Система дистанционного обучения

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

УЧЕБНЫЙ МАТЕРИАЛ

Владивосток
ДВГАЭУ
2001

Экономико-математические методы. Математические методы и модели в экономике. Раздаточный материал/ сост. Аксенова Р.Н.- Владивосток, ДВГАЭУ, 2001.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. ВВЕДЕНИЕ

Существует множество форм деятельности предприятий, которые связаны с распределением ресурсов. Эти ресурсы включают труд, сырье, оборудование и денежные средства. Иногда процесс распределения ресурсов называют программированием. Поскольку обычно размеры ресурсов ограничены, возникают определенные проблемы. Если компания выпускает продукцию нескольких видов с использованием одного и того же оборудования и трудовых ресурсов, то ее администрация должна решить, какое количество продукции каждого вида производить. Принятое решение будет направлено на удовлетворение определенной цели администрации. Администрация может задаться целью наладить производство таким образом, чтобы максимизировать общий выпуск продукции за месяц, максимизировать время использования оборудования за неделю или минимизировать еженедельные затраты труда. Переменные решения — это количество продукции каждого вида, которое необходимо произвести за данный период времени.

Аналогично, если компания обладает определенным капиталом для инвестирования ряда проектов, распределение денежных сумм по каждому проекту будет подчинено некоторой цели. Она может заключаться в минимизации риска или максимизации темпов роста капитала. Переменные решения в данном случае — это денежные суммы, помещаемые в каждый проект.

В общем случае цель состоит в определении наиболее эффективного метода такого распределения ресурсов по соответствующим переменным, которое оптимизирует некоторый результат функционирования системы. Очень часто полезным инструментом в процессе распределения ресурсов являются методы моделирования. Математическим программированием называется использование математических моделей и методов для решения проблем программирования. Существует ряд различных методов, основанных на идеях математического программирования, однако мы рассмотрим только один из них, который нашел наиболее широкое применение, — **линейное программирование**.

Линейное программирование является подходящим методом для моделирования распределения ресурсов, если цель и ограничения на ресурсы можно выразить количественно в форме линейных взаимосвязей между переменными. Этот метод включает в себя ряд шагов:

1. Необходимо осуществить математическую формализацию задачи линейного программирования. Это означает, что нужно идентифицировать управляемые переменные и цель задачи. Затем с помощью этих переменных цель и ограничения на ресурсы описываются в форме линейных соотношений.
2. После завершения формулировки задачи линейного программирования рассматриваются все допустимые сочетания переменных. Из них выбирается то, которое оптимизирует целевую функцию задачи. Если исследуемая задача содержит только две переменные, ее можно решить графически. Однако в случае исследования задачи со многими переменными необходимо прибегнуть к одному из алгебраических методов решения задач линейного программирования, для использования которых существуют пакеты прикладных программ.
3. Когда оптимальное решение получено, производится его оценка. Она включает в себя анализ задачи на чувствительность.

Решение задачи линейного программирования, как и любой иной математический инструмент, применяемый в теории принятия решений, является лишь одним из факторов, влияющих на конечное решение, принимаемое администрацией. Рассмотрение линейного программирования мы начнем с проблемы формулировки задачи.

1.2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Основная процедура является общей для формулирования всех задач линейного программирования:

Шаг 1. Определение переменных задачи, значения которых нужно получить в пределах существующих ограничений.

Шаг 2. Определение цели и ограничений на ресурсы.
Шаг 3. Описание цели через переменные задачи.
Шаг 4. Описание ограничений через переменные задачи.

Хотя на применение данной процедуры не влияет число переменных в задаче линейного программирования, рассмотрим сначала задачу с двумя переменными.

❑ **Пример 1.1.** Небольшая семейная фирма производит два широко популярных безалкогольных напитка — "Pink Fizz" и "Mint Pop". Фирма может продать всю продукцию, которая будет произведена, однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и" производственной мощностью имеющегося оборудования. Для производства 1 л "Pink Fizz" требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л "Mint Pop" — 0,04 ч. Расход специального ингредиента составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л "Pink Fizz" и "Mint Pop" соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента. Доход фирмы составляет 0,10 ф. ст. за 1 л "Pink Fizz" и 0,30 ф. ст. за 1 л "Mint Pop". Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель фирмы состоит в максимизации ежедневного дохода?

Решение

Шаг 1. Определение переменных. В рамках заданных ограничений фирма должна принять решение о том, какое количество каждого вида напитков следует выпускать. Пусть p — число литров "Pink Fizz", производимое за день. Пусть m — число литров "Mint Pop", производимое за день.

Шаг 2. Определение цели и ограничений. Цель состоит в максимизации ежедневного дохода. Пусть P — ежедневный доход, ф. ст. Он максимизируется в рамках ограничений на количество часов работы оборудования и наличие специального ингредиента.

Шаг 3- Выразим цель через переменные:

$$P = 0{,}10\ p + 0.30\ m \text{ (ф. ст. в день).}$$

Это целевая функция задачи — количественное соотношение, которое подлежит оптимизации.

Шаг 4. Выразим ограничения через переменные. Существуют следующие ограничения на производственный процесс:

а) Время работы оборудования. Для производства p литров "Pink Fizz" и m литров "MintPop" требуется: (0,02 p + 0,04 m) часов работы оборудования ежедневно. Максимальное время работы оборудования в день составляет 24 ч, следовательно, объем производства должен быть таким, чтобы число затраченных часов работы оборудования было меньше либо равно 24 ч ежедневно. Таким образом,

$$0{,}02\ p + 0.04\ m \leq 24 \text{ ч/день.}$$

б) Специальный ингредиент. Производство p литров "Pink Eizz" и m литров "Mint Pop" требует (0,01 p + 0,04 m) кг ингредиента ежедневно. Максимальный расход ингредиента составляет 16 кг в день, следовательно, объем производства должен быть таким, чтобы требуемое количество специального ингредиента составляло не более 16 кг в день. Таким образом,

$$0{,}01\ p + 0{,}04\ m \leq 16 \text{ кг/день.}$$

Других ограничений нет, однако разумно предположить, что фирма не может производить напитки в отрицательных количествах, поэтому:

в) Условие неотрицательности:

$$p \geq 0, m \geq 0.$$

Окончательная формулировка задачи линейного программирования имеет следующий вид. Максимизировать:

$$P = 0{,}10\ p + 0{,}30\ m \text{ (ф. ст. в день)}$$

при ограничениях:

время работы оборудования: $0{,}02\ p + 0{,}04\ m \leq 24$ ч/день;
специальный ингредиент: $0{,}01\ p + 0{,}04\ m \leq 16$ кг/день;

$$p, m \geq 0.$$

❑ **Пример 1.2**. Завод-производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей: X и Y. Завод располагает фондом рабочего времени в 4000 чел.-ч. в неделю. Для производства одной детали типа X требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа Y — 2 чел.-ч. Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей типа X и 1750 деталей типа Y в неделю. Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа Y необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла. Уровень запасов каждого вида металла составляет 10000 кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет 600 деталей типа X своему постоянному заказчику. Существует также профсоюзное соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук.

Сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю, если доход от производства одной детали типа X составляет 30 ф. ст., а от производства одной детали типа Y — 40 ф. ст.?

Решение

Сначала необходимо сформулировать задачу линейного программирования.

Шаг 1. Идентификация переменных. Необходимо произвести x деталей типа X и y деталей типа Y в неделю.

Шаг 2. Какова цель задачи? Каковы ограничения на процесс производства? Цель состоит в максимизации общего дохода за неделю. Производственный процесс ограничивается уровнем:

а) фонда рабочего времени — максимально возможный фонд рабочего времени составляет 4000 чел. -ч. в неделю.

б) производственной мощности — для каждого типа деталей существует отдельное ограничение по производственной мощности. Оборудование позволяет выпускать не более 2250 деталей типа X и 1750 типа Y в неделю.

в) металлических стержней — максимальный их уровень составляет 10000 кг в неделю.

г) листового металла — максимальный уровень этого ресурса равен 10000 кг в неделю.

Кроме того, существуют ограничения на минимальный объем производства деталей каждого вида:

а) постоянные заказы — число произведенных деталей X должно быть достаточным для удовлетворения размера постоянных заказов.

б) Профсоюзное соглашение —общее число деталей (x + y) не должно быть ниже объема, предусмотренного соглашением.

Шаг 3. Целевая функция. Пусть P — общий доход за неделю, ф. ст., где

$$P = 30x + 40y \text{ (ф. ст. в неделю).}$$

Шаг 4. Ограничения на производственный процесс. Для каждого ограничения на ресурсы, необходимые для производства x деталей типа X и y деталей типа Y в неделю, ниже приведены количества и соответствующие им максимальные уровни наличных ресурсов.

Требуемый фонд рабочего времени:	$x + 2y$ S 4000 чел.-ч.
Требуемая производственная мощность:	$x \le 2250$ деталей
	$y \le 1750$ деталей
Требуемое количество металлических стержней:	$2x + 5y \le 10000$ кг
Требуемое количество листового металла:	$5x + 2y \le 10000$ кг
Постоянные заказы:	$x \ge 600$ деталей
Профсоюзное соглашение:	$x + y \ge 1500$ деталей
Условие неотрицательности:	$x, y \ge 0$

Окончательная формулировка задачи линейного программирования имеет виды

Производится x деталей типа X и y деталей типа У в неделю.

Максимизировать:

$P=30x+40y$(ф.ст.)

при ограничениях:

Фонд рабочего времени:	$1x + 2y \le 4000$ чел.-ч
Производственная мощность:	$x \le 2250$ деталей
	$y \le 1750$ деталей
Металлические стержни:	$2x + 5y \le 10000$ кг
Листовой металл:	$5x + 2y \le 10000$ кг
Постоянные заказы:	$x \ge 600$ деталей

Профсоюзное соглашение: $x + y \geq 1500$ деталей |

Условие неотрицательности: $x, y \geq 0$

Теперь рассмотрим задачу, число переменных в которой больше двух. .Общая схема формулировки и в этом случае остается неизменной.

❑ **Пример 1.3.** Завод по производству электронного оборудования выпускает персональные компьютеры и системы подготовки текстов. В настоящее время освоены четыре модели:

а) "Юпитер" — объем памяти 512 Кбайт, одинарный дисковод;

б) "Венера" — объем памяти 512 Кбайт, двойной дисковод;

в) "Марс" — объем памяти 640 Кбайт, двойной дисковод;

г) "Сатурн" — объем памяти 640 Кбайт, жесткий диск.

В производственный процесс вовлечены три цеха завода — цех узловой сборки, сборочный и испытательный. Распределение времени, требуемого для обработки каждой модели в каждом цехе, а также максимальные производственные мощности цехов приведены в табл. 1.1. Отдел исследований рынка производит периодическую оценку потребительского спроса на каждую модель. Максимальные прогнозные значения спроса и доходы от реализации единицы продукции каждой модели также содержатся в табл. 1.1.

Построить задачу линейного программирования для изложенной проблемы производства изделий в ассортименте, если цель состоит в максимизации общего ежемесячного дохода.

Решение.

Шаг 1. Выбор переменных. Производится

j	единиц "Юпитера" в месяц,
v	единиц "Венеры" в месяц,
m	единиц "Марса" в месяц,
s	единиц "Сатурна" в месяц.

Таблица 1.1.

Время, требуемое на обработку каждой модели в каждом цехе

Цех	*Время на единицу продукции*				*Максимальная производительность, ч/мес.*
	"Юпитер"	*"Венера"*	*"Марс"*	*"Сатурн"*	
Узловой сборки	5	8	20	25	800
Сборочный	2	3	8	14	420
Испытательный	0,1	0,2	2	4	150
Максимальное прогнозное значение спроса за месяц	100	45	25	20	
Доход, ф.ст.	15	30	120	130	

Шаг 2. Какова цель задачи? Каковы ограничения на производственный процесс? Цель состоит в максимизации общего дохода за месяц. Объем производства ограничен размером фонда рабочего времени по каждому цеху и возможностью продажи компьютеров каждой модели.

Шаг 3. Целевая функция задачи. Пусть P (ф. ст.) — общий доход в месяц, тогда:

$$P = 15j + 30v + 120m + 130s \text{ (ф. ст. в месяц).}$$

Шаг 4. Ограничения на производственный процесс. Для каждого цеха время, требуемое для производства j, v, m их единиц продукции соответствующих моделей увязывается с максимальной производственной мощностью данного цеха.

Цех узловой сборки: $5j + 8v + 20m + 25s \leq 800$ (ч/мес.)

Сборочный цех: $2j + 3v + 8m + 14s \leq 420$ (ч/мес.)

Испытательный цех: $0,1\,j + 0,2\,v+2m+4s \le 150$ (ч/мес.)
Спрос на "Юпитер": $j \le 100$ (ед./мес.)
Спрос на "Венеру": $v \le 45$ (ед./мес.)
Спрос на "Марс": $m \le 25$ (ед./мес.)
Спрос на "Сатурн": $s \le 20$ (ед./мес.)
Условие неотрицательности: $j, v, m, s \ge 0$

Окончательная формулировка задачи линейного программирования такова: каждый месяц производится j, v, m и s единиц компьютеров типа "Юпитер", "Венера", "Марс" и "Сатурн" соответственно. Максимизировать:

$$P = 15\,j + 30\,v + 120m + 130\,s \text{ (ф. ст. в месяц)}$$

в условиях ограничений, указанных выше.

- **Пример 1.4.**. Менеджер по ценным бумагам намерен разместить 100000 ф. ст. капитала таким образом, чтобы получать максимальные годовые проценты с дохода. Его выбор ограничен четырьмя возможными объектами инвестиций: A, B, C и D. Объект A позволяет получать 6% годовых, объект B — 8% годовых, объект C — 10%, а объект D — 9% годовых. Для всех четырех объектов степень риска и условия размещения капитала различны. Чтобы не подвергать риску имеющийся капитал, менеджер принял решение, что не менее половины инвестиций необходимо вложить в объекты A и B. Чтобы обеспечить ликвидность, не менее 25% общей суммы капитала нужно поместить в объект D. Учитывая возможные изменения в политике правительства, предусматривается, что в объект C следует вкладывать не более 20% инвестиций, тогда как особенности налоговой политики требуют, чтобы в объект A было вложено не менее 30% капитала. Сформулируем для изложенной проблемы распределения инвестиций модель линейного программирования.

Решение

Вкладывается a ф. ст. в объект A, b ф. ст. — в объект B, c ф. ст. — в объект C u d ф. ст. — в объект D. Целью является максимизация общей суммы годовых процентов с дохода. На распределение инвестиций наложены ограничения, связанные с отсутствием риска, ликвидностью, политикой правительства и системой налогообложения. Обозначим через R общую сумму годового процентного дохода, тогда:

$$R = 0,06\,a + 0,08\,b + 0,10\,c + 0,09\,d \text{ (ф. ст. в год).}$$

Максимизация целевой функции осуществляется в условиях ограничений на

Общую сумму инвестиций: $a+b+c+d \le 100000$ ф. ст.
Отсутствие риска: $a + b \ge 0,05\,(a + b\ \text{-P}\ c + d)$
Ликвидность : $d \ge 0,25\,(a + b + c + d)$
Правительственную политику: $c \le 0,2\,(a + b + c + d)$
Систему налогообложения: $a \ge 0,3\,(a + b + c + d)$,
Неотрицательность: $a, b, c, d \ge 0$.

Чтобы решить задачу линейного программирования, ограничения обычно преобразовывают таким образом, чтобы переменные находились только в левой части любого неравенства. Результаты этого преобразования представлены ниже. Окончательная *форма задачи* линейного программирования имеет следующий вид:

Вкладывается a ф. ст. в объект A,
b ф. ст. в объект B,
c ф. ст. в объект C,
d ф. ст. в объект D.

Максимизируется общая сумма годового процентного дохода, т.е.:

$$R=0,06\,a + 0,08\,b + 0,10\,c + 0,09\,d \text{ (ф. ст. в год)}$$

в условиях следующих ограничений (ф. ст.):

Общая сумма инвестиций: $a + b + c + d \le 100000$
Отсутствие риска: $0,5\,a + 0,5\,b - 0,5\,c - 0,5\,d \ge 0$
Ликвидность: $-0,25\,a - 0,25\,b - 0,25\,c + 0,75d \ge 0$
Правительственная
политика: $-0,2\,a - 0,2\,b + 0,8\,c - 0,2\,d \le 0$

Система налогообложения: $0{,}7\ a - 0{,}3\ b - 0{,}3\ c - 0{,}3\ d \geq 0$

Условие неотрицательности: $a, b, c, d \geq 0$

Во всех четырех приведенных выше примерах целевую функцию требовалось максимизировать. На стадии постановки задачи процедура не меняется, если целью является минимизация некоторого показателя. Примеры таких задач приводятся в конце данной главы.

1.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В данном разделе будет рассмотрен процесс нахождения значений переменных, которые удовлетворяют системе ограничений и оптимизируют целевую функцию задачи. Однако гораздо удобнее исследовать не систему неравенств, а систему уравнений. Процесс преобразования неравенств в уравнения достаточно прост. Для этого в левую часть неравенства вводится дополнительная переменная. Эта переменная призвана отразить величину разности между правой и левой частями неравенства. Чтобы продемонстрировать этот алгоритм, обратимся к примеру 1.2, в котором рассматривается производство деталей типов X и Y к автомобилям. Для получения системы уравнений в каждое ограничение введем дополнительную переменную. Обозначим данную переменную через s, таким образом, в первое ограничение вводится переменная s_1 во второе — s_2 и т.д. Кроме того, примем предпосылку о неотрицательности значений этих переменных, т.е. $s_i \geq 0$. Это значит, что дополнительные переменные прибавляются к левым частям всех ограничений знака "$\leq$" и вычитаются из левых частей ограничений знака "$\geq$". Задача линейного программирования в данном случае принимает следующий вид: производится x деталей типа X и y деталей типа Y в неделю. Цель состоит в максимизации общего дохода в неделю. Максимизировать:

$$P = 30\ x + 40\ y \text{ (ф. ст. в неделю)}$$

при ограничениях:

Фонд рабочего времени:	$1\,x$	$+ 2\,y$	$+ s_1 = 4000$	(чел.-ч/нед.)
Производственная мощность:	x		$+ s_2 = 2250$	(деталей/нед.)
	y		$+ s_3 = 1750$	(деталей/нед.)
Металлические стержни:	$2\,x$	$+ 5\,y$	$+ s_4 = 10000$	(кг/нед.)
Листовой металл:	$5\,x$	$+ 2\,y$	$+ s_5 = 10000$	(кг/нед.)
Постоянные заказы:	x		$- s_6 = 600$	(деталей/нед.)
Профсоюзное соглашение:	x	$+ y$	$- s_7 = 1500$	(деталей/нед.)

Условие неотрицательности: $x, y \geq 0$

Такие вспомогательные переменные для ограничений со знаком "$\leq$" называются **остаточными переменными**. Они представляют собой количество недоиспользуемого ресурса, т.е. разность между используемым количеством ресурса и его максимальным объемом. Рассмотрим, например, ограничение на фонд рабочего времени, указанное выше. Предположим, что в течение недели выпускается 1000 деталей каждого типа, тогда используемое число человеко-часов составит: 1x1000 + 2x1000 = 3000. Поскольку максимальный фонд рабочего времени равен 4000 чел.-ч., резерв времени, или остаток, составит: 4000 - 3000 = 1000 чел.-ч. Следовательно, для данной комбинации x - y и s_1 принимают значение, равное 1000.

Вспомогательные переменные, используемые в ограничениях типа "$\geq$", называются **избыточными переменными**, так как они показывают количество ресурса, используемое сверх минимального его объема. Рассмотрим, к примеру, ограничение на постоянные заказы в случае, когда выпускается 1000 деталей типа X. Минимальное число деталей типа X составляет в соответствии с данным ограничением 600 штук, следовательно, уровень производства, равный 1000 деталей, порождает излишек в 400 штук сверх минимального количества. Таким образом,s_6 принимает значение, равное 400

Итак, мы получили систему уравнений. Однако мы не можем решить ее с применением традиционных алгебраических методов и получить единственное множество значений переменных (единственное решение), поскольку число переменных превосходит число уравнений системы. Единственное множество решений можно получить только в случае, если число переменных и число уравнений системы совпадают. В лучшем случае мы можем определить множество допустимых решений системы уравнений. Данное множество содержит все сочетания переменных, которые удовлетворяют системе ограничений. Затем из этого множества можно будет выбрать одно или несколько решений, оптимизирующих целевую функцию задачи.

Как следует поступать при определении множества допустимых решений? Если задача содержит только две переменные, это можно сделать графически. Однако в случае решения задачи с множеством переменных необходимо прибегнуть к алгебраическому методу решения.

1.3.1. Графическое решение задачи линейного программирования.

Линейное уравнение описывает множество точек, лежащих на одной прямой. Линейное неравенство описывает некоторую область на плоскости. Например,неравенство $x \leq 7$ означает, что x принимает значения, которые либо меньше 7, либо равны 7. Графически эту ситуацию можно проиллюстрировать следующим. образом. Проведем прямую $x = 7$. Обратимся к графику, изображенному на рис.1.1 слева. Данная прямая разделяет плоскость на три множества точек: точки, для которых $x = 7$, т.е. точки, лежащие на самой прямой; точки, для которых $x < 7$, область слева от прямой; и точки, для которых $x > 7$, т.е. точки, принадлежащие области, лежащей справа от прямой. Последнее множество нас не интересует. Область, не подлежащую рассмотрению, обычно принято заштриховывать. Обратите внимание на график, изображенный на рис. 1.1 справа.

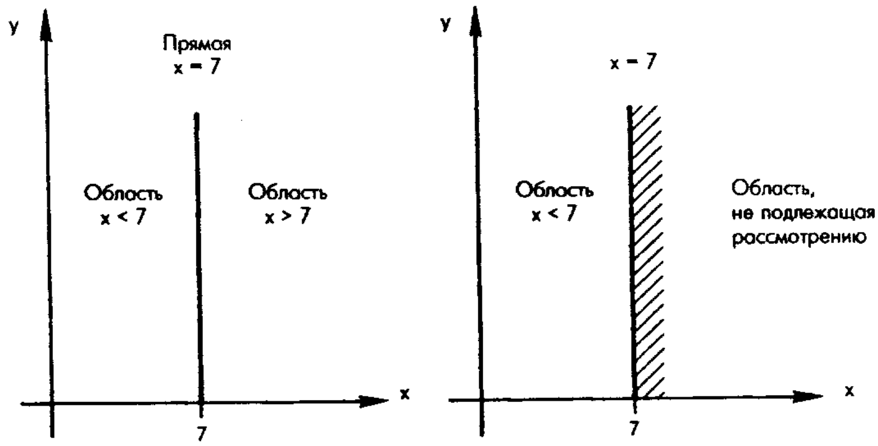


Рис. 1.1. Графическое изображение неравенства $x \leq 7$

Предположим, что $x + y \leq 10$. Какую часть плоскости описывает данное неравенство? Схема поиска ответа на этот вопрос аналогична схеме, используемой в предыдущем примере. Во-первых, проведем прямую $x + y = 10$. Обратимся к графику, изображенному на рис. 1.2. слева. Как и в предыдущем примере, проведенная прямая разделяет плоскость на три множества точек: точки, для которых $x + y = 10$, принадлежащие прямой; точки, для которых $x + y < 10$, принадлежащие области, лежащей ниже прямой; и точки, для которых $x + y > 10$, принадлежащие области, лежащей выше указанной прямой.

Полезным приемом при определении недопустимой области на графике является следующая процедура. Необходимо выбрать любую точку на графике, не принадлежащую прямой, и подставить ее координаты в неравенство. Если неравенство будет выполняться, то данная точка является допустимым решением. Если неравенство не выполняется, то точка является недопустимой и принадлежит, следовательно, недопустимой области. Удобной для использования при подстановке в неравенство точкой является начало координат. Подставим $x = y = 0$ в неравенство $x + y \leq 10$. Получим $0 + 0 \leq 10$. Данное утверждение является верным, следовательно, начало координат — допустимое решение, и недопустимой областью является часть плоскости, лежащая по другую сторону прямой. Это отражено на графике, изображенном на рис. 1.2. справа.

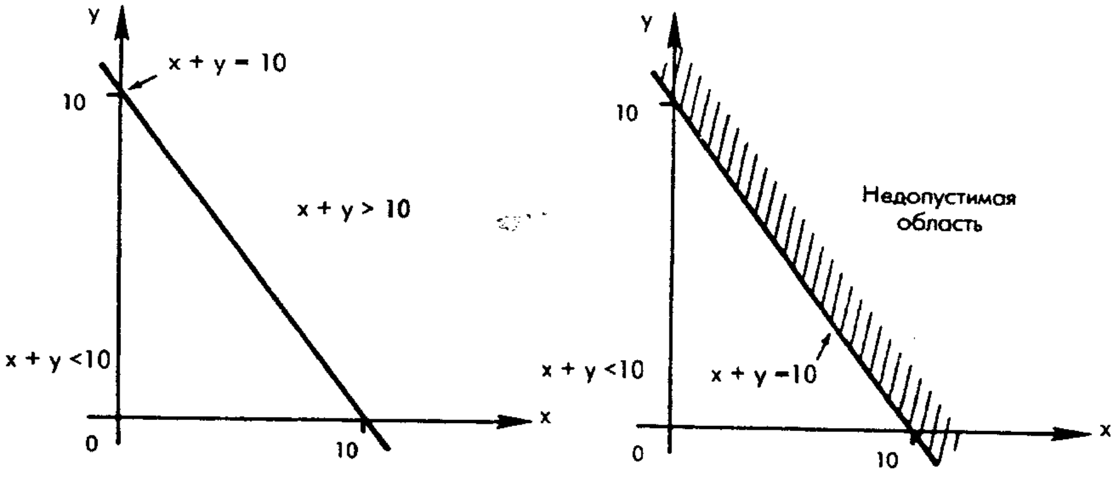


Рис. 1.2. Графическое изображение неравенства x + y ≤ 10

Аналогично можно изобразить графически каждое ограничение задачи линейного программирования и определить недопустимую область. Если все ограничения задачи изобразить на одном графике, то область, которая останется не заштрихованной, будет содержать множество точек, удовлетворяющих системе ограничений.

Данная область называется допустимым множеством. Порядок расположения переменных на осях координат в задаче линейного программирования значения не имеет. На графике следует всегда отмечать начало координат. Смещённое начало координат использовать нельзя.

Применим теперь данную процедуру к задаче линейного программирования сформулированной в примере 1.1, в котором рассматривается производство двух видов безалкогольных напитков. Ограничения задачи можно изобразить графически

Время работы оборудования: $0{,}02\ p + 0{,}04\ m \le 24$ ч/день,

Проведем прямую $0{,}02\ p + 0{,}04\ m = 24$. Простейшим способом нанесения прямой на график является нахождение точек пересечения данной прямой с осями координат p и m. Подставив $p = 0$ в уравнение и рассчитав значение m, получим, что при $p = 0$ $m = 600$. Подставив $m = 0$ в уравнение и рассчитав значение p, получим, что при $m = 0$ $p = 1200$. Нанесем эти две точки на график и соединим их прямой. Этим приемом можно пользоваться всегда, за исключением случая, когда прямая проходит через начало координат. В последнем случае применяется иная процедура подстановки в уравнение любого другого значения p и нахождения соответствующего значения m.

Для определения области, которую следует заштриховать, подставим $p = 0$ и $m = 0$ в неравенство:

$$0{,}02x0+0{,}04x0 \le 24.$$

Данное утверждение является верным, таким образом, начало координат принадлежит допустимой области.

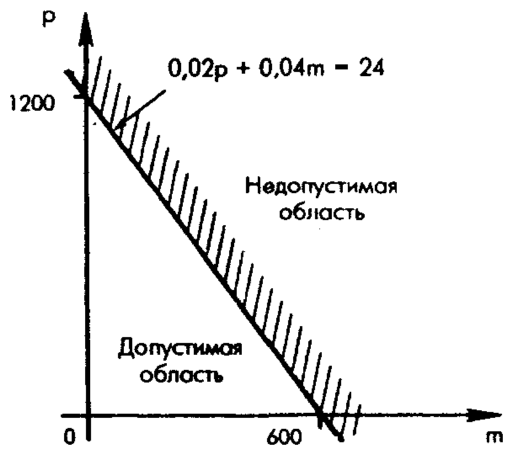


Рис. 1.3. Графическое изображение неравенства
$0{,}02\ p + 0{,}04\ m \le 24$

Специальный ингредиент: $0{,}01\ p + 0{,}04\ m \le 16$.

Проведем прямую: $0{,}01\ p + 0{,}04\ m = 16$.

Как и в предыдущем ограничении, начало координат принадлежит допустимой области, поэтому следует заштриховать область, лежащую выше прямой.

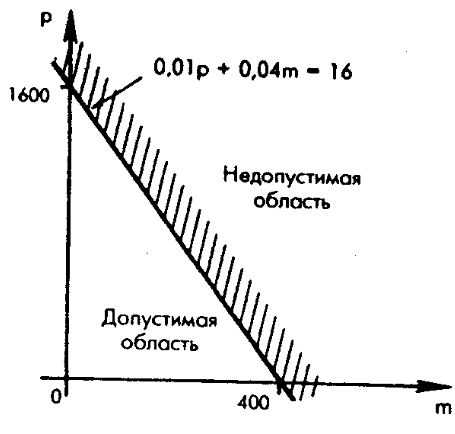


Рис. 1.4. Графическое изображение неравенства $0{,}01\ p + 0{,}04\ m \le 16$

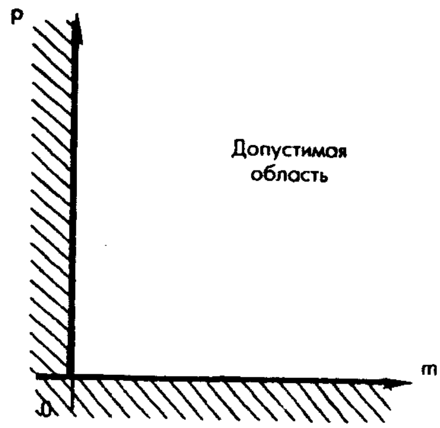


Рис. 1.5. Графическое изображение условий неотрицательности переменных

Условие неотрицательности: $p > 0$ и $m > 0$.

Заштриховываются области, содержащие отрицательные значения каждой переменной. Нанеся все ограничения задачи на один график, получим:

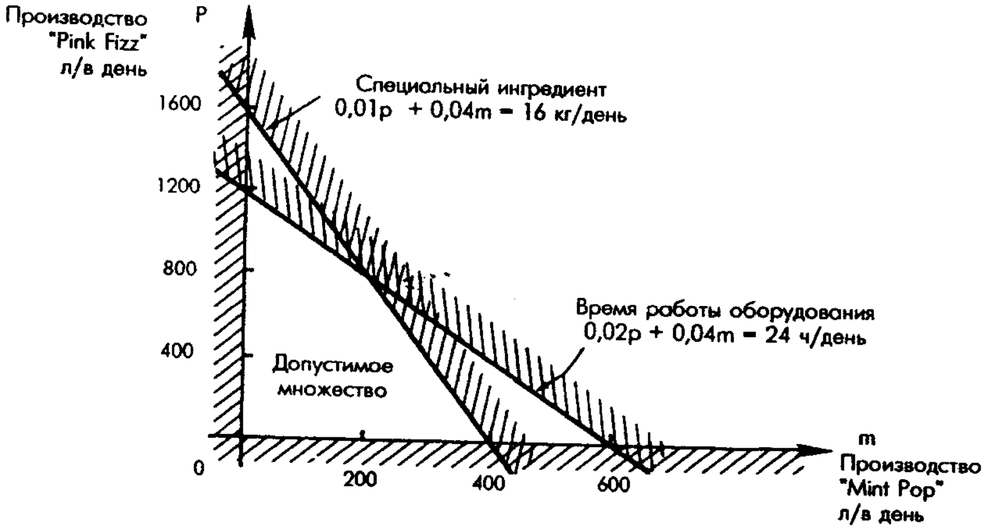


Рис. 1.6. Графическое изображение ограничений примера 1.1.

Область, оставшаяся незаштрихованной для всех ограничений - это **допустимое множество**, которое содержит все возможные сочетания объемов производства удовлетворяющие данным ограничениям. Координаты любой точки, принадлежащей допустимому множеству, являются возможным сочетанием объемов производства двух видов прохладительных напитков, выпускаемых фирмой.

Рассмотрим алгоритм выбора объема производства, максимизирующего ежедневный общий доход фирмы. Целевая функция задачи имеет следующий вид:
P = 0.10 p + 0,30 ш (ф. ст. в день)

Если задать P = 100 ф. ст. в день, целевую функцию можно проиллюстрировать графически. Если затем придать P другое значение, то новая прямая будет параллельна прямой, соответствующей значению P = 100 ф. ст. в день (рис.1.7.).

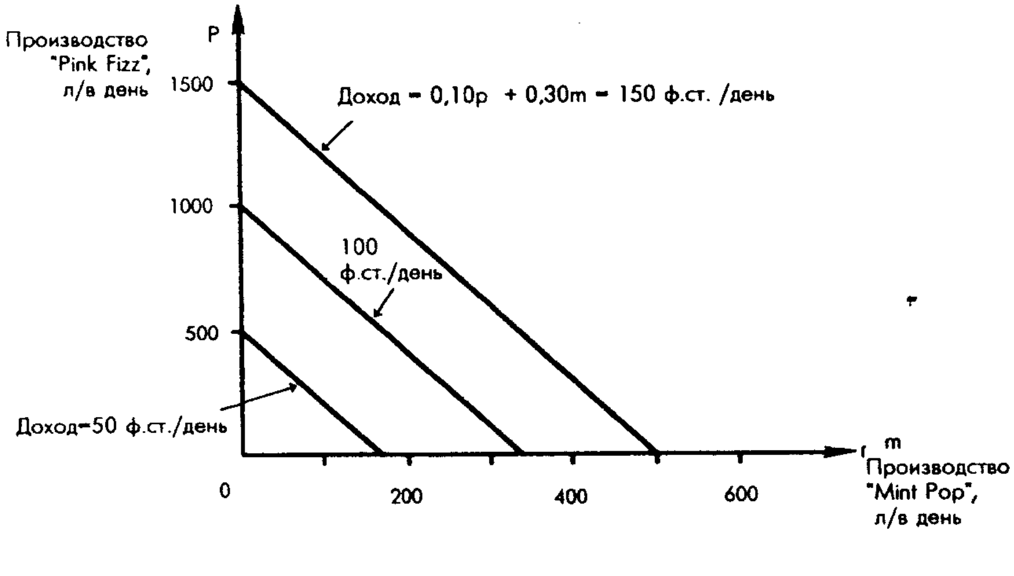


Рис. 1.7. Целевая функция

Нанеся на график какую-либо линию уровня и двигаясь в пределах допустимого множества параллельно данной линии, можно создать целое семейство линий уровня возможного дохода. Чем дальше линия уровня от начала координат, тем больше величина дохода, которой она соответствует.

Если построить на графике линию уровня задачи линейного программирования так, как показано на рис. 1.8. можно двигаться параллельно этой линии вдоль допустимого множества в направлении увеличения дохода до тех пор, пока не будет достигнуто последнее допустимое решение (или решения), т.е. до тех пор, пока все точки линии уровня не окажутся за пределами допустимого множества.

Нетрудно заметить, что последним допустимым решением является точка А. Координаты этой точки соответствуют оптимальному сочетанию объемов производства двух напитков. Приближенные значения координат точки А можно найти непосредственно из графика, а точные их значения можно получить, решив систему из двух уравнений, описывающих те ограничения, на пересечении которых находится точка А.

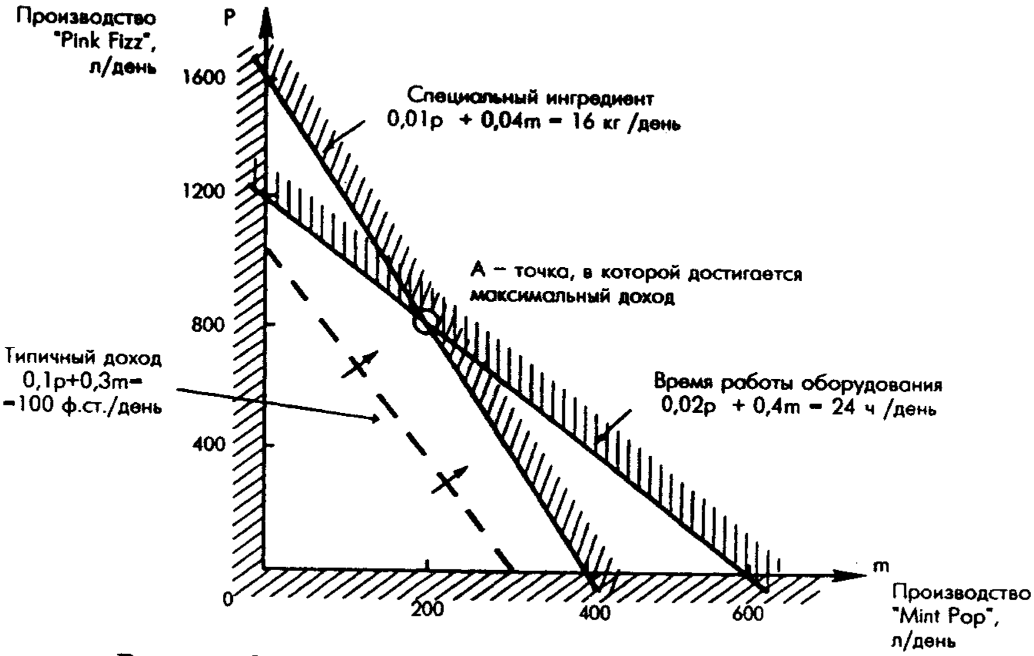


Рис. 1.8. Задача линейного программирования для примера 1.1.

❑ **Пример 1.5.** Обратимся к примеру **1.2**, в котором рассматривалось производство двух типов деталей к автомобилям. Необходимо определить объемы производства, при которых достигается максимальное значение общего дохода за неделю.

Решение.

Допустимые области для каждого из ограничений задачи выглядят следующим образом:

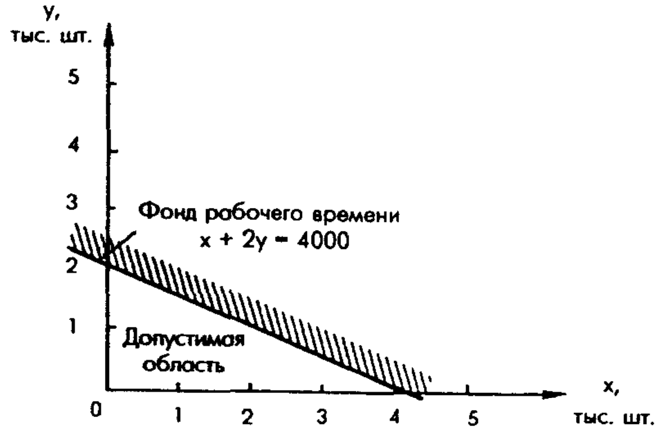


Рис. 1.9. Ограничение на фонд рабочего времени: $x + 2y \leq 4000$ чел.-ч. в неделю

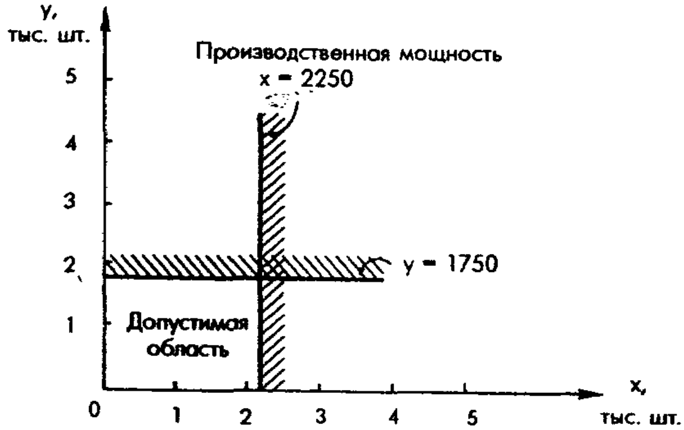


Рис. 1.10. Ограничение на производственные мощности: $x \leq 2250$ деталей в неделю и $y \leq 1750$ деталей в неделю

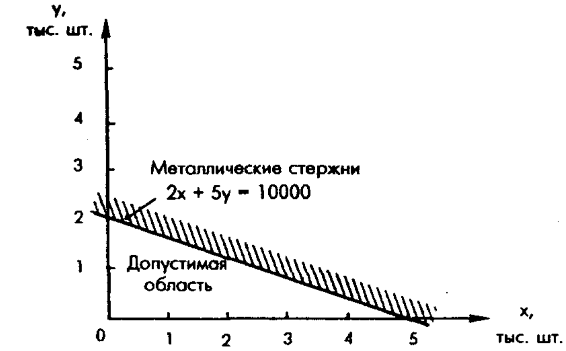


Рис. 1.11. Ограничение на металлические стержни:
$2x + 5y \leq 10000$ кг в неделю

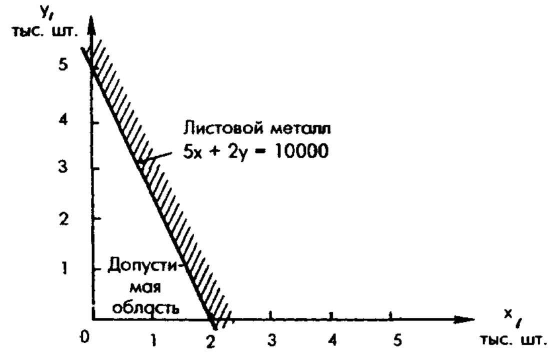


Рис. 1.12. Ограничение на листовой металл:
$5x + 2y \leq 10000$ кг в неделю

Рис. 1.13. Ограничение на постоянные заказы и неотрицательность:
$x \geq 600$ деталей в неделю и $x \geq 0$, $y \geq 0$

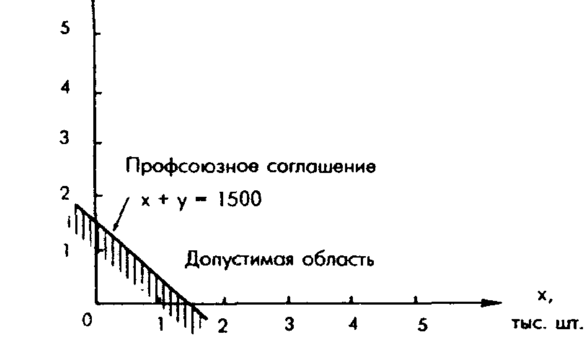


Рис. 1.14. Ограничение на профсоюзное соглашение:
$x + y \geq 1500$ деталей в неделю

Допустимое множество, содержащее все возможные ассортиментные наборы продукции для данной задачи, осталось на графике (рис. 1.15) незаштрихованным.

Необходимо определить оптимальный ассортиментный набор, максимизирующий общий доход завода за неделю. Целевая функция задачи имеет вид:

$$P = 30\ x + 40\ y \text{ (ф. ст. в неделю).}$$

Чтобы построить линию уровня этой функции для типичного значения дохода, выберем принадлежащую допустимому множеству точку с координатами $x = 1000$, $y = 1000$. Для этого ассортиментного набора общий доход за неделю составит:

$$P = 30 \text{ x } 1000 + 40 \text{ x } 1000 = 70000 \text{ ф. ст. в неделю.}$$

В качестве контрольной линии уровня будем использовать прямую

$$70000 = 30\ x + 4\ y \text{ (ф. ст. в неделю).}$$

Эта прямая проходит также через точку с координатами $x = 0$, $y = 1750$. На рис. 1.15 она изображена пунктирной линией. Движение параллельно этой прямой в направлении увеличения дохода приводит нас в точку А, которая является последним допустимым решением.

Лимитирующими являются ограничения на:

Фонд рабочего времени: $x + 2\ y <.\ 4000$ ч в неделю;

Листовой металл: $5\ x + 2\ y < 10000$ кг в неделю.

Решив соответствующую систему уравнений, получим:

$$\begin{array}{lrl} & x + 2\ y = 4000; & (2) \\ & \underline{5\ x + 2\ y = 10000;} & (1) \\ (2)\text{-}(1) & 4\ x \quad = \ 6000, & \end{array}$$

следовательно, $x = 1500$ и после подстановки значения x в систему получим значение $y = 1250$.

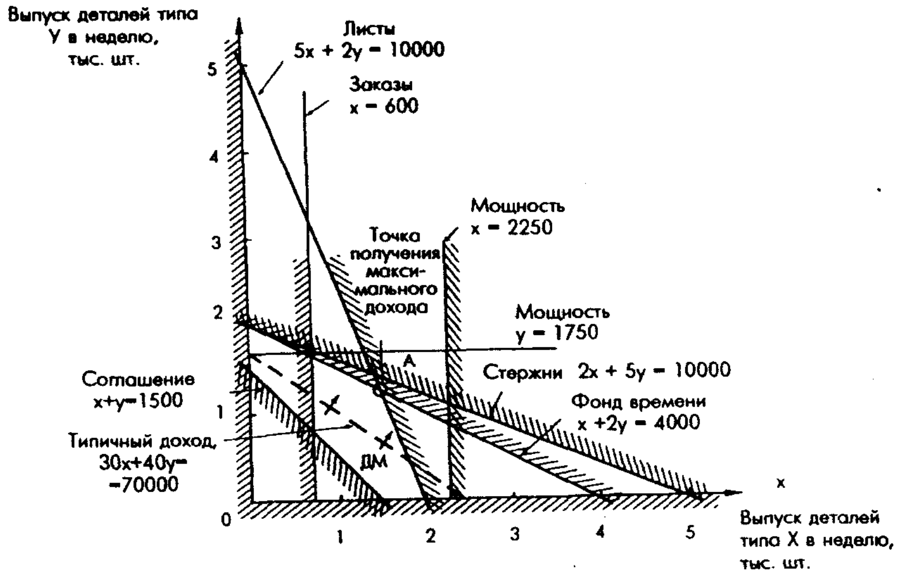


Рис. 1.15. Задача линейного программирования для выпуска деталей типа X и Y к автомобилям в неделю

Оптимальным ассортиментным набором является выпуск 1500 деталей типа X и 1250 деталей типа Y в неделю. Таким образом, максимальный доход за неделю составит:

$$P = 30 \text{ x } 1500 + 40 \text{ x } 1250 = 95000 \text{ ф. ст. в неделю.}$$

В процессе производства данного ассортиментного набора полностью расходуются два ресурса — фонд рабочего времени и листовой металл. Эти ограничения являются лимитирующими. Однако для обоих типов деталей остается свободной часть производственных мощностей, а также не полностью используются металлические стержни. Объемы производства деталей также превышают минимальный уровень, требуемый для удовлетворения постоянных заказов, и минимальный уровень, оговоренный в профсоюзном соглашении.

Нетрудно установить, что значения остаточных переменных в ограничениях на производственные мощности равны 750 для деталей типа X и 500 для деталей типа Y, а именно:

$$1500 + s_2 = 2250, \text{ следовательно } s_2 = 750 \text{ деталей в неделю.}$$

$$1250 + s_3 = 1750, \text{ следовательно } s_3 = 500 \text{ деталей в неделю.}$$

Остаточная переменная ограничения на металлические стержни:

$$2 \text{ x } 1500 + 5 \text{ x } 1250 + s_4 = 10000,$$

следовательно,

$s_4 = 750$ кг в неделю.

Избыточная переменная ограничения на постоянные заказы:

$$1500 - s_6 = 600,$$

следовательно,

$$s_6 = 900 \text{ деталей в неделю}$$

сверх минимального количества, необходимого для удовлетворения постоянных заказов. Избыток по профсоюзному соглашению составил:

$$1500 + 1250 - s_7 = 1500,$$

следовательно,

$$s_7 = 1250 \text{ деталей в неделю}$$

сверх минимального количества деталей, оговоренного в профсоюзном соглашении.

Как уже отмечалось выше, оптимальным решением обычно является крайняя точка допустимого множества. Следовательно, после построения графика определить оптимальную крайнюю точку можно путем подсчета значений целевой функции во всех крайних точках допустимого множества. Множество значений переменной, соответствующей крайней точке допустимого множества, называется базисным решением. Переменные, принимающие ненулевые значения в некоторой крайней точке, называются **базисными переменными.**

Иногда в процессе решения задачи линейного программирования возникают некоторые трудности. Задача может оказаться **несовместной.** В этом случае допустимое множество задачи является пустым. Ни одно сочетание переменных не удовлетворяет всем ограничениям задачи одновременно и задача не имеет решений. Если в данной ситуации все же необходимо найти решение задачи, чтобы построить допустимое множество, то необходимо исключить одно или несколько ограничений.

Проблемы иного рода возникают, если задача линейного программирования является **неограниченной.** В этом случае решение задачи может неограниченно улучшаться, не нарушая при этом ни одного ограничения задачи. Обычно это означает, что задача линейного программирования сформулирована некорректно, и некоторые ограничения в ней отсутствуют.

О возможности существования отдельного множества оптимальных решений мы уже говорили. Это случается, если целевая функция параллельна лимитирующему ограничению задачи. Оптимальное значение целевой функции будет достигаться в любой точке этого ограничения, лежащей между двумя оптимальными крайними точками, и соответственно любая из этих точек является оптимальным решением модели. Эта ситуация имеет ряд преимуществ, поскольку предоставляет администрации некоторую свободу в принятии решений.

1.4. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

В большинстве случаев принятия решений полезно составить предварительный план действий, чтобы проанализировать, какое воздействие окажут изменения, вносимые в исходную задачу, на принятое решение. Линейное программирование не является исключением. Существуют три аспекта решения задач линейного программирования, которые необходимо подвергнуть тщательному изучению:

- воздействие дополнительного количества лимитирующего ресурса;
- воздействие дополнительного количества нелимитирующих ресурсов;
- воздействие изменений в коэффициентах целевой функции. Рассмотрим каждую из этих ситуаций в отдельности. При дальнейшем рассмотрении примем предпосылку о том, что в любой момент времени изменяется только один параметр.

1.4.1. Воздействие изменений в обеспечении лимитирующим ресурсом на решение задачи линейного программирования

Поскольку один или несколько ресурсов используются полностью, значение целевой функции ограничено. Если появляется дополнительное количество лимитирующего ресурса, то оптимальное решение может быть улучшено. Однако необходимо принять во внимание, что изменение оптимального решения приведет к улучшению значения целевой функции только в том случае, если сумма дополнительных издержек по обеспечению дополнительным количеством ресурса не превышает сумму прибыли, полученной в результате его использования.

С увеличением объема лимитирующего ресурса соответствующее ограничение становится менее жестким. Так как жесткость лимитирующего ограничения постепенно снижается, его график будет перемещаться параллельно своему начальному положению, одновременно будет происходить перемещение оптимальной крайней точки в направлении, которое улучшает значение целевой функции. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока какой-либо другой ресурс не будет полностью использован и рассматриваемое ограничение перестанет быть лимитирующим. Величина, на которую увеличивается значение целевой функции при снижении жесткости лимитирующего ограничения на единицу, т.е. при увеличении количества лимитирующего ресурса на единицу, называется **теневой ценой** ресурса. Теневая цена ресурса — это стоимость единицы данного ресурса в оптимальном решении. Увеличение объема лимитирующего ресурса на единицу целесообразно только в том случае, если существует возможность его получения по стоимости, которая ниже, чем теневая цена данного ресурса.

Пример 1.6. Обратимся к примерам **1.2** и **1.5**. Из примера **1.5** мы знаем, что лимитирующими являются ограничения на фонд рабочего времени и на листовой металл. Рассмотрим сначала последнее из указанных ограничений. Обратимся к графику, изображенному на рис. 1.16. Жесткость ограничения на листовой металл снижается по мере перемещения линии ограничения параллельно ее исходному положению в противоположном направлении от начала координат. Допустимое множество расширяется, а оптимальная крайняя точка перемещается вниз то линии ограничения на фонд рабочего времени, что увеличивает x и уменьшает y. Снижение жесткости ограничения на листовой металл является эффективным до тех пор, пока линия ограничения не достигнет точки пересечения ограничений на фонд рабочего времени и производственные мощности для деталей типа X, т.е. точки B. Если и далее снижать жесткость ограничения на листовой металл, оно перестанет быть лимитирующим, что приведет к появлению остатка в виде неиспользованного листового металла.

Новой оптимальной крайней точкой является теперь точка B. Координаты точки B можно определить, решив систему уравнений для ограничений на фонд рабочего времени и производственные мощности для детали X.

Фонд рабочего времени: $x + 2y = 4000$ чел.-ч в неделю;

Производственные мощности для X: $x = 2250$ деталей в неделю.

Так как $x = 2250$, то подставив его в первое уравнение, найдем значение y:

$$2250 + 2y = 4000,$$

следовательно, $y = 875$ деталей.

Новым оптимальным ассортиментным набором является производство 2250 деталей типа X и 875 деталей типа Y в неделю. Этот ассортиментный набор дает максимальный доход, равный $30 \times 2250 + 40 \times 875 = 102500$ ф. ст. в неделю, таким образом, увеличение дохода составит: 102500-95000 = 7500 ф. ст. в неделю. Количество листового металла, используемое для производства данного ассортиментного набора, равно:

$$5 \times 2250 + 2 \times 875 = 13000 \text{ кг в неделю.}$$

Оно превышает начальное количество на 3000 кг в неделю. В новой оптимальной точке фонд рабочего времени и производственные мощности для деталей X также используются максимально.

Дополнительное количество листового металла — 3000 кг — позволяет получать дополнительный доход, равный 7500 ф. ст. в неделю, следовательно, теневая цена данного ресурса составит: 7500 : 3000 =• 2,50 ф. ст. за 1 кг. Каждый дополнительный килограмм листового металла ведет к увеличению еженедельного дохода в 2,50 ф. ст. Из этого следует, что сверхнормативный запас этого ресурса целесообразен только в случае, если стоимость получения любого дополнительного количества ресурса не превышает 2,50 ф. ст. за 1 кг ресурса.

Предположив, что ограничение на листовой металл остается неизменным, применим аналогичную процедуру ко второму лимитирующему ограничению.

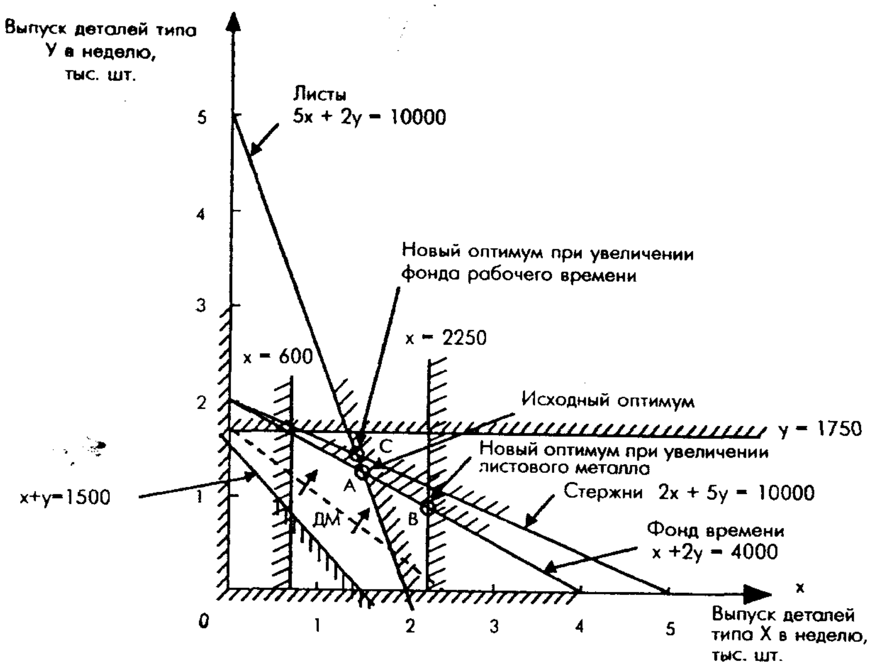


Рис. 1.16. Задача линейного программирования для производства деталей типа X и Y в неделю

Если жесткость ограничения на фонд рабочего времени снизилась на единицу, т.е. появилась возможность использовать 1 чел.-ч рабочего времени дополнительно, то тогда данное ограничение принимает вид:

$$x + 2y \leq 4001.$$

Данное ограничение параллельно первоначальному, но его линия находится дальше от начала координат по сравнению с исходной линией. Из приведенного выше графика легко видеть, что точка пересечения ограничения на листовой металл и нового ограничения на фонд рабочего времени все еще является оптимальной крайней точкой. В данном случае оптимальным решением является точка с координатами x = 1499,75 и y = 1250,625, что приводит и к значению целевой функции Pmax = 95017,50 ф. ст. Таким образом, значение целевой функции увеличилось на 17,50 ф. ст. Теневая цена фонда рабочего времени составляет 17,50 ф. ст. за 1 чел.-ч. Если можно получить один дополнительный час рабочего времени за дополнительные 17,50 ф. ст. или менее, то это необходимо использовать. Если же стоимость 1 чел.-ч. превышает 17,50 ф. ст., то дополнительное количество рабочего времени использовать нецелесообразно.

Какое количество дополнительного рабочего времени следует купить? Поскольку линия ограничения на фонд рабочего времени движется параллельно своему исходному положению в направлении от начала координат, она стремится к точке пересечения ограничений на листовой металл и металлические стержни к точке С. Если и далее снижать жесткость ограничения на фонд рабочего времени, то оно перестанет быть лимитирующим, и дальнейшее привлечение дополнительного рабочего времени нецелесообразно. Максимальное число дополнительных человеко-часов можно определить, решив систему ограничений, линии которых пересекаются в точке С:

Листовой металл: $5x + 2y = 10000$;

Металлические стержни: $2x + 5y = 10000$.

Ее решением являются следующие значения переменных:

$$x = 10000/7 \text{ и } y = 10000/7 \text{ деталей в неделю.}$$

Число используемых в точке С человеко-часов равно:

$$x + y = 10000/7 + 2\,(10000/7) = 4285.7 \text{ чел.-ч в неделю.}$$

Это значение на 285,7 чел.-ч превосходит первоначальное максимальное значение 4000 чел.-ч. Получение максимального сверхнормативного запаса в 285,7 чел.-ч в неделю целесообразно при условии, что стоимость единицы дополнительного человеко-часа не превосходит 17,50 ф. ст. .в неделю. Если сверхнормативное количество часов рабочего времени используется максимально, то новое максимальное значение еженедельного дохода составит:

$$P_{MAX} = 30 \text{ x } 10000/7 + 40 \text{ x } 10000/7 - \text{дополнительная стоимость} =$$
$$= (100000 - \text{дополнительная стоимость}) \text{ ф. ст. в неделю.}$$

Важно уяснить, что из дохода вычитаются только те издержки, которые не фигурируют в исходной постановке задачи. Предположим, например, что при производстве автомобильных деталей стоимость одного часа рабочего времени равна 4,00 ф. ст. При расчете дохода, приходящегося на единицу деталей каждого типа, бухгалтер будет использовать именно эту стоимость. Если привлекается дополнительный фонд рабочего времени, к примеру, сверхурочная работа, по 6,00 ф. ст. за 1 чел.-ч, то из них 4,00 ф. ст. уже учтены в показателях единичного дохода. Отдельно в счет нужно внести только дополнительные 2 ф. ст. за час.

1.4.2. Воздействие на оптимальное решение изменений в обеспечении не лимитирующими ресурсами

В примере 1.6. рассматривались два лимитирующих ограничения на труд и листовой металл. Остальные ограничения в первоначальном оптимальном решении не являются лимитирующими. Это ограничения на:

1. Производственные мощности для выпуска деталей типа X.
2. Производственные мощности для выпуска деталей типа Y.
3. Металлические стержни.
4. Постоянные заказы.
5. Профсоюзное соглашение.

Что происходит при изменении каждого из этих ограничений? Первые три ресурса используются в меньших или равных максимальному количествах. Любое увеличение запаса этих ресурсов не будет оказывать влияния на оптимальное решение задачи. Однако на него может влиять уменьшение запасов, соответствующих трем указанным ограничениям. Увеличение жесткости одного из нелимитирующих ограничений приведет к перемещению его линии в сторону начала координат. Сначала единственным изменением будет сокращение размеров допустимого множества. Однако когда линия ограничения переместится ниже исходной оптимальной крайней точки, данное ограничение станет лимитирующим, что приведет к появлению нового оптимального решения.

Предельные значения для этих ограничений ниже максимального уровня. Так, производственные мощности для деталей типа X можно сократить с 2250 до 1500 ч, т.е. на 750 ч, прежде чем это ограничение начнет оказывать воздействие на решение задачи. Производственные мощности для деталей типа У могут быть сокращены с 1750 до 1250 ч, т.е. на 500 ч. Запас металлических стержней можно уменьшить с 10000 до 9250 кг, т.е. на 750 кг в неделю. Количественные выражения этих сокращений есть не что иное, как значения остаточных переменных, о которых мы упоминали выше. С ограничениями, для которых количество ресурсов больше либо равно минимальному, все наоборот. Любое сокращение минимального количества ресурсов приведет к увеличению размеров допустимого множества, но не окажет воздействия на оптимальное решение.

Любое увеличение правой части этих ограничений сначала приведет к сокращению размеров допустимого множества, а затем повлияет и на оптимальное решение. Если постоянные заказы на детали типа X возрастут на 900 и достигнут 1500 деталей в неделю, оптимальное решение начнет изменяться. Если предусмотренное профсоюзным соглашением число деталей возрастет не менее чем на 1250 и превысит 2750 деталей, допустимое множество станет пустым, и задача не будет иметь решения. Количественные выражения увеличения ресурсов - это значения избыточных переменных для этих ресурсов, о которых говорилось выше.

1.4.3 Воздействие на оптимальное решение изменений в коэффициентах целевой функции

Условия для которых составлялась задача линейного программирования неизбежно изменяются. Чаще всего эти изменения предполагают повторное выполнение формализации задачи, но должна существовать возможность идентифицировать воздействие незначительных изменений на решение исходной задачи. В этом разделе мы рассмотрим изменения коэффициентов целевой функции. Если цель состоит в максимизации еженедельного дохода, то изменение стоимости сырья приведет к изменению значений коэффициентов целевой функции.

В задаче о портфеле ценных бумаг, когда целью является максимальная ежегодная отдача инвестиций, на коэффициенты целевой функции может воздействовать изменение процентной ставки происшедшее в одном из объектов вложения инвестиции,

Рассмотрим ситуацию, когда один из коэффициентов целевой функции изменяется во времени. Предположим, что

$$P = ax + 4y \text{ (ф. ст. в неделю)}$$

целевая функция, максимизирующая прибыль в задаче линейного программирования. где 4 - прибыль от выпуска единицы продукции Y (ф. ст.), a - прибыль от выпуска единицы продукции X (ф. ст.). Прибыль от продукции X может меняться. Предположим, что существует графическое изображение данной задачи, в котором значения переменных x и y отложены на соответствующих осях координат. Полезно переписать целевую функцию таким образом, чтобы y являлось зависимой переменной:

$$y = P/4 - (a/4)x.$$

Линия уровня целевой функции пересекает ось ординат в точке P/4, а тангенс угла ее наклона равен - (a/4). Точка пересечения линии уровня с осью ординат не зависит от значения параметра a, однако угол ее наклона увеличивается с ростом a, и наоборот. Иными словами, с изменением параметра a, линия уровня поворачивается. Незначительные перемещения ее в любом направлении обычно не приводят к изменению оптимальной крайней точки. Однако в результате более значительных изменений угла наклона линии уровня может появиться новая оптимальная крайняя точка. Полезно определить промежуток значений параметра a, для которых некоторая крайняя точка допустимого множества является оптимальной. Аналогичным образом можно поступать, если фиксированным является коэффициент целевой функции при переменной x, а коэффициент при y подвержен изменениям.

Пример 1.7. Обратимся к примерам **1.2.** и **1.5.**, в которых рассматривается производство деталей к автомобилям. Допустимое множество выглядит следующим образом:

Линия уровня еженедельного дохода .имеет вид:

$$P = 30\,x + 40\,y \text{ (ф. ст. в неделю).}$$

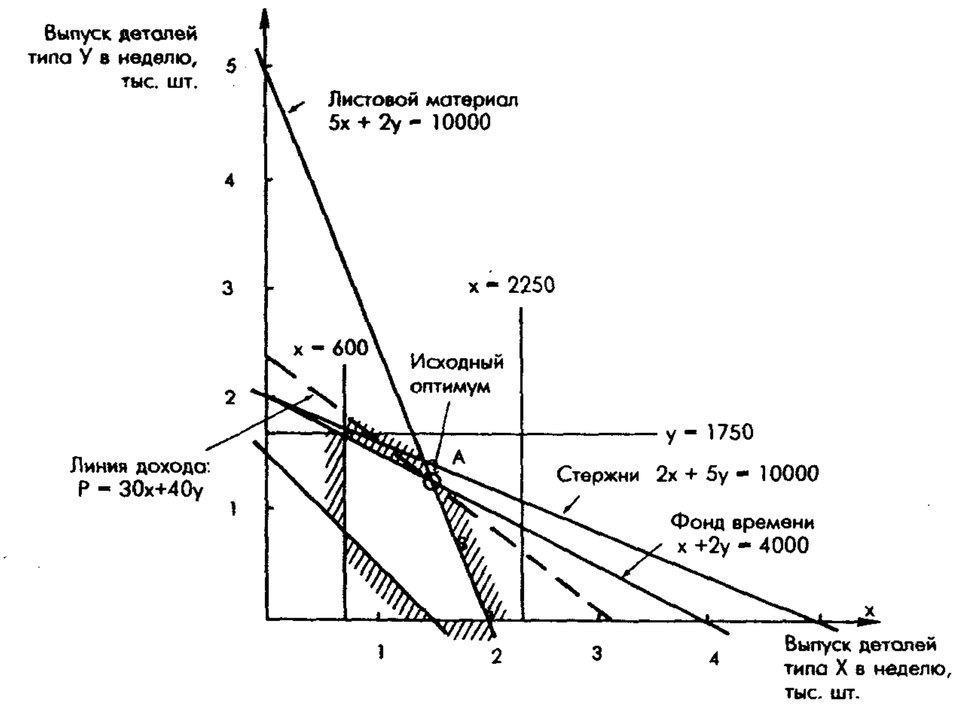


Рис. 1.17. Задача линейного программирования для производства деталей типа X и Y в неделю

На рис. 1.17 она проходит через оптимальную крайнюю точку А. Теперь вспомним, что доход от выпуска единицы деталей типа X может меняться. Каков промежуток значений единичного дохода, для которых А остается оптимальной крайней точкой? Единичный доход от высушки деталей типа Y остается неизменным.

Решение

Перепишем уравнение дохода за неделю в следующем виде:

$$P = ax + 40\,y \text{ (ф. ст. в неделю)},$$

где a — единичный доход от выпуска деталей типа X. Преобразовав это уравнение, получим:

$$y = P/40 - (a/40)x.$$

Тангенс угла наклона линии дохода за неделю равен - (a/40). В исходном положении при a = 30 ф. ст. за единицу тангенс угла наклона равен - (30/40) = (3/4).

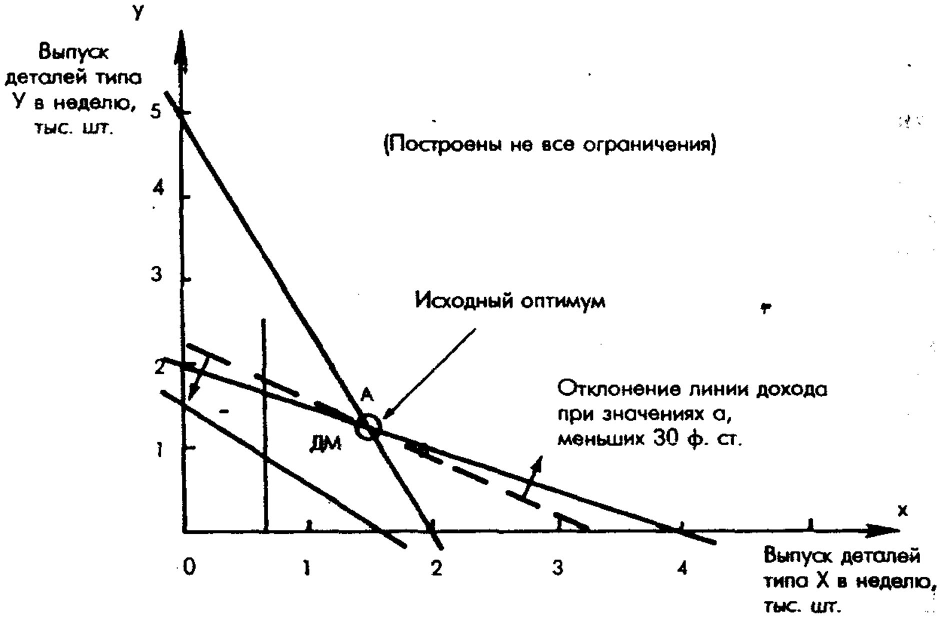


Рис. 1.18. Уменьшение дохода от выпуска деталей типа X

Если a меньше 30 ф. ст. за единицу, то наклон линии еженедельного дохода становится более пологим. В точке A линия уровня будет отклоняться в сторону лимитирующего ограничения на фонд рабочего времени. Это ведет к уменьшению оптимального значения функции P, дохода за неделю. Обратите внимание на рис 1.18. Если сильно уменьшать значение параметра a, то линия уровня еженедельного дохода совпадет с ограничением на фонд рабочего времени; Это показано на рис. 1.19.

Если и далее уменьшать значение параметра a, оптимум переместится из точки A в точку D (см. рис. 1.20). Следовательно, граничным является положение линии уровня дохода, при котором она совпадает с линией лимитирующего ограничения на фонд рабочего времени. Этому положению соответствует наименьшее значение a, для которого A является оптимальной крайней точкой.

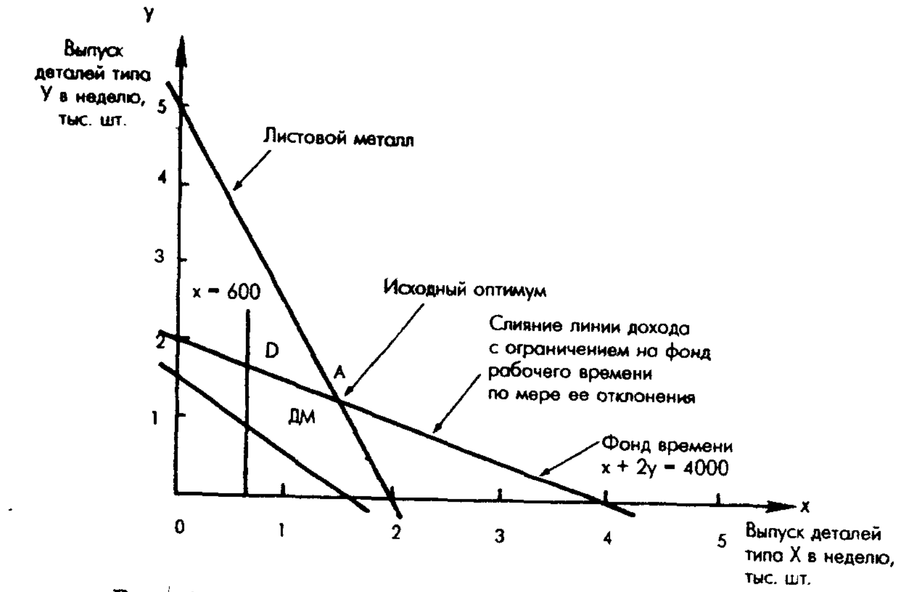


Рис. 1.19. Граничное положение линии дохода по мере его уменьшения

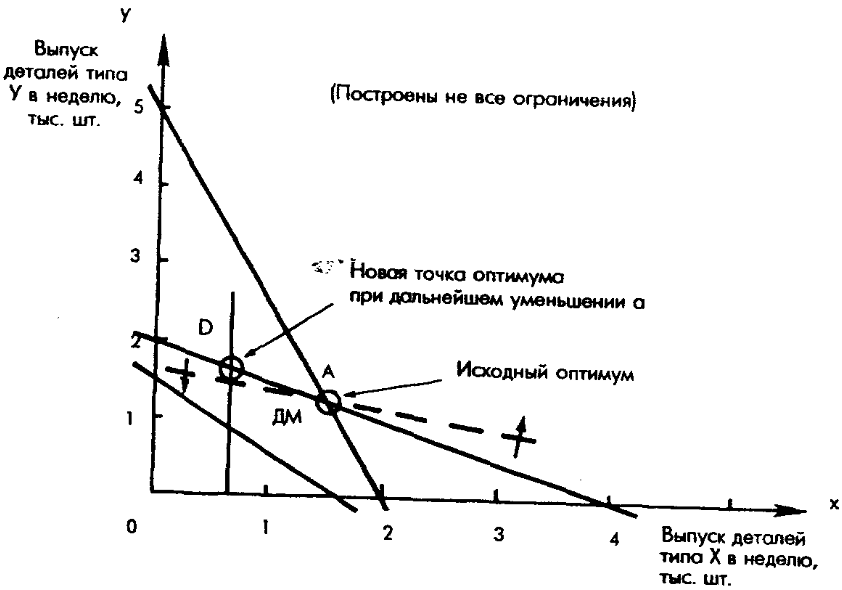


Рис. 1.20. Влияние дальнейшего сокращения дохода от выпуска деталей типа X

Угол наклона линии ограничения на фонд рабочего времени можно найти, преобразовав данное ограничение к виду:

$$y = 4000/2-1/2\ x$$

Тангенс угла наклона лимитирующего ограничения равен - (1/2). Нижний предел значений находится из условия - (a/40) = - (1/2), таким образом, a = 20 ф. ст. за единицу. Следовательно, единичный доход от выпуска деталей типа X может уменьшаться до 20 ф. ст. до того, как оптимум переместится из точки A в точку D .

Причем оптимальный доход будет сокращаться, но оптимальный ассортиментный набор не изменится до тех пор, пока значение параметра a не опустится ниже 20 ф. ст. Аналогичным образом можно найти верхний предел значений a. С увеличением значения a линия еженедельного дохода становится все менее пологой и в конечном итоге окажется параллельной линии другого лимитирующего ограничения, а именно на листовой металл. Любое дальнейшее увеличение значения a вызовет изменение оптимальной крайней точки и перемещение ее в точку E. Это показано на рис. 1.21 и 1.22.

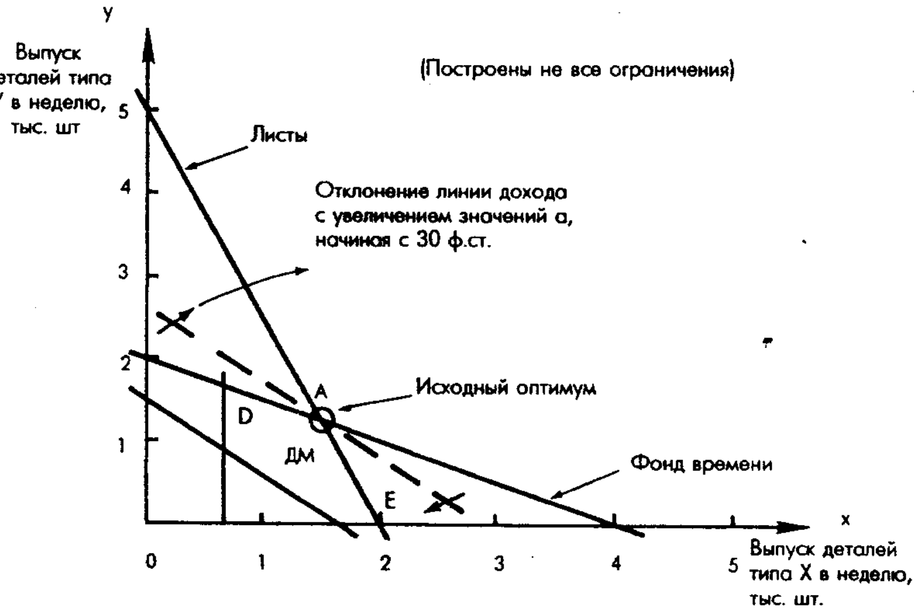


Рис. 1.21. Увеличение дохода от выпуска деталей типа X

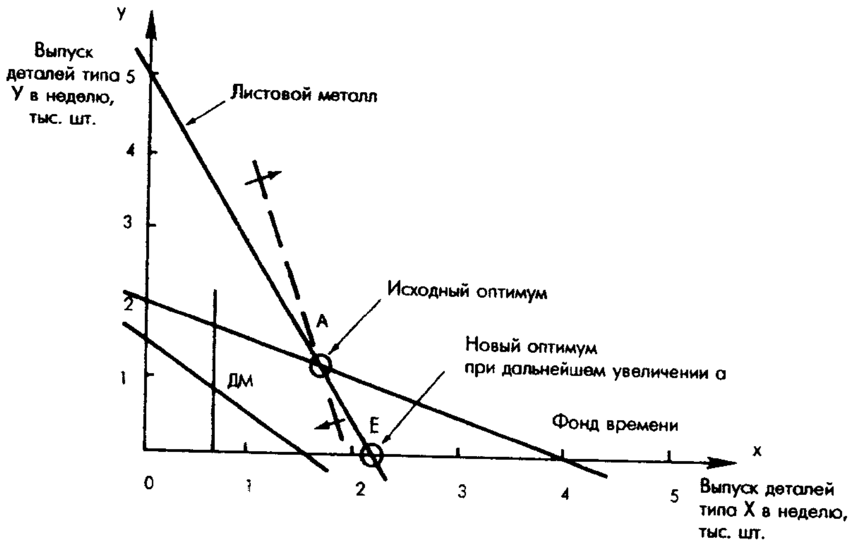


Рис. 1.22. Воздействие увеличения дохода от выпуска деталей типа X после прохождения линией уровня ее лимитирующего положения

Граничное положение линии уровня еженедельного дохода достигается в момент ее совпадения с ограничением на листовой металл. Этому положению соответствует верхний предел значений параметра а, для которых точка А является оптимальной крайней точкой допустимого множества. Угол наклона ограничения на листовой металл можно найти, преобразовав это уравнение к виду:

$$y = 10000/2 - (5/2)x.$$

Тангенс угла наклона лимитирующего ограничения равен - (5/2), а верхний предел параметра а находятся из условия - (a/40) = - (5/2), следовательно, a = 100 ф. ст. за единицу. Таким образом, до того как оптимальный ассортиментный набор переместится из точки А в точку Е, единичный доход от выпуска деталей типа X может возрастать до 100 ф. ст.

Два соответствующих предела значения единичного дохода от выпуска деталей типа Y можно найти аналогичным образом, если в изложенной схеме расчетов заменить x на y. Предположим, что значение коэффициента целевой функции при x является неизменным, тогда:

$$P = 30\,x + b\,y \text{ (ф. ст. в неделю)}$$

и

$$x = P/30 - (b/30)y.$$

По мере увеличения или уменьшения параметра b граничные положения линии уровня еженедельного дохода определяются теми же двумя ограничениями, что и в предыдущем случае. Теперь необходимо записать уравнения этих ограничений так, чтобы x выступал в качестве зависимой переменной:

Фонд рабочего времени: $x = 4000 - 2y$.

Тангенс угла наклона равен -2, следовательно, предельное значение достигается при условии $-(b/30) = -2$, т.е. $b = 60$ ф. ст. за единицу.

Листовой металл: $x = 10000/5 - (2/5)y$.

Тангенс угла наклона равен $-(2/5)$, для предельного значения выполняется условие: $-(b/30) = -(2/5)$, следовательно, $b = 12$ ф. ст. за единицу.

Крайняя точка А соответствует оптимальному ассортиментному набору только до тех пор, пока доход от выпуска деталей типа Y изменяется в пределах от 12 до 60 ф. ст. за единицу. В случае если показатели единичных доходов от выпуска деталей типа X или Y будут изменяться по сравнению с их исходными значениями, значение оптимального дохода также будет отличным от 95000 ф. ст.

1.5. СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С МНОЖЕСТВОМ ПЕРЕМЕННЫХ

Если задача линейного программирования содержит более двух переменных, то ее решение требует применения некоторого алгебраического метода. Принцип, лежащий в основе решения задачи с множеством переменных, достаточно прост. Предполагается, что оптимальному решению соответствует одна из крайних точек допустимого множества. Следовательно, необходимо провести оценку значений целевой функции во всех крайних точках допустимого множества и выбрать ту из них, в которой достигается оптимальное значение целевой функции. Нами используются методы матричной алгебры и такой алгоритм перехода от одной крайней точки допустимого множества к другой, при котором переход осуществляется только в случае, когда значение целевой функции улучшается. Если оказывается, что некоторое базисное решение улучшить уже нельзя, то оно является оптимальным планом задачи. Этот алгоритм получил название симплекс-метода. Нет необходимости вдаваться в детали алгоритма симплекс-метода, поскольку для решения задач линейного программирования с множеством переменных используется, как правило, один из компьютерных пакетов прикладных программ, которые общедоступны и широко применяются для этих целей. Однако для более полной интерпретации и всесторонней оценки решения задачи линейного программирования, полученного с использованием пакета прикладных программ, с основными принципами этого метода полезно ознакомиться.

В обычном симплекс-методе принимается предпосылка о максимизации целевой функции задачи линейного программирования в условиях системы ограничений со знаком "$\leq$". Это означает, что при реализации данного алгоритма в качестве начальной крайней точки может быть выбрано начало координат. Поиск оптимального решения всегда начинается со значения целевой функции, равного нулю.

Симплекс-метод можно применять также и в решении задач минимизации, и в решении задач, система ограничений которых содержит ограничения со знаком "$\geq$" или уравнения. Эта процедура предусматривает введение в задачу искусственных, а также избыточных и остаточных переменных. Мы не будем подробно останавливаться на подобных усложнениях, поскольку обычно задачи линейного программирования решаются с помощью пакетов прикладных программ, в которых указанные переменные вводятся в модель автоматически.

Базовую модель, с которой мы будем работать в дальнейшем, формально? можно представить следующим образом:

Максимизировать $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$.

Здесь c_i - константы. Данная функция максимизируется в условиях системы m линейных ограничений:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \leq b_3$

. . . .

.   .   .   .

.   .   .   .

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m$

$x_1 \ge 0$

Данная система содержит n переменных и m ограничений. Первая цифра двойных индексов коэффициентов в левой части системы ограничений соответствует номеру ограничения, вторая — номеру переменной. Например, a_{32} принадлежит ограничению 3 и является коэффициентом при переменной x_2. Проиллюстрируем применение симплекс-метода на примере простой задачи с двумя переменными, решение которой было получено нами ранее с помощью графического метода. Этот прием позволит нам сравнить решение, полученное графическим и алгебраическим методами.

Пример 1.8. Некоторая фирма производит два вида продуктов X и Y в условиях ограничений на три вида сырья: RM1, RM2 и RM3. Целью фирмы является выбор такого ассортиментного набора, при котором достигается максимум прибыли в неделю. Задача линейного программирования имеет вид:

1. Выпускается x единиц продукта X в неделю и y единиц продукта Y в неделю.
2. Максимизируется еженедельная прибыль P (ф. ст.), где P = 2 x + y.
3. Максимизация осуществляется в условиях ограничений:

RM1: $3x \le 27$ кг в неделю

RM2: $2y \le 30$ кг в неделю

RM3: $x + y \le 20$ кг в неделю

$x, y \ge 0.$

4. Найти оптимальный ассортиментный набор и максимальную прибыль за неделю.

Определить свободный запас каждого ресурса.

Решение

Графический метод. В каждое ограничение модели вводятся остаточные переменные s_i

Максимизировать:

P = 2 x + y (ф. ст. в неделю) при ограничениях:

RM1: $3x + s_1 = 27$ кг в неделю;

RM2: $2y + s_2 = 30$ кг в неделю;

RM3: $x + y + s_3 = 20$ кг в неделю;

$x, y, s \ge 0.$

Изобразим систему ограничений графически (см. рис. 1.23)

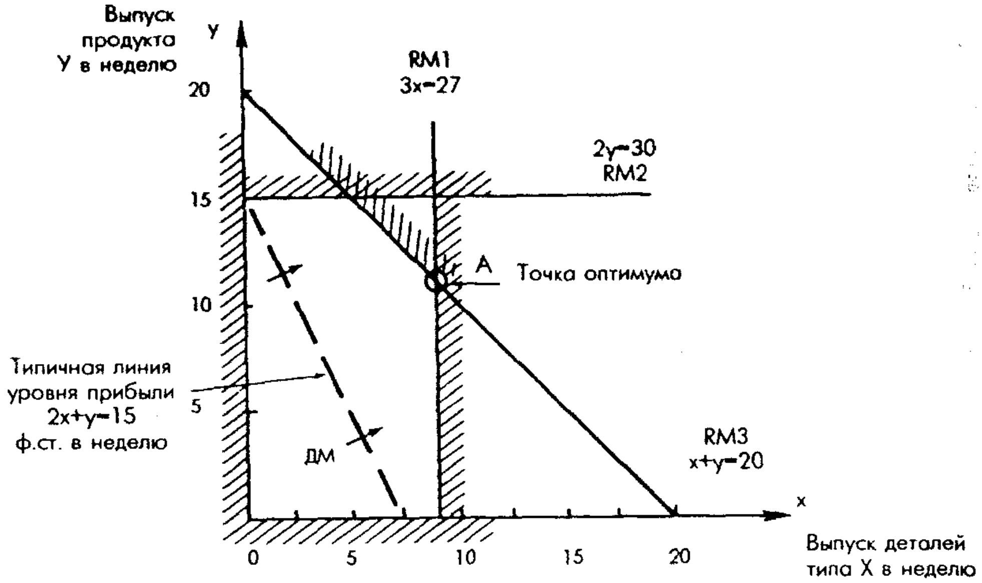


Рис. 1.23. Задача линейного программирования для объемов выпуска продуктов X и У в неделю

Точка с координатами x = 5, y = 5 принадлежит допустимому множеству.

Еженедельная прибыль в этой точке составит:

$P=2x5+5=15$ф.ст.в неделю.

В качестве типичной линии уровня прибыли выберем прямую

$$15 = 2x + y \text{ (ф. ст. в неделю).}$$

Точка с координатами $x = 0$, $y = 15$ также принадлежит этой прямой. Линия уровня изображена на приведенном выше графике пунктиром. Если осуществлять перемещение линии уровня параллельно ее начальному положению (отмеченному пунктиром), то легко можно убедиться, что оптимум находится в крайней точке А Эта точка лежит на пересечении линий ограничений RM1 и RM3. Решение системы этих уравнений дает следующие результаты:

$$3x = 27, \text{ следовательно, } x = 9.$$

Подставив это значение во второе уравнение системы, получим:

$$x + y = 20, \text{ следовательно, } y = 11.$$

Оптимальным ассортиментным набором является производство 9 единиц продукта X и 11 единиц продукта Y в неделю. Таким образом, максимальная прибыль, получаемая за неделю, составит:

$$P_{max} = 2 \times 9 + 11 = 29 \text{ ф. ст. в неделю.}$$

Сырье типа 1 и 3 используется полностью, однако существует свободный запас сырья типа 2, т.е. $2 \times 11 + s_2 = 30$, следовательно, $s = 8$ кг в неделю.

Решение

Симплекс-метод. Представим коэффициенты, стоящие в левой части системы ограничений, в матричной форме. За обозначения столбцов примем переменные, которым они соответствуют. Значения правой части ограничений запишем в отдельном столбце матрицы справа. За обозначения строк примем обозначения соответствующих переменных, которые являются базисными (имеющими ненулевые значения) переменными в начальной крайней точке (начале координат). Наконец, введем в таблицу дополнительную строку, соответствующую коэффициентам целевой функции γ. Существует несколько немного отличных друг от друга вариантов решения задачи симплекс-методом. В том из них, который излагается ниже, требуется вводить коэффициенты целевой функции с отрицательным знаком. Полученная в результате применения данной процедуры матрица называется симплекс-таблицей, а сама эта процедура представляет собой Шаг 1 в алгоритме симплекс-метода.

Таблица 1.2.

Первая симплекс-таблица

Базисные переменные	*Переменные*					*Правая часть b*
	x	y	s_1	s_2	s_3.	
s_1	3	0	1	0	0	27
s_2	0	2	0	1	0	30
s_3	1	1	0	0	1	29
Целевая функция, P	-2	–1	0	0	0	0

Шаг 2. В строке коэффициентов целевой функции найдем наибольшее отрицательное значение (-2). Столбец, соответствующий этому значению, называется ведущим. Разделим значения правой части на соответствующие значения ведущего столбца. В результате получим ряд отношений.

Таблица 1.3.

Первая симплекс-таблица с учетом отношений

Базисные переменные	*Переменные* x	y	s_1	s_2	s_3	*Правая часть* *b*	*Отношения b/ элемент ведущего столбца*
S_1	3*	0	1	0	0	27	27/3 = 9 ← ведущая строка
S_2	0	2	0	1	0	30	30/0 = ∞
S_3	1	1	0	0	1	20	20/1 = 20
Целевая функция P	-2	-1	0	0	0	0	

↑

Ведущий столбец x

Шаг 3. Выберем среди полученных отношений наименьшее положительное отношение. В нашем случае оно равно 9. Соответствующая ему строка s_1 является ведущей. Пересечение ведущего столбца и ведущей строки дает ведущий элемент 3, в приведенной выше табл. 1.3 он отмечен знаком "*".

Шаг 4. Разделим все элементы ведущей строки на ведущий элемент, 3. Заменим все элементы ведущей строки на полученные новые значения (табл. 1.4) Обозначение ведущей строки s_1 заменим на обозначение ведущего столбца x. Новые переменные, соответствующие обозначениям строк, — это базисные переменные второго базисного решения.

Таблица 1.4.

Вторая симплекс-таблица

Базисные переменные	*Переменные* X	y	s_1	s_2	s_3	*Правая часть* *b*	
x	1	0	1/3	0	0	9	Новая R_1 = прошлая R_1 + ведущий элемент (3)
s_2	0	2	0	1	0	30	Новая R_2 = прошлая R_2 – 0 x Новая R_1
s_3	0	1	-1/3	0	1	11	Новая R_3 = прошлая R_3 – 1 x Новая R_1
Целевая функция P	0	-1	2/3	0	0	18	Новая P = прошлая P – - - (-2) x Новая R_1

Шаг 5. Применив к строкам матрицы арифметические операции (строчные операции в матричной алгебре), приведем все остальные элементы ведущего столбца x к нулю. В качестве базиса в этих арифметических операциях должна использоваться только ведущая строка.

Обозначим через R_i i-ю строку. Соотношение "Новая R_3 = Прошлая R_3 - Новая R_1" означает, что новые элементы строки 3 были получены вычитанием элементов новой ведущей строки (строка 1) из соответствующих элементов ведущей строки 3 предыдущего шага. Выполненные операции перечислены в крайнем правом столбце табл. 1.4.

Шаг 6. Шаги 2-5 повторяются до тех пор, пока не будет достигнута неотрицательность всех элементов в строке целевой функции.

Таблица 1.5.

Вторая симплекс-таблица с отношениями

Базисные переменные	*Переменные* x	y	s1	s2	s3	*Правая часть* b	*Отношения b/ элемент ведущего столбца*
x	1	0	1/3	0	0	9	9/0 = ∞
s2	0	2	0	1	0	30	30/2 = 15
s3	0	1*	-1/3	0	1	11	11/1 = 11 ← ведущая строка
Целевая функция P	0	-1	2/3	0	0	18	

↑

Ведущий столбец y

Таблица 1.6.

Третья, итоговая, симплекс-таблица

Базисные переменные	*Переменные* x	y	s_1	s_2	s_3	*Правая часть* b	
x	1	0	1/3	0	0	9	Новая R_1=Прошлая R_1 – – 0 x Новая R_3
s_2	0	0	2/3	1	-2	8	Новая R_2=Прошлая R_2 – – 2 x Новая R_3
y	0	1	-1/3	0	1	11	Новая R_3 = Прошлая R_3 ÷ ÷ ведущий элемент (1)
Целевая функция P	0	0	1/3	0	1	29	Новая P =Прошлая P- -(-1) x Новая R_3

Теперь все элементы в строке целевой функции либо положительны, либо равны нулю, следовательно, представленное в данной таблице решение является оптимальным.

Чтобы дать интерпретацию итоговой симплекс-таблице, обратим сначала внимание на значения ее крайних элементов.

Таблица 1.7.

Интерпретация итоговой симплекс-таблицы

Базисные переменные	*Переменные* x	y	s_1	s_2	s_3	*Правая часть* b
x s_2 y						9 = значение x 8 = значение ресурса $RM_2 = s_2$ 11 = значение y
Целевая функция P	0	0	1/3	0	1	29 = максимальное значение прибыли

↓ ↓

Стоимость введения в решение одной небазисной переменной *Теневые цены*

Базисными называются переменные, которые имеют ненулевые значения в крайней точке допустимого множества. Значения базисных переменных находятся в соответствующих строках столбца b. Следовательно,
x = 9 единиц в неделю;
y = 11 единиц в неделю,
а значение остаточной переменной для сырья 2 составило 8 кг в неделю.

Все остальные переменные имеют нулевые значения, т.е. остаточные переменные ограничений 1 и 3, s_1 и s_3 соответственно равны нулю. Это означает, что данные ограничения являются лимитирующими, а сырье типов 1 и 3 расходуется полностью. Оптимальное значение целевой функции указано в строке целевой функции столбца b. Максимальное значение получаемой за неделю прибыли составляет 29 ф. ст. Полученное решение полностью совпадает с графическим решением задачи, найденным ранее. Элементы, стоящие на пересечении строки целевой функции и столбцов остаточных переменных, соответствуют, как показано в табл. 1.7. **теневым ценам** ресурсов. Теневая цена для ограничения 1, т.е. цена ресурса RM1, составляет 1/3 ф. ст. за 1 кг, а теневая цена для ограничения 3 - 1 ф. ст. за 1 кг. Это означает, что если реализуется 1 кг ресурса RM1 сверх нормативного запаса, прибыль за неделю возрастает на 33 пенса (минус любые издержки сверх обычной стоимости RM1). Аналогичным образом, если используется сверхнормативное количество ресурса RM3 в 1 кг, рост прибыли за неделю составит 1 ф. ст. (минус любые дополнительные издержки). Найденные значения теневых цен можно проверить, вычислив их с помощью графического метода. Чтобы проиллюстрировать эту процедуру, обратимся к ограничению 1.

Ограничение 1, соответствующее сырью 1, имеет вид: 3 x = 27 кг в неделю. Снизив жесткость этого ограничения на 1 кг, получим: 3 x = 28. Оптимальная крайняя точка по-прежнему будет находиться на пересечении линий ограничений 1 и 3. Чтобы убедиться в справедливости этого положения, достаточно взглянуть на соответствующий график. Новая точка оптимума имеет следующие координаты:

$$x = 28/3 = 9\frac{1}{3},$$

а соотношение

$$28/3 + y = 20$$

приводит к тому, что

$$y = 32/3 = 10\frac{2}{3}.$$

Новое максимальное значение прибыли за неделю составит:

2 x (28/3) + (32/3) = 88/3 = 29,33 ф. ст. в неделю.

Увеличение прибыли на 33 пенса произошло в результате использования 1 кг ресурса RM1 дополнительно. Следовательно, теневая цена ресурса RM1 равна 33 пенсам за 1 кг.

Оставшиеся крайние значения итоговой таблицы — это элементы, лежащие на пересечении строки "целевая функция" и столбцов переменных задачи. В нашем примере значения, соответствующие столбцам x и y, равны нулю. Эти элементы были бы ненулевыми, если бы соответствующие переменные в оптимальном решении не являлись базисными. Например, если бы в оптимальном решении утверждалось, что следует производить только продукт X, переменная y была бы небазисной, т.е. выполнялось бы соотношение y = 0, то в этом случае значение; указанное на пересечении строки "целевая функция" и столбца b, показало бы, на сколько уменьшится максимальное значение целевой функции при выпуске единицы продукта y.

Предположим, что в результате решения данной задачи мы получили итоговую таблицу следующего вида:

Таблица 1.8.

Модификация итоговой таблицы

Базисные переменные	*Переменные* x	y	s1	s2	s3	*Правая Часть* b
x s_2 s_3						9 8 11
Целевая функция P	0	0,5	1/3	0	0	18= максимальное значение прибыли

Оптимальный ассортиментный набор для этого решения — это выпуск только продукта X в количестве 9 единиц. Если по тем или иным причинам некоторое количество продукта Y все же необходимо произвести, значение целевой функции уменьшится на 0,5 ф. ст., приходящихся на каждую производимую единицу продукта У.

1.6. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И СИМПЛЕКС-МЕТОД

Итоговую таблицу симплекс алгоритма можно использовать для проведения анализа чувствительности решения задачи линейного программирования. Значения остаточных переменных в столбцах, соответствующих лимитирующим ограничениям, представляют собой изменение значений базисных переменных при использовании дополнительной единицы лимитирующего ресурса.

Пример 1.9. В качестве итоговой симплекс-таблицы будем пользоваться таблицей 1.6. примера **1.8.** С помощью данных этой таблицы необходимо определить:

1. Влияние на оптимальное решение задачи сверхнормативного запаса ресурса RM1 в количестве 1 кг;
2. Влияние на оптимальное решение задачи сверхнормативного запаса ресурса RM1 в количестве 2 кг;
3. Влияние на оптимальное решение задачи сверхнормативного запаса ресурса RM3 в количестве 5 кг;
4. Максимальное дополнительное количество ресурса RM3, которое используется полностью и не приводит к созданию излишка ресурса;
5. Влияние на оптимальное решение задачи уменьшения запаса ресурса RM1 на 2 кг.

Решение.

Воспроизведем формулировку задачи линейного программирования и данные итоговой симплекс-таблицы.

Максимизировать еженедельную прибыль P, где $P = 2x + y$ (ф. ст. в неделю) в условиях ограничений на

RM1: $3x \le 27$ кг в неделю;

RM2: $2y \le 30$ кг в неделю;

RM3: $x + y \le 20$ кг в неделю;

$x, y \ge 0.$

Таблица 1.9.

Итоговая симплекс-таблица

Базисные переменные	x	y	s_1	s_2	s_3	*Правая часть* b
			Переменные			
x	1	0	1/3	0	0	9
s_2	0	0	2/3	1	-2	8
s_3	0	0	1/3	0	1	11
Целевая Функция P	0	0	1/3	0	1	29

1. Если существует сверхнормативный запас ресурса RM1 в количестве 1 кг, жесткость соответствующего лимитирующего ограничения снижается на 1 кг: Элементы столбца s_i — это изменения базисных переменных, вызванные снижением жесткости данного ограничения.

Ниже приводится итоговая таблица, в которой представлены только значения соответствующих элементов и процедура их расчета.

Таблица 1.10.

Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы (при наличии 1 кг RM1 дополнительно)

Базисные переменные	*Переменные* x y s_1 s_2 s_3	*Правая часть, модифицированные b*
x	1/3	$9+(1/3)=9\frac{1}{3}$
s_2	2/3	$8+(2/3)=8\frac{2}{3}$
y	-1/3	$11-(1/3)=10\frac{2}{3}$
Целевая Функция P	1/3	$29+(1/3)=29\frac{1}{3}$

Один дополнительный килограмм ресурса RM1 ведет к увеличению значения x на 1/3 единицы, росту остатка ресурса RM2 на 2/3 кг, снижению значения y на 1/3 единицы и к увеличению значения максимальной прибыли за неделю на 1/3 ф. ст., что соответствует значению теневой цены на ресурс RM1. Новое оптимальное решение состоит в производстве $9\frac{1}{3}$ продукта X и $10\frac{2}{3}$ продукта Y в неделю. При этом значение остаточной переменной, т.е. неиспользуемое количество ресурса 2, равно $8\frac{2}{3}$ кг. Остальные переменные принимают нулевые значения. Равенство нулю остаточных переменных для ограничений 1 и 3 означает полное использование ресурсов RM1 и RM3. Следовательно, данные ограничения являются лимитирующими. Максимальное значение прибыли за неделю составляет 29,33 ф. ст. Приведенные значения соответствуют графическому решению задачи (рис. 1.24).

Рис. 1.24. Производство продуктов X и Y в неделю при наличии 1 кг ресурса RM1 дополнительно

2. Если имеется сверхнормативный запас RM1 в количестве 2 кг, жесткость соответствующего лимитирующего ограничения также снижается на 2 кг. Элементы столбца s_1 умножаются на 2. Полученные новые значения характеризуют изменения в базисных переменных, происшедшие в связи с использованием 2 кг ресурса RM1 дополнительно. В табл. 1.11 показаны значения соответствующих элементов итоговой таблицы и процедура их расчета.

Таблица 1.11.

Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы (при наличии 2 кг RM1 дополнительно)

Базисные переменные	*Переменные* x y s_1 s_2 s_3	*Правая часть, модифицированные b*
x	1/3 x 2	9+(2/3)=$9\frac{2}{3}$
s_2	2/3 x 2	8+(4/3)=$9\frac{1}{3}$
y	-1/3 x 2	11-(1\2/3)=$10\frac{1}{3}$
Целевая Функция P	1/3 x 2	29+(2/3)=$29\frac{2}{3}$

Новое оптимальное решение состоит в выпуске $9\frac{2}{3}$ и $10\frac{1}{3}$ - единиц продуктов X и Y соответственно в неделю. Остаток, соответствующий ограничению 2, равен $9\frac{1}{3}$ кг.

Значения других остаточных переменных s_1 и s_2 являются нулевыми. Это означает, что соответствующие им ограничения являются лимитирующими. Максимальное значение получаемой за неделю прибыли равно 29,67 ф. ст. Указанные компоненты оптимального решения можно проиллюстрировать графически по аналогии с п.1.

3. В случае, если имеется сверхнормативный запас ресурса RM3 в размере 5 кг, жесткость соответствующего ему лимитирующего ограничения также понижается на 5 кг. Элементы столбца s_3 умножаются на 5. В модифицированной итоговой таблице (табл. 1.12) показаны изменения значений базисных переменных, связанные с использованием дополнительных 5 кг ресурса RM3. В данном случае возникает новая проблема. Значение остаточной переменной s_2 для ресурса 2 становится отрицательным. Это недопустимо, так как по условиям задачи значения переменных должны быть положительными или равными нулю. Если обратиться к графическому решению задачи, легко можно понять, почему так происходит. Жесткость ограничения RM3 снижается настолько, что оно перестает быть лимитирующим. В симплекс-таблицу вводится точка, не принадлежащая допустимому множеству. Это означает, что дополнительное привлечение всех 5 кг ресурса RM3 невозможно. Данная проблема рассматривается в п. 4.

Таблица 1.12.

Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы (в условиях наличия 5 кг RM3 дополнительно)

Базисные переменные	*Переменные* x y s_1 s_2 s_3	*Правая часть, модифицированные b*
x	0x5	9+(0)=9
s_2	-2x5	8+(-10)=-2
y	1x5	11-(5)=16
Целевая Функция P	1x5	29+(5)=34

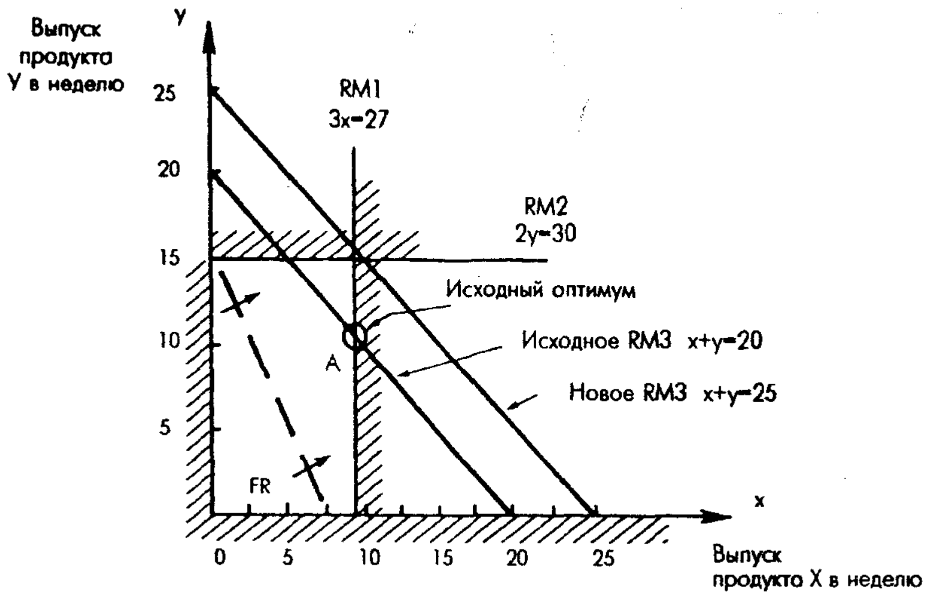


Рис. 1.25. Задача линейного программирования для производства продуктов X и У при наличии 5 кг ресурса RM3 дополнительно

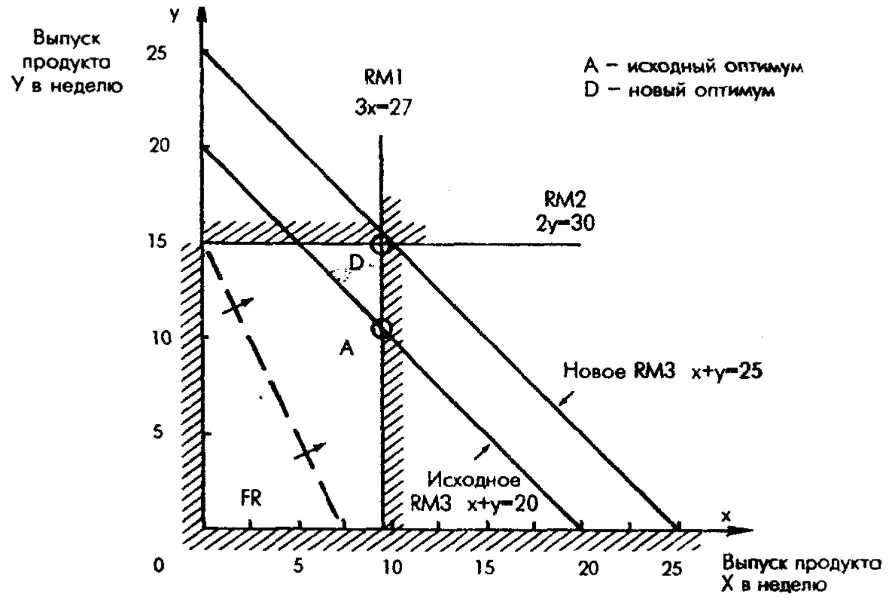


Рис. 1.26. Задача линейного программирования для производства продуктов X и У в неделю в условиях максимального использования ресурса RM3

4. Ограничение RM3 представлено в итоговой таблице столбцом s_3. Единственным отрицательным значением в столбце s_3 является итоговое значение переменной s_2, равное -2. При снижении жесткости ограничения RM3 на единицу значение s_2 снижается на 2 единицы, но оно не может стать отрицательным. Лимитирующее положение линии ограничения на RM3 возникает, когда s_2 достигает нуля. Предположим, лимитирующее положение достигается при снижении жесткости ограничения на RM3 на r кг, тогда s_2 примет значение, равное нулю, следовательно,

$$8 + (-2 \text{ x } r) = 0.$$

Таким образом, r = 4 кг. До того как ограничение RM3 перестанет быть лимитирующим, его жесткость может быть снижена на 4 кг, с 20 до 24 кг. Граничного положения линия данного ограничения достигает при прохождении через точку пересечения ограничений RM1 и RM2, для которой x = 9, y = 15, а линия ограничения RM3 имеет вид: x + y = 24.

5. Если количество ресурса RM1, имеющееся в распоряжении производителя, уменьшается на 2 кг, жесткость лимитирующего ограничения возрастает на 2 кг. Значения элементов столбца s_1 умножаются на 2. Полученные значения вычитаются из соответствующих значений

базисных переменных. Полученная в результате описанной процедуры итоговая таблица представлена ниже.

Таблица 1.13.

Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы (в условиях уменьшения запаса RM1 на 2 кг)

Базисные переменные	*Переменные* x y s_1 s_2 s_3	*Правая часть, модифицированные b*
x	1/3x2	$9 - (2/3) = 8\frac{1}{3}$
s_2	2/3x2	$8 - (4/3) = 6\frac{2}{3}$
y	1/3x2	$11 - (-2/3) = 11\frac{2}{3}$
Целевая функция P	1/3x2	$29 - (2/3) = 28\frac{1}{3}$

Новое оптимальное решение состоит в выпуске $8\frac{1}{3}$ и $11\frac{2}{3}$ единиц продуктов X и Y в неделю соответственно. Остаточная переменная ограничения 2 равна $6\frac{2}{3}$ кг.

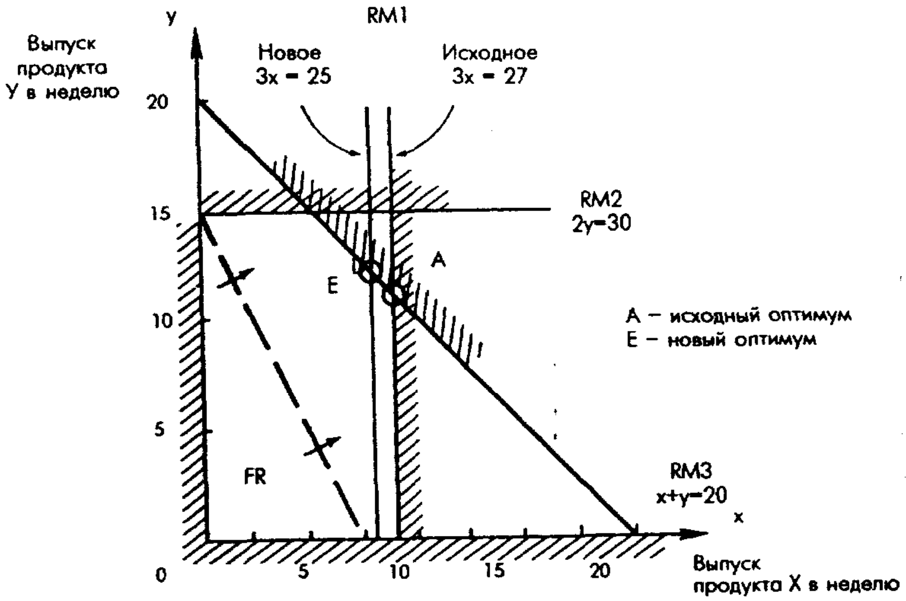


Рис. 1.27. Задача линейного программирования для производства продуктов X и Y в неделю (в условиях снижения запаса ресурса RM1 на 2 кг)

Остаточные переменные, соответствующие ограничениям 1 и 3, принимают нулевые значения. Это значит, что данные ограничения являются лимитирующими. Максимальное значение прибыли за неделю равно 28,33 ф. ст. На рис. 1.27 представлено графическое решение данного варианта задачи.

Проведение подобного анализа вручную довольно утомительно, даже если симплекс-метод используется для решения простейшей задачи линейного программирования с двумя переменными. Обычно всю необходимую информацию можно почерпнуть из стандартных пакетов прикладных программ по линейному программированию. На практике анализ чувствительности многомерных задач осуществляется именно таким путем. Однако основные принципы подобного анализа полностью совпадают с принципами анализа чувствительности задачи линейного программирования с двумя переменными, изложенными выше.

1.7. ДВОЙСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Двойственная модель линейного программирования используется для изучения поставленной проблемы с точки зрения, отличной от той, которая исследуется в обычной прямой задаче. Прямая и двойственная модели приводят к одному и тому же решению и к получению одинаковой информации о чувствительности модели. Единственная причина, по которой предпочтение отдается той или иной модели, состоит в том, что одну из них решить, как правило, легче, чем другую. Однако по мере все более широкого распространения пакетов прикладных программ альтернативное использование прямой или двойственной задачи становится менее существенным. Переменные двойственной модели являются для исходной, или прямой, модели теневыми ценами ресурсов. Структура двойственной и прямой задачи одинакова. Если прямая модель линейного программирования построена, из нее легко получить соответствующую двойственную модель. В общем виде задачу линейного программирования можно сформулировать следующим образом:

Максимизировать $Z = c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$

в условиях системы из m линейных ограничений:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1;$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+ a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2;$

$a_{31}x_1+a_{32}x_2+ a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n \le b_3;$

. . . .

. . . .

. . . .

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m;$

$x_1 \ge 0;$

Сформулированная выше задача линейного программирования является задачей максимизации, а все ее ограничения имеют знак "$\le$". К этому виду можно привести любую модель линейного программирования, а затем построить двойственную к ней, как это будет показано ниже. Двойственная модель имеет следующий вид:

Минимизировать $G=b_1y_1 +b_2y_2+ \ldots +b_my_m$

в условиях системы из n линейных ограничений:

$a_{11}y_1+a_{21}y_2+a_{31}y_3+\ldots+a_{m1}y_m \ge c_1;$

$a_{12}y_1+a_{22}y_2+a_{32}y_3+\ldots+a_m2y_m \ge c_2;$

$a_{13}y_1+a_{23}y_2+a_{33}y_3+\ldots+a_{m3}y_m \ge c_3;$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+a_{3n}y_3+\ldots+a_{mn}y_m \ge c_n;$

$y_i \ge 0$

В этой задаче m двойственных переменных y, каждая из которых соответствует одному из m ограничений прямой задачи, и n ограничений, каждое из которых связано с одной из n переменных x прямой задачи. Коэффициенты целевой функции прямой задачи c и значения правой части ограничений b в двойственной задаче меняются местами. Строки коэффициентов левой части системы ограничений прямой модели становятся столбцами в двойственной, а столбцы — строками. Двойственные переменные y являются теневыми ценами ресурсов в прямой задаче, и наоборот. В данном случае целевая функция двойственной задачи минимизируется, а целевая функция прямой задачи — максимизируется. Если ограничения прямой задачи имеют знак "<", то ограничения двойственной задачи записываются со знаком "$\ge$".

Пример 1.10. Некоторая фирма выпускает два продукта R и Q, каждый из которых требует двух видов сырья RM1 и RM2. Для выпуска 1 кг продукта R необходимо 2 кг сырья RM1 и 3,5 кг сырья RM2. Производство 1 кг продукта Q требует 3 кг RM1 и 1,5 кг RM2. В распоряжении фирмы имеются 10 кг RM1 и 12 кг RM2 в неделю, трудовые ресурсы и производственные мощности - в неограниченном количестве, кроме того, фирма может реализовать всю произведенную продукцию. Прибыль от выпуска единицы продукта R составляет 5 ф. ст., а от выпуска единицы продукта Q - 8 ф. ст.

1. Для изложенной проблемы сформулируем задачу линейного программирования, в которой максимизируется прибыль.
2. Построим двойственную модель линейного программирования.
3. Объясним взаимосвязи между моделями, построенными в п.1 и 2.
4. Для обеих моделей нужно найти оптимальное решение графическим методом.

Решение

1. Производится x_1 кг продукта R и x_2 кг продукта Q в неделю. Максимизируется полученная за неделю прибыль P (ф. ст.), где

$$P = 5\,x_1 + 8x_2 \text{ (ф. ст. в неделю)}$$

в условиях следующей системы ограничений:

$$\text{RM1:}\quad 2\,x_1 + 3\,x_2 \le 10 \text{ кг в неделю;}$$
$$\text{RM2:}\quad 3{,}5\,x_1 + 1{,}5\,x_2 \le 12 \text{ кг в неделю:}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

2. Используя формулировку прямой модели, построим двойственную модель. Минимизировать $G = 10\,y_1 + 12\,y_2$ (ф. ст. в неделю) в условиях следующей системы ограничений:

Продукт R: $2\,y_1 + 3{,}5\,y_2 \ge 5$ ф. ст. за единицу:

Продукт Q: $3\,y_1 + 1{,}5\,y_2 \ge 8$ ф. ст. за единицу;

$$y_1, y_2 \ge 0$$

3. Прямая модель. Переменные модели — это количество каждого продукта, которое необходимо производить каждую неделю. Целевая функция задачи - это общая прибыль, получаемая в неделю от производства продуктов R и Q. Каждое ограничение соответствует одному виду сырья. Левая часть каждого ограничения представляет собой общее количество сырья одного вида, требуемое для производства обоих продуктов. Правая часть ограничений содержит общее количество сырья каждого вида, которое фирма может использовать в течение недели.

Двойственная модель. Переменные модели — это теневые цены ресурсов для прямой модели, т.е. величины, на которые увеличилось бы значение целевой: функции при росте имеющегося запаса сырья соответствующего вида на единицу. Теневые цены характеризуют стоимость единицы сырья каждого вида. Целевая функция задачи — это общая еженедельная стоимость всех видов сырья, используемых при производстве R и Q. Каждое ограничение связано с одним из продуктов. В левой части каждого ограничения дана общая стоимость всех видов сырья, используемых при выпуске 1 кг соответствующего продукта; в правой - прибыль от выпуска единицы соответствующего продукта. Обратимся вновь к формулировке двойственной модели и попытаемся дать интерпретацию отдельным ее компонентам (см. стр. 41).

Из каждого ограничения следует, что общая стоимость сырья, используемого для производства данного продукта, должна быть больше либо равна прибыли от производства единицы этого продукта. Из решения прямой или двойственной модели можно получить решение обратной: модели.

4. Графическое решение прямой задачи приведено на рис. 1.28.

Оптимальным решением задачи является точка А, лежащая на пересечении ограничения на сырье 1 и оси Q. Чтобы получать максимальную прибыль, следует производить только продукт Q в количестве $3\frac{1}{3}$ кг. При этом RM1 будет использоваться полностью, а RM2 — нет. Максимальная прибыль составит: $3\,\frac{1}{3}$ x 8 = 26,67 ф. ст. в неделю. Ниже приводится графическое решение двойственной задачи (рис.1.29).

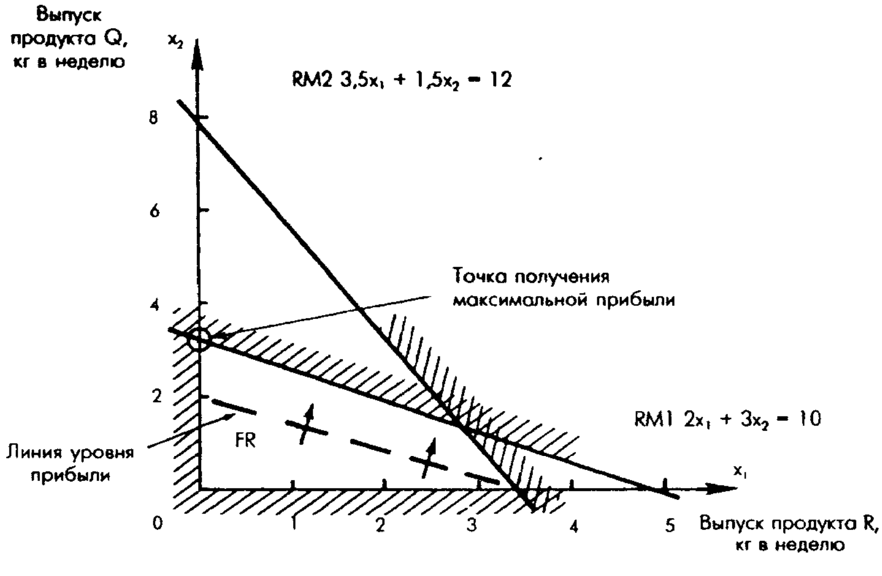


Рис. 1.28. Прямая модель

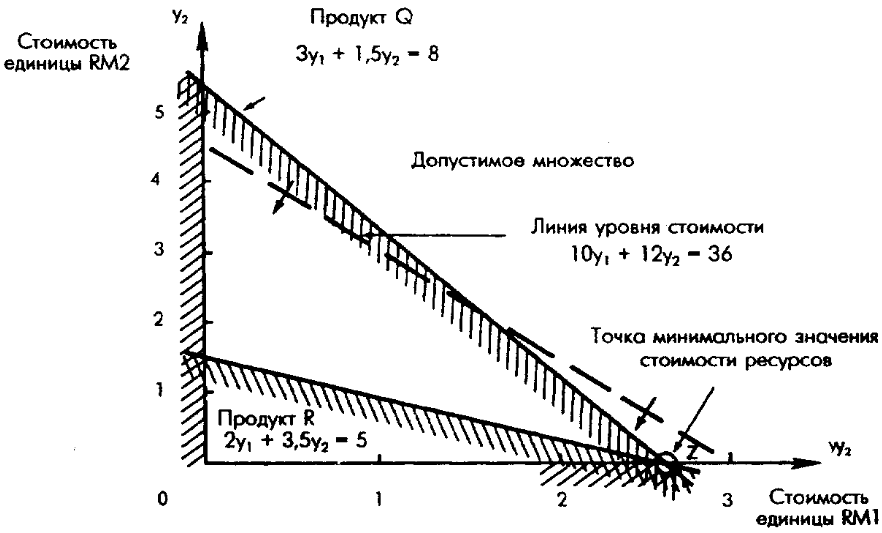


Рис. 1.29. Двойственная модель

Минимизировать G:

$$\underset{\begin{pmatrix} наличие\ RM1 \\ в\ неделю \end{pmatrix}}{10} \times \underset{\begin{pmatrix} количество \\ RM1(кг) \end{pmatrix}}{y_1} + \underset{\begin{pmatrix} наличие\ RM2 \\ в\ неделю \end{pmatrix}}{12} \times \underset{\begin{pmatrix} количество \\ RM2(кг) \end{pmatrix}}{y_1} \quad (ф.ст.\ в\ неделю)$$

Продукт R:

$$\underset{\begin{pmatrix} RM1(кг) \\ для\ R \end{pmatrix}}{2} \times \underset{\begin{pmatrix} количество \\ RM1(кг) \end{pmatrix}}{y_1} + \underset{\begin{pmatrix} RM2(кг) \\ для\ R \end{pmatrix}}{3{,}5} \times \underset{\begin{pmatrix} количество \\ RM2(кг) \end{pmatrix}}{y_1} \ge 5\ ф.ст.\ прибыли\ на\ единицу$$

Продукт Q**:**

$$\underset{\begin{pmatrix} RM1(кг) \\ для\,Q \end{pmatrix}}{2} \times \underset{\begin{pmatrix} количество \\ RM1(кг) \end{pmatrix}}{y_1} + \underset{\begin{pmatrix} RM2(кг) \\ для\,Q \end{pmatrix}}{3{,}5} \times \underset{\begin{pmatrix} количество \\ RM2(кг) \end{pmatrix}}{y_1} \underset{\substack{прибыли \\ на\,единицу}}{\geq 8\,ф.ст.}$$

Данная задача является задачей минимизации. Необходимо уменьшить значение целевой функции настолько, насколько это возможно, следовательно, перемещение линии уровня целевой функции осуществляется параллельно ее исходному положению в направлении начала координат. Точка Z является последней крайней точкой допустимого множества, через которую проходит линия уровня, и, таким образом, оптимальным решением двойственной задачи. Z является пересечением линии ограничения для продукта Q и оси y_1 т.е.: $y_2 = 0$.

И $3y_1 + 1{,}5y_2 = 8$, следовательно, $y_2 = 0$ и $y_1 = 2\frac{2}{3}$.

Минимальная стоимость ресурсов в двойственной задаче имеет вид:

$$G = 10 \times 2\frac{2}{3} + 12 \times 0 = 26{,}67 \text{ ф. ст. в неделю.}$$

Это значение совпадает со значением целевой функции прямой задачи.

Обобщая полученные решения, можно сделать вывод, что максимальное значение прибыли, равное 26,27 ф. ст. в неделю, достигается, если продукт Q выпускать в количестве $3\frac{1}{3}$ кг, а продукт R не производить вообще. Стоимость сырья, т.е. теневые цены ресурсов, составила 2,67 ф. ст. за 1 кг RM1 и ноль для RM2. Эту же информацию можно было бы получить через проведение полного анализа только прямой задачи.

РЕЗЮМЕ

Модели линейного программирования используются в решении проблемы распределения ограниченных ресурсов для достижения своих целей в бизнесе. Целью может являться максимизация прибыли за неделю или минимизация ежедневных издержек. Формулировка задачи линейного программирования требует последовательного выполнения следующих шагов:
Шаг 1. Определение переменных решения.
Шаг *2.* Определение линейной целевой функции и линейных ограничении.
Шаг 3. Выражение целевой функции через переменные задачи.
Шаг 4. Выражение ограничений через переменные задачи.

При формулировке задач с двумя или с множеством переменных применяется одна и та же процедура. Однако задачу с двумя переменными можно решить графически. Ограничения, которые обычно представлены неравенствами знака "$\leq$" или "$\geq$", изображаются на графике с помощью прямых и областей на плоскости. Каждое ограничение разделяет плоскость графика на допустимую и недопустимую области. Область, точки которой удовлетворяют всем ограничениям задачи, называется допустимым множеством. Допустимое множество содержит все возможные решения задачи.

Оптимальное решение, которое всегда находится в крайней точке допустимого множества, можно найти после нанесения на график линии уровня целевой функции. Целевая функция перемещается параллельно этой линии в направлении, противоположном началу координат, в случае максимизации целевой функции, или в сторону начала координат в случае ее минимизации. Координаты последней крайней точки, через которую проходит линия уровня перед тем, как она всецело окажется вне пределов допустимого множества, являются значениями переменных, которые оптимизируют целевую функцию задачи.

Поскольку практическая реализация модели может осуществляться в условиях неопределенности, большое место в линейном программировании занимает анализ чувствительности модели. Этот метод позволяет учесть вариацию и неопределенность коэффициентов целевой функции и значений правой части ограничений задачи.

Задачи линейного программирования с множеством переменных решаются на компьютерах с помощью симплекс-метода. Итоговая таблица алгоритма симплекс-метода содержит оптимальное значение целевой функции, соответствующие ему значения переменных решения и значения остаточных или избыточных переменных. Кроме того, в ней указываются теневые цены на ресурсы. Итоговую таблицу симплекс-метода можно использовать также в анализе чувствительности, чтобы выявить общее воздействие изменений в запасах лимитирующих ресурсов на целевую функцию и каждое из ограничений.

Для каждой исходной задачи линейного программирования существует ее двойственная формулировка. Решения прямой и двойственной задачи одинаковы. Двойственную модель можно получить непосредственно из исходной прямой модели, поменяв местами ее коэффициенты. Иногда более простая формулировка двойственной задачи дает существенные преимущества в процессе решения по сравнению со сложной постановкой прямой задачи

УПРАЖНЕНИЯ

Упражнение 1.1.

Фабрика "GRM plc" выпускает два вида каш для завтрака – "Crunchy" и "Chewy". Используемые для производства обоих продуктов ингредиенты в основном одинаковы и, как правило, не являются дефицитными. Основным ограничением, накладываемым на объем выпуска, является наличие фонда рабочего времени в каждом из трех цехов фабрики.

Управляющему производством Джою Дисону необходимо разработать план производства на месяц. В приведенной ниже таблице указаны общий фонд рабочего времени и число человеко-часов, требуемое для производства 1 т продукта.

Цех	*Необходимый фонд рабочего времени, чел.-ч/т*		*Общий фонд рабочего времени, чел.-ч. в месяц*
	"Crunchy"	*"Chewy"*	
А. Производство	10	4	1000
В. Добавка приправ	3	2	360
С. Упаковка	2	5	600

Доход от производства 1 т "Crunchy" составляет 150 ф. ст., а от производства "Chewy" – 75 ф. ст. На настоящий момент нет никаких ограничений на возможные объемы продаж. Имеется возможность продать всю произведенную продукцию.
Требуется: сформулировать модель линейного программирования, максимизирующую общий доход фабрики за месяц.

Упражнение 1.2.

Оливер А. Петерс скоро выйдет на пенсию, и ему предстоит решить, как поступить с единовременным пособием, которое в соответствии с пенсионной программой будет предоставлено ему фирмой. М-р Петерс и его супруга намерены предпринять длительный визит в Австралию к своей дочери сроком на два года, поэтому любые сделанные в настоящий момент инвестиции будут свободны для использования на данный период. Очевидно, цель м-ра Петерса состоит в максимизации общего дохода от вложений, полученного за двухлетний период.

Мистера Петерса проконсультировали, что наилучшим вариантом вложения инвестиций был бы инвестиционный фонд, и в настоящее время он рассматривает возможность помещения инвестиций в один из таких фондов, состоящий из инвестиций •грех типов – А, В и С. Сумма единовременного пособия составит 25000 ф. ст., однако, мистер Петерс считает, что нет необходимости вкладывать в данный инвестиционный фонд все деньги; часть из них он намерен перевести на свой счет жилищно-строительного кооператива, который гарантирует ему 9% годовых.

По мнению бухгалтера фирмы, мистеру Петерсу следует попытаться распределить свои инвестиции таким образом, чтобы обеспечить как получение дохода, так и рост капитала. Поэтому ему посоветовали не менее 40% от общей суммы вложить в вариант А и перевести на свой счет. Для обеспечения значительного роста капитала не менее 25% общей суммы денежных средств, вложенных в инвестиционный фонд, необходимо поместить в проект В, однако, вложения в В не должны превышать 35% общего объема вложений в инвестиционный фонд ввиду высокой вероятности риска, соответствующей проекту В. Кроме того, для сохранности капитала в проекты А и С і следует вложить не менее 50% средств, помещаемых в инвестиционный фонд.

В настоящее время проект А позволяет получать 10% годовых и обеспечивает 1% роста капитала; проект В предполагает рост капитала в 15%; проект С дает 4% годовых и 5%-ный рост капитала.

Требуется: учитывая цель м-ра Петерса, сформулировать модель линейного программирования, показывающую, как следует распределить сумму единовременного пособия между различными проектами инвестиций.

Упражнение 1.3.

Китайская компания с ограниченной ответственностью по производству гусеничных механизмов выпускает пять сходных друг с другом товаров — A, B, C, D, и E. В нижеследующей таблице представлены расходы ресурсов, необходимых для выпуска единицы каждого товара, а также недельные запасы каждого ресурса и цены продажи единицы каждого продукта.

Ресурсы	*Товар*					*Недельный запас ресурсов*
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
Сырье, кг	6,00	6,50	6,10	6,10	6,40	35000
Сборка, ч	1,00	0,75	1,25	1,00	1,00	6000
Обжиг, ч	3	4,50	6	6	4,50	30000
Упаковка, ч	0,50	0,50	0,50	0,75	1,00	4000
Цена продажи, ф.ст.	40	42	44	48	52	

Известны также издержки, связанные с использованием каждого вида ресурсов:
сырье — 2,10 ф. ст. за 1 кг;
сборка — 3,00 ф. ст. за 1 ч;
обжиг — 1,30 ф. ст. за 1 ч;
упаковка —8,00 ф. ст. за 1 ч.

Требуется:

а) сформулировать задачу линейного программирования таким образом, чтобы в качестве переменных как целевой функции, так и ограничений выступали ресурсы;

б) кратко сформулировать предпосылки применения модели. Для максимизации элементов, составляющих прибыль за неделю, следует использовать компьютерный пакет прикладных программ.

(АССА, декабрь 1987).

Упражнение 1.4.

Используя модель линейного программирования, построенную в упражнении **1.1,** нужно помочь Джою Дисону найти оптимальный ассортиментный набор на следующий месяц, если политика компании состоит в максимизации общего дохода за месяц. Каково значение максимального дохода?

Упражнение 1.5.

Нефтяная компания "PT" для улучшения эксплуатационных качеств и снижения точки замораживания дизельного топлива, которое она производит, добавляет в него определенные химикаты. В каждом бензобаке объемом 1000 л должно содержаться не менее 40 мг химической добавки X, не менее 14 мг химической добавки Y и не менее 18 мг химической добавки Z. Необходимые химические добавки в форме готовых смесей поставляют "PT" две химические компании A и B. В нижеследующей таблице приведено содержание химических добавок в каждом продукте, поставляемом указанными компаниями.

Продукт	*Химические добавки, мг/л*		
	X	*Y*	*Z*
A	4	2	3
B	5	1	1

Стоимость продукта A – 1,50 ф. ст. за 1 л, а продукта B – 3,00 ф. ст. за 1 л.

Требуется: найти ассортиментный набор продуктов A и B, минимизирующий общую стоимость добавленных в топливо химикатов.

Упражнение 1.6.

Обратимся вновь к упражнениям **1.1** и **1.4**. Исполнительный директор корпорации "GRM" принял решение об увеличении фонда рабочего времени посредством введения сверхурочной работы служащих корпорации. Джой Дисон собрал следующую информацию о стоимости сверхурочной работы и вероятной ее продолжительности по каждому из трех цехов:

Наименование цеха	*Стоимость одного обычного человеко-часа, ф. ст.*	*Стоимость 1 чел.-ч. сверхурочной работы, ф.ст.*	*Максимально возможное число сверхурочных человеко-часов в месяц*
Производство	4,50	6,50	150
Добавка приправ	4,75	6,50	100
Упаковка	3,50	4,50	80

Для того, чтобы свести к минимуму административную работу и издержки, Джой Дисон принял решение о том, что сверхурочную работу следует ввести только в одном из цехов, по крайней мере, на первое время.

Требуется: используя приведенную выше информацию, принять решение о том, в каком цехе следует ввести сверхурочную работу, и каково максимальное число сверхурочных человеко-часов для данного цеха.

Упражнение 1.7.

Один из заводов легкой промышленности производит порошок для изготовления солодовых напитков трех видов. Один из них продается в качестве напитка здоровья, поскольку имеет низкое содержание сахара; другой напиток поставляется в медицинские учреждения в качестве продукции для больных, поскольку он содержит витаминные добавки; наконец, третий является стандартным товаром.

В приведенной ниже таблице для каждого напитка указаны основные ингредиенты, их стоимость и размер недельного запаса, а также оценки максимального спроса на соответствующие товары за неделю.

	Расход ингредиентов на 1 кг. Продукта, кг			*Оценка максимального спроса за неделю, кг*	*Цена продажи 1 кг. напитка, ф.ст.*
	Сахар	*Солодовый экстракт*	*Сухие сливки*		
Стандартный напиток	0,30	0,30	0,35	2000	1,00
Напиток здоровья	0,15	025	0,55	1800	1,20
Напиток для больных	0,15	0,30	0,25	1200	1,50
Стоимость 1 кг ингредиента, пенсов	20	60	50		
Размер недельного запаса ингредиентов, кг	1000	1250	2200		

Запас витаминных добавок неограничен. Издержки производства остальных переменных имеют следующие значения: 10 пенсов за 1 кг стандартного напитка, 9 пенсов за 1 кг напитка здоровья и 12 пенсов за 1 кг напитка для больных.

Требуется:

1. Для изложенной проблемы сформулировать модель линейного программирования, целевая функция которой максимизирует общий доход, получаемый за неделю.

2. Ниже приведена итоговая симплекс-таблица, полученная при решении данной задачи:

	m	h	i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	B1
s_1	0	0	0	1	-1	0	0	0,1	0.15	110
m	1	0	0	0	3,333	0	0	-0,833 -	1	1466,67
s_3	0	0	0	0	-1,167	1	0	-0,258	0,1	396,67
s_4	0	0	0	0	-3,333	0	1	0,833	1	533,33
h	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1800
i	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1200
P	0	0	0	0	1,617	0	0	0,251	0,56	3144,33

В данной таблице переменные m, h, i связаны со стандартным напитком, напитком здоровья и напитком для больных соответственно. Переменные s_1, s_2, s_3, связаны с ограничениями на сахар, солод и сливки соответственно. Переменные s_4, s_5, s_6 связаны с ограничениями для максимального спроса на стандартный напиток, напиток здоровья и напиток для больных соответственно. Определить:

а) оптимальный ассортиментный набор;

б) максимальное значение дохода за неделю;

в) значения резервного запаса для ограничений задачи.

3. Используя приведенную в п.2 таблицу, дать ответы на следующие вопросы:

а) Последние исследования потребительского рынка показали, что напиток здоровья приобретает все большую популярность. Новое значение максимального спроса составило 2500 кг в неделю. Каково воздействие этого процесса на оптимальный ассортиментный набор?

б) Администрация компании обдумывает решение о покупке некоторого дополнительного количества солодового экстракта. Однако компания будет вынуждена иметь дело с новым поставщиком и покупать сырье по 80 пенсов за 1 кг. Позволит ли такая мера увеличить еженедельный доход? Если это так, то каково максимальное количество сырья, которое следует закупить у нового поставщика?

Упражнение 1.8.

По условиям упражнения **1.1** требуется:

1. Построить для изложенной проблемы двойственную модель линейного программирования;
2. Дать интерпретацию двойственных переменных в контексте поставленного выше вопроса.

Упражнение 1.9.

"Princetown Paints Ltd" выпускает три основных типа румян — жидкие, перламутровые и матовые — с использованием одинаковых смесеобразующих машин и видов работ. Главному бухгалтеру фирмы было поручено разработать для компании план производства на неделю. Информация о ценах продаж и стоимости 100 л товара приведена в таблице (ф. ст.).

	Румяна		
	Жидкие	*Перламутровые*	*Матовые*
Цена продажи на 100 л	120	126	110
Издержки производства товаров на 100 л:			
Стоимость сырья	11	25	20
Стоимость трудозатрат	30	36	24
Стоимость приготовления смеси	32	20	36
Другие издержки	12	15	10

Стоимость 1 чел.-ч составляет 3-ф.ст. а стоимость 1 ч приготовления смеси – 4 ф. ст. Фонд рабочего времени ограничен 8000 чел.-ч. в неделю, а ограничение на фонд работы смесеобразующих машин равно 5900 ч в неделю.

В соответствии с контрактными соглашениями компания должна производить 25000 л матовых румян в неделю. Максимальный спрос на жидкие румяна равен 35000 л в неделю, а на перламутровые румяна – 29000 л в неделю.

Требуется:

1. Сформулировать задачу линейного программирования, позволяющую определить объемы производства жидких и перламутровых румян в неделю, при которых достигается максимальное значение получаемой за неделю прибыли.
2. Решить эту задачу графически. Определить оптимальные объемы производства в неделю и соответствующее значение прибыли.
3. Рассчитать, на сколько нужно изменить цену продажи жидких румян, чтобы ' получить новое оптимальное решение задачи.

4. Предположим, что рабочие готовятся к сверхурочной работе за дополнительное вознаграждение в 1 ф. ст. за каждый сверхурочно отработанный час. Будет ли целесообразным введение сверхурочной работы на таких условиях? Если это , так, то каковы ваши рекомендации по поводу количества часов сверхурочной работы, которое следует ввести, и какова будет дополнительная прибыль от '• применения сверхурочной работы? (АССА, июнь 1988 г.

Упражнение 1.10

Администрация компании "Nemesis Company", осуществляя рационализаторскую программу корпорации, приняла решение о слиянии двух своих заводов в Аббатсфилде и Берчвуде. Предусматривается закрытие завода в Аббатсфилде и за счет этого — расширение производственных мощностей предприятие в Берчвуде. На настоящий момент распределение рабочих высокой и низкой квалификации, занятых на обоих заводах, является следующим:

Квалификация рабочих	*Аббатсфилд*	*Берчвуд*
Высокая	200	100
Низкая	300	208
Итого	500	300

В то же время после слияния завод в Берчвуде должен насчитывать 240 рабочих высокой и 320 рабочих низкой квалификации.

После проведения всесторонних переговоров с привлечением руководителей профсоюзов были выработаны следующие финансовые соглашения:

1. Все рабочие, которые попали под сокращение штатов, получат выходные пособия следующих размеров:

Квалифицированные рабочие - 2000 ф. ст.;
Неквалифицированные рабочие - 1500 ф. ст.

2. Рабочие завода в Аббатсфилде, которые должны будут переехать, получат пособие по переезду в размере 2000 ф. ст.

3. Во избежание каких-либо преимуществ для рабочих Берчвудского завода доля бывших рабочих завода в Аббатсфилде на новом предприятии должна совпадать с долей бывших рабочих Берчвудского завода.

Требуется:

1. Построить модель линейного программирования, в которой определяется, как осуществить выбор работников нового предприятия из числа рабочих двух бывших заводов таким образом, чтобы минимизировать общие издержки, связанные с увольнением и переменой места жительства части рабочих. В процессе формализации следует использовать следующие переменные:

S_1 – число квалифицированных рабочих, переведенных на новую работу с завода в Аббатсфилде;

S_2 – число квалифицированных рабочих, переведенных на новую работу с завода в Берчвуде;

U_1 – число неквалифицированных рабочих, переведенных на новую работу с завода в Аббатсфилде;

U_2 – число неквалифицированных рабочих, переведенных на новую работу с завода в Берчвуде.

3. Используя два из ограничений-уравнений, элиминируйте влияние двух из четырех перемен-

ных модели и решите полученную задачу графическим методом. Каковы минимальные издержки увольнения и перемены места жительства части рабочих?
(АССА. июнь 1987).

Упражнение 1.11.

а) Выявите преимущества и недостатки графического метода решения задач линейного программирования по сравнению с симплекс-методом.

б) Менеджер международной банковской организации по инвестициям располагает 550000 ф. ст., находящимися на счете банка, которые необходимо инвестировать, и рассматривает четыре общих типа инвестиций, а именно:

Тип 1: государственные ценные бумаги;
Тип 2: ценные бумаги корпораций;
Тип 3:- обыкновенные акции отраслей сферы обслуживания;
Тип 4: обыкновенные акции отраслей производственной сферы.

Целью менеджера по инвестициям является максимизация нормы отдачи вложений, причем размер годовых процентов от инвестиций равен 8, 9, 10 и 12% для типов 1, 2, 3 и 4 соответственно. Денежные средства, не инвестированные ни по одному из указанных выше типов, остаются на банковском счете и приносят 4% годовых.

Менеджер по инвестициям принял решение, что не менее 50000 ф. ст. следует поместить в ценные бумаги корпораций, а в инвестиционные проекты с элементами риска (т.е. ценные бумаги корпораций и все виды обыкновенных акций) следует вложить не более 300000 ф.ст. Кроме того, он считает, что, по крайней мере, половину общей суммы денежных средств, инвестированных в соответствии с указанными выше типами инвестиций, следует вложить в обыкновенные акции, но в акции отраслей производственной сферы следует поместить не более одной четверти общей суммы инвестиций.

Требуется: сформулировать для данной проблемы задачу линейного программирования, целевая функция и ограничения которой будут содержать четыре переменных таким образом, чтобы ввод информации и анализ задачи можно было осуществить с использованием пакета прикладных программ по линейному программированию.

После ввода исходных данных и анализа целевой функции и ограничений с помощью ППП линейного программирования, использующего симплекс-метод, была получена следующая выходная информация:

Итоговое решение, достигнутое через 5 шагов:							
Переменная	*Значение*	*Остаточная переменная*	*Значение*	*Избыточная переменная*	*Значение*	*Ограничение*	*Теневая цена*
X_1	200000	S_1	50000	S_2	0	C_1	0,1
X_2	50000	S_3	0			C_2	0
X_3	125000	S_4	0			C_3	0,11
X_4	125000	S_5	0			C_4	0,045
						C_5	0,005

где X_j - сумма, вложенная в i-й тип инвестиций (i = 1, 2, 3, 4), ф. ст.

Основываясь на полученной выходной информации, кратко пояснить, каково значение терминов "остаточные и избыточные переменные".

Используя выходную информацию, определить оптимальный план инвестиций, сумму денежных средств, оставленных на банковском счете, и ежегодный доход от реализации данного плана, выраженный в процентах.

Теневая цена ограничения, связанного с тем, что в акции или ценные бумаги с элементами риска следует вкладывать не более 300000 ф. ст., принимает значение, равное 0,11. Интерпретируйте данное значение.
(АССА, декабрь 1989 г.)

Упражнение 1.12.

По данным упражнения **1.3** требуется:

1. В результате применения пакета прикладных программ была получена следующая итоговая таблица решения данной задачи симплекс-методом:

Базис	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*X*	*S*	*T*	*U*	*Значение*
A	1	1,18	1,04	0,46	0	0,36	0	0	-2,29	3,357
S	0	-0,34	0,23	0,02	0	-0,18	1	0	0,14	321
T	0	1,37	2,97	2,28	0	-0,27	0	1	-2,79	9,482
E	0	-0,09	-0,02	0,52	1	-0,18	0	0	2,14	2,321
	0	1,26	1,06	0,51	0	2,02	0	0	8,81	105,791

Здесь A, B, C, D и E — объемы производства пяти продуктов в неделю; X – количество неиспользуемого сырья, которое остается от максимального запаса; S, T, U – соответствующие количества неиспользуемого фонда рабочего времени на стадиях производства, обжига и упаковки, которое остается от максимального резерва фонда рабочего времени в неделю.

а) Используя информацию, представленную в таблице, определить для компании по производству гусеничных механизмов оптимальный план производства продукции на неделю.

б) Описать последствия реализации этого плана с точки зрения недоиспользуемых ресурсов и вклада отдельных компонент в общую прибыль.

2. На примере данной задачи объяснить значение термина "двойственная оценка или теневая цена ресурса".
3. Есть предложение, что компании следует производить дополнительный продукт, цена продажи которого составит 50 ф. ст. за единицу. Производство единицы этого продукта требует 6 кг сырья, а также затрат рабочего времени в 1 ч для производства, 5 ч для обжига и 1 ч для упаковки. Целесообразна ли. реализация этого предложения на практике?
(АССА. декабрь 1987 г.)

Упражнение 1.13.

Компания "Bermuda Paint" — частная промышленная фирма, специализирующаяся на производстве технических лаков. Представленная ниже таблица содержит информацию о ценах продажи и соответствующих издержках производства единицы полировочного и матового лаков.

Лак	*Цена продажи 1 галлона, ф. ст.*	*Издержки производства 1 галлона, ф. ст*
Матовый	13,0	9,0
Полировочный	16,0	10

Для производства 1 галлона матового лака необходимо затратить 6 мин трудозатрат, а для производства одного галлона полировочного лака — 12 мин. Резерв фонда рабочего времени составляет 400 чел.-ч. в день. Размер ежедневного запаса необходимой химической смеси равен 100 унциям, тогда как ее расход на один галлон матового и полировочного лаков составляет 0,05 и 0,02 унции соответственно. Технологические возможности завода позволяют выпускать не более 3000 галлонов лака в день.

В соответствии с соглашением с основным оптовым покупателем компания должна поставлять ему 5000 галлонов матового лака и 2500 Галлонов полировочного лака за каждую рабочую неделю (состоящую из 5 дней). Кроме того, существует профсоюзное соглашение, в котором оговаривается минимальный объем производства в день, равный 2000 галлонов. Администрации данной компании необходимо определить ежедневные объемы производства каждого вида лаков, которые позволяют получать максимальный общий доход.

Требуется:

а) Построить линейную модель для производственной проблемы, с которой столкнулась компания.

б) Используя графический метод, определить ежедневный оптимальный план производства и соответствующую ему величину дохода.
в) Профсоюз компании требует увеличения оплаты 1 ч. сверхурочных работ на 20 ф. ст.

Обосновать, сочтет ли администрация компании целесообразным такое предложение?

Если указанный размер оплаты сверхурочных работ является выгодным, какое количество часов сверхурочных работ в день целесообразно использовать?
г) Для исходной задачи (не учитывающей сверхурочные работы) определить промежуток изменений показателя единичного дохода за 1 галлон полировочного лака, в котором исходное оптимальное решение остается прежним.

Глава 2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

2.1. ВВЕДЕНИЕ

Методы линейного программирования, рассмотренные нами в гл. 1, являются хорошим инструментом для решения ряда проблем распределения ресурсов. Применение пакетов прикладных программ позволяет значительно упростить решение задачи. Поэтому лицо, принимающее решение, получает возможность уделить большее внимание интерпретации и оценке решения задачи. Однако применение прикладных пакетов предполагает предварительную формализацию модели линейного программирования. В процессе решения большинства проблем эта задача является основной. При построении модели необходимо идентифицировать ее переменные и сформулировать систему ограничений.

При решении некоторых видов проблем распределения ресурсов использование специально созданных для этих целей алгоритмов упрощает процесс построения исходной модели. Данная глава будет посвящена рассмотрению двух примеров таких алгоритмов, созданных для решения транспортной задачи и задачи о назначениях.

В обоих случаях проблема распределения ресурсов связана с продуктами, которые в соответствии с определенной целью перевозятся из пунктов производства в пункты потребления. Целью часто является минимизация общей стоимости транспортировки. Пусть, например, некоторой компании принадлежат три завода и пять пунктов распределения продукции, находящиеся в одном регионе. Администрация компании должна организовать перевозку конечной продукции с заводов в пункты распределения с минимальной стоимостью. В этой ситуации наиболее подходящими могли бы стать методы решения транспортной задачи.

Частным случаем транспортной задачи является задача о назначениях. Предполагается, что из каждого пункта производства в каждый пункт потребления перевозится только один товар. Например, в машинном цехе имеется шесть токарных станков различного срока службы и различной конструкции. Каждое утро начальник цеха должен распределить по этим станкам шесть видов работ. Продолжительность выполнения каждой работы на различных станках неодинакова. Начальник цеха намерен распределить по каждому станку работу таким образом, чтобы свести к минимуму общее время выполнения работ. В процессе решения этой и подобных проблем можно использовать алгоритм решения задачи о назначениях.

В настоящей главе мы рассмотрим применение указанных алгоритмов для решения задач небольшой размерности. Однако следует принять во внимание, что на практике размерность таких задач гораздо больше, поэтому решаются они с использованием пакетов прикладных программ. Более того, очень часто решение транспортной задачи осуществляется в несколько этапов, например, при перевозках типа "завод – склад – розничная продажа". В таких случаях приходится модифицировать основной алгоритм и использовать более сложные методы решения.

2.2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Данная проблема связана с распределением товаров между поставщиками (находящимися в пунктах производства) и потребителями (находящимися в пунктах назначения) таким образом, чтобы общая стоимость этого распределения была минимальной. Эта задача может быть решена либо с помощью методов линейного программирования, либо специального алгоритма решения транспортной задачи. Применение методов линейного программирования проиллюстрировано в примере 2.1.

2.2.1. Транспортная задача

Пример 2.1. Компания с ограниченной ответственностью "Ace Foods Ltd" осуществляет производство прохладительных напитков на двух заводах — A и B. Поставкой бутылок на каждый из заводов занимаются две фирмы — P и Q. На ноябрь заводу A требуется 5000 бутылок, а заводу B — 3500 бутылок. Фирма P может поставить максимум 7500 бутылок, а фирма Q — 4000 бутылок. Табл. 2.1. содержит информацию о стоимости перевозки одной бутылки от каждого поставщика каждому заводу.

Таблица 2.1.

Стоимость перевозки бутылок, показатели спроса и предложения

Поставщик	*Стоимость перевозки одной бутылки на завод, пенсов*		*Максимальный объем поставки*
	A	*B*	
P Q	4 3	4 2	7500 4000
Спрос на бутылки	5000	3500	

Как следует организовать доставку бутылок на заводы, чтобы общая стоимость перевозки была минимальной?

Решение.

При решении транспортной задачи всегда полезно проверить, не существует ли очевидного решения. Теоретически было бы желательно использовать для перевозок только наиболее дешевые маршруты. Для обоих заводов Q был бы наиболее предпочтительным поставщиком, так как стоимость перевозки для него ниже, чем для P. Однако максимальный объем перевозок для Q составляет только 4000 бутылок, тогда как общий спрос равен 8500. Вероятно, наиболее дешевым вариантом было бы использование маршрута из Q в B стоимостью 2 пенса за единицу, удовлетворяющее весь спрос завода B (3500). Остаток запаса (500) следует направить из Q в A по стоимости 3 пенса за единицу. Остальной спрос завода A -следует удовлетворить через поставщика P, причем стоимость перевозки составит 4 пенса за единицу. Общая стоимость транспортировки при таком распределении будет иметь вид:

$$0{,}02\times3500+0{,}03\times500+0{,}04\times4500=265 \text{ ф. ст. в месяц.}$$

Однако мы не можем доказать, что данное распределение ресурсов является наиболее экономичным. Основные аспекты исследования транспортной модели состоят в следующем: доказательство того, что сформулированная задача имеет решение; обоснование положения о том, что это решение является оптимальным; изучение влияния на полученное решение любых изменений условии задачи.

Построив соответствующую модель линейного программирования, решим сформулированную выше проблему графическим методом.

Пусть фирма P поставляет x бутылок для завода A и y бутылок для завода B. Тогда для полного удовлетворения спроса фирма должна поставлять оставшиеся (5000 - x) бутылок на завод A и (3500 - y) бутылок на завод B- Цель состоит в минимизации общей стоимости транспортировки C (в пенсах), где

$$C=4x+4y+3\ (5000 - x) + 2\ (3500 - y),$$

следовательно,

$$C = x + 2\ y + 22000,$$

а целевая функция задачи имеет вид:

$$Z = C - 22000 = x + 2y.$$

Z принимает свое минимальное значение тогда, когда C принимает минимальное значение. Значения x и y, которые минимизируют Z, минимизируют также и C. Минимизация целевой функции осуществляется в условиях следующей системы ограничений:

Спрос завода A: $x\le5000$ бутылок

Спрос завода B $y\le3500$ бутылок

Поставки из P $x + y\le7500$ бутылок

Поставки из Q: $(5000 - x) + (3500 -y)\ge4000$ бутылок

т.е.: $x + y \le4500$ бутылок

$x, y \ge 0$

Графическое изображение системы ограничений представлено на рис. 2.1.

Точка с координатами x = 4000, y = 2000 принадлежит допустимому множеству. Значение функции в этой точке $Z = 4000+2\times2000 = 8000$ пенсов.

Типичная линия уровня целевой функции имеет вид: 8000 = x + 2 y. На рис. 2.1 она изображена пунктиром. Перемещение линии уровня в сторону уменьшения значений целевой функции приводит нас в крайнюю точку A, которая является

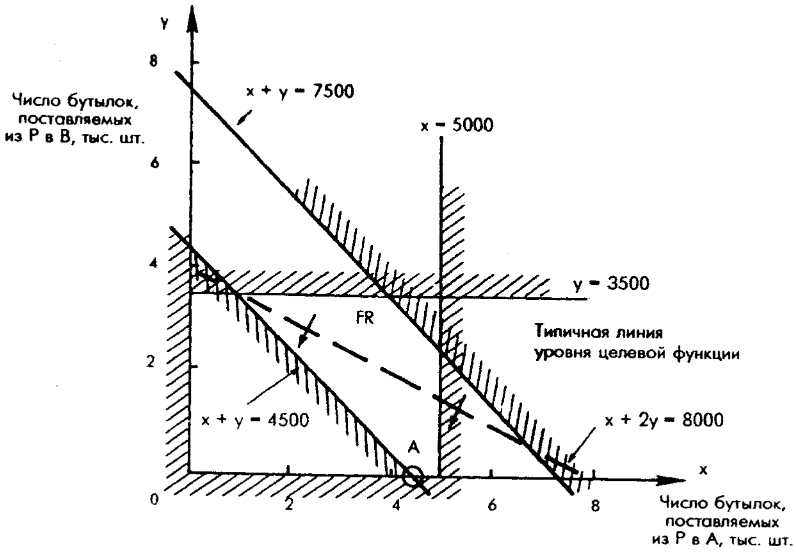


Рис. 2.1 Задача линейного программирования поставки бутылок

оптимальной. В этой точке x = 4500, а y = 0. Следовательно, оптимальное решение состоит в поставке из P в A 4500 бутылок, в отсутствии поставок из P в B, в поставке из Q в A 500 бутылок, а из Q в B — 3500 бутылок. Минимальная стоимость транспортировки для этого решения равна:

$C_{\min} = 4500 + 2 \times 0 + 22000 = 26500$ пенсов = 265 ф. ст.

Резервный запас остается только на фирме P и составляет 3000 единиц. Начиная решать задачу, мы предполагали, что именно это решение минимизирует стоимость перевозки. Теперь мы доказали, что это действительно так.

2.2.2. Алгоритм решения транспортной задачи

Задачу, рассмотренную в 2.2.1, можно решить, используя **алгоритм решения транспортной задачи**. Применение этого алгоритма требует соблюдения ряда предпосылок:

1. Должна быть известна стоимость перевозки единицы продукта из каждого пункта производства в каждый пункт назначения.
2. Запас продуктов в каждом пункте производства должен быть известен.
3. Потребности в продуктах в каждом пункте потребления должны быть известны.
4. Общее предложение должно быть равно общему спросу.

Приведенная в примере 2.1. задача удовлетворяет предпосылкам 1-3, однако предпосылка 4 для этой задачи не выполняется. Тем не менее, можно ввести **фиктивный** завод, потребность которого определяется разностью между общим предложением и общим спросом. Потребность фиктивного завода по данным примера 2.1. составила бы (11500-8500) = 3000 бутылок. Любые продукты, которые подлежат распределению в фиктивный пункт назначения, на деле не вывозятся из пункта производства. В случае, если общее предложение меньше общего спроса, поступают аналогичным образом, т.е. в модель вводится фиктивный поставщик, максимальный объем поставок которого равен величине неудовлетворенного спроса. Количество товаров, вывозимых из фиктивного пункта производства, характеризует величину недостающих поставок.

Алгоритм решения транспортной задачи состоит из четырех этапов:

Этап 1. Представление данных в форме стандартной таблицы и поиск любого допустимого распределения ресурсов. Допустимым называется такое распределение ресурсов, которое позволяет удовлетворить весь спрос в пунктах назначения и вывезти весь запас продуктов из пунктов производства.

Этап 2. Проверка полученного распределения ресурсов на оптимальность.

Этап 3. Если полученное распределение ресурсов не является оптимальным, то ресурсы перераспределяются, снижая стоимость транспортировки.

Этап 4. Повторная проверка оптимальности полученного распределения ресурсов.

Данный итеративный процесс повторяется до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

2.2.3. Поиск начального распределения ресурсов

Начальное распределение ресурсов может быть получено с помощью любого метода, позволяющего найти допустимое решение задачи. Однако при систематическом решении таких задач можно разработать методы, позволяющие получать более выгодные начальные решения. Мы остановимся на двух методах нахождения начального распределения ресурсов — методе минимальной стоимости и методе Вогеля. Алгоритмы этих методов рассматриваются в примере **2.2**.

Пример 2.2. Три торговых склада - P, Q, R - могут поставлять некоторое изделие в количестве 9, 4 и 8 единиц соответственно. Величины спроса трех магазинов розничной торговли, находящихся в пунктах A, B и C, на это изделие равны 3, 5 и 6 единицам соответственно. Какова минимальная стоимость транспортировки изделий от поставщиков потребителям? Единичные издержки транспортировки приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2.

Издержки транспортировки, объемы потребностей и предложения.

Поставщик	*Транспортные издержки для магазинов, ф. ст. за единицу*			*Общий объем предложения*
	A	*B*	*C*	
P	10	20	5	9
Q	2	10	8	4
R	1	20	7	8
Общий объем спроса	3	5	6	

Решение

В нашем распоряжении имеется информация об издержках, предложении изделий и потребностях в них, но общее предложение превышает общий спрос. Общее количество изделий, которое могут поставить все склады, равно 21, однако розничным магазинам необходимо только 14 изделий. Следовательно, необходимо ввести фиктивный розничный магазин, потребность которого будет равна 7 изделиям, определяющим избыток предложения. Фактически эти 7 изделий не будут вывезены с торговых складов, поэтому предполагается, что издержки транспортировки для них будут равны нулю. Ниже приводится первая транспортная таблица 2.3.

Для нахождения начального допустимого распределения ресурсов будем использовать метод минимальной стоимости, а затем метод Вогеля. Тем не менее, следует иметь в виду, что на практике требуется применение только одного из методов.

Таблица 2.3.

Сбалансированная транспортная таблица

Поставщик	*Транспортные издержки для магазинов, ф. ст. за единицу*				*Общий объем предложения*
	A	*B*	*C*	*Фиктивный*	
P	10	20	5	0	9
Q	2	10	8	0	4
R	1	20	7	0	8
Общий объем спроса	3	5	6	7	21

МЕТОД 1. МЕТОД МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ

1. В клетку с минимальной единичной стоимостью записывают наибольшее возможное количество продукта.
2. Производится корректировка оставшихся объемов предложения и потребностей.
3. Выбирается следующая клетка с наименьшей стоимостью, в которую помещается наибольшее возможное количество продукта, и т.д. до тех пор, пока спрос и предложение не станут равными нулю.
4. Если наименьшее значение стоимости соответствует более чем одной клетке таблицы, выбор осуществляется случайным образом.

В табл. 2.4 стоимость транспортировки находится в верхнем правом углу каждой клетки, внутри прямоугольника. Индексы, соответствующие количествам продукта, характеризуют последовательность распределения ресурсов и облегчают читателю понимание процедуры распределения. Прочерки в клетках — отсутствие предложения или спроса, соответствующих этим клеткам.

1. Наименьшая стоимость транспортировки равна нулю. Следовательно, можно выбрать любую из клеток (P, фиктивный), (Q, фиктивный) или (R, фиктивный). Пусть выбрана клетка (P, фиктивный), в соответствии с алгоритмом в ней помещается максимальное количество продукта, равное 7 единицам. Предложение в P и спрос фиктивного магазина уменьшаются на 7. Затем в клетках, которые уже нельзя использовать в дальнейшем распределении перевозок, ставится прочерк; в нашем случае это клетки (Q, фиктивный) и (R, фиктивный).
2. Клеток с нулевой стоимостью больше нет, поэтому выбирается клетка (R,A), которой соответствует наименьшая стоимость, равная 1. В данной клетке размещается наибольшее возможное количество продукта, равное 3. Затем производится корректировка итоговых значений спроса и предложения, соответствующих данным строке и столбцу, а в клетках (P,A) и (Q.A), которые нельзя использовать в дальнейшем, ставится прочерк.
3. Наименьшая стоимость перевозки равна 5 и соответствует клетке (P,C). В данной клетке размещаются две единицы изделия, оставшиеся на складе P. Производится корректировка итоговых значений соответствующих строки и столбца, а в остальных клетках строки P ставится прочерк.
4. Наконец, оставшееся количество продукта распределяется последовательно в клетки (R,C), (Q,B) и (R,B).

Если распределение является допустимым, то объемы предложения на складах и объемы потребностей во всех магазинах должны быть равны нулю. Полученное выше распределение перевозок является допустимым.

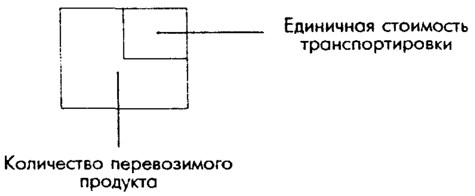
Стоимость $= (3\times1)+(4\times10)+(1\times20)+(2\times5)+(4\times7)+(7\times0)=101$ ф. ст.

Таблица 2.4.

Начальное распределение ресурсов, полученное методом минимальной стоимости

Торговый склад	*Розничный магазин*				*Общее предложение*
	A	*B*	*C*	*Фиктивный*	
P	10 –	20 –	5 2_3	0 7_1	~~9~~ ~~2~~ 0
Q	2 –	10 4_5	8 –	0 –	~~4~~ 0
R	1 3_2	20 1_6	7 4_4	0 –	~~8~~ ~~5~~ ~~1~~ 0
Общая потребность	~~3~~ 0	~~5~~ ~~1~~0	~~6~~ ~~4~~0	7 0	21

Ключ:



Мы еще не можем сказать, является ли данное распределение перевозок наиболее дешевым, однако оно позволяет получить некоторую реальную стоимость.

МЕТОД 2. МЕТОД ВОГЕЛЯ

В данном методе используется штрафная стоимость. Штрафная стоимость для каждой строки и столбца — разность между наиболее дешевым маршрутом и следующим за ним с точки зрения критерия минимизации стоимости перевозок.

Суть метода состоит в минимизации этих штрафов.

1. Чтобы вычислить значения штрафной стоимости для каждой строки и столбца, необходимо найти клетки с наименьшей стоимостью и ближайшим к ним значением стоимости. Для каждой строки и столбца наименьшее значение стоимости вычитается из ближайшего к нему значения, найденного по критерию минимизации стоимости. Такая процедура позволяет получить значения штрафов за отсутствие перевозок в клетках с наименьшей стоимостью.
2. Выбирается строка или столбец с наибольшим значением штрафной стоимости, и в клетку с наименьшим значением стоимости перевозки для данной строки и столбца помещается наибольшее возможное количество продукта. Такая процедура позволяет избежать назначения высоких штрафов.
3. Как и в предыдущем методе, производится корректировка итоговых значений по строкам и столбцам таблицы.
4. В строках или столбцах, в которых предложение или спрос приняли нулевые значения, ставится прочерк во всех клетках, в которых отсутствуют перевозки, так как эти клетки нельзя использовать в процессе дальнейшего распределения перевозок.
5. Производятся возврат к шагу 1 и перерасчет штрафных стоимостей без учета клеток, в которых указаны перевозки, или клеток, в которых стоит прочерк.

Указанные шаги повторяются до тех пор, пока весь спрос не будет удовлетворен. Индексы, соответствующие количествам перевозок, отражают порядок выбора штрафных стоимостей и распределения перевозок.

После третьего распределения продукта оставшееся его количество распределяется по клеткам транспортной таблицы однозначно. Оставшийся продукт помещается в клетки (P,B), (P,C) и (P, фиктивный).

Стоимость $= (1\times 20 + 6\times 5 + 2\times 0 + 4\times 10 + 3\times 1 + 5\times 0) = 93$ ф. ст.

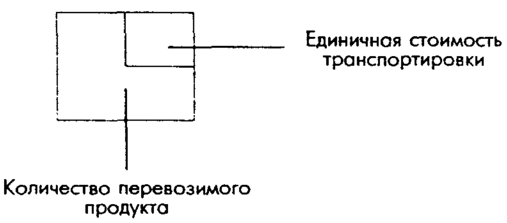
Как и в предыдущем случае, мы еще не знаем, является ли данное решение оптимальным, однако, можно с уверенностью утверждать, что план перевозок, полученный методом Вогеля, более дешевый по сравнению с планом, стоимость транспортировки для которого составила 101 ф. ст., полученная методом минимальной стоимости.

Таблица 2.5.

Начальное распределение перевозок, полученное методом Вогеля

Торговый склад	*Розничный магазин*				*Общее предложение*	*Штрафная стоимость* 1 2 3
	A	*B*	*C*	*фиктивный*		
P	10 –	20 1	5 6	0 2	~~982~~0	5 5 5
Q	2 –	10 4_1	8 –	0 –	~~4~~0	2 – –
R	1 3_2	20 –	7 –	0 5_3	~~85~~0	1 1 7_3
Общая потребность	~~3~~ 0	~~5~~ ~~1~~0	~~6~~ 0	~~7~~ ~~2~~0	21	
1-й штраф 2-й штраф 3-й штраф	1 9_2 –	10_1 0 0	2 2 2	0 0 0		

Ключ:



2.2.4. Проверка на оптимальность

Чтобы осуществить проверку оптимальности, необходимо определить, является ли начальное распределение перевозок базисным, т.е. находится ли полученное решение в крайней точке допустимого множества. Представленное в таблице 2.4. распределение перевозок является допустимым решением, т.е. лежит внутри или на границе допустимого множества. Если распределение перевозок является базисным; каждому ограничению должна соответствовать одна базисная переменная. Задача для m торговых складов и n розничных магазинов (включая фиктивный) содержит $(m+n-1)$ независимых ограничений. Следовательно, базисное решение должно размещаться в $(m+n-1)$ клетках транспортной таблицы. Все $(m+n-1)$ переменные должны занимать независимые позиции. Однако на данной стадии нет необходимости проявлять беспокойство по поводу независимости переменных, поскольку в процессе проверки решения на оптимальность любые нарушения будут выявлены.

Если распределение перевозок включает $(m+n-1)$ независимую переменную, то к нему непосредственно можно применять методы проверки оптимальности. Если же число переменных меньше указанного количества, то критерии проверки оптимальности необходимо модифицировать так, как это будет показано в **2.2.6**. Однако если число переменных превышает $(m+n-1)$, процедура распределения перевозок проведена некорректно. В этом случае должны существовать варианты такого перераспределения перевозок, которые при меньшей стоимости содержат требуемое число переменных.

Обратимся к данным примера **2.2** и проверим каждое из полученных распределений перевозок на базисность. В нашей таблице 3 строки и 4 столбца, следовательно, базисное решение должно содержать (3+4-1)=6 заполненных клеток. Можно легко убедиться, что это верно для обоих методов распределения перевозок. Кроме того, переменные решения, полученные с помощью обоих методов, находятся в различных точках допустимого множества. Следовательно, процедуру проверки можно применять, не прибегая к каким-либо модификациям.

Проверка исходного распределения перевозок производится для того, чтобы определить, является ли данный вариант наиболее дешевым для транспортировки, и, если это не так, какие изменения следует внести в данное распределение. Ниже будут изложены два метода проверки решения на оптимальность. В **методе ступенек** рассчитываются значения стоимости неиспользованных клеток, или теневые издержки. Сама процедура довольно длительная и кропотливая, однако, понимание ее сущности не представляет затруднений. Метод МОДИ (**модифицированных распределений**) — это математический алгоритм, позволяющий получить те же значения теневых издержек, причем гораздо быстрее, однако, этот метод более сложен для понимания. В обоих методах в случае, если распределение перевозок является неоптимальным, для перехода к следующему базисному распределению используется ступенчатая процедура. Как только получено базисное решение, алгоритм позволяет осуществить переход от одной крайней точки допустимого множества к другой до тех пор, пока не будет достигнуто оптимальное решение.

Пример 2.3. Для иллюстрации применения данного алгоритма используем распределение перевозок, полученное методом минимальной стоимости. Данное распределение приводится в табл. 2.6.

Ступеньками называются точки, в которые производится распределение перевозок - (P,C), (P, фиктивный), (Q,B), (R,A), (R.B) и (R,C). Выбирается одна из пустых клеток и предполагается, что в нее перемещается одна единица продукта. Такая процедура нарушает баланс итоговых значений столбца или строки, на пересечении которых лежит данная клетка. Затем для восстановления баланса производится корректировка количества перевозимого продукта в некоторых заполненных клетках. Эти заполненные клетки, или ступеньки, используются при вычислении стоимости перевозки единицы продукта.

Если значение стоимости положительное, то привлечение пустой клетки увеличит общую стоимость транспортировки, а это невыгодно. Если же значение стоимости отрицательное, использование пустой клетки, напротив, снижает общую стоимость транспортировки. Последнее означает, что полученное распределение перевозок является неоптимальным, и при использовании данной незаполненной клетки можно получить лучшее решение задачи.

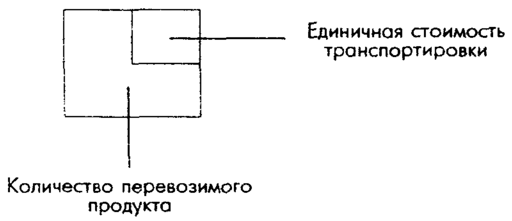
Какая из пустых клеток будет выбрана в начале процедуры, значения не имеет. Выберем клетку (P,A). Добавим в нее одну единицу изделия. Теперь полученное распределение является несбалансированным. Розничный магазин А получает 4 единицы изделия, в то время как его потребность — 3. Торговый склад Р является поставщиком 10 изделий, тогда как максимальный объем его предложения равен 9. Необходимо произвести корректировку столбца А и строки Р. Для восстановления баланса в столбце А необходимо вычесть одно изделие из ступеньки (R,A). Эта мера корректирует столбец А, но нарушает баланс строки R, уменьшая соответствующее предложение с 8 до 7 единиц.

Таблица 2.6.

Начальное распределение, полученное методом минимальной стоимости

Торговый склад	*Розничный магазин*				*Общее предложение*
	A	*B*	*C*	*фиктивный*	
P	10 –	20 –	5 2	0 7	9
Q	2 –	10 4	8 –	0 –	4
R	1 3	20 1	7 4	0 –	8
Общая потребность	3	5	6	7	21

Ключ:



Можно осуществить перебалансировку строки P вычитанием одного изделия либо из клетки (P,C), либо из клетки (P, фиктивный). Если мы выберем клетку (P, фиктивный), то в фиктивном столбце нет больше заполненных клеток, которые можно было бы использовать в дальнейшей корректировке этого столбца, следовательно, данный выбор неприемлем. Корректировку можно осуществлять только с помощью тех клеток, которые уже заполнены на настоящий момент. Поэтому мы должны выбрать клетку (P,C). Из (P,C) вычитаем одно изделие. Это корректирует баланс по строке P, но нарушает его по столбцу C. На данном этапе проблема несбалансированности связана со строкой R и столбцом C. Их можно скорректировать одновременно, добавив одно изделие в (R,C). Схематично процесс заполнения пустой клетки (P,A) и восстановления баланса распределения перевозок показан в табл. 2.7.

Денежный эффект от перемещения одного изделия в клетку (P,A) рассчитывается следующим образом:

$$+1\times стоимость(P,A)-1\times стоимость(R,A)+1\times стоимость(R,C)-1\times стоимость(P,C)=$$
$$=+(1\times 10)-(1\times 1)+(1\times 7)-(1\times 5)=+11 \text{ ф. ст. за 1 изделие.}$$

Таблица 2.7. **Проверка пустой клетки (P,A)**

Изменение натурального объема, изделий

	A	C
P	Клетка, подвергнутая проверке + 1	Заполненная клетка − 1
R	Заполненная клетка − 1	Заполненная клетка + 1

Использование клетки (P,A) увеличило бы стоимость транспортировки на 11 ф. ст. за каждое изделие, перевозимое из P в A. Значение теневой цены является положительным, следовательно, использование данной клетки нежелательно.

Мы возвращаемся к исходному распределению перевозок и проводим последовательную проверку остальных пустых клеток. Выберем клетку (R, фиктивный). а для иллюстрации натуральных и стоимостных изменений, связанных с перемещением одной единицы изделия в клетку (R, фиктивный), используем ступеньки (P, фиктивный). (P,C) и (R,C).

Таблица 2.8. **Проверка пустой клетки (R, фиктивный)**

Изменения натурального объема – изделий

	С	*Фиктивный*
P	Заполненная клетка + 1	Заполненная клетка – 1
R	Заполненная клетка – 1	Клетка, подвергнутая проверке + 1

Таблица 2.9. **Проверка пустой клетки (R, фиктивный)**

Стоимостные изменения, ф. ст.

	С	*Фиктивный*
P	Заполненная клетка + 5	Заполненная клетка – 0
R	Заполненная клетка – 7	Клетка, подвергнутая проверке + 0

Стоимостные изменения от дополнения одного изделия в клетку (R, фиктивный) составили:

$$+0-0+5-7=-2 \text{ ф.ст. за 1 изделие.}$$

Размещение перевозок в клетке (R, фиктивный) дает возможность снизить издержки транспортировки, следовательно, начальное распределение перевозок оптимальным не является. Используя клетку (R, фиктивный) и указанный ступенчатый маршрут, можно найти более дешевое решение, позволяющее сэкономить 2 ф. ст. за каждую единицу изделия, помещаемую в данную клетку. Однако проверку пустых клеток необходимо завершить, поскольку могут существовать клетки, использование которых позволяет получить еще большую экономию.

Теперь построим ступенчатый путь для пустой клетки (Q, фиктивный). Необходимо учитывать, что для последующего осуществления балансировки движение можно осуществлять только через заполненные клетки. В этом случае цикл из четырех шагов построить уже невозможно. Нам приходится выбирать более сложный маршрут. В клетку (Q, фиктивный) поместим одно изделие. Строка Q и фиктивный столбец содержат только по одной заполненной клетке. Предположим, что мы приняли решение двигаться из (Q, фиктивный) в (Q,B). Для того, чтобы сбалансировать строку Q, из этой клетки вычтем одно изделие. Восстановить баланс для столбца B можно только с помощью клетки (R,B), следовательно, в нее необходимо добавить одно изделие. Балансировку строки R можно осуществить через клетки (R,A) и (R,C), но поскольку (R,A) — единственная заполненная клетка в столбце A, ее использовать нельзя. Если бы маршрут проходил через данную клетку, мы не могли бы сбалансировать столбец A. Объем перевозок в (R,C) уменьшается на одно изделие. Оставшаяся часть маршрута очевидна. Восстановление баланса в столбце C производится увеличением перевозок в (P,C) на одну единицу, а баланс строки P достигается вычитанием одного изделия из (P, фиктивный). Последний шаг позволяет также сбалансировать фиктивный столбец и замкнуть цикл. Следует помнить, что построение замкнутого цикла внутри транспортной таблицы, который начинается и заканчивается в выбранной пустой точке, возможно только в случае, если исходное распределение перевозок является базисным. Натуральные и стоимостные изменения, соответствующие построенному циклу, показаны в табл. 2.10. и 2.11.

Чистый стоимостный эффект от размещения в пустой клетке (Q, фиктивный) составит:

$$+0-0+5-7+20-10=+8 \text{ ф. ст. за изделие.}$$

В случае заполнения данной пустой клетки общая стоимость транспортировки увеличится на 8 ф. ст. за 1 изделие. Поэтому мы не будем вводить рассмотренные изменения. Теневые цены для оставшихся пустых клеток рассчитываются аналогичным образом. В табл. 2.12. показано все множество значений теневых цен (они обведены в кружочки).

Таблица 2.10. **Проверка пустой клетки (Q, фиктивный)**

Натуральные изменения, изделий

	B	C	*Фиктивный*
P	Пустая	Заполненная +1	Заполненная −1
Q	Заполненная −1	Пустая	Проверяемая +1
R	Заполненная +1	Заполненная −1	Пустая

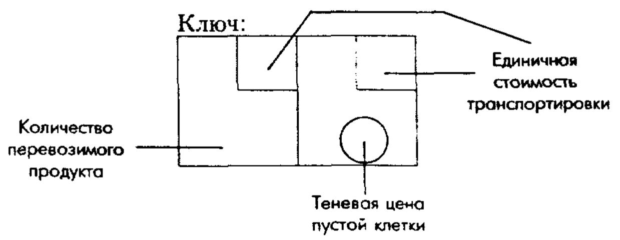
Таблица 2.11. **Проверка пустой клетки (Q, фиктивный)**

Стоимостные изменения, ф. ст.

	B	C	*Фиктивный*
P	Пустая	Заполненная +5	Заполненная −0
Q	Заполненная −10	Пустая	Проверяемая +0
R	Заполненная +20	Заполненная −7	Пустая

Таблица 2.12. **Проверка начального распределения перевозок на оптимальность — метод ступенек**

Торговый склад	*Розничный магазин*				*Общее предложение*
	A	*B*	*C*	*фиктивный*	
P	10 (+11)	20 (+2)	5 2	0 7	9
Q	2 (+11)	10 4	8 (+11)	0 (+8)	4
R	1 3	20 1	7 4	0 (−2)	8
Общая потребность	3	5	6	7	21



Это решение является неоптимальным, так как клетке (R, фиктивный) соответствует отрицательная теневая цена, равная - 2 ф. ст. Стоимость транспортировки в 101 ф. ст. можно уменьшить, если ввести эту клетку и соответствующий ступенчатый цикл в распределение перевозок, что позволит достичь экономии стоимости в 2 ф. ст. на 1 изделие.

Мы продолжим решать этот пример и найдем оптимальное распределение перевозок в **2.2.5**, но сначала рассмотрим метод МОДИ вычисления теневых цен. Алгоритм метода ступенек является довольно трудоемким, и в процессе его реализации легко допустить ошибки. Использование оптимальности метода МОДИ в данном случае является гораздо более разумным. Хотя его алгоритм не позволяет выявить натуральные изменения, однако с его помощью можно получить те же значения теневых цен, затратив при этом гораздо меньше усилий.

Для начала рассмотрим только заполненные клетки. Для этих клеток каждое значение единичной стоимости c_{ij} разделяется на две компоненты — u_i для строк и v_j для столбцов. Например, единичная стоимость для клетки (R,B), лежащей на пересечении строки 3 и столбца 2, равна c_{32} = 20 ф. ст. В ней можно выделить компоненту u_3, соответствующую строке, и компоненту v_2, соответствующую столбцу, т.е.

$$c_{32} = 20 = u_3 + v_2.$$

Теневые цены для каждой пустой (небазисной) клетки можно найти из соотношения

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

Эта теневая цена отражает дополнительную стоимость транспортировки единицы изделия из пункта i в пункт j. Если все теневые цены положительны или равны нулю, т.е. $s_{ij} \geq 0$, то полученное решение является оптимальным. В этом случае перемещение единицы изделия в пустую клетку, которой соответствует положительная теневая цена, только увеличит общую стоимость транспортировки. Если же соответствующая теневая цена имеет нулевое значение, то общая стоимость транспортировки не изменится.

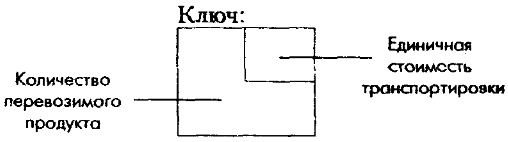
Пример 2.4.. Обратимся вновь к начальному распределению перевозок, полученному методом минимальной стоимости. Проведем проверку данного распределения на оптимальность с помощью метода МОДИ. Ниже воспроизведено начальное распределение перевозок (см. табл. 2.13).

Расчет компонент для строк и, и компонент для столбцов v_j производится с помощью заполненных клеток. Заполненные клетки (P,C), (P, фиктивный), (Q,B), (R,A), (R,B) и (R,C) приводят к системе из шести уравнений. Эти шесть уравнений содержат семь переменных, поэтому система имеет не одно решение. Поскольку множество значений переменных является совместимым, фактические значения, присваиваемые компонентам, не играют никакой роли.

Таблица 2.13.

Начальное распределение перевозок, полученное методом минимальной стоимости

Торговый склад	*Розничный магазин*				*Общее предложение*
	A	*B*	*C*	*фиктивный*	
P	10 –	20 –	5 2	0 7	9
Q	2 –	10 4	8 –	0 –	4
R	1 3	20 1	7 4	0 –	8
Общая потребность	3	5	6	7	21



$c_{13}=5= u_1 + v_3$ для заполненной клетки (P,C);
$c_{14}=0= u_1 + v_4$ для заполненной клетки (P, фиктивный):
$c_{33}=7=u_3+v_3$ для заполненной клетки (R.C);
$c_{31}=1=u_3+v_1$ для заполненной клетки (R,A);
$c_{32}=20=u_3 + v_2$ для заполненной клетки (R,B);
$c_{22}=10= u_2 + v_2$ для заполненной клетки (Q,B).

Какой-либо из компонент присваивается некоторое значение, по которому из соответствующих уравнений рассчитываются значения остальных компонент. Положим $u_1 = 0$. Из этого следует, что $v_3= 5$, $v_4 = 0$, $u_3 = 2$, $v_1 = - 1$, $v_2 = 18$ и $u_2 = - 8$. Теперь, пользуясь соотношением

$$s_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$$

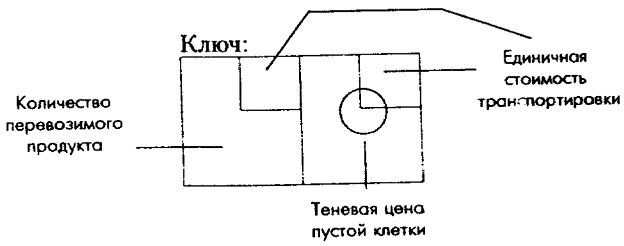
мы можем найти значения теневых цен, соответствующих незаполненным клеткам.

Подставив найденные значения компонент u_i и v_j получим следующие теневые цены:
$s_{11} =10 - (0 - (- 1)) = +11$ для пустой клетки (P,A);
$s_{12} =20 - (0 +18) = + 2$ для пустой клетки (P,B);
$s_{21} = 2 -(-8- 1) =+11$ для пустой клетки (Q, A);
$s_{23} = 8 - (-8 + 5) =+11$ для пустой клетки (Q, C);
$s_{24} = 0 - (-8 + 0) = + 8$ для пустой клетки (Q, фиктивный);
$s_{34} = 0 - (2 + 0) = - 2$ для пустой клетки (R, фиктивный).
Эти значения заносятся в транспортную таблицу так, как это показано в табл. 2.14.

Таблица 2.14.

Применение метода МОДИ для проверки на оптимальность начального распределения перевозок

Торговый склад	*Розничный магазин* A	B	C	*фиктивный*	*Общее предложение*
P	10 / +11	20 / +2	5 / 2	0 / 7	$u_1=0$ 9
Q	2 / +11	10 / 4	8 / +11	0 / +8	$u_2=-8$ 4
R	1 / 3	20 / 1	7 / 4	0 / −2	$u_3=2$ 8
Общая потребность	3	5	6	7	21
	$v_1=-1$	$v_2=18$	$v_3=5$	$v_4=0$	



Теневые цены совпадают с теми значениями, которые были найдены методом ступенек и представлены в табл. 2.12. Маршрут (R, фиктивный) имеет отрицательную теневую цену - 2 ф. ст., следовательно, полученное решение является неоптимальным. Необходимо осуществить перераспределение перевозимых изделий с использованием указанной клетки и соответствующего ей ступенчатого цикла, что позволит снизить стоимость транспортировки.

2.2.5. Поиск оптимального решения

Итеративная процедура нахождения оптимального распределения перевозок может быть представлена следующим образом:

1. Если транспортная таблица содержит более одной пустой клетки с отрицательным значением теневой цены, то выбирается та из них, которой соответствует наибольшее значение по абсолютной величине.
2. Построение для этой клетки ступенчатого цикла аналогично описанному выше.
3. Выявление клеток, количество перевозок в которых необходимо сократить, и определение величины этих сокращений таким образом, чтобы ни одно из значений перевозок не оказалось отрицательным. Максимальное количество изделий, соответствующее выбранной клетке, определяется минимумом из этих значений. Перераспределение производится только для клеток, входящих в построенный цикл.
4. Нет никаких гарантий, что в полученном распределении нельзя предпринять никаких улучшений. Поэтому новое решение необходимо проверить на оптимальность с использованием метода МОДИ. Утверждать, что найденная стоимость транспортировки является минимальной, можно только в том случае, если все теневые цены положительны или равны нулю.

Продолжение примера 2.4. Единственной клеткой с отрицательным значением теневой цены, равным — 2 ф. ст., является клетка (R, фиктивный). В эту клетку желательно разместить максимально возможное количество изделий.

Ниже приведен ступенчатый цикл для клетки (R, фиктивный), которая имеет значение теневой цены, равное - 2 ф. ст., а также исходное распределение перевозок и единичные издержки.

Таблица 2.15.

Ступенчатый цикл для (R, фиктивный)

	C	Фиктивный
P	+ [5] 2	− [0] 7
R	− [7] 4	+ [0] -2

Знак "+" означает увеличение количества перевозимых изделий в данной клетке; знак "-" — уменьшение соответствующего количества изделий.

Клетки со знаком "-" — это клетки (R, фиктивный) и (R,C), объем перевозок в которых равен 7 и 4 изделиям соответственно. Минимальным значением для клеток, отмеченных знаком "-", является 4, что означает, что внутри цикла можно осуществлять перемещение четырех изделий, добавляя их в клетки со знаком "+" и вычитая из клеток со знаком "—". Общая экономия стоимости транспортировки составит в данном случае (2 х 4) = 8 ф. ст. Изменения, внесенные в транспортную таблицу, отражены в табл. 2.16.

Таблица 2.16.

Перераспределение перевозок

Торговый склад	*Розничный магазин*				*Общее предложение*
	A	*B*	*C*	*фиктивный*	
P	[10] −	[20] −	[5] 2 + 4	[0] 7 − 4	9
Q	[2] −	[10] 4	[8] −	[0] −	4
R	[1] 3	[20] 1	[7] 4 − 4	[0] 0 + 4	8
Общая потребность	3	5	6	7	21

Данное решение по-прежнему является базисным, так как число заполненных клеток равно 6. Проверим данное решение на оптимальность с использованием метода МОДИ. Обратившись к заполненным клеткам (P,C), (P, фиктивный), (O,B), (R,A), (R,B) и (R, фиктивный), получим:

$c_{13} = 5 = u_1 + v_3$ Положим $u_1 = 0$, тогда $v_3 = 5$;
$c_{14} = 0 = u_1 + v_4$ $v_4 = 0$;
$c_{34} = 0 = u_3 + v_4$ $u_3 = 0$;
$c_{31} = 1 = u_3 + v_1$ $v_1 = 1$
$c_{32} = 20 = u_3 + v_3$ $v_2 = 20$;
$c_{22} = 10 = u_2 + v_2$ $u_2 = -10$.

Таким образом, теневые цены соответствующие пустым клеткам, будут равны:

$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$;
$s_{11} = 10 - (0 + 1) = +9$:
$s_{12} = 20 - (0 + 20) = 0$;
$s_{21} = 2 - (-10 + 1) = +11$;
$s_{23} = 8 - (-10 + 5) = +13$;
$s_{24} = 0 - (-10 + 0) = +10$;
$s_{33} = 7 - (0 + 5) = +2$.

Поскольку ни одно из значений теневых цен не отрицательно, полученное решение является оптимальным.

Минимальная стоимость равна:

$$101 + (4 \times (-2)) = 93 \text{ ф. ст.}$$

Таблица 2.17.

Проверка распределения перевозок на оптимальность с использованием метода МОДИ

Торговый склад	Розничный магазин A	B	C	Фиктивный	Общее предложение	
P	10 / +9	20 / 0	5 / 6	0 / 3	9	$u_1 = 0$
Q	2 / +11	10 / 4	8 / +13	0 / +10	4	$u_2 = -10$
R	1 / 3	20 / 1	7 / +2	0 / 4	8	$u_3 = 0$
Общая потребность	3	5	6	7	21	
	$v_1 = 1$	$v_2 = 20$	$v_3 = 5$	$v_4 = 0$		

Решение.

• Шесть изделий перевозятся со склада P в розничный магазин C, три изделия остаются на складе P.

• Четыре изделия перевозятся со склада Q в магазин B.

• Со склада R перевозятся три изделия в магазин A. одно — в магазин B, а четыре изделия остаются на складе.

В случае если и повторное распределение перевозок не является оптимальным, процедуру перераспределения повторяют необходимое число раз.

Следует отметить, что минимальная. стоимость была достигнута еще 8 исходном распределении перевозок, полученном методом Вогеля. Такая ситуация в задачах небольшой размерности бывает довольно часто. Обычно метод Вогеля позволяет получить наилучшее начальное решение, однако нет никаких гарантий, что применение этого метода сразу обеспечивает получение оптимального решения. Следует также отметить, что распределение перевозок, полученное методом Вогеля, несколько отличается от распределения, найденного выше (см. пример **2.2.**). Данная задача имеет альтернативное оптимальное решение:

• Со склада P одно изделие вывозятся в магазин B, шесть - в магазин C, а два — остаются на складе;

• Со склада O четыре изделия вывозится в магазин B;

• Со склада R три изделия вывозятся в магазин A, а пять остаются на складе. О существовании альтернативного оптимального решения говорит и нулевое значение теневой цены, соответствующей клетке (P,B). Нулевые значения теневых цен всегда связаны с существованием альтернативных оптимальных распределений перевозок, которым соответствует одно значение общей стоимости транспортировки.

2.2.6. Анализ чувствительности

Итоговое распределение перевозок, а также значения теневых цен, соответствующие пустым клеткам, можно использовать при проведении анализа модели на чувствительность. Теневая цена показывает насколько увеличится общая стоимость, если в пустую клетку поместить одну единицу продукта. Если нам придется осуществить перевозку одного изделия с торгового склада Q в розничный магазин C, увеличение стоимости составит 13 ф. ст., что гораздо выше, чем стоимость самого маршрута (Q,C), равная 8 ф. ст. Дополнительное увеличение стоимости появляется в связи с перебалансировкой распределения перевозок, при которой применяется нижеследующий ступенчатый цикл.

Таблица 2.18.
Ступенчатый цикл для (Q,C)

Натуральные изменения, изделий

	B	C	*Фиктивный*
P	Пустая	Заполненная −1	Заполненная +1
Q	Заполненная −1	Проверяемая +1	Пустая
R	Заполненная +1	Пустая	Заполненная −1

Таблица 2.19.
Ступенчатый цикл для (Q,C)

Стоимостные изменения, ф. ст.

	B	C	*Фиктивный*
P	Пустая	Заполненная −5	Заполненная +0
Q	Заполненная −10	Проверяемая +8	Пустая +8
R	Заполненная +20	Пустая	Заполненная −0

Чистые изменения стоимости составят:

+ 8 - 5 + 0 - 0 + 20 - 10 = 13 ф. ст. за изделие.

Максимальное число изделий, которое можно перемещать внутри цикла, — это минимальное из значений, стоящих в клетках со знаком "—", т.е.

(P,C) = 6(R, фиктивный) = 4 и (Q,B) = 4.

Следовательно, максимальное количество изделий, подлежащих перемещению, равно 4. - О нулевом значении теневой цены в клетке (P,B) мы уже упоминали в предыдущем разделе. Ступенчатый цикл для данной пустой клетки имеет следующий вид:

Таблица 2.20. **Ступенчатый цикл для (P,B)**

Натуральные изменения изделий

	B	*Фиктивный*
P	Проверяемая +1	Заполненная −1
R	Заполненная −1	Заполненная +1

Таблица 2.21. **Ступенчатый цикл для (P,B)**

Стоимостные изменения, ф. ст.

	B	*Фиктивный*
P	Проверяемая +20	Заполненная −0
R	Заполненная −20	Заполненная −0

Можно поместить некоторое число изделий в клетку (P,B), причем чистый стоимостный эффект будет равен нулю. Это означает, что существует альтернативное распределение перевозок, которое также позволяет получить минимальную стоимость в 93 ф. ст. Максимальное количество изделий, которое можно добавить в клетку (P,B), — это минимум из значений, указанных в клетках со знаком "-": (R,B) = 1 и (P, фиктивный) = 3. Следовательно, только одно изделие можно, перемещая по циклу, поместить в клетку (P,B).

Теневые цены можно использовать также в качестве индикаторов изменений стоимости транспортировки, соответствующей пустой клетке, которые оказывают воздействие на оптимальное распределение перевозок. Например, теневая цена пустой клетки (R.C) равна 2 ф. ст., а фактическая стоимость транспортировки — 7 ф. ст. за 1 изделие. Следовательно, для того, чтобы использование данной клетки в распределении перевозок привело к снижению общей стоимости транспортировки, фактическую единичную стоимость, соответствующую этой клетке, необходимо снизить как минимум до (7 - 2) = 5 ф. ст.

Действие стоимостных изменений в заполненных клетках выявить гораздо сложнее. При снижении издержек увеличение числа изделий в данной клетке выгодно. Если же издержки, стоящие в заполненных клетках, возрастает, то при достижении ими определенного значения использование этой клетки является нежелательным, и необходимо осуществить переход к иному маршруту.

Рассмотрим заполненную клетку (P,C). Соответствующая ей фактическая стоимость перевозок составляет 5 ф. ст. за изделие. Уменьшение этой стоимости не повлияет на объем перевозок, поскольку количество изделий, указанное в данной клетке, удовлетворяет всю потребность магазина C.

Если стоимость перевозки становится больше 5 ф. ст. то следует обратить .внимание на ступенчатые циклы, в которых задействована клетка (P,C). Эти циклы дают значения теневых цен: 13 ф. ст. для (Q,C) и 2 ф. ст. для (R,C). В обоих циклах клетка (P,C) помечена знаком "—", и любое увеличение стоимости на 5 ф. ст. повлечет за собой снижение теневых цен указанных пустых клеток.

Изменение натурального объема перевозок будет иметь место в случае, если единичная стоимость транспортировки для клетки (P,C) возрастет более чем на 2 ф. ст. и превысит 7 ф. ст. При этом теневая цена клетки (R,C) станет отрицательной. В данной ситуации использование пустой клетки (R,C) окажется выгодным, что приведет к изменению объема перевозок для (P,C).

Таким образом, для полученного оптимального распределения перевозок верхним пределом стоимости, соответствующей (P,C), является значение 7 ф. ст., а нижним пределом — 0. Внутри указанного промежутка происходит изменение лишь общей стоимости транспортировки, тогда как в натуральном выражении распределение перевозок не меняется.

2.2.7. Модификации транспортной задачи

НЕДОПУСТИМЫЕ ПЕРЕВОЗКИ

Если перевозка из некоторого пункта производства в некоторый пункт назначения по той или иной причине невозможна, то в алгоритме решения задачи данное ограничение можно учесть, присвоив соответствующей клетке достаточно большое значение стоимости. Точное значение в данном случае неважно, однако, оно должно быть больше, чем остальные значения стоимости, указанные в таблице. Таким образом, алгоритм автоматически позволит избежать перевозок через данную клетку.

Пример 2.5. В данном примере показано применение алгоритма решения транспортной задачи в решении проблем, связанных с недопустимостью прямых перевозок товаров из пунктов производства в пункты назначения. В примере будет рассмотрено движение продукта во времени. Пусть в нашем распоряжении имеется производственный график сроком на четыре месяца, который необходимо выполнить. Ниже приведены значения спроса на продукцию и производственных мощностей.

Таблица 2.22.

Значения спроса и производственных мощностей

Месяц	*Производственные мощности, изделий*	*Спрос, изделий*
1	300	300
2	350	275
3	325	400
4	375	300

К началу первого месяца имеется начальный запас изделий объемом 50 шт. Изделия можно производить как для удовлетворения текущего спроса, так и создания запаса для удовлетворения спроса в последующие месяцы. Если спрос на изделия в течение месяца не удовлетворяется полностью, то прибыль от продажи теряется. Издержки производства составляют 100 ф. ст. за единицу изделия. Стоимость хранения запасов равна 2 ф. ст. за единицу изделия. Каков оптимальный план производства?

Решение.

Данную ситуацию можно формализовать, используя транспортную таблицу, в которой строками являются начальный запас и объемы производства изделий в месяц, а столбцы отражают ежемесячный спрос на продукцию. Маршруты (клетки), в которых подразумевается удовлетворение спроса за текущий месяц в следующих месяцах, считаются недопустимыми. В табл. 2.23. этим клеткам соответствуют бесконечные значения стоимости.

Таблица 2.23.

Данные производственного плана для месяцев 1-4

		Стоимость единицы изделия ф. ст. Месяцы				*Общее предложение*
		M1	*M2*	*M3*	*M4*	
Запас	M1	2	4	6	8	50
Производство	M1	100	102	104	106	300
	M2	∞	100	102	104	350
	M3	∞	∞	100	102	325
	M4	∞	∞	∞	100	375
Общая потребность		300	275	400	300	

Решение этой транспортной задачи производится с помощью обычного алгоритма, позволяющего минимизировать стоимость выполнения производственного графика (см. пример **2.8.**).

ВЫРОЖДЕННОСТЬ

Решение называется вырожденным, если число перевозок в транспортной таблице меньше, чем ($m+n-1$). Данную проблему можно разрешить, проставив в независимые клетки очень маленькие, по сути равные нулю объемы перевозок. Число перевозок увеличивается таким образом до ($m+n-1$). Выявить клетки, которые следует использовать для этой цели, поможет алгоритм метода МОД И проверки решения на оптимальность.

Пример 2.6. Три торговых склада (X, Y и Z) могут осуществлять поставки 6, 3 и 4 единиц продукта в три магазина (L, M и N), спрос которых равен 4. 5 и 1 единицам соответственно. Значения единичной стоимости транспортировки указаны в приведенной ниже таблице.

Таблица 2.24.

Исходная информация

Торговый склад	*Магазин, ф. ст./ед.*			*Общее предложение*
	L	*M*	*N*	
X	6	4	9	6
Y	5	3	2	3
Z	2	3	6	4
Общая потребность	4	5	1	

Как следует распределить перевозки, чтобы общая стоимость транспортировки была минимальной?

Решение.

Общее предложение составляет 13 единиц, что превышает общую потребность в 10 единиц, поэтому в задачу вводится фиктивный магазин, потребность которого в продукции балансирует излишек предложения торговых складов. Чтобы найти начальное распределение перевозок, применим метод Вогеля:

Таблица 2.25. **Начальное распределение перевозок, полученное методом Вогеля**

Торговый склад	Розничный магазин L	M	N	Фиктивный	Общее предложение	Штрафная стоимость 123
X	[6] –	[4] 3	[9] –	[0] 3_1	~~630~~	4_1 2 2
Y	[5] –	[3] 2	[2] 1_2	[0] –	~~320~~	2 1 2
Z	[2] 4_3	[3] –	[6] –	[0] –	~~40~~	2 1 1
Общая потребность	~~4~~ 0	~~5~~ ~~3~~ 0	1 0	~~3~~ 0	13	
1-й штраф 2-й штраф 3-й штраф	3 3 3_3	0 0 0	4 4_2 –	0 – –		

Значение стоимости транспортировки составит:

$$4\times3+0\times3+3\times2+2\times1+2\times4=28 \text{ ф. ст.}$$

Для того, чтобы решение являлось базисным, оно должно включать (3+4—1)=6 переменных, тогда как в нашей задаче число перевозок равно лишь 5. Найденное решение является вырожденным. Поступая в соответствии с алгоритмом метода МОДИ, мы должны ввести нулевую перевозку, чтобы использовать в качестве заполненной одну из пустых клеток. Этот прием позволяет получить требуемое число перевозок, равное 6. Затем можно будет рассчитать значения всех компонент u и v, а следовательно, и теневые цены.

Реализацию алгоритма метода МОДИ мы начнем, используя 5 заполненных клеток, соответствующих начальному распределению перевозок. Дополнительная нулевая перевозка будет введена только, когда без нее продолжение алгоритма будет невозможно. Обратимся к таблице 2.26.

Таблица 2.26. **Проверка вырожденного решения на оптимальность — метод МОДИ**

Торговый склад	Розничный магазин L	M	N	Фиктивный	Общее предложение	
X	[6] +7	[4] 3	[9] +6	[0] 3	6	$u_1 = 0$
Y	[5] +7	[3] 2	[2] 1	[0] +1	3	$u_2 = -1$
Z	[2] 4	[3] −4	[6] $\boxed{0}$	[0] −3	4	$u_3 = 3$
Общая потребность	4	5	1	3	13	
	$v_1 = -1$	$v_2 = 4$	$v_3 = 3$	$v_4 = 0$		

Заполненные клетки используются для расчета соответствующих компонент по строкам и по столбцам из соотношения: $c_{ij} = u_i + v_j$ при условии, что $u_i = 0$. Значения v_2, v_4, u_2 и v_3 можно найти, не испытывая никаких затруднений, однако, значения u_3 и v_1 рассчитать нельзя. Для этого необходимо иметь дополнительную заполненную клетку.

Нулевую перевозку можно поместить в пустую клетку столбца v_1 или строки u_3. Какая из этих клеток будет выбрана, значения не имеет. Пусть выбрана клетка (Z, N). Теперь можно завершить алгоритм и найти значения теневых цен для пустых клеток из соотношения $s_{ij}= c_{ij}- (u_i + v_j)$. Соответствующие величины приведены в табл. 13.26. Как видно из таблицы, в двух клетках теневые цены принимают отрицательные значения. Следовательно, полученное распределение перевозок является неоптимальным, и необходимо осуществить их перераспределение, используя при этом клетки (Z,M) или (Z, фиктивный). Начнем с клетки (Z,M), поскольку ей соответствует большее по абсолютной величине значение теневой цены. Ступенчатый цикл для клетки (Z,M) и движение объемов перевозок по входящим в него клеткам можно представить в виде табл. 2.27.

Чтобы определить число единиц, которые следует перемещать вдоль построенного цикла, обратимся к клеткам (Y,M) и (Z,N), помеченным знаком "—", количество перевозок в которых равно 2 и 0 единицам.

Таблица 2.27.

Ступенчатый цикл для клетки (Z.M)

	M	N
Y	Заполненная – 2	Заполненная + 1
Z	Проверяемая +	Нулевая перевозка $\boxed{0}$ –

Это означает, что по циклу следует осуществлять перемещение нулевой перевозки таким образом, чтобы клетка (Z, N) снова стала пустой, а клетку (Z, M) предполагается использовать при распределении перевозок, поскольку в нее помещается нулевая перевозка. Остальные перевозки остаются без изменений. При дальнейшей проверке данного распределения на оптимальность выясняется, что значения всех теневых цен положительны. Данное распределение перевозок оптимальное. Это предполагает, что начальное решение, включающее 5 переменных, также оптимально. Обратимся к данным табл. 2.28.

Таблица 2.28.

Проверка оптимального решения — метод МОДИ

С торгового склада	*В магазин*				*Общее предложение*
	L	*M*	*N*	*фиктивный*	
X	6 (+3)	4 3	9 (+6)	0 3	6 $u_1 = 0$
Y	5 (+3)	3 2	2 1	0 (+1)	3 $u_2 = -1$
Z	2 4	3 $\boxed{0}$	6 (+4)	0 (+1)	4 $u_3 = -1$
Общая потребность	4	5	1	3	13
	$v_1 = 3$	$v_2 = 4$	$v_3 = 3$	$v_4 = 0$	

Такие результаты далеко не всегда имеют место в случае вырожденности решения. В некоторых ситуациях при перераспределении перевозок определенное количество единиц продукции помещается в клетку с нулевой перевозкой, и тем самым данная клетка вводится в новое распределение перевозок. Это приводит к исчезновению вырожденности решения. Затем, для получения улучшенного распределения перевозок, применяются обычные алгоритмы.

МАКСИМИЗАЦИЯ

Алгоритм решения транспортной задачи предполагает, что ее целевая функция стремится к минимуму. Однако если некоторая проблема требует максимизации целевой функции перед тем, как применять для решения этой задачи стандартный алгоритм, его необходимо немного модифицировать. Например, мы намерены по условиям примера |2.5. осуществить перевозку товаров таким образом, чтобы максимизировать общий доход. В этом случае нам необходима информация о единичных доходах от транспортировки товаров между всеми пунктами производства и назначения. Модификация заключается в умножении всех значений единичного дохода на (- 1), а затем поступают обычным образом.

2.3. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Частным случаем транспортной задачи является задача о назначениях, в которой число пунктов производства равно числу пунктов назначения, т.е. транспортная таблица имеет форму квадрата. Кроме того, в каждом пункте назначения объем потребности равен 1, и величина предложения каждого пункта производства равна 1. Любая задача о назначениях может быть решена с использованием методов линейного программирования или алгоритма решения транспортной задачи. Однако ввиду особой структуры данной задачи был разработан специальный алгоритм, получивший название Венгерского метода**.**

2.3.1. Алгоритм решения задачи о назначениях

Этот алгоритм состоит из трех этапов:

Этап 1:

1.Формализация проблемы в виде транспортной таблицы по аналогии с решением транспортной задачи.
2. В каждой строке таблицы найти наименьший элемент и вычесть его из всех элементов данной строки.
3. Повторить ту же самую процедуру для столбцов.

Теперь в каждой строке и в каждом столбце таблицы есть по крайней мере один нулевой элемент. Представленная в полученной с помощью описанного выше приема "приведенной" транспортной таблице задача о назначениях эквивалентна исходной задаче, и оптимальное решение для обеих задач будет одним и тем же. Сущность Венгерского метода заключается в продолжении процесса приведения матрицы до тех пор, пока все подлежащие распределению единицы не попадут в клетки с нулевой стоимостью. Это означает, что итоговое значение приведенной целевой функции будет равно нулю. Так как существует ограничение на неотрицательность переменных, нулевое значение целевой функции является оптимальным.

Этап 2.

Если некоторое решение является допустимым, то каждой строке и каждому столбцу соответствует только один элемент. Если процесс распределения элементов осуществляется только в клетки с нулевой стоимостью, он приведет к получению минимального значения целевой функции.

1. Найти строку, содержащую только одно нулевое значение стоимости, и в клетку, соответствующую данному значению, поместить один элемент. Если такие строки отсутствуют, допустимо начать с любого нулевого значения стоимости
2. Зачеркнуть оставшиеся нулевые значения данного столбца.
3. Пункты 1 и 2 повторять до тех пор, пока продолжение описанной процедуры окажется невозможным.

Если на данном этапе окажется, что есть несколько нулей, которым не соответствуют назначения и которые являются незачеркнутыми, то необходимо:

4. Найти столбец, содержащий только одно нулевое значение, и в соответствующую клетку поместить один элемент.
5. Зачеркнуть оставшиеся нули в данной строке.
6. Повторять пункты 4 и 5 до тех пор, пока дальнейшая их реализация окажется невозможной.

Если окажется, что таблица содержит неучтенные нули, повторить операции 1-6. Если решение является допустимым, т.е. все элементы распределены в клетки, которым соответствует нулевая стоимость, то полученное решение одновременно является оптимальным. Если решение является недопустимым, осуществляется переход к этапу 3.

Этап 3.

1. Провести минимальное число прямых через строки и столбцы матрицы (но не по диагоналям) таким образом, чтобы они проходили через все нули, содержащиеся в таблице.
2. Найти наименьший среди элементов, через которые не проходит ни одна из проведенных прямых.
3. Вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые.
4. Прибавить найденный элемент ко всем элементам таблицы, которые лежат на пересечении проведенных ранее прямых.
5. Все элементы матрицы, через которые проходит только одна прямая, оставить без изменения.

В результате применения данной процедуры в таблице появляется по крайней мере один новый ноль. Необходимо возвратиться к этапу 2 и повторять алгоритм до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

Пример 2.7. Некоторая компания имеет четыре сбытовые базы и четыре заказа, которые необходимо доставить различным потребителям. Складские помещения каждой базы вполне достаточны для того, чтобы вместить один из этих заказов. В табл. 2.29 содержится информация о расстоянии между каждой базой и каждым потребителем. Как следует распределить заказы по сбытовым базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

Таблица 2.29.

Расстояние от сбытовых баз до потребителей

Сбытовая база	*Расстояние, миль Потребители*			
	I	*II*	*III*	*IV*
A	68	72	75	83
B	56	60	58	63
C	38	40	35	45
D	47	42	40	45

Решение

Понимание существа проблемы можно в значительной степени облегчить, если перед тем, как применять Венгерский метод, попытаться решить поставленную задачу, используя один из широко известных методов. Примените метод Вогеля и проследите, насколько он приближает нас к оптимальному решению, которое мы рассмотрим в конце данного раздела. Значения общего спроса и общего предложения для всех строк и столбцов равны единице.

Этап 1 Венгерского метода: В каждой строке находится наименьший элемент.

Таблица 2.30.

Выявление наименьших элементов по строкам

	Потребители				*Наименьший элемент строки*
	I	*II*	*III*	*IV*	
A	68	72	75	83	68
B	56	60	58	63	56
C	38	40	35	45	35
D	47	42	40	45	40

Наименьший элемент вычитается из всех элементов соответствующей строки

Таблица 2.31.

Вычитание наименьшего элемента по строкам и выявление наименьшего элемента по столбцам

0	4	7	15
0	4	2	7
3	5	0	10
7	2	0	5
0	2	0	5

Наименьший элемент столбца

Найденный наименьший элемент вычитается из всех элементов соответствующего столбца.

Таблица 2.32.

Вычитание наименьшего элемента по столбцам

0	2	7	10
0	2	2	2
3	3	0	5
7	0	0	0

В соответствии с процедурой, описанной в этапе 2, осуществляются назначения. Наличие назначения обозначается через 0.

Таблица 2.33.

Назначения в клетки с нулевыми значениями

$\boxed{0}$	0	7	8
0	0	2	0
3	1	$\boxed{0}$	3
9	$\boxed{0}$	2	0

На данном этапе мы можем осуществить только три нулевых назначения, тогда как требуемое их количество равно четырем. Полученное распределение является недопустимым. Переходим к этапу 3. Проводим наименьшее число прямых, проходящих через все нули таблицы.

Таблица 2.34.

Проведение прямых через нулевые элементы

0	0	7	8
0	0	2	0
3	1	0	3
9	0	2	0

Наименьшим элементом, через который не проходит ни одна из прямых, является число 2. Скорректируем таблицу так, как это описано выше в соответствии с этапом 3, т.е. вычтем 2 из каждого элемента, через который не проходит ни одна прямая, и добавим 2 ко всем элементам, лежащим на пересечении двух прямых, оставив без изменения все прочие элементы, через которые проходит только одна прямая. Теперь перераспределим соответствующие назначения сбытовых баз и потребителей.

Таблица 2.35

Скорректированная таблица с назначениями для нулевых клеток

	I	*II*	*III*	*IV*

A	$\boxed{0}$	0	7	8
B	0	$\boxed{0}$	2	0
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	0	2	$\boxed{0}$

Теперь требование о размещении четырех назначений в клетки с нулевой стоимостью выполняется, следовательно, полученное решение является оптимальным. Перевозки осуществляются со сбытовой базы A к потребителю I, с базы B — к потребителю II, с базы C—к потребителю III и с базы D — к потребителю IV. Хотя данное решение и является оптимальным, однако оно не единственное. Тем не менее в любом оптимальном решении должен присутствовать маршрут (C,III), поскольку это единственный элемент с нулевой стоимостью в строке C. Два других оптимальных распределения назначений представлены ниже.

Таблица 2.36

Первое альтернативное оптимальное решение

	I	*II*	*III*	*IV*
A	$\boxed{0}$	0	7	8
B	0	0	2	$\boxed{0}$
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	$\boxed{0}$	2	0

Таблица 2.37

Второе альтернативное оптимальное решение

	I	*II*	*III*	*IV*
A	0	$\boxed{0}$	7	8
B	$\boxed{0}$	0	2	0
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	0	2	$\boxed{0}$

Минимальную дальность перевозок для каждого из трех решений можно вычислить из исходной таблицы:

Решение 1: 68 + 60 + 35 + 45 = 208 миль;
Решение 2: 68 + 63 + 35 + 42 = 208 миль;
Решение 3: 72 + 56 +35 + 45 = 208 миль.

Общая дальность перевозок для всех трех решений одинакова.

Примечание: в задачах большей размерности, чем задача из примера **2.7**, убедиться в том, что проведенное в соответствии с пунктом 1 этапа 3 число прямых является минимальным, гораздо труднее. В этой связи может оказаться полезным так называемое "правило правой руки":

1. Выбирается любая строка или столбец, содержащие только один нулевой элемент.
2. Если выбрана строка, прямая проводится через столбец, в котором находится данный нулевой элемент.
3. Если выбран столбец, прямая проводится через строку, содержащую данный нулевой элемент.
4. Пункты 1-3 повторяются до тех пор, пока не будут учтены все входящие в таблицу нули.

2.3.2. Особые случаи задачи о назначениях

МАКСИМИЗАЦИЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Алгоритм решения задачи о назначениях предполагает минимизацию ее целевой функции. Если имеется задача о назначениях, целевую функцию которой нужно максимизировать, то поступают таким же образом, как и в алгоритме решения транспортной задачи: после окончания формирования первой таблицы все ее элементы умножаются на (- 1).

Пример 2.8. В распоряжении некоторой компании имеется 6 торговых точек и 6 продавцов. Из прошлого опыта известно, что эффективность работы продавцов в различных торговых точках неодинакова. Коммерческий директор компании произвел оценку деятельности каждого продавца в каждой торговой точке. Результаты этой оценки представлены в табл. 2.38.

Таблица 2.38.

Объемы продаж в различных торговых точках для различных продавцов

Продавец	*Объемы продаж, ф. ст./тыс. шт.*					
			Торговые точки			
	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
A	68	72	75	83	75	69
B	56	60	58	63	61	59
C	35	38	40	45	25	27
D	40	42	47	45	53	36
E	62	70	68	67	69	70
F	65	63	69	70	72	68

Как коммерческий директор должен осуществить назначение продавцов по торговым точкам, чтобы достичь максимального объема продаж?

Решение.

Все элементы исходной таблицы умножаются на (-1);

Таблица 2.39.

Модификация исходных данных и выявление минимальных элементов

Продавец	*Торговые точки*						*Минимальный элемент*
	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	
A	-68	-72	-75	-83	-75	-69	-83
B	-56	-60	-58	-63	-61	-59	-63
C	-35	-38	-40	-45	-25	-27	-45
D	-40	-42	-47	-45	-53	-36	-53
E	-62	-70	-68	-67	-69	-70	-70
F	-65	-63	-69	-70	-72	-68	-72

Минимальный (наибольший по абсолютной величине) элемент вычитается из всех элементов соответствующей строки.

Таблица 2.40.

Вычитание минимального элемента по строкам и выявление минимальных элементов во столбцам

15	11	8	0	8	14
7	3	5	0	2	4
10	7	5	0	20	18
13	11	6	8	0	17
8	0	2	3	1	0
7	9	3	2	0	4
7	0	2	0	0	0

Минимальный элемент

Минимальный элемент вычитается из всех элементов соответствующего столбца.

Таблица 2.41.

Вычитание минимального элемента по столбцам

8	11	6	0	8	14
0	3	3	0	2	4
3	7	3	0	20	18
6	11	4	8	0	17
1	0	0	3	1	0

0	9	1	2	0	4

Дальнейший поиск оптимального решения осуществляется в соответствии с обычным алгоритмом (см. пример **2.9**).

НЕДОПУСТИМЫЕ НАЗНАЧЕНИЯ

Данную проблему можно решить так же, как и транспортную задачу. Если по той или иной причине некоторое назначение является недопустимым, то в соответствующей клетке проставляется значение стоимости, которое заведомо больше любого другого значения. После этого в ходе реализации алгоритма мы сможем избежать данного назначения автоматически.

НЕСООТВЕТСТВИЕ ЧИСЛА ПУНКТОВ ПРОИЗВОДСТВА И НАЗНАЧЕНИЯ

Если исходная таблица не является квадратной, в нее следует включить дополнительные фиктивные строки и столбцы, необходимые для приведения ее к квадратной форме. Значения стоимости, соответствующие фиктивным клеткам, как правило, равны нулю.

Назначения, размещаемые в клетках фиктивных строк, фактически не существуют. Назначения, соответствующие фиктивным столбцам, на деле представляют собой те единицы, которые не подлежат распределению.

РЕЗЮМЕ

Транспортная модель — это частный случай модели линейного программирования. Стандартная задача включает в себя некоторое множество пунктов производства, например, несколько торговых складов, которые осуществляют поставки в некоторое множество пунктов назначения, например, в несколько магазинов. Цель состоит в минимизации общей стоимости транспортировки в рамках ограничений на спрос и предложение. Решение этой задачи может быть найдено с помощью традиционных методов линейного программирования. Относительно простая структура задачи позволяет, однако, разработать специальные алгоритмы, применение которых оказывается более трудоемким, чем применение обычных методов решения задач линейного программирования с множеством переменных.

Первый шаг алгоритма состоит в построении транспортной таблицы, в которой содержится информация об издержках транспортировки. Строкам этой таблицы соответствуют пункты производства, а столбцам — пункты назначения.

Второй шаг алгоритма — это поиск начального распределения перевозок. Нами было описано два метода реализации данной процедуры. В методе минимальной стоимости перевозки распределяются в первую очередь по наиболее дешевым маршрутам. Метод Вогеля предполагает расчет значений штрафной стоимости и такое распределение перевозок, которое позволяет избежать получения высоких штрафов. Однако ни один из методов не гарантирует, что полученное начальное распределение перевозок окажется оптимальным.

Третий шаг состоит в проверке начального распределения перевозок на оптимальность. Мы изложили два метода проверки решения на оптимальность. Оба они основаны на вычислении значений теневых цен для незаполненных клеток. Если эти значения положительны или равны нулю для всех пустых клеток, то полученное распределение перевозок является оптимальным.

В методе ступенек в пустую клетку помещается одна единица продукции. Затем определяются натуральные и стоимостные изменения, происшедшие под воздействием такого размещения. Метод МОДИ в большей степени основан на математической теории. Используя значения стоимости перевозки в каждой заполненной клетке, мы получаем стоимость, соответствующую строке или столбцу:

$$c_{ij}= u_i + v_j.$$

Используя значения компонент u и v, полученных для строк и столбцов соответственно, рассчитывают значения теневых цен, соответствующие всем пустым клеткам. Их расчет производится по формуле:

$$s_{ij} = c_{jj} - (u_i + v_j).$$

Реализация четвертого шага необходима только в случае, если полученное распределение перевозок является неоптимальным. Для осуществления перераспределения применяется ступенчатый цикл, соответствующий клетке с отрицательным значением теневой цены. Полученное решение вновь подвергается проверке на оптимальность.

Транспортная задача может иметь некоторые специфические особенности. Если предложение и спрос несбалансированны, то необходимо ввести в задачу фиктивные пункты производства или назначения. Оптимальное решение должно находиться в крайней точке допустимого множества, иными словами, должно быть базисным. Базисным называется решение, число переменных в котором равно числу строк в таблице плюс число столбцов минус единица. Если число переменных оказывается меньше указанной величины, то решение является вырожденным, и в этом случае следует использовать пустые клетки, размещая в них псевдоперевозки, объем которых равен нулю.

Недопустимые маршруты могут быть блокированы введением в соответствующие клетки таблицы достаточно больших значений стоимости транспортировки. Целевую функцию задачи можно не только минимизировать, но и максимизировать.

Еще более специфической задачей, для которой разработаны особые методы решения, является задача о назначениях. Число пунктов производства в этой задаче совпадает с числом пунктов назначения, причем каждой строке и каждому столбцу должно соответствовать только одно назначение. Для решения этой модифицированной транспортной задачи был разработан Венгерский метод.

УПРАЖНЕНИЯ

Упражнение 2.1.

Два торговых склада поставляют продукцию в четыре магазина. Издержки транспортировки продукции с торговых складов в магазины, наличие продукции на складах и потребности магазинов приведены в следующей таблице:

Торговый склад	*Транспортные издержки, ф. ст. за единицу Магазин*				*Предложение продукции, ед.*
	G	*H*	*I*	*J*	
1	4	3	5	6	100
2	8	2	4	7	200
Потребность в продукции, ед.	50	100	75	75	

Требуется найти распределение перевозок, позволяющее свести к минимуму общие транспортные издержки.

Упражнение 2.2.

Три завода поставляют некоторую разновидность стали на пять торговых складов. Спрос каждого торгового склада в декабре, наличие стали на заводах, а также значения стоимости транспортировки 1 т стали, приведены в нижеследующей таблице.

Завод	*Транспортные издержки, ф. ст. за единицу Торговый склад*					*Предложение, т*
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
A	20	27	33	25	34	200
B	22	36	34	28	26	250
C	26	29	27	26	28	300
Потребность, т	100	150	200	100	200	

Требуется определить минимальную стоимость транспортировки на декабрь.

Упражнение 2.3.

Три пекарни осуществляют ежедневные поставки хлеба для четырех магазинов. Ниже представлена информация о спросе на продукцию, ее наличии и транспортных издержках.

Пекарня	*Транспортные издержки, пенсов/т Магазин*				*Общее предложение*
	I	*II*	*III*	*IV*	
X	1,5	2,5	1,0	2,0	700
Y	2,0	3,0	2,0	1,5	650
Z	1,0	1,5	2,5	3,0	800
Общая потребность	400	500	350	1000	

Требуется найти распределение поставок из каждой пекарни, минимизирующее общие транспортные издержки.

Упражнение 2.4.

Предприятие розничной торговли имеет четыре крупных универмага, расположенных в различных городах — P, Q, R, S. Поставки продукции в эти универмаги осуществляются с двух торговых складов A и B, площади которых вмещают по 40 единиц продукции ежедневно.

В будущем планируется расширить площади универмагов, поэтому их потребности в продукции с торговых складов составят 27, 25, 30 и 35 единиц в день соответственно. Чтобы удовлетворить текущий и будущий спрос, планируется построить третий склад, площади которого позволят хранить в нем 60 единиц продукции ежедневно. Рассматриваются два варианта его размещения. Ниже приведены транспортные издержки, соответствующие перевозке продукции с двух существующих складов, и два варианта размещения нового склада.

Торговый Склад	*Транспортные издержки, (р. ст. / ед. Универмаг*			
	P	*Q*	*R*	*S*
А	70	85	55	120
В	110	90	75	110
Вариант 1	115	115	70	90
Вариант 2	135	95	80	75

Требуется оценить две транспортные модели и принять решение о том, какой вариант размещения нового склада лучше. Предполагается, что остальные издержки сохраняют существующие значения.

Упражнение 2.5.

Компании "Zeit pie" принадлежат три фермы, где выращиваются овощи, предназначенные для последующей обработки на двух холодильных заводах компании. Одним из выращиваемых овощей являются бобы, которые холодильные заводы продают по 200 ф. ст. за 1 т. Прогнозные значения спроса на следующий сезон равны 2750 т для завода "Craft" и 3250 т для завода "Liver". Ниже приведены издержки производства для каждой фермы и каждого холодильного завода, а также максимальные значения урожая для каждой фермы.

	Издержки производства, ф. ст. за 1 т	*Максимальный урожаи, т*
Ферма "Ascent Hill"	90	2000
"Midrow Top"	95	3000
"Alum Up"	87	1500
Завод "Craft"	20	2750
"Liver"	23	3250

Стоимость транспортировок следующая:

Ферма	*Холодильный завод, ф. ст./ т*	
	"Craft'	*"Liver"*
"Ascent Hill"	10	15
"Midrow Top"	12	12
"Alum Up"	18	9

Требуется:

1. Для ферм и холодильных заводов найти производственный план на следующий сезон, позволяющий получить максимальный доход.
2. Администрация компании "Zeit" планирует превратить ферму "Midrow Top" в центр производства бобов высокого качества, вследствие чего она обратила внимание на то, что издержки производства на данной ферме являются самыми высокими и составляют 95 ф. ст. за 1 т. На сколько вы порекомендовали бы снизить эти издержки, прежде чем изменение оптимального распределения перевозок будет целесообразным?

Упражнение 2.6.

Администрация деревоперерабатывающего предприятия "Vibra" приняла на работу пять человек. Каждый из них имеет различные способности и навыки и затрачивает различное время на выполнение определенной работы. В настоящее время необходимо выполнить пять видов работ. Время выполнения работы каждым работником приведено в таблице:

Работник	*Время выполнения, ч*				
	Работы 1	*Работы 2*	*Работы 3*	*Работы 4*	*Работы 5*
Ml	25	16	15	14	13
M2	25	17	18	23	15
M3	30	15	20	19	14
M4	27	20	22	25	12
M5	29	19	17	32	10

Требуется назначить на каждый вид работы одного из работников. Как это нужно сделать, чтобы общее время, необходимое для завершения всех видов работ, было минимальным?

Упражнение 2.7.

Предприятие "Vibra" (см. упражнение **2.6**) может принять на работу еще одного рабочего по совместительству, который выполняет каждую работу в течение следующего времени:

Рабочий по совместительству	*Время выполнения, ч*				
	Работы 1	*Работы 2*	*Работы 3*	*Работы 4*	*Работы 5*
M6	28	16	19	16	15

Требуется определить, каким образом данная мера повлияет на назначение рабочих и минимизацию общего времени выполнения работ.

Упражнение 2.8

Завершить решение задачи о составлении плана производства по данным примера **2.5**, приведенного в **2.2.7**.

Упражнение 2.9.

Завершить решение задачи о назначениях по данным примера **2.8**, приведенного в **2.3.2**. Провести назначение шести продавцов по шести торговым точкам, позволяющее максимизировать общий объем продаж.

Упражнение 2.10.

В Kingdom of the Republik of Jdion имеется пять угольных шахт, показатели объемов выпуска продукции и издержек производства которых приведены в нижеследующей таблице:

Шахта	*Выпуск продукции, т/день*	*Издержки производства, ф. см. за 1 т*
1	120	25
2	150	29
3	80	34
4	160	26
5	140	28

До того как уголь будет готов к продаже, его необходимо "очистить" и отсортировать на одном из трех углеперерабатывающих заводов. Ниже приведены значения производственных возможностей и эксплуатационных расходов по каждому заводу:

Завод	*Выпуск продукции, т/день*	*Эксплуатационные расходы, ф. ст. за 1 т*
A	300	2
B	200	3
C	200	3

Перевозка угля производится по железной дороге, ее стоимость равна 0,5 ф. ст. за 1 т-км. Расстояние от каждой шахты до каждого углеперерабатывающего завода следующее (км):

Углеперерабатывающий завод	*Шахта*				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
A	22	44	26	52	24
B	18	16	24	42	48
C	44	32	16	16	22

1. Построив транспортную модель, определите, как следует распределить перевозки добытого угля с шахт на каждый из трех перерабатывающих заводов.
2. Ввиду установки нового оборудования на шахте 3 ее издержки производства, как ожидается, снизятся до 30 ф. ст. за 1 т. Окажет ли это изменение воздействие, и если да, то какое на распределение перевозок угля на перерабатывающие заводы?
3. Планируется увеличение объема добычи на шахте 5 до 180 т в день, причем его можно достичь, не увеличивая издержки производства 1 т угля. Как это повлияет на распределение перевозок угля к перерабатывающим заводам? (АССА, июнь 1986 г.).

Упражнение 2.11.

1. Кратко опишите и сравните два метода поиска начального допустимого решения транспортной задачи.
2. Компания "Braintree Electronics Company" выпускает ленты к видеокассетам, предназначенные для продажи населению. Ниже приведены значения спроса (100 м) и производственных возможностей (выпуск продукции, 100 м) за IV квартал.

Месяц	*Спрос*	*Выпуск продукции в урочное время*	*Выпуск продукции в сверхурочное время*
Октябрь	300	400	150
Ноябрь	450	400	150
Декабрь	800	400	150

Отметим, что производственные возможности позволяют производить ленты к видеокассетам как в течение урочного, так и сверхурочного времени работ, причем если показатели производственных возможностей постоянны, то значение спроса возрастает перед Рождеством. Компания не обладает каким-либо запасом продукции на данный момент и не намерена создавать его после декабря.

Издержки производства 100 м ленты к видеокассетам равны 150 ф. ст. в урочное время и 180 ф. ст. в сверхурочное время работы. Было установлено, что стоимость хранения запасов составляет 20 ф. ст. за 100 м ленты в месяц. При ответе на вопросы примите предпосылку о том, что все заказы удовлетворяются точно в срок, а спрос и предложение возникают в середине каждого месяца.

Требуется:

а) Формализовать изложенную ситуацию на производстве в виде транспортной модели, включающей шесть "пунктов производства" и три "пункта назначения", в которой показаны значения единичной стоимости для каждой пары: пункт производства — пункт назначения.

б) Используя алгоритм решения транспортной задачи, найти оптимальный план производства на указанный период. Определить общую стоимость, соответствующую найденному решению.
(АССА, июнь 1988 г.).

Упражнение 2.12

а) Объясните значение терминов:
вырожденность;
неравенство спроса и предложения;

не единственное оптимальное решение применительно к транспортной задаче.
Объясните, как можно модифицировать алгоритм ее решения, чтобы преодолеть указанные трудности.
б) Компания "Royal Wedgetoun Pottery" получила заказы на три вида выпускаемой ею продукции (бокалы, чашки и вазы), которые необходимо удовлетворить в течение следующей недели. Размеры заказов следующие:

Продукт	*Размер заказа, единиц*
Бокалы	4000
Чашки	2400
Вазы	1000

В распоряжении компании имеются три станка, на каждом из которых можно производить любой из указанных видов продукции с одинаковой производительностью. Однако единичные затраты по каждому виду продукции варьируют в зависимости от используемого станка. В нижеследующей таблице приведены единичные издержки (ф. ст.) по каждому станку:

Станок	*Бокалы*	*Чашки*	*Вазы*
A	1,20	1,30	1,10
B	1,40	1,30	1.50
C	1,10	1,00	1,30

Кроме того, известно, что производственные мощности станков В и С на следующую неделю составят 3000 единиц, а станка А — 2000 единиц.

Требуется, используя транспортную модель, найти план производства для видов продукции и станков, минимизирующий общую стоимость производства. Определить значение минимальной стоимости.

Если найденное оптимальное решение не единственное, нужно привести другие варианты решений, которым соответствует минимальная стоимость производства. Если бы менеджер по производству захотел, чтобы в производственном плане было как можно меньше изменений в производстве изделий на различных станках, то какое оптимальное решение вы бы порекомендовали?
(АССА, июнь 1989 г.).

Упражнение 2.13.

а) Кратко поясните, как можно модифицировать алгоритм решения транспортной задачи, если цель состоит не в минимизации затрат, а в максимизации прибыли.

б) Компания "Orange Computer" производит только один вид продукции — матричные печатающие устройства, которые в настоящее время являются дефицитом. Четыре основных покупателя — это крупные специализированные компьютерные универмаги, расположенные в Аббатстауне, Бесвиче, Карлике и Денстоуне, уже подали заявки, общий размер которых превышает общие производственные мощности трех заводов компании в Рексфорде, Сидоне и Тристроне. Компания должна принять решение о том, как распределить производственные мощности, чтобы получить максимальную прибыль.

После того, как каждый принтер тщательно упакован в мягкую упаковку, предохраняющую его от каких-либо повреждений, его помещают в отдельную коробку. В нижеследующей таблице приведены значения стоимости транспортировки одной единицы от каждого завода-производителя в каждый специализированный универмаг (ф. ст.):

	"Аббатстаун"	*"Бесвич"*	*"Карлик"*	*"Денстоун"*
Рексфорд	22	24	22	30
Сидон	24	20	18	28
Тристрон	26	20	26	24

Поскольку все четыре специализированных универмага расположены в различных частях страны и, следовательно, стоимость транспортировки продукции между заводами-производителями и универмагами различна, а также ввиду некоторых различий и в издержках производства каждого из четырех заводов, существующая структура цен предусматривает возможность установления различных цен для каждого из четырех универмагов. В настоящее время установлены следующие цены за единицу продукции: 230 ф. ст. в Аббатстауне, 235 ф. ст. в Бесвиче, 225 ф. ст. в Карлике и 240 ф. ст. в Денстоуне. Издержки производства на единицу продукции составляют 150 ф. ст. на заводах в Рексфорде и Тристроне, и 155 ф. ст. на заводе в Сидоне.

Требуется сформировать матрицу, состоящую из входящих в прибыль единичных доходов, соответствующих каждой паре перевозок с заводов-производителей в универмаги.

Значения спроса в Аббатстауне, Бесвиче, Карлике и Денстоуне равны 850, 640, 380 и 230 единицам соответственно. Производственные мощности позволяют производить на заводе в Рексфорде 625, в Сидоне — 825, а в Тристроне — 450 принтеров. Используя алгоритм решения транспортной задачи, определить оптимальное распределение перевозок.

Определить соответствующую оптимальному решению прибыль.

(АССА, июнь 1990 г.).

Упражнение 2.14.

а) Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи.

Опишите специфические особенности этой задачи и объясните, почему при решении задачи о назначениях нежелательно использовать алгоритм решения транспортной задачи.

б) Членов Ассоциации ученых Мидленда недавно уведомили, что их ассоциация получит государственные гранты на проведение исследований в соответствии с четырьмя основными исследовательскими проектами. Исполнительный директор ассоциации должен по каждому проекту назначить научного руководителя. В настоящее время эти обязанности можно возложить на одного из пяти исследователей — Адамс, Браун, Карр, Дай и Иванс. Время, требуемое для завершения каждого из исследовательских проектов, зависит от опыта и способностей исследователя, которому будет поручено руководство выполнением проекта. Исполнительному директору были представлены оценки времени выполнения проекта каждым из ученых (в днях).

Ученый-исследователь	*Проект*			
	1	*2*	*3*	*4*
Адамс	80	120	60	104
Браун	72	144	48	110
Карр	96	148	72	120
Дэй	60	108	52	92
Иванс	64	140	60	96

Поскольку все четыре проекта обладают равным приоритетом в выполнении, исполнительный директор заинтересован в таком назначении научных руководителей, которое бы позволило свести к минимуму общее время (в днях), требуемое для завершения всех четырех проектов.

Требуется определить оптимальный вариант назначения научных руководителей проектов и, следовательно, общее число дней, необходимое для завершения четырех проектов.
Найти какие-либо другие варианты назначения, которые привели бы к тому же результату. Учитывая, что ученые Браун, Карр и Дэй отдают предпочтение проектам 2 и 3, а ученые Адаме и Иванс - проектам 1 и 4, какой из имеющихся оптимальных вариантов назначения, принятый исполнительным директором, был бы наиболее разумным?

Какие особенности матрицы продолжительности выполнения проектов, сформированной для данной задачи, можно было бы использовать, чтобы упростить поставленную задачу?

(АССА, декабрь 1989 г.).

ТЕСТЫ

Вариант № 1

1. **Какие из приведенных решений являются опорными для следующей системы уравнений:**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_2 + x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

а) $\bar{x}_1 = \{3;-1,0,0,3\}$
б) $\bar{x}_2 = \{0,2;0;2;0\}$
в) $\bar{x}_3 = \{1,0;0;2;2\}$
г) $\bar{x}_4 = \{1,0,10,4,0\}$

2. **Из четырех видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества A, 30 ед. - вещества B и 24 ед. - вещества C. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, указано в таблице. В ней же приведена цена 1 кг сырья каждого вида.**

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья вида			
	1	2	3	4
A	1	1	-	4
B	2	-	3	5
C	1	2	4	6
Цена 1 кг сырья	5	6	7	4

Составить смесь, содержащую не менее нужного количества веществ данного вида и имеющую минимальную стоимость. Какая из математических моделей соответствует данной задаче, указать смысл входящих переменных, единицы измерения.

а) $z(x) = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_4 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \le 6 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

б) $z(x) = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 \le 26 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_4 \le 30 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \le 24 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

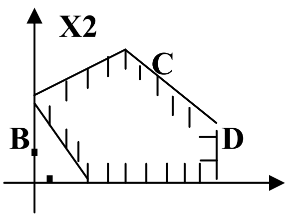
в) $z(x) = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 \ge 26 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_4 \ge 30 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \ge 24 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

г) $z(x) = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_4 = 30 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 24 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

3. В какой точке множества допустимых решений достигается минимум целевой функции $z(x) = -2x_1 + 3x_2$,



а) в точке A
б) в точке B
в) в точке C
г) в точке E
д) в точке Д

3. **Определить, какая из задач линейного программирования записана в канонической форме?**

а) $z(x) = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 3 \\ x_j \ge 0, j = 1,3 \end{cases}$$

б) $z(x) = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 3 \\ x_j \ge 0, j = 1,3 \end{cases}$$

в) $z(x) = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

4. Найти опорный план транспортной задачи, заданной следующей таблицей и вычислить соответствующие транспортные издержки.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потребности	60	70	120	130	100	

а) z(для опорного плана) = 1390
б) z(для опорного плана) =1380
в) z(для опорного плана) =1360
г) z(для опорного плана) =1340

Вариант № 2

1. **Какие из приведенных решений являются опорными для следующей системы уравнений:**

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

а) $\bar{x}_1 = \{2,0,1,2\}$.
б) $\bar{x}_2 = \{1,-1,2;1\}$.
в) $\bar{x}_3 = \{8,0,0,9\}$.
г) $\bar{x}_4 = \{-2,2,3,3,\}$

2. **Фирма производит три вида продукции (A, B, C) для впуска каждого из которых требуется определенное время обработки на всех четырех устройствах I, II, III, IV.**

Вид продукции	Время обработки (ч.)				Прибыль (долл.)
	I	II	III	IV	
A	1	3	1	2	3
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	4

Пусть время работы на устройствах - соответственно 84, 42, 21 и 42 ч.
Какая из математических моделей соответствует данной задаче, указать смысл входящих переменных, единицы измерения.

а) $z(x) = 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 84 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 42 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 42 \\ \\ x_j \geq 0; j = \overline{1,3} \end{cases}$$

б) $z(x) = 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \to \min$

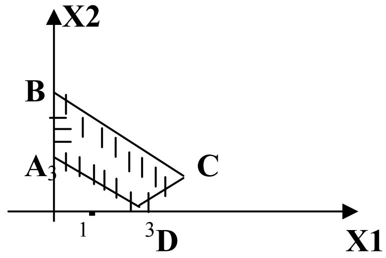
$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 84 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 42 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 42 \\ \\ x_j \geq 0; j = \overline{1,3} \end{cases}$$

в) $z(x) = 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \to \max$

г) $z(x) = 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 84 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 42 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 21 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 42 \\ \\ x_j \ge 0;\ j = \overline{1,3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 84 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 42 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 42 \\ \\ x_j \ge 0;\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

3. **В какой точке множества допустимых решений достигается минимум целевой функции** $z(x) = 3x_1 - 2x_2$



а) в точке А
б) в точке В
в) в точке С
г) в точке Д

4. **Определить, какая из задач линейного программирования записана в канонической форме?**

а) $z(x) = 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3 \\ x \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

б) $z(x) = 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

в) $z(x) = 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 \le 1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3 \\ x \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

5. Найти опорный план транспортной задачи, заданной следующей таблицей и вычислить соответствующие транспортные издержки.

Поставщики	**Потребители**				**Запасы**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	**2**	**3**	**4**	**3**	**180**
A_2	**5**	**3**	**1**	**2**	**60**
A_3	**2**	**1**	**4**	**2**	**80**
Потребности	**120**	**40**	**60**	**80**	

а) z (для опорного плана) = 560
б) z (для опорного плана) = 550
в) z (для опорного плана) = 540
г) z (для опорного плана) = 530

Вариант № 3.

1. **Какие из приведенных решений являются опорными для следующей системы уравнений:**

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3+6x_4=14 \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4=10 \end{cases}$$

а) $\bar{x}_1=\{2,1,3,2\}$
б) $\bar{x}_2=\{0,4,0,1\}$
в) $\bar{x}_3=\{-1,0,7,1\}$
г) $\bar{x}_4=\{0,0,-4,3\}$

2. Фирма производит два продукта А и В, рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой из машин I, II, III. Время обработки в часах для каждого из изделий А и В приведено в таблице.

Вид продукта	Время обработки (ч.)		
	I	II	III
А	0,5	0,4	0,2
В	0,25	0,3	0,4

Время работы машины I, II, III соответственно 40, 36 и 36 ч. в неделю. Прибыль от изделий составляет соответственно 5 и 3 доллара. Фирме надо определить недельные нормы выпуска изделий А и В, максимизирующие прибыль. Какая из математических моделей соответствует данной задаче и указать смысл входящих переменных, единиц измерения.

а) $z(x)=5x_1+3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 0{,}5x_1+0{,}25x_2 \ge 40 \\ 0{,}4x_1+0{,}3x_2 \ge 36 \\ 0{,}2x_1+0{,}4x_2 \ge 36 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $z(x)=5x_1+3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 0{,}5x_1+0{,}25x_2 \le 40 \\ 0{,}4x_1+0{,}3x_2 \le 36 \\ 0{,}2x_1+0{,}4x_2 \le 36 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

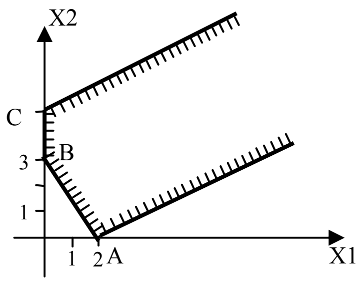
в) $z(x)=40x_1+36x_2+36x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 0{,}5x_1+0{,}4x_2+0{,}2x_3 \le 5 \\ 0{,}25x_1+0{,}3x_2+0{,}4x_3 \le 3 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$$

г) $z(x)=40x_1+36x_2+36x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 0{,}5x_1+0{,}4x_2+0{,}2x_3 \ge 5 \\ 0{,}25x_1+0{,}3x_2+0{,}4x_3 \ge 3 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$$

3. В какой точке множества допустимых решений достигается максимум целевой функции $z=2x_1-3x_2$**;**



а) в точке А
б) в точке В
в) в точке С

4. Определить, какая из задач линейного программирования записана в канонической форме?

а) $z(x)=-5x_1+x_2+x_3+2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3+3x_4 \le 4 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4 \le 14 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4} \end{cases}$$

б) $z(x)=-5x_1+x_2+x_3+2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3+3x_4 \ge 4 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4 \ge 14 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4} \end{cases}$$

в) $z(x) = -5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 14 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

5. Найти опорный план транспортной задачи, заданной следующей таблицей и вычислить соответствующие транспортные издержки.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	9	7	5	3	175
A_2	1	2	4	6	125
A_3	8	10	12	1	140
Потребности	180	110	60	40	

а) z(для опорного плана) = 1810
б) z(для опорного плана) =1800
в) z(для опорного плана) =1795
г) z(для опорного плана) =1780

Вариант № 4

1. Какие из приведенных решений являются опорными для следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 13 \end{cases}$$

а) $\bar{x}_1 = \{5,7,0,2,0\}$
б) $\bar{x}_2 = \{1,0,2,0,0\}$
в) $\bar{x}_3 = \{3,4,0,0,9\}$
г) $\bar{x}_4 = \{0,-1,5,2,3\}$

2. При откорме животных каждое животное ежедневно должно получить не менее 60 ед. питательного вещества А, не менее 50 ед. вещества В и не менее 12 ед. вещества С. Указанные питательные вещества содержат три вида корма. Содержание единиц питательных веществ в 1 кг. каждого из видов корма приведено в следующей таблице.

Питательные вещества	Время обработки (ч.)		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Цена 1 кг. корма I вида составляет 9 р., корма II вида - 12 р. и корма III вида - 10 р. Составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах. Какая из математических моделей соответствует данной задаче, указать смысл входящих переменных, единицы измерения.

а) $z(x)=60x_1+50x_2+12x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_4 \le 9 \\ 2x_1+4x_2+2x_3 \le 12 \\ x_1+4x_2+3x_3 \le 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

б) $z(x)=9x_1+12x_2+10x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=60 \\ 2x_1+4x_3+2x_3=50 \\ 3x_1+4x_2+3x_3=12 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

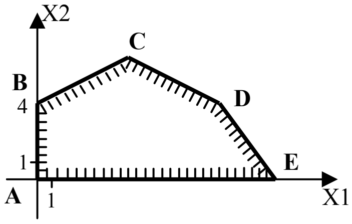
в) $z(x)=9x_1+12x_2+10x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3 \le 60 \\ 2x_1+4x_2+2x_3 \le 50 \\ 3x_1+4x_2+3x_3 \le 12 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

г) $z(x)=5x_1+6x_2+7x_3+4x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3 \ge 60 \\ 2x_1+4x_2+2x_3 \ge 50 \\ 3x_1+4x_2+3x_3 \ge 12 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

3. В какой точке множества допустимых решений достигается максимум целевой функции $z=5x_1-x_2$**;**



а) в точке А
б) в точке В
в) в точке С
г) в точке D
д) в точке Е

4. Определить, какая из задач линейного программирования записана в канонической форме?

а) $z(x)=3x_1+2x_2-x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_2+x_3=5 \\ 2x_1+x_2-2x_3=6 \\ 2x_1-x_2-3x_3=2 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$$

б) $z(x)=3x_1+2x_2-x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_2+x_3 \ge 5 \\ 2x_1+x_2-2x_3 \ge 6 \\ 2x_1-x_2-3x_3 \ge 2 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$$

в) $z(x)=3x_1+2x_2-x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_2+x_3 \le 5 \\ 2x_1+x_2-2x_3 \le 6 \\ 2x_1-x_2-3x_3 \le 2 \\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3} \end{cases}$$

5. Найти опорный план транспортной задачи, заданной следующей таблицей и вычислить соответствующие транспортные издержки.

Поставщики	**Потребители**				**Запасы**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	6	7	3	2	**180**
A_2	5	1	4	3	**90**
A_3	3	2	6	2	**170**
Потребности	**45**	**45**	**100**	**130**	

а) z(для опорного плана) = 980
б) z(для опорного плана) =985
в) z(для опорного плана) =1000
г) z(для опорного плана) =1010

Вариант № 5

1. Какие из приведенных решений являются опорными для следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 14 \\ 4x_1 + 10x_2 + x_3 + 3x_4 = 22 \end{cases}$$

а) $\overline{x_1} = \{2;0;0;8\}$;

б) $\overline{x_2} = \{0;-1;6;7\}$;

в) $\overline{x_3} = \{3;1;0;0\}$;

г) $\overline{x_4} = \{0;0;5;4\}$.

2. Фабрика выпускает три вида каш для завтрака «Манго», «Сливки», «Персик». Используемые для производства данных продуктов ингредиенты в основном одинаковы и, как правило, не являются дефицитными. Основным ограничением, накладываемым на объем выпуска, является наличие фонда рабочего времени в каждом из трех цехов фабрики.

Управляющему производством необходимо разработать план производства на месяц. В приведенной ниже таблице указаны общий фонд рабочего времени и число человеко-часов, требуемое для производства 1 т продукта.

Цех	Необходимый фонд рабочего времени, чел.-ч./т			Общий фонд рабочего времени чел.-ч. в месяц
	«Манго»	«Сливки»	«Персик»	
А. Производство	10	4	7	1000
В. Добавление приправ	3	2	4	360
С. Упаковка	2	5	3	600

Доход от производства 1 т. "Манго" составляет 150 дол., от производства каши "Сливки" - 90 дол., и от производства каши "Персик" - 130 дол. На настоящий момент нет никаких ограничений на возможные объемы продаж.
Какая из математических моделей соответствует данной задачи, указать смысл входящих переменных, единицы измерения.

а) $z(x) = 150x_1 + 90x_2 + 130x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 1000 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 360 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 600 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

б) $z(x) = 150x_1 + 90x_2 + 130x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 1000 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 360 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + \le 600 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

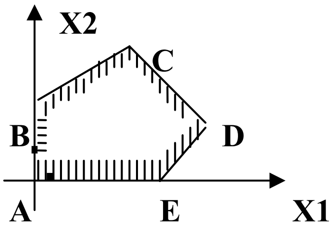
в) $z(x) = 1000x_1 + 360x_2 + 600x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 150 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 90 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 130 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

г) $z(x) = 150x_1 + 90x_2 130x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1000 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 360 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 600 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

3. В какой точке множества допустимых решений достигается минимум целевой функции $z(x) = -2x_1 + 5x_2$ **,**



а) в точке А
б) в точке В
в) в точке С
г) в точке Е
д) в точке Д

4. Определить, какая из задач линейного программирования записана в канонической форме?

а) $z(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 2 \\ x \geq 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

б) $z(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x \geq 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

в) $z(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 2 \\ x \geq 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

г) $z(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ x \geq 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

5. Методом минимального элемента найти опорный план транспортной задачи, заданной следующей таблицей и вычислить соответствующие транспортные издержки.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	4	8	100
A_2	3	4	1	5	250
A_3	7	7	3	3	150
Потребности	120	200	80	100	

а) z (для опорного плана) = 820
б) z (для опорного плана) = 950
в) z (для опорного плана) = 1100
г) z (для опорного плана) = 1050

Литература

1. Аксенова Р.Н. Методические указания по высшей математике (раздел математического программирования) - Владивосток: ДВКИ, 1992.
2. Акулич И.А. Математическое программирование в примерах и задачах: Уч. пособие. М.: Высшая школа, 1993.
3. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. - М.: Радио и связь, 1989.
4. Таха Х. Введение в исследование операций. Т. 1. - М.: Мир, 1985.
5. Шмидт Ю.Д., Хан И.С. Моделирование социально-экономических процессов: Метод. указания - Владивосток: ДВКИ, 1995.
6. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решения. - М.: ЮНИТИ, 1997.
7. Ричард Томас Количественные методы анализа хозяйственной деятельности. М.: «Дело и сервис», 1999.
8. Экономико-математические методы и прикладные модели. Под ред. Федосеева В.В. М.: ЮНИТИ, 1999.
9. Высшая математика для экономистов: Учебник для ВУЗов / Н.Ш. Кремер. М.: ЮНИТИ, 1998.