100 до 100).

В качестве точного решения взять вектор $x^* = (1, 2, \dots, n)$, где n — порядок матрицы A. В случае, если при решении системы $Ax = f$ выяснится, что матрица A вырождена (плохо обусловлена), то сгенерировать новую матрицу того же порядка и решить систему линейных алгебраических уравнений с новой матрицей A и новой правой частью.

Для оценки точности решения использовать норму вектора из лабораторной работы No. 1 (см. формулу (1.1)).

3. Определить скорость решения систем из пункта 2. Результаты представить в виде таблицы и графика.

4. Системы из пункта 2 решить методом исключения переменных из лабораторной работы No. 1 (в соответствии со своим вариантом). Сравнить точность решения и затраты машинного времени. Матрица в этом случае должна размещаться в памяти ЭВМ полностью (в распа-

кованном виде). Результаты представить в виде таблицы и графика.

Примечание. В результате проведения численных экспериментов на экран дисплея должны быть выведены следующие таблицы.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений:

Порядок	Время		Точность	
	Зап. мат.	Разр. мат.	Зап. мат.	Разр. мат.

Вывести на экран следующие графики.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений:

а) Зависимость времени решения от порядка матриц (для двух способов решения).

б) Зависимость точности решения от порядка матриц (для двух способов решения).

При построении графиков использовать данные из таблицы. Для этого их необходимо записать в текстовый файл.

2. Методы исключения Гаусса для систем с разреженными матрицами

Для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами используются те же самые методы гауссова исключения, что и для линейных систем с заполненными матрицами. Отличие состоит только в выборе главного элемента и в способе хранения матрицы коэффициентов системы уравнений.

Так как разреженные матрицы имеют небольшое число ненулевых элементов, то в целях экономии оперативной памяти ЭВМ такие матрицы хранят в упакованном виде. Рассмотрим четыре наиболее употребимых способа упаковки, используемых для хранения произвольных разреженных матриц. В качестве примера возьмем квадратную матрицу A порядка 6 с ненулевыми элементами: $a_{11} = 1$, $a_{13} = 3$, $a_{14} = -2$, $a_{21} = 1$, $a_{25} = 5$, $a_{33} = 7$, $a_{34} = 2$, $a_{42} = -3$, $a_{46} = -1$, $a_{51} = 1$, $a_{54} = 3$, $a_{65} = 2$, $a_{66} = 2$.

В излагаемых ниже схемах хранения разреженной матрицы A упаковка осуществляется по строкам.

Схема 1. Каждому ненулевому элементу матрицы A ставится в соответствие запись, состоящая из двух полей. Первое поле записи содержит номер столбца, а второе — значение элемента. Нуль во втором поле означает начало новой строки. В этом случае первое поле содержит номер новой строки. Нули в обеих полях записи указывают на конец массива, хранящего матрицу A.

В соответствии с этой схемой матрица A будет хранится в виде массива
(1,0; 1,1; 3,3; 4,-2; 2,0; 1,1; 5,5; 3,0; 3,7; 4,2; 4,0; 2,-3;6,-1; 5,0; 1,1; 4,3; 6,0; 5,2; 6,2; 0,0).

Схема 2. Информация о матрице хранится в трех массивах. В массиве **a** хранятся ненулевые элементы матрицы A. В массиве **b** хранятся индексы столбцов, а в массиве **c** указатели индексов строк, т.е. на k-м месте в массиве **c** хранится местоположение, первого ненулевого элемента k-й строки в массиве **a**.

В соответствии с этой схемой матрица A будет хранится в виде трех массивов

$$\mathbf{a} = (1, 3, -2, 1, 5, 7, 2, -3, -1, 1, 3, 2, 2),$$
$$\mathbf{b} = (1, 3, 4, 1, 5, 3, 4, 2, 6, 1, 4, 5, 6),$$
$$\mathbf{c} = (1, 4, 6, 8, 10, 12).$$

Схема 3. Каждому ненулевому элементу данной матрицы однозначно ставится в соответствие целое число вида

$$\lambda(i,j) = (i-1)n + j, \quad a_{ij} \neq 0. \tag{2.1}$$

Хранение ненулевых элементов разреженной матрицы обеспечивается двумя массивами. В массиве **a** хранятся ненулевые элементы матрицы, в массиве **b** — соответствующие им числа $\lambda(i,j)$.

В соответствии с этой схемой матрица A будет хранится в виде двух массивов

$$\mathbf{a} = (1, 3, -2, 1, 5, 7, 2, -3, -1, 1, 3, 2, 2),$$
$$\mathbf{b} = (1, 3, 4, 7, 11, 15, 16, 20, 24, 25, 28, 35, 36).$$

Исходная матрица по этой схеме хранения может быть восстановлена следующим образом. Сначала определяем i, как такое наименьшее целое число, что

$$i \geq \lambda(i,j)/n. \tag{2.2}$$

Затем, зная i, с учетом (2.1) находим j

$$j = \lambda(i,j) - (i-1)n. \tag{2.3}$$

Схема 4. Для хранения каждого ненулевого элемента матрицы используется запись, состоящая из трех полей. В первом поле хранится номер столбца, в котором стоит этот ненулевой элемент. Во втором поле хранится значение элемента, а в третьем — указатель на следующий ненулевой элемент строки или nil, если это последний ненулевой элемент в строке. Таким образом, разреженная матрица хранится в виде массива указателей на списки, а каждый список содержит все ненулевые элементы одной строки.

Упакованную форму матрицы A в этом случае можно схематично изобразить следующим образом.

$$
\begin{array}{l}
\boxed{1} \to \boxed{1}\boxed{1}\boxed{} \to \boxed{1}\boxed{3}\boxed{} \to \boxed{1}\boxed{-2}\boxed{} \to nil \\
\boxed{2} \to \boxed{1}\boxed{1}\boxed{} \to \boxed{5}\boxed{5}\boxed{} \to nil \\
\boxed{3} \to \boxed{3}\boxed{7}\boxed{} \to \boxed{4}\boxed{2}\boxed{} \to nil \\
\boxed{4} \to \boxed{2}\boxed{-3}\boxed{} \to \boxed{6}\boxed{-1}\boxed{} \to nil \\
\boxed{5} \to \boxed{5}\boxed{2}\boxed{} \to \boxed{6}\boxed{2}\boxed{} \to nil
\end{array}
$$

Способы упаковки матриц 1-4 позволяют компактно хранить матрицу коэффициентов системы (1.4). Однако при использовании метода Гаусса (или ему подобных) в результате модификации элементов матрицы A может значительно возрасти число ненулевых элементов. С одной стороны, это требует дополнительной памяти для хранения новых ненулевых элементов, а с другой, приводит к возрастанию числа арифметических операций, что влечет накопление ошибок округления. В связи с этим обстоятельством были предложены стратегии выбора главного элемента, позволяющие минимизировать число новых ненулевых элементов на каждом шаге метода Гаусса.

Назовем локальным заполнением на $k+1$-м шаге метода Гаусса число элементов матрицы A, которые были нулевыми после k-го шага и стали ненулевыми после $k+1$-го шага метода Гаусса. Таким образом, наша задача состоит в выборе в качестве главного такого элемента матрицы $A^{(k)}$, который минимизирует локальное заполнение матрицы A на $k+1$-м шаге (как и прежде, $A^{(k)}$ — активная подматрица матрицы A). При этом, чем больше множество элементов, среди которых выбирается главный, тем меньше локальное заполнение. Но, с другой стороны, в качестве главного можно брать только ненулевой элемент. Поэтому вводится понятие допустимого элемента.

Допустимым элементом на $k+1$-м шаге метода Гаусса называется такой элемент активной подматрицы $A^{(k)}$, который удовлетворяет неравенству

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right| > \varepsilon, \tag{2.4}$$

где ε — некоторое наперед заданное положительное число. В лабораторной работе No. 2 надо взять $\varepsilon = 10^{-3}$, если используется тип *real*, или $\varepsilon = 10^{-5}$, если используется тип *extended*.

Итак, среди элементов активной подматрицы $A^{(k)}$ в соответствии с критерием (2.3) выбирается множество допустимых элементов, а затем среди них отыскивается элемент, минимизирующий локальное заполнение на шаге. Для выбора этого оптимального элемента используются следующие две стратегии.

Стратегия I. Локальное заполнение на $k+1$-м шаге метода Гаусса будет минимальным, если в качестве главного выбрать элемент $a_{st}^{(k)}$, $s = \alpha + k, \quad t = \beta + k$ и α, β определяются из формулы

$$g_{\alpha\beta}^{(k+1)} = \min_{i,j}\{e_i^T G_{k+1} e_j\} \qquad \left|a_{i+k,j+k}^{(k)}\right| > \varepsilon. \tag{2.5}$$

Здесь $G_{k+1} = B_k \bar{B}_k^T B_k$, где B_k — матрица полученная из $A^{(k)}$ путем замены ненулевых элементов единицами, а $\bar{B}_k = -_k$ (— матрица, состоящая из единиц). В соответствии со стратегией I в качестве главного берется тот из допустимых элементов активной подматрицы $A^{(k)}$, которому в матрице G_{k+1} соотвествует наименьший элемент.

Стратегия II. Локальное заполнение на $k+1$-м шаге метода Гаусса будет небольшим, если в качестве главного выбрать элемент $a_{st}^{(k)}$, $\quad s = \alpha + k, \quad t = \beta + k$ и α, β определяются из формулы

$$g_{\alpha\beta}^{(k+1)} = \min_{i,j}\{e_i^T \hat{G}_{k+1} e_j\} \qquad \left|a_{i+k,j+k}^{(k)}\right| > \varepsilon. \tag{2.6}$$

Здесь $\hat{G}_{k+1} = (B_k - E_{n-k})M(B_k - E_{n-k})$, где матрицы M и B_k имеют тот же самый смысл, что и в стратегии I, а E_{n-k} — единичная матрица размера $n-k$. Стратегия II не дает минимальное заполнение на шаге. Однако она очень просто реализуема на практике и ее применение приводит к небольшому числу новых ненулевых элементов.

Использование упакованной формы хранения матрицы A и более сложной процедуры выбора главного элемента требует значительного увеличения затрат машинного времени, поэтому перенос процедур и функций из лабораторной работы No. 1, осуществляющих решение системы линейных алгебраических уравнений, не даст оптимальный по времени результат. Это связано с тем, что поиск (i, j)-го элемента матрицы A в упакованной форме требует существенных затрат машинного времени. Следовательно, при написании оптимальной по времени счета программы таких действий надо избегать. Это можно сделать, если применить метод Гаусса непосредственно к упакованной форме хранения матрицы A, т.е. только к ненулевым элементам.

Так как метод Гаусса оперирует со строками матрицы A, то разреженные матрицы удобно хранить по строкам. Это позволит эффективно организовать такие операции, как нормировка строки, умножение строки на число, вычитание строки, потому что в этом случае все ненулевые элементы каждой строки матрицы A в упакованной форме хранения образуют непрерывную последовательность. Следовательно, операции нормировки, умножения и вычитания строки можно проводить только для ненулевых элементов.

Такой подход подразумевает, что все ненулевые элементы матрицы A модифицируются в том порядке, в котором они хранятся в упакованной форме, что исключает затраты на поиск нужного элемента. Берется очередной ненулевой элемент матрицы A. Определяется его местоположение в матрице, т.е. i и j. Затем с помощью дополнительных массивов обратных перестановок определяется местоположение этого элемента в матрице с переставленными столбцами и строками. Если в результате этот элемент лежит в активной подматрице, то он изменяется по известным формулам метода Гаусса. Здесь надо предусмотреть процедуру вставки элемента на случай появления нового ненулевого элемента и процедуру удаления элемента из упакованной формы, если ненулевой элемент стал нулевым. После этого обрабатывается следующий ненулевой элемент матрицы A.

Оптимизация по времени процедуры решения системы линейных алгебраических уравнений позволяет значительно повысить эффективность программы. Однако этого не достаточно. Оптимальной по быстродействию будет лишь та программа, где дополнительно оптимизирована процедура выбора главного элемента. Во-первых, надо подумать над эффективным вычисление элементов матрицы G_k ($\hat{G}_k$). А, во-вторых, организовать вычисление этой матрицы так, чтобы исключить поиск элементов в упакованной форме. Только учет всех этих особенностей решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей коэффициентов позволит написать эффективную по затратам машинного времени программу.

3. Варианты

Каждому варианту соответствуют 3 цифры. Первая означает вариант метода исключения.

1. $L\bar{U}$-разложение на основе метода Гаусса.
2. $\bar{L}U$-разложение на основе метода Гаусса.
3. $\bar{U}L$-разложение на основе метода Гаусса.
4. $U\bar{L}$-разложение на основе метода Гаусса.
5. $L\bar{U}^{-1}$-разложение на основе метода Жордана.
6. $\bar{L}^{-1}U$-разложение на основе метода Жордана.

Вторая цифра означает стратегию выбора главного элемента (I и

II), а третья - способ упаковки разреженных матриц.

1) $1 - I - 1$	2) $1 - I - 2$	3) $1 - I - 3$
4) $1 - I - 4$	5) $1 - II - 1$	6) $1 - II - 2$
7) $1 - II - 3$	8) $1 - II - 4$	9) $2 - I - 1$
10) $2 - I - 2$	11) $2 - I - 3$	12) $2 - I - 4$
13) $2 - II - 1$	14) $2 - II - 2$	15) $2 - II - 3$
16) $2 - II - 4$	17) $3 - I - 1$	18) $3 - I - 2$
19) $3 - I - 3$	20) $3 - I - 4$	21) $3 - II - 1$
22) $3 - II - 2$	23) $3 - II - 3$	24) $3 - II - 4$
25) $4 - I - 1$	26) $4 - I - 2$	27) $4 - I - 3$
28) $4 - I - 4$	29) $4 - II - 1$	30) $4 - II - 2$
31) $4 - II - 3$	32) $4 - II - 4$	33) $5 - I - 1$
34) $5 - I - 2$	35) $5 - I - 3$	36) $5 - I - 4$
37) $5 - II - 1$	38) $5 - II - 2$	39) $5 - II - 3$
40) $5 - II - 4$	41) $6 - I - 1$	42) $6 - I - 2$
43) $6 - I - 3$	44) $6 - 1 - 4$	45) $6 - II - 1$
46) $6 - II - 2$	47) $6 - II - 3$	48) $6 - II - 4$

Лабораторная работа No. 3: РАЗЛОЖЕНИЕ ХОЛЕССКОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ МАТРИЦ

1. Задание

Написать и отладить программу, реализующую заданный вариант алгоритма разложения Холесского, для решения системы $Px = f$, где — симметричная положительно определенная матрица (ПО-матрица , или, кратко, матрица > 0). Отделить основные части программы:

а) подпрограмму генерации ПО-матрицы ;

б) подпрограмму разложения Холесского;

и) подпрограмму решения систем линейных алгебраических уравнений;

г) подпрограмму решения систем линейных алгебраических уравнений с ленточной матрицей ;

д) сервисные подпрограммы, включая демонстрацию разложения на экране, подпрограмму контроля правильности разложения и др.

Уделить особое внимание эффективности программы (в смысле экономии оперативной памяти). Для этого в одномерном массиве достаточно хранить только нижнюю (или верхнюю) треугольную часть и диагональ матрицы . Результат разложения замещает исходную матрицу. Предусмотреть пошаговое выполнение алгоритма исключения с выводом результата на экран.

Выполнить следующие пункты задания:

1. Дать формулировку и доказательство теоремы о заданном варианте разложения Холесского. Теорема может быть сформулирована как утверждение о том, что предлагаемый студентом алгоритм действительно дает единственное разложение Холесского. Для иллюстрации дать

численный пример работы алгоритма по шагам для матрицы размера 4.

2. Провести подсчет количества операций:

а) извлечения квадратного корня;

б) умножения и деления.

Подсчет выполнить тремя способами:

а) фактически, — при конкретном расчете разложения;

б) теоретически точно в зависимости от размерности матрицы n;

в) теоретически приближенно в зависимости от n при $n \to \infty$.

3. Определить скорость решения задач (решение систем линейных алгебраических уравнений), для чего спроектировать и провести эксперимент, который охватывает матрицы порядка от 5 до 100 (через 5 порядков). Представить результаты в виде таблицы и графика зависимости времени выполнения в минутах и секундах от порядка матриц. Сравнить со своим вариантом из лабораторной работы No. 1.

4. Оценить точность решения систем линейных алгебраических уравнений, имеющих тот же порядок, что и системы из п. 3. Для этого сгенерировать случайные ПО-матрицы , выбрать точное решение x^* и образовать правые части $f = Px^*$. Провести анализ точности вычисленного решения x в зависимости от порядка матрицы. Результаты представить в виде таблицы и графика. Сравнить со своим вариантом из лабораторной работы No. 1.

Для заполнения матрицы использовать случайные числа из диапазона от -100 до 100. Сначала заполнить нижнюю треугольную часть матрицы , т.е. элементы $_{ij}$, где $i > j$, а, следовательно, и верхнюю треугольную часть. Затем заполнить диагональ. В качестве $_{ii}, i = 1, 2, \dots, n$, выбрать случайное число из интервала

$$\left[\sum_{j \neq i} |P_{ij}| + 1,\ \sum_{j \neq i} |P_{ij}| + 101\right], \tag{3.1}$$

чтобы обеспечить выполнение условия

$$P_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |P_{ij}| + 1, \tag{3.2}$$

гарантирующего положительную определенность матрицы . В качестве точного решения взять вектор $x^* = (1, 2, \ldots, n)$, где n — порядок матрицы. Для оценки точности использовать норму вектора (1.1) из лабораторной работы No. 1.

5. Определить скорость и точность решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными ленточными матрицами. Для этого спроектировать и провести эксперимент для систем порядка от 100 до 200 (через 5). Результаты представить в виде таблиц и графиков зависимости скорости и точности решения от порядка матриц. Для этих же систем найти аналогичные зависимости для обычного метода Холесского. Результаты сравнить.

Для случайного заполнения разреженной ленточной матрицы использовать следующий алгоритм:

а) случайным образом заполнить половину матрицы (верхнюю или нижнюю), включая диагональ;

б) в случае заполнения нижней треугольной части матрицы в i-й строке, $i = 1, 2, \ldots, n$, случайным образом определить количество ненулевых элементов (от 1 до 10), их местоположение (номер столбца от $\max\{1, i - 50\}$ до $i - 1$) и значение (ненулевые целые числа, лежащие в интервале от -100 до 100);

б') при заполнении верхней треугольной части матрицы применять тот же алгоритм, что и в п. б), с той лишь разницей, что номер столбца лежит в интервале от $i + 1$ до $\min\{i + 50, n\}$;

в) диагональный элемент в i-й строке, $i = 1, 2, \ldots, n$, определить случайным образом на интервале (3.1).

В качестве точного решения взять вектор $x^* = (1, 2, \ldots, n)$, где n — порядок матрицы A.

В случае, если при решении системы $Ax = f$ выяснится, что матрица A вырождена (плохо обусловлена), то сгенерировать новую матрицу того же порядка и решить систему линейных алгебраических уравнений с новой матрицей A и новой правой частью.

Для оценки точности решения использовать норму вектора из лабораторной работы No. 1 (1.1).

Примечание. В результате проведение численных экспериментов на экран дисплея должны быть выведены следующие таблицы.

Для числа действий:

Порядок	Число кв. корней			Число операций умн. и дел.		
	а	б	в	а	б	в

где а, б, в означает способ вычисления числа действий (см. п. 2);

Для решения систем линейных алгебраических уравнений с заполненной матрицей :

Порядок	Время		Точность	
	м. Гаусса	м. Холесск.	м. Гаусса	м. Холесск.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей :

Порядок	Время		Точность	
	Зап. мат.	Разр. мат.	Зап. мат.	Разр. мат.

Вывести на экран следующие графики.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений с заполненной матрицей :

а) зависимость времени решения от порядка матриц для методов Гаусса и Холесского;

б) зависимость точности решения от порядка матриц для методов Гаусса и Холесского.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей :

а) зависимость времени решения от порядка матриц для обычного метода Холесского и с учетом разреженности матрицы ;

б) зависимость точности решения от порядка матриц для обычного метода Холесского и с учетом разреженности матрицы . При построении графиков использовать данные из соответствующей таблицы. Для этого их необходимо записать в текстовый файл.

2. Алгоритмы Холесского

Ниже в описании алгоритмов факторизации (разложения), основанных на методе Гаусса исключения переменных, используем следующие обозначения для индексов:

k — номер исключаемой переменной,

i — номер строки, т.е. модифицируемого уравнения,

j — номер столбца, т.е. коэффициента в модифицируемом уравнении.

Тогда общую основу всех алгоритмов удобно определить тройкой вложенных циклов вида

*Для*____

  *Для*____

    *Для*____

      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}a_{kj},$

где последняя формула обозначает модификацию j-го элемента i-й строки матрицы A при исключении k-й переменной вектора неизвестных x из уравнений системы $Ax = f$. Перестановки трех индексов для циклов определяют $3! = 6$ возможных вариантов алгоритмов, так называемые ijk-формы, для каждого вида разложения.

Пусть дана квадратная матрица размера n. Тогда возможны четыре вида ее разложения, а именно:

$$A = L\bar{U},\ A = \bar{L}U,\ A = U\bar{L},\ A = \bar{U}L, \tag{3.3}$$

где черта сверху указывает на тот из сомножителей, который имеет единичную главную диагональ. Эти варианты алгоритма гауссова исключения описаны в лабораторной работе No. 1.

Рассмотрим теперь симметричную положительно определенную матрицу размера n. Используем алгоритмы (3.3) для разложения матрицы . Чтобы разложение было симметричным, для сомножителя L или U воспользуемся любым из представлений:

$$L = \bar{L}D,\ U = D\bar{U},\ U = \bar{U}D,\ L = D\bar{L}, \tag{3.4}$$

что достигается делением на диагональный элемент соответствующего столбца или строки. Тогда из четырех видов разложения для A получаем два вида для :

$$= \bar{L}D\bar{L}^T,\ P = \bar{U}D\bar{U}^T \tag{3.5}$$

В силу положительной определенности матрицы D справедливо представление $D = D^{1/2}D^{1/2}$, которое дает еще два вида разложения:

$$= LL^T,\ P = UU^T, \tag{3.6}$$

где $L = \bar{L}D^{1/2}$, $U = \bar{U}D^{1/2}$. Таким образом, алгоритмы разложения, отвечающие методу гауссова исключения для произвольной квадратной матрицы A, могут быть легко переделаны в алгоритмы разложения Холесского с квадратными корнями (3.6) или без квадратных корней (3.5). Всего получаем четыре варианта разложения Холесского для положительно определенной симметричной матрицы , причем для каждого варианта возможно представление в виде любой из шести ijk-форм алгоритма.

В качестве примера рассмотрим все шесть ijk-форм для $\bar{L}U$-разложения матрицы A и покажем переход от них к ijk-формам $\bar{L}D\bar{L}^T$-разложения и LL^T-разложения матрицы .

Алгоритмы ijk-форм для $\bar{L}U$-разложения матрицы A:

1) kij-алгоритм	*Для* $k = 1$ *до* $n - 1$
Доступ к элементам	*Для* $i = k + 1$ *до* n
матрицы A — по строкам.	$l_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$
Исключение — по столбцам.	*Для* $j = k + 1$ *до* n
Модификации — безотлагательные.	$a_{ij} = a_{ij} - l_{ikkj}.$

2) kji-алгоритм	*Для* $k = 1$ *до* $n - 1$
Доступ к элементам	*Для* $s = k + 1$ *до* n
матрицы A — по столбцам.	$l_{sk} = a_{sk}/a_{kk}$
Исключение — по столбцам.	*Для* $j = k + 1$ *до* n
Модификации — безотлагательные.	*Для* $i = k + 1$ *до* n
	$a_{ij} = a_{ij} - l_{ikkj}.$

3) jki-алгоритм	*Для* $j = 2$ *до* n
Доступ к элементам	*Для* $s = j$ *до* n
матрицы A — по столбцам.	$l_{s,j-1} = a_{s,j-1}/a_{j-1,j-1}$
Исключение — по столбцам.	*Для* $k = 1$ *до* $j - 1$
Модификации — отложенные.	*Для* $i = k + 1$ *до* n
	$a_{ij} = a_{ij} - l_{ikkj}.$

4) jik**-алгоритм**

Доступ к элементам матрицы A — по столбцам.
Исключение — по столбцам.
Модификации — отложенные.

Для $j = 2$ *до* n
  Для $s = j$ *до* n
    $l_{s,j-1} = a_{s,j-1}/a_{j-1,j-1}$
  Для $i = 2$ *до* j
    Для $k = 1$ *до* $i - 1$
      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ikkj}$.
  Для $i = j + 1$ *до* n
    Для $k = 1$ *до* $j - 1$
      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ikkj}$.

5) ikj**-алгоритм**

Доступ к элементам матрицы A — по строкам.
Исключение — по строкам.
Модификации — отложенные.

Для $i = 2$ *до* n
  Для $k = 1$ *до* $i - 1$
    $l_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$
    Для $j = k + 1$ *до* n
      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ikkj}$.

6) ijk**-алгоритм**

Доступ к элементам матрицы A — по строкам.
Исключение — по строкам.
Модификации — отложенные.

Для $i = 2$ *до* n
  Для $j = 2$ *до* i
    $l_{i,j-1} = a_{i,j-1}/a_{j-1,j-1}$
    Для $k = 1$ *до* $j - 1$
      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ikkj}$.
  Для $j = i + 1$ *до* n
    Для $k = 1$ *до* $i - 1$
      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ikkj}$.

Замечания.

1) В приведенных алгоритмах не содержится процедура выбора главного элемента. Она дословно переносится из описания лабораторной работы No. 1.

2) Аналогичные алгоритмы могут быть написаны для остальных трех видов разложения матрицы A из списка (3.4).

3) При написании программ, соответствующих приведенным выше

алгоритмам, следует выполнить требование, согласно которому все вычисления выполняются в одном и том же двухмерном массиве, где сначала хранится матрица A. В процессе вычислений матрица A замещается элементами треугольных матриц, составляющих искомое разложение (3.4).

Разложение Холесского симметричной положительно определенной матрицы может быть получено в результате незначительных изменений базовых LU-разложений квадратной матрицы A. При этом симметрия матрицы используется для сокращения числа действий примерно вдвое. Кроме того, способ хранения матрицы должен быть компактным, т.е. в памяти ЭВМ в одномерном массиве хранится по строкам (или по столбцам) только нижняя (или верхняя) треугольная часть матрицы вместе с диагональю.

В той же последовательности, как выше изложены ijk-формы $\bar{L}U$-разложения матрицы , приведем ijk-формы $\bar{L}D\bar{L}^T$ и LL^T-разложений Холесского матрицы . Из них видно, сколь незначительны требуемые изменения. В каждом алгоритме объединены оба разложения, при этом те изменения, что относятся к LL^T-разложению, заключены в скобки. В приводимых ниже алгоритмах явно не указано, когда элементы матриц D, $\bar{L}$ и L должны замещать соответствующие элементы исходной матрицы . Такие замещения могут происходить сразу, а могут откладываться до того момента, когда элементы матрицы станут ненужными для дальнейших вычислений. В этом отношении не все ijk-формы одинаково экономичны в реализации, и для каждой из них вопрос о скорейшем замещении исходных элементов матрицы нужно решать отдельно.

kij и kji-алгоритмы Холесского:

$(l_{11} = p_{11}^{1/2})$
Для $k = 1$ *до* $n-1$
  Для $i = k+1$ *до* n
    $l_{ik} = p_{ik}/p_{kk}$
    $(l_{ik} = p_{ik}/l_{kk})$
    Для $j = k+1$ *до* i
      $p_{ij} = p_{ij} - l_{ik}p_{jk}$
      $(p_{ij} = p_{ij} - l_{ik}l_{jk})$
  $(l_{k+1,k+1} = p_{k+1,k+1}^{1/2})$

$(l_{11} = p_{11}^{1/2})$
Для $k = 1$ *до* $n-1$
  Для $s = k+1$ *до* n
    $l_{sk} = p_{sk}/p_{kk}$
    $(l_{sk} = p_{sk}/l_{kk})$
  Для $j = k+1$ *до* i
    Для $i = j$ *до* n
      $p_{ij} = p_{ij} - l_{ik}p_{jk}$
      $(p_{ij} = p_{ij} - l_{ik}l_{jk})$
  $(l_{k+1,k+1} = p_{k+1,k+1}^{1/2})$

jki и jik-алгоритмы Холесского:

$(l_{11} = p_{11}^{1/2})$
Для $j = 2$ *до* n
  Для $s = j$ *до* n
    $l_{s,j-1} = p_{s,j-1}/p_{j-1,j-1}$
    $(l_{s,j-1} = p_{s,j-1}/l_{j-1,j-1})$
  Для $k = 1$ *до* $j-1$
    Для $i = j$ *до* n
      $p_{ij} = p_{ij} - l_{ik}p_{jk}$
      $(p_{ij} = p_{ij} - l_{ik}l_{jk})$
  $(l_{jj} = p_{jj}^{1/2})$

$(l_{11} = p_{11}^{1/2})$
Для $j = 2$ *до* n
  Для $s = j$ *до* n
    $l_{s,j-1} = p_{s,j-1}/p_{j-1,j-1}$
    $(l_{s,j-1} = p_{s,j-1}/l_{j-1,j-1})$
  Для $i = j$ *до* n
    Для $k = 1$ *до* $j-1$
      $p_{ij} = p_{ij} - l_{ik}p_{jk}$
      $(p_{ij} = p_{ij} - l_{ik}l_{jk})$
  $(l_{jj} = p_{jj}^{1/2})$

ikj и ijk-алгоритмы Холесского:

$(l_{11} = p_{11}^{1/2})$	$(l_{11} = p_{11}^{1/2})$
Для $i = 2$ *до* n	*Для* $i = 2$ *до* n
Для $k = 1$ *до* $i - 1$	*Для* $j = 2$ *до* i
$l_{ik} = p_{ik}/p_{kk}$	$l_{s,j-1} = p_{s,j-1}/p_{j-1,j-1}$
$(l_{ik} = p_{ik}/l_{kk})$	$(l_{s,j-1} = p_{s,j-1}/l_{j-1,j-1})$
Для $j = k + 1$ *до* i	*Для* $k = 1$ *до* $j - 1$
$p_{ij} = p_{ij} - l_{ik}p_{jk}$	$p_{ij} = p_{ij} - l_{ik}p_{jk}$
$(p_{ij} = p_{ij} - l_{ik}l_{jk})$	$(p_{ij} = p_{ij} - l_{ik}l_{jk})$
$(l_{ii} = p_{ii}^{1/2})$	$(l_{jj} = p_{jj}^{1/2})$

Замечание. Приведенные алгоритмы $\bar{L}D\bar{L}^T$ и LL^T-разложений Холесского матрицы получены из соответствующих ijk-алгоритмов $\bar{L}U$-разложения матрицы A. Для получения $\bar{U}D\bar{U}^T$ и UU^T-разложений Холесского матрицы удобно исходить из $\bar{U}L$-разложения матрицы A, если для него предварительно построить ijk-алгоритмы. Это построение нетрудно выполнить, если учесть, что $\bar{U}L$-разложение соответствует измененному (инверсному) порядку исключения переменных. В этом случае модификация системы уравнений начинается с последней переменной последнего уравнения.

Суммируя вышеизложенное по ijk-формам алгоритмов Холесского, полученных из ijk-форм алгоритмов Гаусса, имеем 24 разновидности разложений симметричной положительно определенной матрицы :

6 ijk-форм для $= \bar{L}D\bar{L}^T$, 6 ijk-форм для $P = LL^T$,

6 ijk-форм для $P = \bar{U}D\bar{U}^T$, 6 ijk-форм для $P = UU^T$.

Кроме этого, для LU-разложения, а значит и для разложения Холесского, существует другой класс так называемых матрично-векторных алгоритмов, которые объединяются идеей окаймления. Их получение основано на правиле перемножения треугольных матриц, участвующих в разложении. На этом же принципе основано получение компактных схем лабораторной работы No. 1.

Выведем в качестве базовых, матрично-векторные алгоритмы LU-разложения матрицы A. Как указывалось выше, существует четыре вида LU-разложения (3.3). Возьмем за основу разложение вида $A = \bar{L}U$ (для других видов LU-разложения алгоритмы выводятся аналогично). Из этого разложения следует

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \bar{a}_{12} & A_{13} \\ \bar{a}_{21}^T & a_{22} & \bar{a}_{23}^T \\ A_{31} & \bar{a}_{22} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & & \\ \bar{l}_{21}^T & 1 & \\ L_{31} & \bar{l}_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{11} & \bar{u}_{12} & U_{13} \\ & u_{22} & \bar{u}_{23}^T \\ & & U_{33} \end{pmatrix} \qquad (3.7)$$

Здесь малые буквы с чертой обозначают вектор-столбец, малые буквы без черты — скаляр, большие буквы — матрицы. Нулевые элементы треугольных матриц не показаны.

Перемножение матриц (3.7), выполняемое поблочно, дает 9 соотношений относительно компонент матриц A, $\bar{L}$ и U. Считая, что блоки L_{11} и U_{11} уже определены, рассмотрим два основных способа разложения матрицы A.

Способ I: окаймление известной части разложения

В этом случае предполагаются известными A, L_{11}, и U_{11}. Требуется определить $\bar{l}_{21}^T$, $\bar{u}_{12}$ и u_{22}. Из (3.7) имеем

$$\begin{aligned} &(1) \quad \bar{a}_{21}^T = \bar{l}_{21} U_{11}, \\ &(2) \quad \bar{a}_{12} = L_{11}\bar{u}_{12}, \\ &(3) \quad a_{22} = \bar{l}_{21}\bar{u}_{12} + u_{22}. \end{aligned}$$

Практические вычисления: (1) — решение системы линейных алгебраических уравнений с нижней треугольной матрицей $U_{11}^T \bar{l}_{21} = \bar{a}_{21}$ относительно вектор-столбца $\bar{l}_{21}$; (2) — решение системы линейных алгебраических уравнений относительно вектор-столбца $\bar{u}_{12}$, (3) —

вычисление диагонального элемента u_{22}.

Способ II: окаймление неизвестной части разложения

В этом случае предполагаются известными A, L_{11}, U_{11}, $\bar{l}_{21}^T$, L_{31}, $\bar{u}_{12}$, U_{13}. Требуется определить $\bar{l}_{32}$, $\bar{u}_{23}^T$ и u_{22}. Из (3.7) имеем

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad a_{22} = \bar{l}_{21}\bar{u}_{12} + u_{22},\\
&(2) \quad \bar{a}_{23}^T = \bar{l}_{23}^T U_{13} + \bar{u}_{23}^T,\\
&(3) \quad \bar{a}_{32} = L_{31}\bar{u}_{12} + \bar{l}_{32}u_{22}.
\end{aligned}
$$

Практические вычисления: (1) — определение элемента u; (2) — определение строки $\bar{u}_{23}^T$; (3) — определение столбца $\bar{l}_{32}$.

Для каждого способа окаймления возможны два алгоритма, отличающиеся порядком действий. Приведем их для случая разложения $A = \bar{L}U$.

Алгоритмы способа I:

(а) столбцовый алгоритм:

Для $j = 2$ *до* n
  Для $k = 1$ *до* $j - 2$
    Для $i = k + 1$ *до* $j - 1$
      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}a_{kj}$
  Для $k = 1$ *до* $j - 1$
      $l_{jk} = a_{jk}/a_{kk}$
    Для $i = k + 1$ *до* j
        $a_{ji} = a_{ji} - l_{jk}a_{ki}$

(б) алгоритм скалярных произведений:

Для $i = 2$ *до* n
  Для $j = 2$ *до* i
    $l_{i,j-1} = a_{i,j-1}/a_{j-1,j-1}$
    Для $k = 1$ *до* $j - 1$
      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}a_{kj}$
  Для $j = 2$ *до* $i - 1$
    Для $k = 1$ *до* $j - 1$
        $a_{ji} = a_{ji} - l_{jk}a_{ki}$

Алгоритмы способа II:

(а) алгоритм линейных комбинаций:

Для $i = 1$ *до* n
  Для $k = 1$ *до* $i - 1$
    Для $j = i$ *до* n
      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}a_{kj}$
  (Для $k = 1$ *до* $i - 1$*)*
    Для $j = i + 1$ *до* n
      $a_{ji} = a_{ji} - l_{jk}a_{ki}$
  Для $s = i + 1$ *до* n
    $l_{si} = a_{si}/a_{ii}$

(б) алгоритм скалярных произведений:

Для $j = 1$ *до* n
  Для $i = j + 1$ *до* n
    Для $k = 1$ *до* $j - 1$
      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}a_{kj}$
  Для $i = j$ *до* n
    Для $k = 1$ *до* $j - 1$
      $a_{ji} = a_{ji} - l_{jk}a_{ki}$
  Для $s = j + 1$ *до* n
    $l_{sj} = a_{sj}/a_{jj}$

Замечания.

1) В алгоритме (IIа) оператор в скобках может быть опущен.

2) Подобные алгоритмы окаймления аналогично выписываются для других трех разновидностей LU-разложения матрицы A.

3) Всего имеем $4 \times 2 \times 2 = 16$ вариантов алгоритмов LU-разложения типа окаймления.

Алгоритмы окаймления легко модифицируются для случая симметричной матрицы . Тогда мы имеем 4 варианта разложения Холесского (3.5) и (3.6), 2 способа окаймления и 2 схемы вычислений для каждого алгоритма окаймления. Всего получается 16 вариантов алгоритмов окаймления для разложения Холесского симметричной положительно определенной матрицы. Добавляя к ним 24 разновидности ijk-форм, получаем 40 различных вычислительных схем разложений Холесского.

Особенностью данной лабораторной работы является использование линейных (одномерных) массивов для хранения матрицы . Так как матрица симметричная, то достаточно хранить только нижнюю (или верхнюю) треугольную часть этой матрицы вместе с диагональю. Причем для хранения заполненной матрицы используется один одномерный массив, а для хранения разреженной — два. Хранение матрицы может быть организовано по столбцам или по строкам в зависимости от используемого алгоритма разложения.

Рассмотрим строчный вариант хранения нижней треугольной части заполненной матрицы . В этом случае все элементы нижней треугольной матрицы записываются построчно в одномерный массив. Так как для хранения первой строки матрицы требуется один элемент массива, для хранения второй строки — два элемента и т.д., то для хранения симметричной матрицы размера n требуется одномерный массив размера $n(n+1)/2$. Положение (i,j)-го элемента матрицы в массиве определяется по формуле

$$k = (i-1)i/2 + j. \tag{3.8}$$

Аналогичным образом организуется хранение матрицы по столбцам.

Как уже отмечалось выше, для хранения разреженной матрицы используются два одномерных массива. Так, хранение нижней треугольной части матрицы по строкам можно организовать следующим образом. В массиве **a** хранятся построчно элементы матрицы от первого ненулевого до диагонального включительно. В массиве **b** на i-м месте стоит положение i-го диагонального элемента матрицы в массиве **a**. Для определения положения (i,j)-го элемента матрицы в массиве **a** надо воспользоваться следующим алгоритмом. Сначала вычисляем $k = b(i) - (i-j)$. Затем, если $k > b(i-1)$, то этот элемент стоит на k-м месте. В противном случае (i,j)-й элемент стоит левее первого ненулевого элемента i-й строки, поэтому он равен нулю и в массиве **a** не хранится.

Рассмотрим один пример. Пусть требуется упаковать симметричную квадратную матрицу A порядка 5 с ненулевыми элементами: a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{32}, a_{33}, a_{42}, a_{44}, a_{53}, a_{55}, стоящими на главной диагонали или под ней. Тогда в соответствии с упакованной формой, предложенной выше для хранения симметричной разреженной матрицы, нижняя треугольная часть матрицы A будет храниться в виде двух массивов

$$\mathbf{a} = (a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{32}, a_{33}, a_{42}, 0, a_{44}, a_{53}, 0, a_{55}),$$
$$\mathbf{b} = (1, 3, 5, 8, 11).$$

Если же, например, требуется найти в упакованной форме элемент a_{53}, то в соответствии с приведенным выше алгоритмом вычисляем

$$k = b(5) - (5 - 3) = 11 - 2 = 9.$$

Затем, так как $k = 9 > 8 = b(4)$, то искомый элемент хранится на 9-ом месте в массиве $\mathbf{a}$.

Способ хранения по столбцам организуется аналогичным образом. Но в этом случае хранятся все элементы от диагонального до последнего ненулевого элемента столбца включительно.

Таким образом, существуют 4 варианта хранения разреженной ленточной матрицы и выбор конкретного варианта должен соответствовать заданному варианту разложения Холесского и разновидности ijk-форм.

С учетом положительной определенности матриц этой лабораторной работы, процедура выбора главного элемента и процедуры перестановки строк и столбцов матрицы отсутствуют как для заполненных, так и для разреженных матриц.

3. Варианты

В следующей таблице каждому номеру варианта соответствует своя разновидность разложения Холесского и свой способ организации вычислений.

P	ijk-**формы**						**Окаймление**			
	kij	kji	jki	jik	ikj	ijk	известной части		неизвестной части	
							(а)	(б)	(а)	(б)
$\bar{L}D\bar{L}^T$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
LL^T	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\bar{U}D\bar{U}^T$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
UU^T	31	32	33	34	35	36	37	36	39	40

Лабораторная работа No. 4: ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДОВ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРИВЕДЕНИЯ

1. Задание

Написать и отладить программу, реализующую заданный вариант ортогонального преобразования для численного решения систем линейных алгебраических уравнений $Ax = f$ с квадратной матрицей A, вычисления $\pm(det(A))$ и A^{-1}. Предусмотреть предупреждение о невозможности решения указанных задач из-за присутствия (почти) линейно зависимых векторов среди столбцов матрицы A (в пределах ошибок округления ЭВМ или другого, заранее определенного критерия). Отделить основные части программы:

а) подпрограмму факторизации матрицы A, отвечающую заданному варианту метода ортогонального приведения;

б) подпрограмму решения систем линейных алгебраических уравнений;

в) подпрограмму вычисления определителя матриц;

г) подпрограмму обращения матриц;

д) сервисные подпрограммы.

Уделить особое внимание эффективности программы (в смысле экономии оперативной памяти и скорости решения указанных выше задач). Предусмотреть пошаговое выполнение алгоритма ортогонального приведения с выводом результата на экран. Выполнить следующие пункты задания:

1. Провести подсчет фактического числа выполняемых операций сложения, умножения, деления, извлечения квадратного корня при решении системы линейных алгебраических уравнений, сравнить эти числа

с теоретическими оценочными числами.

2. Определить скорость решения задач (решение системы линейных алгебраических уравнений, обращение матриц), для чего: спроектировать и провести эксперимент, который охватывает матрицы порядка от 10 до 100 (через 10 порядков). Представить результаты в виде таблицы и графика зависимости времени выполнения (в минутах и секундах) от порядка матриц. Таблицу и график вывести на экран.

3. Оценить точность решения систем линейных алгебраических уравнений, имеющих тот же самый порядок, что и задачи ив пункта 2. Для этого сгенерировать случайные матрицы A, выбрать точное решение x^* и образовать правые части $f = Ax^*$. Провести анализ точности вычисленного решения x от порядка матрицы. Результаты представить в виде таблицы и графика.

Для заполнения матрицы A использовать случайные числа из диапазона от -100 до 100. В качестве точного решения взять вектор $x^* = (1, 2, \dots, n)$, где n — порядок матрицы. Для оценки точности использовать норму вектора

$$\|x\|_\infty = \max_i(|x_i|).$$

4. Повторить пункт 3 задания для плохо обусловленных матриц (см. раздел 3 лабораторной работы No. 1), имеющих порядок от 4 до 40.

5. Системы из пунктов 2 и 3 решить методом исключения переменных из лабораторной работы No. 1 (в соответствии со своим вариантом). Таким образом, каждую систему линейных алгебраических уравнений с сгенерированной матрицей A и образованной по ней правой частью f необходимо решить двумя методами: методом исключения из лабораторной работы No. 1 и методом ортогонального приведения из лабораторной работы No. 4. Сравнить точность решения и затраты машинного времени. Результаты представить в виде таблицы и графика.

6. Вычислить матрицу A^{-1} двумя способами:

1) через решение системы $AX = E$ на основе метода исключения Гаусса из лабораторной работы No. 1 (в соответствии со своим вариантом);

2) через решение системы $AX = E$ на основе метода ортогонального приведения (в соответствии со своим вариантом).

Сравнить затраты машинного времени и точность обращения способами 1) и 2). Эксперименты провести для матриц порядков от 10 до 100 через 10. Для оценки точности в обоих способах воспользоваться формулой из лабораторной работы No. 1.

2. Обзор ортогональных преобразований

2.1. Ортогонализация Грама-Шмидта

Пусть $A = A(m, n)$ — матрица, имеющая m строк и n столбцов причем $m \geq n$. Обозначая i-й столбец через $\mathbf{a}_i$, запишем $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $a_i \in \mathbf{R}^m$. Рассмотрим случай матрицы полного ранга т.е. $rank(A) = n$. Тогда векторы столбцы $_i$ образуют базис в $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^m$, который назовем исходным базисом. Преобразуем исходный базис в ортонормированный. Такое преобразование называется процедурой ортогонализации системы векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

По определению ортонормированным базисом в $\mathbf{R}^n$ называется такая система векторов $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, что

$$\begin{aligned} &1). \ \ \forall i: \ q_i \in \mathbf{R}^m, \ m \geq n, \ q_i^T q_i = \|q_i\|^2 = 1; \\ &2). \ \ \forall i, \ j, \ i \neq j: \ q_i^T q_j = 0. \end{aligned}$$

Любой вектор a_i имеет в этом базисе единственное представление

$$a_i = b_{1i}q_1 + b_{21}q_2 + \ldots + b_{ni}q_i, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $b_i^T = (b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni})$ — вектор-строка коэффициентов. Следовательно, матрицу A можно представить в виде произведения двух матриц, т.е.

$A = QB$, где $Q = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$, $q_i \in \mathbf{R}^m$, $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$, $b_i \in \mathbf{R}^n$. Матрица $Q = Q(m, n)$ в этом представлении состоит из ортонормированных векторов-столбцов, в частном случае $m = n$ в качестве Q имеем ортогональную матрицу, т.е. $Q^T Q = E$.

Таким образом, ортогонализация столбцов матрицы A есть представление $A = QB$, где Q — матрица тех же размеров, что и A, но в отличие от A, имеющая ортонормированные столбцы, при этом — квадратная $(n \times n)$-матрица, обеспечивающая равенство $A = QB$. Очевидно, существует бесконечное множество таких представлений матрицы A, поскольку число ортонормированных базисов не ограничено. Для обеспечения единственности среди этого множества выберем такое представление, при котором B — треугольная матрица. Под треугольной матрицей будем понимать все четыре возможных варианта треугольного заполнения:

вариант 1: $B = R$, где R — верхняя правая треугольная матрица;
вариант 2: $B =$, где M — нижняя левая треугольная матрица;
вариант 3: $B = S$, где S — нижняя правая треугольная матрица;
вариант 4: $= N$, где N — верхняя левая треугольная матрица.

В названиях матриц R, , S и N отражено, в какой части квадратной матрицы B сосредоточены ненулевые элементы.

Традиционно ортогонализацией Грама-Шмидта называют отыскание по матрице A такой матрицы Q, что $A = QB$, где $B = R$. При этом вычисление матрицы R в явном виде может и не требоваться, хотя такое вычисление всегда присутствует. Ниже мы будем требовать явного нахождения факторов (сомножителей) Q и B в разложении $A = QB$ для каждого из четырех вариантов $B = R$, $B = M$, $B = S$ и $B = N$. Таким образом, мы рассматриваем ортогонализацию Грама-Шмидта обобщенно, т.е. во всех четырех вариантах разложения $A = QB$ с треугольной матрицей B. При этом, как оказывается, возможны два основных алгоритма, отличающиеся порядком действий.

Грама-Шмидта Ортогонализация (ГШО)

Этот вариант алгоритма предполагает вычисление ненулевых элементов матрицы B по столбцам, начиная с самого короткого (одноэлементного) столбца.

Модифицированная Грама-Шмидта Ортогонализация (МГШО)

В этом варианте ненулевые элементы матрицы B вычисляются по строкам, начиная с самой длинной (состоящей из n элементов) строки.

Кроме них, возможен вариант МГШО-алгоритма, использующий стратегию выбора ведущего вектора. В этом случае в качестве очередного, подлежащего ортогонализации вектора, выбирается тот из оставшихся, который имеет наибольшую длину (евклидову норму). Хотя эта стратегия требует дополнительных вычислительных затрат, в некоторых плохо обусловленных задачах она так же полезна, как и выбор главного элемента в методе Гаусса.

Таким образом, данной темой — ортогонализация Грама-Шмидта — в работе охвачено 12 различных вариантов задачи разложения $A = QB$.

2.2. QR-разложение матрицы $A(m.n)$, $m \geq n$, полного ранга на основе ортогонализации Грама-Шмидта

Замечание. Еще раз подчеркнем, что в этой задаче $Q = Q(m,n)$ и $R = R(n,n)$, где R — верхняя правая треугольная матрица. Другие QR-разложения, получаемые процедурой отражений Хаусхолдера или процедурой вращений Гивенса (см. ниже пп. 2.5, 2.8 и 2.9), отличаются тем, что в них $Q = Q(m,m)$ и $R = R(m,n)$.

В данной задаче, на примере $n = 3$, имеем

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ & r_{22} & r_{23} \\ & & r_{33} \end{bmatrix},$$

$A = [a_1, a_2, a_3] = [q_1, q_1, q_3]R = [r_{11}q_1, r_{12}q_1 + r_{22}q_2, r_{13}q_1 + r_{23}q_2, r_{33}q_3]$. В результате получаем линейную систему

$$\begin{aligned} &r_{11}q_1 = a_1, \\ &r_{12}q_1 + r_{22}q_2 = a_2, \\ &r_{13}q_1 + r_{23}q_2 + r_{33}q_3 = a_3. \end{aligned}$$

В силу треугольности матрицы R эта система легко решается. Из первого уравнения находим орт q_1 вдоль вектора a_1 и координату (проекцию как число) первого вектора a_1 вдоль орта q_1

$$q_1 = a_1/\|a_1\|, \; r_{11} = \|a_1\|.$$

Второе уравнение есть разложение вектора $_2$ на сумму проекций вдоль ортов q_1 и q_2. Так как орт q_1 уже найден, то координата r_{12} легко определяется как

$$r_{12} = a_2^T q_1.$$

После этого из второго уравнения имеем

$$r_{22}q_2 = a_2 - r_{12}q_1,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} &q_2 = (a_2 - r_{12}q_1)/\|a_2 - r_{12}q_1\|, \\ &r_{22} = \|a_2 - r_{12}q_1\|. \end{aligned}$$

Замечание. По предположению, $rank(A) = n$, т.е. ни один из векторов a_i не является нулевым, и все a_i линейно независимы. Поэтому $r_{11} \neq 0$, $r_{22} \neq 0$ и $r_{33} \neq 0$, следовательно, существует R^{-1}.

Продолжая решение системы, для третьего уравнения находим

$$r_{13} = a_3^T q_1,\ r_{23} = a_3^T q_2.$$

Затем определяем

$$r_{33} q_3 = a_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2.$$

отсюда

$$q_3 = (a_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2)/\|a_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2\|,$$
$$r_{33} = \|a_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2\|.$$

Таким образом, получили классический метод ГШО, отличающийся тем, что матрица R определяется по столбцам с номерами $k = 1, 2, \ldots, n$.

Алгоритм ГШО

Для $k = 1$ *до* n

$r_{ik} = a_k^T q_i,\ i = 1, 2, \ldots, k-1,$

$v = a_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} r_{ik} q_i,$

$r_{kk} = (v^T v)^{1/2},$

$q_k = v/r_{kk}.$

Более современная версия, называемая МГШО (Rice, 1966), отличается порядком вычислений матрицы R.

Алгоритм МГШО

Для $k = 1$ *до* n

$$r_{kk} = \|a_k\| = (a_k^T a_k)^{1/2},$$

$$a_k = a_k / r_{kk},$$

Для $j = k + 1$ *до* n

$$r_{kj} = a_j^T a_k,$$

$$a_j = a_j - r_{kj} a_k.$$

Этот алгоритм требует меньше оперативной памяти, так как в нем не используется промежуточный вектор v. Кроме того, матрица A заменяется матрицей Q, потому что после операции деления имеем $_k = q_k$.

2.3. Решение системы линейных алгебраических уравнений после QR-разложения Грама-Шмидта

1. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей $Ax = f$. Тогда после ортогонального приведения имеем $A = QR$. Следовательно, $QRx = f$ или $Rx = Q^T f$.

2. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей $A(m, n)$, $m > n$, полного ранга. Такая система называется переопределенной. Нормальное псевдорешение $\bar{x}$, найденное по методу наименьших квадратов (МНК), удовлетворяет нормальным уравнениям

$$A^T A \bar{x} = A^T f.$$

Поскольку $A = QR$ и $Q^T Q = E$, эти уравнения эквивалентны уравнению

$$Rx = Q^T f,$$

которое совпадает по виду с уравнением из п. 1.

Чтобы вычислить x (для п. 1) или $\bar{x}$ (для п. 2), находят вектор $f' = Q^T f$, а затем решают систему с треугольной матрицей R.

2.4. Вычисление обратной матрицы A^{-1} после QR-разложения Грама-Шмидта

Для матрицы $A = A(n, n)$ имеем $A = QR$, где $Q = Q(n, n)$. Отсюда

$$A^{-1} = R^{-1}Q^{-1} = R^{-1}Q^T.$$

Следовательно, A^{-1} есть решение матричного уравнения $RX = Q^T$. Чтобы найти i-й столбец матрицы A^{-1}, надо в качестве правой части взять i-й столбец матрицы Q^T и решить систему с треугольной матрицей R.

2.5. Левосторонние ортогональные преобразования матрицы $A(m, n)$, $m > n$, полного ранга

Пусть $A = A(m, n)$ — матрица из m строк и n столбцов, $m \geq n$ и $rank(A) = n$. Пусть $Q = Q(m, m)$ — какая-либо ортогональная матрица. Обозначим через q_i столбцы матрицы Q^T, тогда $Q^T = [q_1, q_2, \ldots, q_m]$. Векторы q_i, образуют ортонормированный базис в $\mathbf{R}^m$. Обозначим произведение $QA = B$, где $B = B(m, n)$. Поскольку $A = Q^T B$, любой столбец матрицы A имеет в этом базисе единственное представление

$$a_i = b_{1i}q_1 + b_{2i}q_2 + \ldots + b_{mi}q_m,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

где b_i — i-й столбец матрицы . Используя введенные обозначения, имеем

$$\begin{aligned} A &= [a_1, a_2, \ldots, a_n],\ a_i \in \mathbf{R}^m, \\ Q^T &= [q_1, q_2, \ldots, q_m],\ q_i \in \mathbf{R}^m, \\ &= [b_1, b_2, \ldots, b_n],\ b_i \in \mathbf{R}^m. \end{aligned}$$

Поскольку все a_i — линейно независимые векторы, то в $\mathbf{R}^m$ существует такой ортонормированный базис $\{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$, что вектор a_1 коллинеарен вектору q_1, вектор a_2 лежит в плоскости векторов $\{q_1, q_2\}$, вектор $_3$ лежит в пространстве векторов $\{q_1, q_2, q_3\}$ и т.д. Это означает, что

$B = \begin{bmatrix} R \\ \cdots \\ O \end{bmatrix}$, R — верхняя правая треугольная матрица размера $n \times n$, а O — нулевой блок размером $(m-n) \times n$. Чтобы показать, что такой ортонормированный базис существует, обозначим $Q_1 = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$ и $Q_2 = [q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_m]$, тогда $Q^T = \left[Q_1 \vdots Q_2\right]$ и

$$A = Q^T B = \left[Q_1 \vdots Q_2\right] \begin{bmatrix} R \\ \cdots \\ O \end{bmatrix} = Q_1 \cdot R + Q_2 \cdot O = Q_1 \cdot R,$$

где $Q_1 = Q_1(m, n)$, $R = R(n, n)$. Такое представление $A = Q_1 R$ означает, что для столбцов матрица A выполнена ортогонализация Грама-Шмидта, т.е. найдены матрицы Q_1, и верхняя правая треугольная матрица R, составляющая верхний блок матрицы , и эта задача всегда разрешима, когда $rankA = n$.После нахождения векторов $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, представляющих собой столбцы матрицы Q_1, построение ортогонального базиса в $\mathbf{R}^m$ при $n < m$ может быть любым способом продолжено, что позволит определить столбцы матрицы Q_2. Таким образом, матрица Q не единственная, при которой имеет желаемый вид, в данном случае $B = \begin{bmatrix} R \\ \cdots \\ O \end{bmatrix}$. Среди ортогональных преобразований Q наибольшее распространение получили два: плоские вращения Гивенса и элементарные отражения Хаусхолдера (см. ниже пп. 2.8 и 2.9).

2.6. Решение систем линейных алгебраических уравнений полного ранга на основе левосторонних ортогональных преобразований

Пусть $A = A(m, n)$ — матрица из m строк и n столбцов, $m \geq n$ и $rankA = n$. Для системы линейных уравнений $Ax = f$ введем критерий метода наименьших квадратов

$$J(x) = \|f - Ax\|^2.$$

При $m = n$ имеем $\min_x(J(x)) = 0$, но при $m > n$ в общем случае система несовместна и $\min_x(J(x)) > 0$. Необходимое (и достаточное) условие минимума функционала $J(x)$ приводит к системе нормальных уравнений

$$A^T A\bar{x} = A^T f.$$

Решив эту систему, например, с помощью разложения Холесского для положительно определенной матрицы $\Lambda = A^T A$, найдем нормальное псевдорешение для случая $m > n$

$$\bar{x} = arg(\min_x(J(x))).$$

Другой способ решения задачи МНК использует левосторонние ортогональные преобразования матрицы A. Если преобразуемые векторы брать как столбцы матрицы A, то эти преобразования являются именно левосторонними, т.е. $QA = B$, где Q — матрица ортогонального преобразования, $Q = Q(m, m)$, $= (m, n)$ — результирующая матрица. Вид матрицы должен быть удобен для последующего решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью прямой или обратной подстановки. Следовательно, матрица должна иметь те же самые четыре варианта представления, что и в п. 2.1, с тем несущественным отличием, что здесь матрица может быть прямоугольной, если $m > n$. В качестве Q пригодна любая ортогональная матрица, приводящая матрицу A к желаемому виду , но как уже отмечалось, на практике закрепились два основных метода: плоские вращения Гивенса и элементарные отражения Хаусхолдера (см. пп. 2.8 и 2.9).

Продемонстрируем решение линейных систем на основе левосторонних ортогональных преобразований. Ортогональное преобразование не изменяет евклидовой нормы вектора, поэтому

$$J(x) = \|f - Ax\|^2 = \|Q(f - Ax)\|^2 = \|Qf - QAx\|^2.$$

Это означает, что в смысле критерия МНК исходная система эквивалентна системе $= z$, где $z = Qf$, $= (m, n)$, $B = QA$.

Пусть для матрицы выбран желаемый вид по варианту 1 (см. п. 2.1). Тогда

$$Bx = \begin{bmatrix} R \\ \cdots \\ O \end{bmatrix} x = z = \begin{bmatrix} z' \\ \cdots \\ \varepsilon \end{bmatrix},$$

где R — верхняя правая треугольная матрица, $R = R(n, n)$, — нулевой блок, $O = O(m-n, n)$, z' — вектор правой части уравнений размерности n, ε — вектор ошибок метода наименьших квадратов размерности $m-n$. Действительно,

$$J(x) = \left\| \begin{bmatrix} z' \\ \cdots \\ \varepsilon \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ \cdots \\ O \end{bmatrix} x \right\|^2 = \|z' - Rx\|^2 + \|\varepsilon\|^2 = \|f - Ax\|^2,$$

т.е. $\min\limits_x (J(x)) = \|\varepsilon\|^2$ и $\bar{x} = R^{-1} z'$.

Таким образом, следующая процедура решения оказывается, как и в п. 2.3, одинаковой как для определенных, так и для преопределенных систем.

1. Для системы $Ax = f$ расширенную матрицу $\left[A \vdots f\right]$ подвергнуть слева операции ортогонального приведения к виду $\left[B \vdots z\right]$, где имеет один из четырех вариантов треугольного вида (см. п. 2.1).

2. Процедурой прямой (или обратной) подстановки из полученной треугольной системы вычислить . Этот вектор представляет собой в случае определенной системы ее решение, а в случае переопределенной системы ее нормальное псевдорешение $\bar{x}$.

Изложенное есть другой прямой метод решения систем, позволяющий избежать применения метода исключения как в случае систем с невырожденной квадратной матрицей $Ax = f \quad (m = n)$, так и для нормальных уравнений $A^T A \bar{x} = A^T f \quad (m > n)$ в случае, если исходная система переопределена. Этот альтернативный метод численно устойчив, поскольку имеет число обусловленности, равное 1, — наилучшее из возможных, благодаря свойству ортогональной матрицы сохранять евклидову норму вектора.

Замечание. Если необходимо решить несколько задач типа $Ax = f$ с одной и той же матрицей A, тогда надо запомнить матрицу Q, что позволит сэкономить время на разложение матрицы A. Такая ситуация возникает, например, при обращении матрицы A. В других случаях знание матрицы Q не требуется.

2.7. Правосторонние ортогональные преобразования и их применение

Пусть $A = A(n, n)$ — квадратная невырожденная матрица. Будем рассматривать ее строки как векторы в $\mathbf{R}^n$. Преобразования вектора как матрицы-строки в n-мерном линейном пространстве задаются умножением ее на преобразующую матрицу справа. Поэтому правосторонним ортогональным преобразованием можно привести матрицу A к виду $AQ = B$, где треугольная матрица, имеющая форму одного из четырех возможных вариантов (см. п. 2.1). При этом в качестве векторов для преобразования Q используются не столбцы, а строки матрицы A. После такого преобразования решение системы $Ax = f$ сводится к решению системы с треугольной матрицей $By = f$. Затем искомый вектор определяется через подстановку $x = Qy$. Вычисление обратной матрицы A^{-1}, соответственно, находится как решение системы $BY = E$ с последующим умножением матрицы Y на ортогональную матрицу Q, т.е. $X = A^{-1} = QY$, для чего требуется хранение матрицы Q.

2.8. Плоские вращения Гивенса

Преобразование Гивенса определяется матрицей вращения вида

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & c & & \cdots & & s & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & -s & & \cdots & & c & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

где $c = c_{ij} = \cos(\Theta_{ij})$, $s = s_{ij} = \sin(\Theta_{ij})$. Матрица ${}_{ij}$ имеет размеры $m \times m$ и задает поворот m-мерного вектора-столбца в плоскости (i, j) на угол $-\Theta_{ij}$.

Находя произведение ${}_{12}A$, получим матрицу

$$A_1 = P_{12}A = \begin{bmatrix} c_{12}a_1 + s_{12}a_2 \\ -s_{12}a_1 + c_{12}a_2 \\ a_3 \\ \cdots \\ a_m \end{bmatrix},$$

где через a_i обозначена i-я строка матрицы $A = A(m, n)$, $m \geq n$, $a_i = ({}_{i1}, {}_{i2}, \ldots, {}_{in})$. Выберем угол Θ_{12} из условия

$$-s_{12}a_{11} + c_{12}a_{21} = 0.$$

Тогда в результирующей матрице A_1 элемент $a_{11}^{(1)} = (a_{11}^2 + a_{21}^2)^{1/2}$, а $a_{21}^{(1)} = 0$. Таким образом, в результате умножения на матрицу ${}_{12}$ в матрице A

изменятся только первые две строки, причем первый элемент второй строки станет равен нулю. Далее вычисляем $A_2 = P_{13}A_1$, выбирая угол Θ_{13} так, чтобы сделать равным нулю первый элемент третьей строки. При этом нулевой элемент $a_{21}^{(1)}$ не изменится, потому что преобразование P_{13} изменяет только первую и третью строки матрицы A_1. Продолжая подобные действия, сделаем нулевыми все поддиагональные элементы столбца 1 матрицы A, затем все поддиагональные элементы столбца 2 и т.д. Всего мы используем $(m-1)+(m-2)+\ldots+(m-n) = (2m-n-1)n/2$ матриц вращения. В результате получим

$$\hat{A} = PA = P_{n,m}P_{n-1,m}\ldots P_{12}A = \begin{bmatrix} R \\ \cdots \\ O \end{bmatrix}.$$

Все матрицы $_{ij}$ ортогональны, поэтому их произведение, матрица , также ортогональна. Полагая $Q = P^{-1}$, при $m = n$ имеем QR-разложение матрицы $A = A(n,n)$, а при $m > n$ имеем QR-разложение матрицы $A = A(m,n)$, где $^T = \left[R^T \vdots O\right]$.

Алгоритм Гивенса имеет две схемы вычислений: (1) строчно ориентированная схема и (2) столбцово ориентированная схема. Данное выше описание соответствует первой схеме и кратко может быть представлено в виде следующего алгоритма.

Алгоритм 1 (строчный) метода Гивенса

Для $k = 1$ *до* $n-1$

  Для $j = k+1$ *до* m

    Вычислить c_{ki}, s_{ki}, $\hat{a}_{kk}$

    $\hat{a}_k = c_{ki}a_k + s_{ki}a_i$,

    $a_i = -s_{ki}a_k + c_{ki}a_i$.

Если $m > n$, *вычислить* $\hat{a}_{nn}$.

Замечания.

1. При модификации вектора-строки a_i используется текущее значение вектора-строки a_k, а не новое значение этого вектора, обозначенное $\hat{a}_k$.

2. В строках $\hat{a}_k$, a_i по приведенным формулам вращения можно вычислять только элементы с номерами $j = k+1$ до n, поскольку известно, что $\hat{a}_{kk} = (a_{kk}^2 + a_{ik}^2)^{1/2}$ и $\hat{a}_{ik} = 0$.

3. Элемент $\hat{a}_{nn} = (a_{nn}^2 + a_{n+1,n}^2 + \ldots + a_{mn}^2)^{1/2}$.

4. В результирующей матрице (здесь она обозначена $\hat{A}$) вся трапецеидальная часть, расположенная ниже главной диагонали, содержит только нулевые элементы, поэтому говорят, что метод Гивенса осуществляет верхнюю (и правую) триангуляризацию исходной матрицы $A = A(m, n)$, что соответствует варианту 1 из п. 2.1. В равной степени может ставиться задача триангуляризации по типу варианта 2, 3 или 4 (см. п. 2.1).

5. В позициях (i, k) результирующей матрицы $\hat{A}$, где должны появиться нулевые элементы, обычно хранят информацию об угле Θ_{ki}, на который осуществлялось вращение.

6. Сам угол при этом не вычисляют, поскольку на вычисление прямых и обратных тригонометрических функций требуется значитель- ное время. Вместо этого вычисляют

$$r = \pm(a_{kk}^2 + a_{ik}^2)^{1/2},\ c_{ki} = a_{kk}/r,\ s_{ki} = a_{ik}/r.$$

Этот наиболее очевидный способ хранения информации требует для каждого плоского вращения запоминания двух чисел: c и s, что препятствует использовании замечания 5, если нужно хранить информацию о проведенных вращениях в той же матрице A.

Покажем менее очевидный способ, позволяющий для каждого плоского вращения хранить лишь одно число z, из которого однозначно восстанавливаются числа c и s (Gentleman, 1973).

Для данных a и b вычисляют

$$\sigma = \begin{cases} sgn(a), & |a| > |b|, \\ sgn(b), & |a| \leq |b|, \end{cases}$$

$$r = \sigma(a^2 + b^2)^{1/2},$$

$$c = \begin{cases} a/r, & r \neq 0, \\ 1, & r = 0, \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} b/r, & r \neq 0, \\ 0, & r = 0. \end{cases}$$

Найденные таким способом c, s и r удовлетворяют уравнению плоского вращения вектора $(a, b)^T$:

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если необходимо последующее восстановление чисел c и s только из одного хранимого числа, то это число вычисляют по правилам:

$$z = \begin{cases} s, & |a| > |b|, \\ 1/c, & |a| \leq |b| \;\; c \neq 0, \\ 1, & c = 0. \end{cases}$$

Затем его помещают на место числа b, а число r на место числа a. Переменные c и s используют для вращения других векторов, образуемых очередной парой чисел из строк $_k$ и $_i$. Впоследствии необходимое восстановление чисел c и s из z осуществляют следующим образом:

если $z = 1$, положить $= 0$, $s = 1$;

если $|z| < 1$, положить $c = (1 - z^2)^{1/2}$, $s = z$;

если $|z| > 1$, положить $c = 1/z$, $s = (1 - c^2)^{1/2}$.

В любом из приведенных способов ошибки будут меньше, если синусы и косинусы вычислять по алгоритму:

если $|a| > |b|$, то $= b/$, $= 1/(1 + ^2)^{1/2}$, $s = ac$;

если $|a| \geq |b|$, то $= /b$, $s = 1/(1 + ^2)^{1/2}$, $= s$.

Приведенный выше алгоритм 1 ориентирован на обработку матрицы по строкам. Следующий алгоритм преобразует матрицу по столбцам, т.е. является столбцово ориентированным.

Алгоритм 2 (столбцовый) метода Гивенса

Для $k = 1$ *до* $n - 1$

  Для $l = k + 1$ *до* m

    Вычислить c_{kl}, s_{kl}

    $a_{kk} = c_{kl} a_{kk} + s_{kl} a_{lk}$,

  Для $j = k + 1$ *до* n

    Для $i = k + 1$ *до* m

$$a_{kj}^{(i+1)} = c_{ki} a_{kj}^{(i)} + s_{ki} a_{ij}$$
$$a_{ij} = -s_{ki} a_{kj}^{(i)} + c_{ki} a_{ij}$$

Если $m > n$, *вычислить* $\hat{a}_{nn}$.

2.9. Элементарные отражения Хаусхолдера

Преобразование Хаусхолдера определяется матрицей отражения вида $T_u = E - ww^T$, где $w^T w = \|w\|^2 = 2$. Отсюда видно, что $_u = {}^T_u$, т.е. $_u$ — ортогональная матрица.

В обозначении $_u$ нижний индекс означает направляющий вектор u, рассматриваемый как нормаль к некоторой гиперплоскости. Пронормировав его, получим направляющий орт $\hat{u} = u/\|u\|$. Тогда $w = \hat{u}\sqrt{2}$.

Рассмотрим решение двух взаимно обратных задач, связанных с применением преобразований Хаусхолдера для ортогонального приведения матриц к желаемому (треугольному) виду.

Задача 1. *Дан вектор* u. *Для любого вектора* $y \in \mathbf{R}^m$ *найти отраженный (от гиперплоскости) вектор* y_r.

Имеем, в силу теоремы об ортогональном разложении вектора,

$$y = (y^T \hat{u})\hat{u} + v,$$

$$y_r = -(y^T \hat{u})\hat{u} + v,$$

где $v \perp \hat{u}$. Отсюда, исключая v, получим

$$y_r = y - 2(y^T \hat{u})\hat{u} = y - 2\hat{u}\hat{u}^T y = (E - ww^T)y = T_u y.$$

Задача 2. *Для данного вектора $y \in \mathbf{R}^m$ задан требуемый отраженный вектор $_r$. Найти $u \in \mathbf{R}^m$.*

Имеем

$$y_r = y - \gamma u, \qquad \gamma = 2y^T u/(u^T u).$$

Поскольку для процесса отражений существенно знать только направление вектора u, то можно положить $\gamma = 1$. Тогда $u = y - y_r$.

Распишем это решение более подробно, дополнительно потребовав, чтобы $_r = (s, 0, \ldots, 0)^T$, где $s = \pm y^T y$, так как для евклидовой нормы $\|y_r\| = \|T_u y\| = \|y\|$. С учетом решения задачи 2 имеем

$$u = (y_1 - s, y_2, \ldots, y_m)^T.$$

Следовательно,

$$\|u\|^2 = u^T u = 2(s^2 - y_1 s),\ \hat{u} = u/\|u\|,\ w = \hat{u}/\sqrt{2},$$

$$\gamma = 1/(s^2 - y_1 s),\ \mu^2 = \gamma,\ w = \mu u.$$

Теперь используем попеременно решения задач 1 и 2 для ортогонального приведения матрицы $A = A(m, n)$ к виду

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc} s & \vdots & \\ 0 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \vdots & \end{array}\right].$$

Сначала решаем задачу 2, взяв в качестве вектора y первый столбец матрицы A. В результате найдем вектор w и, следовательно, $T_u = E - ww^T$. Далее решаем задачу 1 для найденного вектора $u = w/\mu$ и каждого из оставшихся столбцов матрицы A. Тем самым имеем $(E - ww^T)A = A_1$. Поскольку вектор w найден по первому столбцу матрицы A, обозначим его w_1 и, соответственно, $T_1 = E - w_1 w_1^T$. Повторим описанный процесс для w_2, содержащим нуль в первой позиции. Остальные элементы этого вектора определяем аналогично рассмотренному выше случаю по части второго столбца матрицы A, начиная со второго элемента. Тогда в матрице $A_2 = T_2 A_1 = T_2 T_1 A$ поддиагональные элементы первых двух столбцов будут равны нулю. Продолжая этот процесс, для $m > n$ получим

$$A = T_n T_{n-1} \dots T_1 A = \begin{bmatrix} R \\ \cdots \\ O \end{bmatrix}.$$

При $m = n$ последний шаг, T_n, не нужен.

Аналогичным образом левосторонними преобразованиями Хаусхолдера матрица $A = A(m, n)$, $m \geq n$, может быть приведена к любому из желаемых вариантов треугольного заполнения (см. п. 2.1).

Замечание. Позиции матрицы $A = A(m, n)$, освобождаемые для нулей, могут быть использованы для хранения существенной части направляющих векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, с которыми произведены отражения $\{T_1, T_2 \dots, T_n\}$.

Как и в методе Гивенса, здесь возможны две схемы разложения матрицы A. Столбцово ориентированная схема дается следующим алгоритмом.

Алгоритм 1 (столбцовый) метода Хаусхолдера

Для $k = 1$ *до* $n - 1$

$s_k = -sgn(a_{kk}) \left(\sum\limits_{l=k}^{m} a_{lk}^2 \right)^{1/2}$

$\gamma_k = (s_k^2 - s_k a_{kk})^{-1}$

$u_k^T = (0, \ldots, 0, a_{kk} - s, a_{k+1,k}, \ldots, a_{mk})$

$a_{kk} = s_k$

Для $j = k+1$ *до* n

$a_j = \gamma_k u_k^T a_j$

$a_j = a_j - a_j u_k$

Если $m > n$

$a_{nn} = \left(\sum\limits_{l=n}^{m} a_{ln}^2 \right)^{1/2}$.

Следующая строчно ориентированная схема оперирует со строками a_i матрицы A.

$$A_1 = A - wz^T, \quad z^T = w^T A = \mu u^T A = \mu \sum_{i=1}^{m} u_i a_i = \mu v^T,$$

$$v^T = u^T A = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} u_i a_i,$$

$$A_1 = \{a_i - w_i z^T\} = \{a_i - \mu w_i v^T\} = \{a_i - \gamma u_i v^T\}.$$

Алгоритм 2 (строчный) метода Хаусхолдера

Для $k = 1$ *до* $n-1$

$s_k = -sgn(a_{kk}) \left(\sum\limits_{l=k}^{m} a_{lk}^2 \right)^{1/2}$

$\gamma_k = (s_k^2 - s_k a_{kk})^{-1}$

$u_k^T = (0, \ldots, 0, a_{kk} - s, a_{k+1,k}, \ldots, a_{mk})$

$v_k^T = \sum\limits_{l=k}^{m} u_{lk} a_l$

$\hat{v}_k^T = \gamma_k v_k^T$

Для $j = k$ *до* n

$a_j = a_j - u_{jk} \hat{v}_k^T$

Если $m > n$

$$a_{nn} = \left(\sum_{l=n}^{m} a_{ln}^2\right)^{1/2}.$$

2.10. Двусторонние ортогональные преобразования и их применение

Пусть дана квадратная матрица $A = A(n, n)$. В качестве ортогональных преобразований используем либо плоские вращения Гивенса, либо элементарные отражения Хаусхолдера. Левосторонние преобразования обозначим буквой S, а правосторонние — T. Нижним индексом обозначим размерность преобразуемого вектора, понимая под преобразованием обращение в нуль всех элементов вектора, кроме первого. Так, при умножении матрицы A слева на матрицу S происходит обращение в нуль $(n-1)$ поддиагональных элементов первого столбца матрицы A. Умножение полученной матрицы справа на T_{n-1}, $(S_n A)T_{n-1}$ вызывает обращение в нуль $(n-2)$ последних элементов первой строки. Производя аналогичные преобразования над оставшимися столбцами и строками, приводим матрицу A к двухдиагональному виду

$$\hat{A} = SAT = S_2 \dots S_{n-1} S_n A T_{n-1} T_{n-2} \dots T_2.$$

Это можно считать доказательством соответствующей теоремы о приведении матрицы к двухдиагональному виду.

Аналогично доказывается теорема о приведении симметрической матрицы к трехдиагональному виду

$$\hat{A} = T_2 \dots T_{n-2} T_{n-1} A T_{n-1}^T T_{n-2}^T \dots T_2^T.$$

Основное применение указанных преобразований заключается в вычислении сингулярных значений произвольной матрицы $A = A(n, n)$, а также в решении проблемы собственных значений. Но эти преобразовавания можно использовать и для решения системы линейных алгебраических уравнений $Ax = f$. После приведения матрицы к двух– или трех– диагональному виду система уравнений легко решается. Например, в случае с трехдиагональной матрицей система очень эффективно решается методом прогонки.

3. Варианты

Конкретный вариант лабораторной работы No. 4 определяется своим номером от 1 до 28. По номеру из таблицы, приведенной ниже, находят заданный вариант метода ортогонального приведения (МОП) с номером от 1 до 7 и заданный вариант треугольного заполнения (ТЗ) матрицы в разложении $A = QB$ с номером от 1 до 4.

Вариант ТЗ	**Вариант МОП**						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	5	9	13	17	21	25
2	2	6	10	14	18	22	26
3	3	7	11	15	19	23	27
4	4	8	12	16	20	24	28

Варианты треугольного заполнения (ТЗ) упорядочены, согласно п. 2.1, следующим образом:

вариант 1: $B = R$, где R — верхняя правая треугольная матрица;

вариант 2: $=$, где — нижняя левая треугольная матрица;

вариант 3: $B = S$, где S — нижняя правая треугольная матрица;

вариант 4: $B = N$, где N — верхняя левая треугольная матрица.

Варианты метода ортогонального приведения (МОП) упорядочены следующим образом:

вариант 1: Модифицированная Грама-Шмидта ортогонализация;

вариант 2: Классическая Грама-Шмидта ортогонализация;

вариант 3: Плоские вращения Гивенса, строчно ориентированная схема;

вариант 4: Элементарные отражения Хаусхолдера, столбцово ориентированная схема;

вариант 5: Плоские вращения Гивенса, столбцово ориентированная схема;

вариант 6: Элементарные отражения Хаусхолдера, строчно ориентированная схема;

вариант 7: Модифицированная Грама-Шмидта ортогонализация с выбором ведущего вектора.

Лабораторная работа No. 5: МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Задание

А. Спроектировать и отладить подпрограмму решения несовместной системы $Ax = z$, $A = A(m, n)$, $m > n$, $rank(A) = n$, в смысле наименьших квадратов при помощи заданного метода ортогонального приведения. Обосновать проект и дать набор инструкций для пользователей подпрограммы. Сделать подсчет операций (отдельно сложения, умножения, деления и извлечения квадратного корня) через числа m и n, где m — число строк матрицы A, а n — число столбцов. Рекомендуется в качестве основы вашего проекта использовать ту программу, которая была вами написана и отлажена в рамках лабораторной работы No. 4 для решения совместной системы уравнений $Ax = f$ с квадратной матрицей A методом ортогонального приведения. (Для этого в указанной программе достаточно осуществить незначительные изменения).

Б. Повторить пункт А задания на основе подхода с использованием нормальных уравнений $A^T A\bar{x} = A^T z$, которым удовлетворяет искомое решение $\bar{x}$ в смысле наименьших квадратов, называемое также нормальным псевдорешением системы $Ax = z$. Для этого применить вашу программу решения системы уравнений с симметричной положительно определенной матрицей методом квадратного корня (разложение Холесского) из лабораторной работы No. 3.

В. Спроектировать и провести вычислительный эксперимент для сравнения скорости выполнения двух программ по пп. А. и Б. Использовать четыре различных варианта генерации n векторов длины

m для формирования матрицы A (см. раздел 2) при $2 \le n \le 12$, $n + 1 \le m \le 26$. Результаты представить в виде таблиц и графиков, которые иллюстрируют поведение каждого метода на каждом варианте генерации матрицы A. Дать обобщенную (по вариантам матрицы) картину зависимости времени выполнения в секундах от значений параметров m и n матрицы. Проанализировать соотношение между фактическим временем выполнения и числом операций, рассчитанным по пп. А и Б. Правые части уравнений образовывать, как указано в следующем пункте задания.

Г. Подобно п. В, сравнить точность нахождения нормального псевдорешения переопределенной системы линейных уравнений для методов из пп. А и Б. Для этого также четырьмя способами сгенерировать матрицы A (см. раздел 2), выбрать точное нормальное псевдорешение x^* и образовать вектор $z^* = Ax^*$. К элементам этого вектора добавить случайные числа v_i, чтобы образовать правые части $z_i = z_i^* + av_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Написать подпрограмму генерации псевдослучайных чисел v_i так, чтобы каждое v_i, имело стандартное нормальное распределение (с нулевым средним значением и единичной дисперсией). При этом любые случайные величины v_i, v_j $(i \neq j)$ должны быть попарно независимы. Предусмотреть множитель-переключатель , чтобы по желанию включать или отключать добавление случайных чисел v_i, или же регулировать их уровень.

В качестве точного нормального псевдорешения взять вектор $^* = (1, 2, \dots, m)$. Для оценки точности использовать норму вектора

$$\|x\|_\infty = \max_i(|x_i|).$$

При использовании программы, где выполняется ортогональное приведение $QA = B$, для проверки правильности метода убедиться в справедливости равенства $A^T A - B^T B = 0$. Для этого использовать норму матрицы

$$\|A\|_\infty = \max_i (\sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|).$$

Д. Представить обобщенную аттестацию двух подпрограмм и соответствующих методов, основанную на проведенных наблюдениях. Обсудить любые сравнительные достоинства и недостатки, поддающиеся количественной оценке, и предложить план дальнейших вычислительных экспериментов, которые могли бы помочь уточнить различия между рассмотренными выше методами решения переопределенных систем уравнений.

Е. Решить следующую прикладную задачу. Для $i = 1, 2, \ldots, m$ (m кратно четырем) имеем

$$y_i = x_1 w_i + x_2 w_{i-1},\ w_i = \sin(2\pi i/m),\ d_i = 2\cos(2\pi i/m).$$

Найти оптимальное значение $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$ вектора коэффициентов $x = (x_1, x_2)^T$, доставляющее минимум средней квадратической ошибке

$$J(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (y_i - d_i)^2.$$

Решение выполнить двумя способами: аналитически и численно. Аналитическое должно включать: эквивалентную постановку задачи в виде переопределенной системы $Ax = z$; решение для нее нормальных уравнений, дающее

$$\bar{x} = 2[\mathrm{ctg}(2\pi/m) \quad \vdots \quad -\mathrm{cosec}(2\pi/m)]^T;$$

представление критерия качества для общего случая в виде

$$J(x) = J_{\min} + (x - \bar{x})^T R (x - \bar{x}),$$

где $R = A^T A$ — информационная матрица, $x = (A^T A)^{-1} A^T z$ — нормальное псевдорешение; доказательство того, что в данном конкретном случае

$$J_{\min} = \min_x (J(x)) = J(\bar{x}) = 0;$$

вычисление собственных значений матрицы R, дающее

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\pi/m)],\ \lambda_2 = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\pi/m)];$$

вычисление соответствующих собственных векторов матрицы R; представления критерия качества для общего случая в виде

$$J(x) = J_{\min} + \Delta x^T Q \Lambda Q \Delta x,$$

где $\Delta x = x - \bar{x}$ — отклонение от оптимального значения, Q — матрица ортонормирозанных собственных векторов матрицы R, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2)$ — матрица собственных значений.

Изобразить на экране в системе координат $(_1, x_2) = x^T$ линии постоянных уровней критерия $J(x) = const$ для шести значений $const = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ в окрестности точки минимума критерия для одного из значений $m = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28$ или 32 (по выбору). Объяснить геометрический смысл матриц Q и A в последнем представлении критерия.

Численное решение должно включать вычисление решения $\bar{x}$ с помощью двух методов (по пп. А и Б) и сравнительную оценку точности двух решений для нормы вектора $\|\bar{x}\|_\infty$ (в зависимости от $m = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32$). Эту зависимость представить таблицей и графиком.

2. Формирование матрицы A

Следующие четыре варианта формирования матрицы A использовать для оценки скорости и точности двух методов решения переопределенных систем линейных алгебраических уравнений, как указано в пп. В и Г задания.

Для $n = 2$ до 12 с шагом 5 выполнить

Для $m = n + 1$ до 26 с шагом 3 выполнить

Для $i = 1$ *до* m *выполнить*

Для $j = 1$ *до* n *выполнить*

Вариант 1: $a_{ij} = \sin((i-1)j/m)$

Вариант 2: $a_{ij} = \frac{1}{1+66\left[(i-1)j/m\right]^4}$

Вариант 3: $a_{ij} = 1/(i+j)$

Вариант 4: $a_{ij} = 100(RAN - 1/2)$,

где RAN - равномерно распределенная случайная величина, получаемая независимо для каждого элемента $_{ij}$ матрицы A.

3. Варианты

Конкретный вариант лабораторной работы No. 5 определяется своим номером от 1 до 28. По номеру из таблицы, приведенной ниже, находят заданный вариант метода ортогонального приведения (МОП) с номером от 1 до 7 и заданный вариант треугольного заполнения (ТЗ) матрицы в разложении $A = QB$ с номером от 1 до 4.

Вариант ТЗ	**Вариант МОП**						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	5	9	13	17	21	25
2	2	6	10	14	18	22	26
3	3	7	11	15	19	23	27
4	4	8	12	16	20	24	28

Варианты треугольного заполнения (ТЗ) упорядочены, согласно п. 2.1, следующим образом:

вариант 1: $B = R$, где R — верхняя правая треугольная матрица;

вариант 2: = , где — нижняя левая треугольная матрица;

вариант 3: $B = S$, где S — нижняя правая треугольная матрица;

вариант 4: $B = N$, где N — верхняя левая треугольная матрица.

Варианты метода ортогонального приведения (МОП) упорядочены следующим образом:

вариант 1: Модифицированная Грама-Шмидта ортогонализация;

вариант 2: Классическая Грама-Шмидта ортогонализация;

вариант 3: Плоские вращения Гивенса, строчно ориентированная схема;

вариант 4: Элементарные отражения Хаусхолдера, столбцово ориентированная схема;

вариант 5: Плоские вращения Гивенса, столбцово ориентированная схема;

вариант 6: Элементарные отражения Хаусхолдера, строчно ориентированная схема;

вариант 7: Модифицированная Грама-Шмидта ортогонализация с выбором ведущего вектора.

Лабораторная работа No. 6: ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Введение

В данной работе предлагаются к изучению современные методы построения численно устойчивых и экономичных по затратам ресурсов ЭВМ алгоритмов метода наименьших квадратов (МНК), решающих актуальную задачу *последовательного* обновления оценок по измерениям. Эта задача возникает во многих приложениях, например: при оценке состояния (элементов движения) объекта по последовательно поступающим данным наблюдения, при подгонке параметров модели под результаты продолжительных экспериментов, проводимых в физике, астрономии, экономике, бизнесе, социологии, психологии и в других областях, где выявление регрессий, анализ и прогнозирование тенденций опирается на включение в обработку данных наблюдения по мере их поступления, для того, чтобы постепенно идентифицировать модель объекта (процесса) или уточнять параметры модели.

1. Задание

Спроектировать, отладить и продемонстрировать в действии программу решения несовместной системы уравнений $Ax = b$, $A = A(m, n)$, $m > n$, $rank(A) = n$, в смысле наименьших квадратов в соответствии с вашим вариантом последовательного алгоритма (см.ниже п. 3). Оценить результаты решения по трем показателям: (1) погрешность (абсолютная и относительная) решения; (2) затраты основной памяти компьютера на хранение данных, необходимых только для заданного алгоритма; (3) теоретическое и реальное число основных операций компьютера на выполнение заданного алгоритма. Эти показатели определить в зависимости от следующих параметров задачи: (1) размерность задачи, т.е. число неизвестных n, (2) степень переопределенности задачи, т.е. натуральное число p, указывающее, во сколько раз число уравнений m больше числа неизвестных, $m = pn$; (3) степень несовместности системы, т.е. вещественное положительное число c, показывающее среднеквадратическое значение элементов случайного разностного вектора $d = b - A\bar{x}$, где $\bar{x}$ — нормальное псевдорешение системы $Ax = b$, относительно среднего (единичного) значения; число c в действительности соответствует уровню погрешностей при измерениях (см. Введение); (4) способ генерации матрицы A, соответствующий в действительности либо плану эксперимента (см. Введение), либо имеющемуся составу измерительных средств.

В вычислительном эксперименте всего использовать:

(1) десять значений n, $n = 1, 2, \ldots, 10$;

(2) три значения p, $p = 10$, 100 и 1000;

(3) три значения c, $c = 1/10$, 1 и 10;

(4) четыре способа генерации матрицы A (см. ниже п. 2).

При этих условиях провести вычислительный эксперимент и его результаты выводить на экран в виде следующей таблицы:

Вычислительный эксперимент

<table>
<tr><td colspan="6">p=(значение), c=(значение), A=(способ)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">n</td><td colspan="2">Погрешность</td><td>Память</td><td colspan="2">Число операций</td></tr>
<tr><td>абсолют.</td><td>относит.</td><td>КБайт</td><td>теорет.</td><td>реальн.</td></tr>
</table>

При подсчете числа операций учитывать: сложение, умножение, деление и извлечение квадратного корня. К отчету о работе приложить расчетные формулы числа операций отдельно по этим видам операций и их сумму. В таблицу выводить суммарное число операций.

Отладку программы выполнить и продемонстрировать на решении следующей задачи:

$$Ax = b, \quad A = A(m,2) = \left[\, a_{i1} \;\vdots\; a_{i2} \,\right], \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$m = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40.$$

$$a_{i1} = w_i = \sin(2\pi i/m), \quad a_{i2} = w_{i-1};$$

$$b^T = (b_1, \ldots, b_m), \quad b_i = 2\cos(2\pi i/m).$$

Решением этой задачи является вектор $\bar{x}^T = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$,

$$\bar{x}_1 = 2\,\mathrm{ctg}(2\pi/m), \quad \bar{x}_2 = -2\,\mathrm{cosec}(2\pi/m). \tag{1.1}$$

Для демонстрации процесса отладки вывести на экран следующую таблицу:

Отладка

m	Погрешность	
	абсолютная	относительная

Во всех случаях для оценки абсолютной погрешности использовать норму вектора $\Delta x = x - \bar{x}$ вида

$$\|\Delta x\| = \|\Delta x\|_\infty = \max_i |\Delta x_i|,$$

где x — вычисленное решение, а относительную погрешность определить по формуле

$$\delta = \|\Delta x\| / \|\bar{x}\|,$$

где $\bar{x}$ — точное МНК-решение (нормальное псевдорешение задачи). В отладочной задаче решением является (1.1), а в задачах вычислительного эксперимента — это вектор $\bar{x} = (1, 2, \ldots, n)$.

2. Генерация задач для вычислительного эксперимента

Как отмечено, для этих задач точное МНК-решение следует задать в виде вектора $\bar{x} = (1, 2, \ldots, n)$. Затем следует сгенерировать матрицу A (см. ниже) и образовать вектор $\hat{b} = A\bar{x}$. К нему нужно добавить случайный вектор $d = c \cdot \xi$, где c — число (см.выше п. 1), а $\xi \sim N(0, 1)$ – вектор случайных чисел (от подпрограммы псевдослучайных чисел), взятых из стандартного нормального распределения, — с нулевым средним значением и единичной дисперсией. В результате получаем вектор $b = A\bar{x} + d$ для системы уравнений $Ax = b$.

Для генерации матрицы A необходимо предусмотреть один из четырех способов.

Способ 1: матрица $A = A(m, n)$ заполняется случайными числами из равномерного распределения в диапазоне $[-100, +100]$. Условно это можно изобразить так

$$A = [\mathrm{Random}(m \times n)].$$

Способ 2: верхняя часть матрицы A, а именно, ее первые n строк, заполняются как в способе 1; остальные строки образуют подматрицу, в которой только первые q столбцов, $q = [n/2]$ — ближайшее снизу целое число к $n/2$, заполняются как в способе 1, а все остальные столбцы — нулевые. Таким образом, матрица имеет вид

$$A \;=\; \begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{\mathrm{Random}(n \times n)} \\ \hline \mathrm{Random} & 0 \\ \hline \end{array}$$

Способ 3: первая часть матрицы A должна формироваться как в способе 2, а остальная часть образуется располагающимися последовательно вниз блоками из единичных матриц E размера $n \times n$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline \text{Random}(n \times n) \\ \hline E(n \times n) \\ \cdots \\ E(n \times n) \\ \hline \end{array}$$

Способ 4: верхняя часть матрицы A должна формироваться как в способе 2, остальная же часть строится наподобие способа 2, но ненулевые q столбцов нижней подматрицы заполняются не случайными числами, а располагающимися последовательно вниз блоками из единичных матриц E размера $q \times q$

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline \multicolumn{2}{|c|}{\text{Random}(n \times n)} \\ \hline E(q \times q) & \\ \cdots & 0 \\ E(q \times q) & \\ \hline \end{array}$$

Замечание 2.1. Не нужно генерировать всю матрицу A, а также вектора b и d, сразу. Матрицу A нужно генерировать построчно, а векторы b и d — поэлементно. Например, если $a^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ есть текущая строка матрицы A, то $z = a^T \bar{x} + v$, где z — текущий элемент вектора b, v — текущий элемент вектора d, $v = c \cdot \xi$, $\xi \sim N(0, 1)$ — текущее случайное число из стандартного нормального распределения. Таким образом, последовательно генерируемые данные (a^T, z) нужно вводить в алгоритм решения, а также использовать в нем значение $r = c^2$, имеющее смысл дисперсии ошибки измерения вектора $\hat{b} = A\bar{x}$ (см. выше и также п. 1).

3. Варианты последовательного алгоритма МНК

Общее число вариантов составляет 25.

Вариант 1. Стандартный ковариационный алгоритм (Калмана).

(i) Инициализация (начальные значения x_0, P_0):

$$\tilde{x} := x_0, \quad \tilde{P} := P_0.$$

(ii) Обработка наблюдений (очередные данные $z = a^T \bar{x} + v$):

$$\alpha = a^T \tilde{P} a + r, \quad K = \tilde{P} a / \alpha, \quad \hat{P} = \tilde{P} - K a^T \tilde{P}, \tag{3.1}$$

$$\hat{x} = \tilde{x} + K(z - a^T \tilde{x}). \tag{3.2}$$

(iii) Экстраполяция (распространение оценки $\hat{x}$ и ее ковариации $\hat{P}$ по времени между результатами наблюдений) к моменту повторения этапа (ii) со следующими данными:

$$\tilde{P} := \hat{P}, \quad \tilde{x} := \hat{x}.$$

Замечание 3.1. Для всех ковариационных алгоритмов (варианты 1–12) в качестве начальных значений можно взять: $x_0 = 0$, $P_0 = (1/\epsilon)E$, $\epsilon \to 0$.

Вариант 2. Стабилизированный ковариационный алгоритм (Джозефа). Отличается лишь этапом (ii) от варианта 1.

(ii) Обработка наблюдений (очередные данные $z = a^T \bar{x} + v$):

$$\alpha = a^T \tilde{P} a + r, \quad K = \tilde{P} a / \alpha, \tag{3.3}$$

$$\hat{P} = (E - K a^T) \tilde{P} (E - a K^T) + r K K^T. \tag{3.4}$$

Замечание 3.2. Вычислительные затраты существенно зависят от способа программирования выражений. Например, последнее выражение для $\hat{P}$ может быть запрограммировано в следующей последовательности:

$$\begin{array}{ll} W_1 = E - K a^T, & (n \times n) \text{ — матрица} \\ W_2 = W_1 \tilde{P}, & (n \times n) \text{ — матрица} \\ \hat{P} = W_2 W_1^T + r(K K^T) & \end{array}$$

или, эквивалентно, в виде

$$v_1 = \tilde{P} a, \qquad n \text{ — вектор} \tag{3.5}$$

$$P_1 = \tilde{P} - K v_1^T, \qquad (n \times n) \text{ — матрица} \tag{3.6}$$

$$v_2 = P_1 a, \qquad\qquad n \text{ — вектор} \tag{3.7}$$

$$\hat{P} = (P_1 - v_2 K^T) + (rK)K^T. \tag{3.8}$$

В обоих способах можно экономить вычисления благодаря симметрии матрицы $\hat{P}$. Однако второй способ имеет на порядок меньше вычислений: в первом способе выполняется $1,5n^3 + 3n^2 + n$ умножений, а во втором только $4n^2 + 2n$ умножений.

Вариант 3. Квадратно-корневой ковариационный алгоритм (Поттера).

(i) Инициализация (начальные значения x_0, P_0):

$$\tilde{x} := x_0, \quad \tilde{S} := P_0^{1/2}.$$

(ii) Обработка наблюдений (очередные данные $z = a^T \bar{x} + v$):

$$f = \tilde{S}^T a, \quad \alpha = f^T f + r, \quad \gamma = 1/(1 + \sqrt{r/\alpha}), \tag{3.9}$$

$$K = \tilde{S} f/\alpha, \quad \hat{S} = \tilde{S} - \gamma K f^T, \tag{3.10}$$

$$\hat{x} = \tilde{x} + K(z - a^T \tilde{x}). \tag{3.11}$$

(iii) Экстраполяция (между повторениями этапа (ii)):

$$\tilde{S} := \hat{S}, \quad \tilde{x} := \hat{x}.$$

Замечание 3.3. Вариант 3, в котором вместо $\tilde{S} := \hat{S}$ предусмотрена процедура триангуляризации, $triang$, дает следующие подварианты: *Вариант 3.1*, обе матрицы $\tilde{S}$ и $\hat{S}$ нижние треугольные ($S \equiv L$), или *Вариант 3.2* обе матрицы $\tilde{S}$ и $\hat{S}$ верхние треугольные ($S \equiv U$).

Именно для этого этап (iii) должен содержать, вместо $\tilde{S} := \hat{S}$, процедуру триангуляризации, $\tilde{S} := triang\hat{S}$, матрицы $\hat{S}$. Возможны четыре алгоритма этой процедуры: (1) отражения Хаусхолдера, (2) вращения

Гивенса, (3) классическая Грама-Шмидта ортогонализация и (4) модифицированная Грама-Шмидта ортогонализация (см. лабораторную работу №. 4). Соответственно этому, всего имеем 8 подвариантов для указанного варианта 3, сведенных в следующую таблицу:

triang	$S \equiv L$	$S \equiv U$
Хаусхолдер	3.1.1	3.2.1
Гивенс	3.1.2	3.2.2
ГШО	3.1.3	3.2.3
МГШО	3.1.4	3.2.4

Вариант 4. Факторизованный LDL^T-ковариационный алгоритм (Бирмана).

(i) Инициализация (начальные значения x_0, P_0):

$$\tilde{x} := x_0, \quad \tilde{L} := E, \quad \tilde{D} := P_0.$$

(ii) Обработка наблюдений (очередные данные $z = a^T \bar{x} + v$):

$$f = \tilde{L}^T a, \quad g = \tilde{D} f, \quad \tilde{\alpha} = r, \quad K^T = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \vdots & g_n \end{pmatrix}.$$

$$\alpha := \tilde{\alpha} + f_n g_n, \quad \gamma := 1/\alpha,$$

$$\hat{d}_n = \tilde{d}_n \tilde{\alpha} \gamma, \quad \tilde{\alpha} := \alpha.$$

Для $j = n-1, n-2, \ldots, 1$ выполнять

$$\lambda := -\gamma f_j, \quad \hat{l}_j := \tilde{l}_j + \lambda K,$$

$$K := K + \tilde{l}_j g_j, \quad \alpha := \tilde{\alpha} + f_j g_j,$$

$$\gamma := 1/\alpha, \quad \hat{d}_j = \tilde{d}_j \tilde{\alpha} \gamma, \quad \tilde{\alpha} := \alpha.$$

По завершении цикла выполнить

$$\hat{x} := \tilde{x} + K\gamma(z - a^T \tilde{x}).$$

(iii) Экстраполяция (между повторениями этапа (ii)):

$$\tilde{L} := \hat{L}, \quad \tilde{D} := \hat{D}, \quad \tilde{x} := \hat{x}.$$

Замечание 3.4. Выше приведен LDL^T — факторизованный алгоритм. Рациональное программирование должно экономить память компьютера: здесь можно записывать $\hat{D}$ поверх $\tilde{D}$ и столбцы $\hat{L}$ поверх столбцов $\tilde{L}$ (при этом нужна только поддиагональная часть этих столбцов, обозначенных в алгоритме как $\hat{l}_j$ и $\tilde{l}_j$).

Вариант 5. Факторизованный UDU^T — ковариационный алгоритм (Бирмана). Выведите его самостоятельно аналогично алгоритму варианта 4.

Вариант 6. Факторизованный UU^T — ковариационный алгоритм (Карлсона).

(i) Инициализация (начальные значения x_0, P_0):

$$\tilde{x}_0 := x_0, \quad \tilde{U} := P_0^{1/2}.$$

(ii) Обработка наблюдений (очередные данные $z = a^T\hat{x} + v$):

$$f = \tilde{U}^T a, \quad f^T = (f_1, \ldots, f_n),$$

$$\alpha_0 = r, \quad K_1^T = \left(\tilde{U}_{11} f_1 \ \vdots \ 0 \ \ldots \ 0 \right).$$

Для $j = 1, \ldots, n$ выполнять

$$\alpha_j = \alpha_{j-1} + f_j^2,$$

$$\beta_j = (\alpha_{j-1}/\alpha_j)^{1/2}, \quad \gamma_j = f_j/(\beta_j \alpha_j), \quad \hat{U}_{jj} = \beta_j \tilde{U}_{jj},$$

$$\hat{U}_{ij} = \beta_j \tilde{U}_{ij} - \gamma_j K_j(i), \quad i = 1, 2, \ldots, j-1, \quad j \neq 1,$$

$$K_{j+1}(i) = K_j(i) + f_j \tilde{U}_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, j.$$

По завершении цикла выполнить

$$K = K_{n+1}/\alpha_n, \quad \hat{x} := \tilde{x} + K(z - a^T\tilde{x}).$$

Вариант 7. Факторизованный LL^T — ковариационный алгоритм (Карлсона). Выведите его самостоятельно аналогично алгоритму варианта 6 или же как следствие алгоритма варианта 4.

Вариант 8. Редуцированный стандартный ковариационный алгоритм (Бар-Ицхака-Калмана).

Замечание 3.5. В этом варианте используются только способы 2 и 4 генерации матрицы A (см. выше п. 2).

Инициализация и обработка первых n наблюдений выполняются, как в варианте 1. После этого каждое очередное наблюдение имеет вид $z = {a^{(q)}}^T \bar{x}^{(q)} + v$, так как $a^T = \left[\, {a^{(q)}}^T \;\vdots\; 0 \,\right]$ и $\bar{x}^T = \left[\, {\bar{x}^{(q)}}^T \;\vdots\; {\bar{x}^{(s)}}^T \,\right]$, где $s = n - q$. Вектор $\bar{x}$, так же как и соответствующие ему векторы x, $\tilde{x}$, $\hat{x}$, разбиты на две части вида: $\bar{x}^{(q)}$ размерности q и $\bar{x}^{(s)}$ размерности s.

(ii) Обработка наблюдений (очередные данные $z = {a^{(q)}}^T \bar{x}^{(q)} + v$):

$$\alpha = {a^{(q)}}^T \tilde{P}^{(qq)} a^{(q)} + r, \quad K^{(q)} = \tilde{P}^{qq} a^{(q)} / \alpha, \tag{3.12}$$

$$\hat{P}^{(qq)} = \tilde{P}^{(qq)} - K^{(q)} {a^{(q)}}^T \tilde{P}^{(qq)}, \tag{3.13}$$

$$\hat{x}^{(q)} = \tilde{x}^{(q)} + K^{(q)} (z - {a^{(q)}}^T \tilde{x}^{(q)}), \tag{3.14}$$

$$K^{(sq)} = \tilde{P}^{(sq)} (\tilde{P}^{(qq)})^{-1}, \tag{3.15}$$

$$\hat{P}^{(sq)} = K^{(sq)} \hat{P}^{(qq)}, \tag{3.16}$$

$$\hat{P}^{(ss)} = \tilde{P}^{(ss)} - K^{(sq)} (\tilde{P}^{(qq)} - \hat{P}^{(qq)}) (K^{(sq)})^T, \tag{3.17}$$

$$\hat{x}^{(s)} = \tilde{x}^{(s)} + K^{(sq)} (\hat{x}^{(q)} - \tilde{x}^{(q)}). \tag{3.18}$$

Здесь одинарный верхний индекс в скобках указывает размерность вектора, а двойной верхний индекс в скобках указывает размер матрицы. Матрицы $\hat{P}$ и $\tilde{P}$ из варианта 1 здесь разбиты на блоки по схеме:

$$P = \begin{bmatrix} P^{(qq)} & P^{(qs)} \\ P^{(sq)} & P^{(ss)} \end{bmatrix}, \qquad P = P^T.$$

Замечание 3.6. Формулы (3.12) – (3.14) совпадают с (3.1), (3.2), но применяются к векторам и матрицам меньших размеров, а формулы (3.15) – (3.18) являются специфическими для данного алгоритма.

Вариант 9. Редуцированный стабилизированный ковариационный алгоритм (Бар-Ицхака-Джозефа). Как и в варианте 8, здесь применяется декомпозиция, т.е. разбиение на блоки векторов и матриц, что выделяет редуцированную часть, наподобие (3.12) – (3.14), алгоритма и специфическую часть, наподобие (3.15) – (3.18). Весь алгоритм (3.12) – (3.14) здесь сохраняется, кроме формулы (3.13), которая заменяется формулой типа (3.4) – для редуцированной части алгоритма, и реализуется экономичным способом (3.5) – (3.8). Действует замечание 3.5, но для инициализации и обработки первых n измерений используется алгоритм варианта 2.

Вариант 10. Редуцированный квадратно-корневой алгоритм (Бар-Ицхака-Поттера), с нижнетреугольным разложением, $S \equiv L$. За основу берется алгоритм варианта 8, но в нем редуцированная стандартная часть (3.12) – (3.14) заменяется на редуцированную размера $q \times q$ часть по типу алгоритма (3.9) – (3.11). В специфической части формулы (3.15) – (3.17) заменяются соответственно на следующие выражения:

$$K^{(sq)} = \tilde{L}^{(sq)}(\tilde{L}^{(qq)})^{-1}, \tag{3.19}$$

$$\hat{L}^{(sq)} = K^{(sq)}\hat{L}^{(qq)}, \tag{3.20}$$

$$\hat{L}^{(ss)} = \tilde{L}^{(ss)}, \tag{3.21}$$

а (3.18) сохраняется. Этап (iii), экстраполяция, выполняется как в алгоритме Поттера, вариант 3, при этом

$$S \equiv L = \begin{bmatrix} L^{(qq)} & 0 \\ L^{(sq)} & L^{(ss)} \end{bmatrix}$$

и $L^{(qq)}$, $L^{(ss)}$ — нижние треугольные матрицы (с верхним знаком $\tilde{}$ или $\hat{}$). Действует замечание 3.5, но для инициализации и обработки первых

n измерений используется алгоритм варианта 3.

Вариант 11. Редуцированный квадратно-корневой алгоритм (Бар-Ицхака-Бирмана-Медана), с $P = LDL^T$-разложением, как в алгоритме Бирмана (вариант 4).

Здесь используется декомпозиция вида:

$$P = \begin{bmatrix} P^{(qq)} & (P^{(sq)})^T \\ P^{(sq)} & P^{(ss)} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L^{(qq)} & 0 \\ L^{(sq)} & L^{(ss)} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D^q & 0 \\ 0 & D^s \end{bmatrix},$$

где L — нижния треугольная с единичной диагональю матрица, D — диагональная матрица. Действует замечание 3.5 (см. вариант 8), но для инициализации и обработки первых n наблюдений используется алгоритм варианта 4. Для обработки каждого из остальных измерений применяется следующий алгоритм:

(1) Выполнить алгоритм (ii) из варианта 4, но в применении к векторам размерности q и матрицам размера $(q \times q)$, т.е. по данным z, $a^{(q)}$, $\tilde{L}^{(qq)}$, $\tilde{D}^{(q)}$, $\tilde{x}^{(q)}$ найти $\hat{L}^{(qq)}$, $\hat{D}^{(q)}$, $\hat{x}^{(q)}$.

(2) Вычислить

$$K^{(sq)} = \tilde{L}^{(sq)}(\tilde{L}^{(qq)})^{-1},$$

$$\hat{L}^{(sq)} = K^{(sq)}\hat{L}^{(qq)},$$

$$\hat{L}^{(ss)} = \tilde{L}^{(ss)}, \quad \hat{D}^{(s)} = \tilde{D}^{(s)},$$

$$\hat{x}^{(s)} = \tilde{x}^{(s)} + K^{(sq)}(\hat{x}^{(q)} - \tilde{x}^{(q)}),$$

Вариант 12. Редуцированный квадратно-корневой ковариационный алгоритм (Бар-Ицхака-Карлсона). Действует замечание 3.5, но для инициализации и обработки первых n измерений используется алгоритм варианта 7. Для обработки остальных измерений применяется следующий алгоритм:

(1) Выполнить алгоритм (ii) из варианта 7 (который следует вывести самостоятельно, наподобие этапа (ii) из алгоритма варианта 6), но в применении к векторам размерности q и матрицам размера $(q \times q)$, т.е. по данным z, $a^{(q)}$, $\tilde{L}^{(qq)}$, $\tilde{x}^{(q)}$ найти $\hat{L}^{(qq)}$, и $\hat{x}^{(q)}$.

(2) Вычислить матрицы по выражениям (3.19) — (3.21) и вектор $\hat{x}^{(s)}$ по выражению (3.18).

Вариант 13. Стандартный информационный алгоритм.

(i) Инициализация (начальные значения x_0, Λ_0):

$$d_0 = \Lambda_0 x_0; \quad \left(\Lambda \ \vdots \ d \right) := \left(\Lambda_0 \ \vdots \ d_0 \right).$$

(ii) Обработка наблюдений (очередные данные $z = a^T \bar{x} + v$):

$$\left(\Lambda \ \vdots \ d \right) := \left(\Lambda \ \vdots \ d \right) + a \left(a^T \ \vdots \ z \right) / r.$$

(iii) Выдача результата: $\hat{x} = \Lambda^{-1} d$.

В качестве начальных значений рекомендуется взять $x_0 = 0$, $\Lambda_0 = 0$.

Вариант 14. Квадратно-корневой информационный алгоритм.

(i) Инициализация (начальные значения $\tilde{R}_0$, x_0):

$$\tilde{z}_0 = \tilde{R}_0 x_0; \quad [\hat{R}_0 \hat{z}_0] = [\tilde{R}_0 \tilde{z}_0].$$

(ii) Обработка наблюдений (очередные данные $z = a^T \bar{x} + v$):

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_j & \hat{z}_j \\ 0 & e \end{bmatrix} = T_j \begin{bmatrix} \hat{R}_{j-1} & \hat{z}_{j-1} \\ a^T & z \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

где T_j — ортогональная матрица, которая выбирается так, чтобы привести к верхнетреугольному виду расширенную матрицу $\begin{bmatrix} \hat{R}_{j-1} \\ a^T \end{bmatrix}$, j — номер очередного измерения, все матрицы R здесь имеют размер $(n \times n)$, все R_j, $j \geq 1$, верхние треугольные.

(iii) Выдача результата: $\hat{x} = \hat{R}_j^{-1} \hat{z}_j$.

Начальные значения рекомендуется взять в виде $x_0 = 0$, $\tilde{R}_0 = 0$. В качестве преобразований T_j возможны четыре процедуры, указанные в описании варианта 3. Соответственно этому всего имеем 4 разновидности данного варианта 14:

T_j	вариант
Хаусхолдер	14.1
Гивенс	14.2
ГШО	14.3
МГШО	14.4

КОНТРОЛЬНЫЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Целью настоящего раздела является формирование и проверка у студентов, изучающих курс “ Численные методы”, базовых навыков в области решения задач вычислительной линейной алгебры. Предлагаемые ниже задачи охватывают широкий спектр направлений и затрагивают тематику, связанную с методом исключения переменных Гаусса, с методами ортогонального разложения матриц, с итерационными методами решения систем линейных алгебраических уравнений, включая методы вариационного типа. Приводимые ниже задачи могут быть использованы как для обучения студентов, так и для проведения контрольных, тестовых работ, а также для проверки практических навыков студентов во время экзамена. Изложенный материал позволяет не только проверить знание базовых алгоритмов в области вычислительной линейной алгебры, но и определить уровень владения вычислительной техникой для решения тех или иных прикладных задач. Большое разнообразие задач создает возможность формирования индивидуального задания для каждого студента.

1. Типовые экзаменационные задачи

Итак, начнем с разбора типовых задач. В соответствии с вышесказанным, настоящее учебное пособие содержит задачи по следующим пяти темам: метод исключения Гаусса, итерационные методы, итерационные методы вариационного типа, разложение Холесского для симметричных положительно определенных матриц и методы ортогонального разложения.

Задача 1 (см. ниже) является типичным представителем задач на метод Гаусса исключения неизвестных. Целью задачи является проверка знания базовых алгоритмов для разложения невырожденной матрицы в произведение нижней и верхней треугольных, а также для решения системы линейных уравнений с разложенной матрицей коэффициентов и обращения матрицы. Разнообразие задач достигается за счет вовлечения различных вариантов разложения (см. лабораторную работу No. 1) и использования разных исходных матриц.

Задача 1

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. *Построить $\bar{L}U$-разложение матрицы A ($\bar{L}$ с единицами на главной диагонали).*

б. *С помощью $\bar{L}U$-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений*

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (0, 3, 1)^T$.

в. *С помощью $\bar{L}U$-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}$, $x \in R^3$.*

Задача 2 является типичным представителем задач на итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Целью задачи является проверка знания базовых итерационных алгоритмов, а также необходимых и достаточных условий их сходимости и критериев для оценки точности решения. Разнообразие задач достигается за счет вовлечения различных итерационных методов, изучаемых в курсе “ Численные методы”, и использования разных исходных матриц.

Задача 2

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (4, 2, -1)^T$, *выполнить:*

а. *Сформулировать метод Зейделя в координатном и каноническом виде.*

б. *Определить является ли он сходящимся с нулевым начальным приближением, т.е.* $x^0 = (0, 0, 0)^T$*? Ответ обосновать.*

в. *Вычислить две итерации по методу Зейделя и найти апостериорную оценку ошибки на каждой из них в норме* $\| \cdot \|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in R^3$.

Следующая задача 3 посвящена итерационным методам вариационного типа. Ее целью является проверка знания алгоритмов построения итерационных методов вариационного типа, формул для вычисления оптимального итерационного параметра и критериев для оценки точности решения. Разнообразие задач достигается за счет вовлечения различных способов построения итерационных методов вариационного типа, изучаемых в курсе “ Численные методы”, и использования разных исходных матриц.

Задача 3

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (4, 2, -1)^T$, *выполнить:*

а. *На основе метода Зейделя сформулировать неявный метод скорейшего спуска в каноническом виде.*

б. *Определить оптимальный параметр* τ_1 *для нулевого начального приближения, т.е.* $x^0 = (0, 0, 0)^T$*?*

в. *Вычислить одну итерацию и найти апостериорную оценку ошибки в норме* $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in R^3$.

Задача 4 является типичным представителем задач на разложение Холесского для симметричных положительно определенных матриц. Целью задачи является проверка знания базовых алгоритмов Холесского для разложения симметричной положительно определенной матрицы, а также способов решения системы линейных уравнений с разложенной матрицей коэффициентов и нахождения квадратичных форм. Разнообразие задач достигается за счет вовлечения различных вариантов разложения Холесского (см. лабораторную работу No. 3) и использования разных исходных матриц.

Задача 4

Для матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 3 & 10 \\ -10 & 105 & -8 & 25 \\ 3 & -8 & 1 & 0 \\ 10 & 25 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. *Построить UDU^T - разложение матрицы P (U – верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали, D – диагональная матрица с положительными элементами на диагонали).*

б. *С помощью UDU^T - разложения матрицы P решить систему*

$$Px = b,$$

с вектором $b = (21, 112, -4, 60)^T$.

в. *С помощью разложения и решения системы найти величину квадратичной формы $J(x) = x^T P x$, где x – решение из п.б.*

Последняя задача этого раздела, задача 5, посвящена соответственно последней теме, а именно, — методам ортогонального разложения матриц. Целью настоящей задачи является проверка базовых знаний по алгоритмам ортогонального разложения матрицы, а также по способам решения системы линейных уравнений с разложенной матрицей коэффициентов и обращения матрицы. Разнообразие задач достигается за счет вовлечения различных вариантов ортогонального разложения (см. лабораторную работу No. 4) и использования разных исходных матриц.

Задача 5

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -2 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. *Построить QR-разложение матрицы A с помощью преобразований отражения Хаусхолдера (или плоских вращений Гивенса).*

б. *С помощью QR-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений*

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (-3, 1, 8)^T$.

в. *С помощью QR-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме* $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}$, $x \in R^3$.

2. Ответы и рекомендации к типовым экзаменационным задачам

Задача 1

а. Используя метод исключения переменных Гаусса, нетрудно получить

$$\bar{L}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

б. Решая две линейные системы с треугольными матрицами, получаем

$$x = (1, -1, -1)^T.$$

в. Три раза решая линейные системы с правой частью в виде столбцов единичной матрицы, получаем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.25 & 0.25 \\ -1.00 & 0.00 & -1.00 \\ 2.00 & -0.50 & 0.50 \end{pmatrix}, \quad M_A = 9 \cdot 3 = 27.$$

Задача 2

а. Метод Зейделя в координатном и каноническом виде:

$$x_1^{n+1} = 0.2x_2^n + 0.8,$$

$$x_2^{n+1} = 0.25x_1^{n+1} - 0.25x_3^n + 0.5,$$

$$x_3^{n+1} = -0.5x_2^{n+1} - 0.5;$$

$$(D + A_1)(x^{n+1} - x^n) + Ax^n = b, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где

$$D + A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

б. Метод сходится. Для доказательства нужно воспользоваться теоремой о необходимом и достаточном условии сходимости одношагового стационарного итерационного метода.

в. Используя метод Зейделя в координатном виде, вычисляем необходимые итерации, а воспользовавшись формулой для апостериорной оценки точности, находим норму ошибки на этих итерациях.

$$x^1 = (0.80, 0.70, -0.85)^T, \quad \|\triangle x^1\|_\infty \leq 0.36,$$

$$x^2 = (0.94, 0.95, -0.98)^T, \quad \|\triangle x^2\|_\infty \leq 0.1.$$

Задача 3

а. Неявный метод скорейшего спуска в каноническом виде:

$$B\frac{(x^{n+1} - x^n)}{\tau_{n+1}} + Ax^n = b, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $\tau_{n+1} = \frac{(r^n, w^n)}{(Aw^n, w^n)}$, а $w^n = B^{-1}r^n$ и $r^n = Ax^n - b$,

$$B = D + A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

б. Используя формулу для вычисления оптимального итерационного параметра метода скорейшего спуска, получаем

$$\tau_1 = 1.27.$$

в. Записывая метод скорейшего спуска в координатном виде, вычисляем первую итерацию для оптимального парамера, найденного в п. б., а воспользовавшись формулой для апостериорной оценки точности, находим норму ошибки на этой итерации.

$$x^1 = (1.02, 0.89, -1.08)^T, \quad \|\triangle x^1\|_\infty \leq 1.17.$$

Задача 4

а. По алгоритму разложения Холесского без квадратных корней находим

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 3 & 2/5 \\ 0 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

б. Вместо исходной системы $Px = b$ решаем последовательно три системы: $Uw = b$, $Dy = w$ и $U^T = y$. Отсюда находим w, y и затем $x = (1, 1, 1, 1)^T$.

в. Имеем $J(x) = y^T w$. Используя найденные ранее w и y, получим $J(x) = 189$.

Задача 5 (метод отражений)

а. По первому столбцу данной матрицы находим $u_1 = (4, -2, -2)^T$ и выполняем операцию отражения для вектора y по формуле $y_r = y - \gamma u$, где в качестве y берем сначала второй столбец и затем третий столбец матрицы A, $u = u_1$ и $\gamma = 2y^T u / u^T u$. Попутно находим матрицу T_1 первой операции отражения. Фиксируем результат этой операции. Далее аналогично проводим вторую операцию отражения, для которой $u_2 = 4(2, 1)^T$. Произведение двух матриц отражения, T_1 и

T_2, даст матрицу T полной операции приведения матрицы A к верхнетреугольному виду $R = TA$. Отсюда $Q = T^T$ и

$$QR = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -5 & -14 & -2 \\ 10 & -2 & -11 \\ 10 & -5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

где множитель $\frac{1}{15}$ относится к матрице Q.

б. Вместо исходной системы решаем эквивалентную систему $Rx = b'$, где $b' = Tb$. Отсюда $x = (1, 1, 1)^T$.

в. Обратную матрицу $X = A^{-1}$ находим в результате решения системы $RX = T$:

$$A^{-1} = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 39 & -48 & 30 \\ 12 & -9 & 15 \\ -2 & -11 & 10 \end{pmatrix}, \quad M_A = 12 \cdot 117/75 = 18.72.$$

Задача 5 (метод вращений)

а. Выполняем вращение в плоскости (e_1, e_2) с матрицей

$$P_{12} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c = 1/\sqrt{5}, \quad s = -2/\sqrt{5},$$

$$P_{12}A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} & -3\sqrt{5} \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выполняем вращение в плоскости (e_1, e_3) с матрицей

$$P_{13} = \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad c = \sqrt{5}/3, \quad s = -2/3,$$

$$P_{13}(P_{12}A) = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -2 \\ 0 & 2\sqrt{5} & -3\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Выполняем вращение в плоскости (e_2, e_3) с матрицей

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}, \qquad c = 2/\sqrt{5}, \quad s = 1/\sqrt{5},$$

$$P_{23}(P_{13}(P_{12}A)) = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = R,\ A = QR,$$

$$Q = P^T = (P_{23}P_{13}P_{12}) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 14 & -2 \\ -10 & 2 & -11 \\ -10 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

б. Совпадает с решением задачи 5 по методу отражений.

в. Совпадает с решением задачи 5 по методу отражений.

3. Варианты тестовых контрольных заданий

Вариант I

Задание 1. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить $\bar{L}U$-разложение матрицы A ($\bar{L}$ с единицами на главной диагонали).

б. С помощью $\bar{L}U$-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (-2, -1, -5)^T$.

в. С помощью $\bar{L}U$-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задание 2. Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -1 \\ -6 & 20 & 4 \\ 2 & -3 & -10 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (-4, 22, 5)^T$, выполнить:

а. Выписать метод Якоби в координатном и каноническом виде.

б. Определить является ли он сходящимся с нулевым начальным приближением, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$? Ответ обосновать.

в. Вычислить две итерации по методу Якоби и найти апостериорную оценку ошибки на каждой из них в норме $\|\cdot\|_\infty$.

Задание 3. Для матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & 0 & 8 \\ -2 & 0 & 17 & -10 \\ 3 & 8 & -10 & 15 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить LL^T - разложение матрицы P (L – нижняя треугольная матрица с положительными элементами главной диагонали).

б. С помощью LL^T - разложения матрицы P решить систему

$$Px = b,$$

с вектором $b = (4, 18, 5, 16)^T$.

в. С помощью разложения и решения системы по пп. а,б найти величину квадратичной формы $J(x) = x^T P x$, где x – решение из п.б.

Задание 4. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 6 & -7 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить QR-разложение матрицы A с помощью преобразований отражения Хаусхолдера (или вращений Гивенса).

б. С помощью QR-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (5, -15, -8)^T$.

в. С помощью QR-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\| \cdot \|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3} \{|x_i|\}, x \in \mathrm{R}^3$.

Вариант II

Задание 1. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить $\bar{U}L$-разложение матрицы A ($\bar{U}$ с единицами на главной диагонали).

б. С помощью $\bar{U}L$-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (8, 0, 1)^T$.

в. С помощью $\bar{U}L$-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, x \in \mathrm{R}^3$.

Задание 2. Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (-1, 3, 7)^T$, выполнить:

а. Выписать метод Зейделя в координатном и каноническом виде.

б. Определить является ли он сходящимся с нулевым начальным приближением, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$? Ответ обосновать.

в. Вычислить две итерации по методу Зейделя и найти апостериорную оценку ошибки на каждой из них в норме $\|\cdot\|_\infty$.

Задание 3. Для матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 15 & 3 & -12 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \\ -12 & 4 & 13 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить UU^T - разложение матрицы P (U – верхняя треугольная матрица с положительными элементами главной диагонали).

б. С помощью UU^T - разложения матрицы P решить систему

$$Px = b,$$

с вектором $b = (12, 17, 3, 3)^T$.

в. С помощью разложения и решения системы по пп. а,б найти величину квадратичной формы $J(x) = x^T Px$, где x – решение из п.б.

Задание 4. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 1 \\ -2 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить QR-разложение матрицы A с помощью преобразований отражения Хаусхолдера (или вращений Гивенса).

б. С помощью QR-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (6, 3, 12)^T$.

в. С помощью QR-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\| \cdot \|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3} \{|x_i|\}, x \in \mathrm{R}^3$.

Вариант III

Задание 1. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить $L\bar{U}$-разложение матрицы A ($\bar{U}$ с единицами на главной диагонали).

б. С помощью $L\bar{U}$-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (3, 7, 13)^T$.

в. С помощью $L\bar{U}$-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, x \in \mathrm{R}^3$.

Задание 2. Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 1 \\ 2 & -20 & 4 \\ -3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (16, 50, 15)^T$, выполнить:

а. Выписать метод Якоби в координатном и каноническом виде.

б. Определить является ли он сходящимся с нулевым начальным приближением, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$? Ответ обосновать.

в. Вычислить две итерации по методу Якоби и найти апостериорную оценку ошибки на каждой из них в норме $\|\cdot\|_\infty$.

Задание 3. Для матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \\ -2 & 0 & 15 & -8 \\ 3 & 8 & -8 & 24 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить LDL^T - разложение матрицы P (L – нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали, D – диагональная матрица с положительными элементами на диагонали).

б. С помощью LDL^T - разложения матрицы P решить систему

$$Px = b,$$

с вектором $b = (4, 16, 5, 27)^T$.

в. С помощью разложения и решения системы найти величину квадратичной формы $J(x) = x^T P x$, где x – решение из п.б.

Задание 4. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & 4 & -7 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить QR-разложение матрицы A с помощью преобразований отражения Хаусхолдера (или вращений Гивенса).

б. С помощью QR-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (8, -1, 8)^T$.

в. С помощью QR-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\| \cdot \|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3} \{|x_i|\}, x \in \mathrm{R}^3$.

Вариант IV

Задание 1. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 14 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить $U\bar{L}$-разложение матрицы A ($\bar{L}$ с единицами на главной диагонали).

б. С помощью $U\bar{L}$-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (-6, -22, -8)^T$.

в. С помощью $U\bar{L}$-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, x \in \mathrm{R}^3$.

Задание 2. Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (0, 7, 0)^T$, выполнить:

а. Выписать метод Зейделя в координатном и каноническом виде.

б. Определить является ли он сходящимся с нулевым начальным приближением, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$? Ответ обосновать.

в. Вычислить две итерации по методу Зейделя и найти апостериорную оценку ошибки на каждой из них в норме $\|\cdot\|_\infty$.

Задание 3. Для матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 30 & -5 & -12 & 3 \\ -5 & 15 & 4 & 1 \\ -12 & 4 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить UDU^T - разложение матрицы P (U – верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали, D – диагональная матрица с положительными элементами на диагонали).

б. С помощью UDU^T - разложения матрицы P решить систему

$$Px = b,$$

с вектором $b = (16, 15, -3, 3)^T$.

в. С помощью разложения и решения системы найти величину квадратичной формы $J(x) = x^T P x$, где x – решение из п.б.

Задание 4. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить QR-разложение матрицы A с помощью преобразований отражения Хаусхолдера (или вращений Гивенса).

б. С помощью QR-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (-1, -3, 4)^T$.

в. С помощью QR-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\| \cdot \|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3} \{|x_i|\}, x \in \mathrm{R}^3$.

4. Экзаменационные контрольные задачи

Задача 1

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить $\bar{L}U$-разложение матрицы A ($\bar{L}$ с единицами на главной диагонали).

б. С помощью $\bar{L}U$-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (0, 0, -3)^T$.

в. С помощью $\bar{L}U$-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\| \cdot \|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3} \{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 2

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -5 & -10 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить $\bar{U}L$-разложение матрицы A ($\bar{U}$ с единицами на главной диагонали).

б. С помощью $\bar{U}L$-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (10, -16, 5)^T$.

в. С помощью $\bar{U}L$-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 3

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить $L\bar{U}$-разложение матрицы A ($\bar{U}$ с единицами на главной диагонали).

б. С помощью $L\bar{U}$-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (0, -2, -2)^T$.

в. С помощью $L\bar{U}$-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 4

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить $U\bar{L}$-разложение матрицы A ($\bar{L}$ с единицами на главной диагонали).

б. С помощью $U\bar{L}$-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (5, 2, 0)^T$.

в. С помощью $U\bar{L}$-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\| \cdot \|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3} \{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 5

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить $L\bar{U}^{-1}$-разложение матрицы A ($\bar{U}^{-1}$ с единицами на главной диагонали).

б. С помощью $L\bar{U}^{-1}$-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (0, -1, -2)^T$.

в. С помощью $L\bar{U}^{-1}$-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\| \cdot \|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3} \{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 6

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить $\bar{L}^{-1}U$-разложение матрицы A ($\bar{L}^{-1}$ с единицами на главной диагонали).

б. С помощью $\bar{L}^{-1}U$-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (-3, 0, 0)^T$.

в. С помощью $\bar{L}^{-1}U$-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 7

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 0.5 \\ 1 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (-18, 1, 18)^T$, выполнить:

а. Сформулировать метод Якоби в координатном и каноническом виде.

б. Определить является ли он сходящимся с нулевым начальным приближением, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$? Ответ обосновать.

в. Вычислить две итерации по методу Якоби и найти апостериорную оценку ошибки на каждой из них в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}$, $x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 8

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (5, -7, -19)^T$, выполнить:

а. Сформулировать метод Якоби в координатном и каноническом виде.

б. Определить является ли он сходящимся с нулевым начальным приближением, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$? Ответ обосновать.

в. Вычислить две итерации по методу Якоби и найти апостериорную оценку ошибки на каждой из них в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 9

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (-3, -2, -9)^T$, выполнить:

а. Сформулировать метод Зейделя в координатном и каноническом виде.

б. Определить является ли он сходящимся с нулевым начальным приближением, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$? Ответ обосновать.

в. Вычислить две итерации по методу Зейделя и найти апостериорную оценку ошибки на каждой из них в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 10

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (8, -4, 3)^T$, выполнить:

а. Сформулировать метод Зейделя в координатном и каноническом виде.

б. Определить является ли он сходящимся с нулевым начальным приближением, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$? Ответ обосновать.

в. Вычислить две итерации по методу Зейделя и найти апостериорную оценку ошибки на каждой из них в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 11

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (-9, 6, 0)^T$, выполнить:

а. Сформулировать метод минимальных невязок в каноническом виде.

б. Определить оптимальный параметр τ_1 для нулевого начального приближения, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$?

в. Вычислить одну итерацию и найти апостериорную оценку ошибки в норме $\| \cdot \|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 12

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (-9, 6, 0)^T$, выполнить:

а. Сформулировать явный метод скорейшего спуска в каноническом виде.

б. Определить оптимальный параметр τ_1 для нулевого начального приближения, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$?

в. Вычислить одну итерацию и найти апостериорную оценку ошибки в норме $\| \cdot \|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 13

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (11, 0, -8)^T$, выполнить:

а. Сформулировать метод минимальных невязок в каноническом виде.

б. Определить оптимальный параметр τ_1 для нулевого начального приближения, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$?

в. Вычислить одну итерацию и найти апостериорную оценку ошибки в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 14

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (11, 0, -8)^T$, выполнить:

а. Сформулировать явный метод скорейшего спуска в каноническом виде.

б. Определить оптимальный параметр τ_1 для нулевого начального приближения, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$?

в. Вычислить одну итерацию и найти апостериорную оценку ошибки в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 15

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (-3, -2, -9)^T$, выполнить:

а. На основе метода Зейделя сформулировать метод минимальных поправок в каноническом виде.

б. Определить оптимальный параметр τ_1 для нулевого начального приближения, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$?

в. Вычислить одну итерацию и найти апостериорную оценку ошибки в норме $\| \cdot \|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3} \{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 16

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (-3, -2, -9)^T$, выполнить:

а. На основе метода Зейделя сформулировать неявный метод скорейшего спуска в каноническом виде.

б. Определить оптимальный параметр τ_1 для нулевого начального приближения, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$?

в. Вычислить одну итерацию и найти апостериорную оценку ошибки в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 17

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (8, -4, 3)^T$, выполнить:

а. На основе метода Зейделя сформулировать метод минимальных поправок в каноническом виде.

б. Определить оптимальный параметр τ_1 для нулевого начального приближения, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$?

в. Вычислить одну итерацию и найти апостериорную оценку ошибки в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 18

Для системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

и вектор $b = (8, -4, 3)^T$, выполнить:

а. На основе метода Зейделя сформулировать неявный метод скорейшего спуска в каноническом виде.

б. Определить оптимальный параметр τ_1 для нулевого начального приближения, т.е. $x^0 = (0, 0, 0)^T$?

в. Вычислить одну итерацию и найти апостериорную оценку ошибки в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 19

Для матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 14 & -8 \\ 4 & 3 & -8 & 33 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить LL^T - разложение матрицы P (L – нижняя треугольная матрица с положительными элементами главной диагонали).

б. С помощью LL^T - разложения матрицы P решить систему

$$Px = b,$$

с вектором $b = (4, -10, 27, -40)^T$.

в. С помощью разложения и решения системы по пп. а,б найти величину квадратичной формы $J(x) = x^T P x$, где x – решение из п.б.

Задача 20

Для матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 3 & 4 \\ 7 & 30 & -6 & 10 \\ 3 & -6 & 9 & 0 \\ 4 & 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить UU^T - разложение матрицы P (U – верхняя треугольная матрица с положительными элементами главной диагонали).

б. С помощью UU^T - разложения матрицы P решить систему

$$Px = b,$$

с вектором $b = (4, -7, 0, -2)^T$.

в. С помощью разложения и решения системы по пп. а,б найти величину квадратичной формы $J(x) = x^T P x$, где x – решение из п.б.

Задача 21

Для матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 14 & -8 \\ 4 & 3 & -8 & 33 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить LDL^T - разложение матрицы P (L – нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали, D – диагональная матрица с положительными элементами на диагонали).

б. С помощью LDL^T - разложения матрицы P решить систему

$$Px = b,$$

с вектором $b = (8, 0, 5, 32)^T$.

в. С помощью разложения и решения системы найти величину квадратичной формы $J(x) = x^T P x$, где x – решение из п.б.

Задача 22

Для матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 14 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 10 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить UDU^T - разложение матрицы P (U – верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали, D – диагональная матрица с положительными элементами на диагонали).

б. С помощью UDU^T - разложения матрицы P решить систему

$$Px = b,$$

с вектором $b = (19, -9, -5, -5)^T$.

в. С помощью разложения и решения системы найти величину квадратичной формы $J(x) = x^T P x$, где x – решение из п.б.

Задача 23

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -2 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить QR-разложение матрицы A с помощью преобразований отражения Хаусхолдера (или вращений Гивенса).

б. С помощью QR-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (8, 9, 4)^T$.

в. С помощью QR-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 24

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить QR-разложение матрицы A с помощью преобразований отражения Хаусхолдера (или вращений Гивенса).

б. С помощью QR-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (-4, 13, -9)^T$.

в. С помощью QR-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 25

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить QR-разложение матрицы A с помощью преобразований отражения Хаусхолдера (или вращений Гивенса).

б. С помощью QR-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (-16, -7, -18)^T$.

в. С помощью QR-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

Задача 26

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

выполнить:

а. Построить QR-разложение матрицы A с помощью преобразований отражения Хаусхолдера (или вращений Гивенса).

б. С помощью QR-разложения матрицы A решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где вектор $b = (3, -1, 7)^T$.

в. С помощью QR-разложения найти матрицу A^{-1} и число обусловленности матрицы A (M_A) в норме $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,3}\{|x_i|\}, \quad x \in \mathrm{R}^3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. - М.: Наука, 1977. - 304 с.

[2] *Беклемишев Д.В.* Дополнительные главы линейной алгебры. - М.: Наука, 1983. - 336 с.

[3] *Ортега Дж.* Введение в параллельные и векторныа методы решения линейных систем. - М.: Мир, 1991. - 367 с.

[4] *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. - М., 1988. - 410 с.

[5] *Размыслов Ю.П., Ищенко С.Я.* Практикум по вычислительным методам алгебры. - М.: Изд-во МГУ, 1989. - 183 с.

[6] *Райс Дж.* Матричные вычисления и математическое обеспечение. - М.: Мир, 1984. - 264 с.

[7] *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. - М.: Наука, 1989. - 432 с.

[8] *Тьюарсон Р.* Разреженные матрицы. - М.: Мир, 1977. - 190 с.

[9] *Фаддеев Д.К., Фадеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: Физматгиз, 1963. - 734 с.

[10] *Ортега Дж., Пул.У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. - М.:Наука, 1986. - 228 с.

[11] *Blerman G.J.* Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation. - N.-Y.: Academic Press, 1977. - 241 p.

Учебное издание

Семушин Иннокентий Васильевич

Куликов Геннадий Юрьевич

Сборник лабораторных работ и контрольных, тестовых заданий по курсу "Вычислительная линейная алгебра"

Учебное пособие

Редактор Н.А. Евдокимова

Оригинал-макет изготовлен в системе LaTeX.

Изд. лиц. 020640 от 22.10.97. Подписано в печать 23.06.00 Формат 60×84/16. Бумага писчая. Усл. печ. л. 6,98. Уч.-изд. л. 6,20. Гарнитура Computer Modern. Печать трафаретная. Тираж 200 экз. Заказ 948.

Ульяновский государственный технический университет

432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32. Типография УлГТУ, 432027,

Ульяновск, Сев. Венец, 32.