Федеральное Агентство по образованию Российской Федерации

ГОУ ВПО ЮЖНО-РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА (ЮРГУЭС)

Филькин Г.В.

ЛЕКЦИИ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

для студентов экономических специальностей очной, заочной и дистанционной форм обучения

Шахты 2006

Методы оптимизации, математическое моделирование

Введение

Рассматриваемые ниже методы были созданы в середине двадцатого века и получили значительное применение в разных областях. Они разрабатывались параллельно многими исследователями, в связи с чем возникло много названий для данных методов, например, исследование операций, математическое программирование, экономико-математические методы и так далее. Эти методы объединяет то, что в них при заданных ограниченных ресурсах ищется решение, оптимальное (наилучшее) по какому либо показателю. Этим показателем может быть максимальная прибыль, минимальная себестоимость и так далее.

Решение экстремальных производственных, технологических, экономических и иных задач можно разбить на 3 этапа:

1-й – построение математической модели (перевод производственной задачи на математический язык)

2-й – нахождение оптимального решения получившейся математической задачи некоторым математическим методом или методами.

3-й – анализ получившегося результата математической задачи и внедрение его в практику.

В методах оптимизации обычно выделяют следующие разделы:

1 – линейное программирование (ЛП);
2 - нелинейное программирование (НЛП);
3 – динамическое программирование (ДП);
4 – теория игр (ТИ);
5 – теория массового обслуживания (ТМО);
6 - теория хранения запасов; (ТХЗ)
7 – и т.д.

Задача использования сырья.

Для изготовления двух видов продукции P1 и P2 используется 3 вида сырья S_1, S_2 и S_3. Подробная информация содержатся в таблице. Требуется составить такой план выпуска продукции, при котором величина прибыли будет наибольшей.

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья на 1 единицу продукции	
		P_1	P_2
S_1	20	2	5
S_2	40	8	5
S_3	30	5	6
Прибыль от		50	40

единицы продукции, д.е.			

Построение математической модели обычно распадается на 3 этапа.

1. Вводят неизвестные величины x_1, x_2 … x_n, которыми можно управлять.

2. Выражают через эти неизвестные целевую функцию (функцию цели).

3. Выписывают систему ограничений.

Для нашей задачи управляемыми переменными являются:

x_1 – количество единиц продукции P_1 ;

x_2 – количество единиц продукции P_2 .

Тогда целевая функция, определяющая прибыль, примет вид

$Z=50x_1+40x_2 \quad \to \max$

Выпишем ограничения для сырья. Для сырья S_1 имеем

$2x_1+5x_2\le 20$

Здесь в левой части неравенства стоит потребление первого сырья первой и второй продукцией, в правой части запасы первого сырья. Аналогично получаем ограничения для второго и третьего сырья, в итоге получаем систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Обобщение задачи использования сырья:

Пусть у нас существует S_i видов сырья, где i меняется от 1 до m.

Пусть b_i запасы сырья i-го вида, P_j – виды продукции, j меняется от 1 до n, a_{ij} – количество единиц i-го сырья, идущих на производство единицы j-й продукции, c_j – величина прибыли от реализации одной единицы j-й продукции, x_j – количество единиц j-й продукции

Целевая функция примет вид:

$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \quad \to\max$

$a_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1n}x_n\le b_1$ – ограничения по 1-му сырью

$a_{21}x_1+c_{22}x_2+\ldots+c_{2n}x_n\le b_2$ – ограничения по 2-му сырью

……………………

$a_{m1}x_1+c_{m2}x_2+\ldots+c_{mn}x_n\le b_m$ - ограничения по m-му сырью

$x_j\ge 0$ j=1,2,…,n.

Все ограничения должны выполняться одновременно.

Задача использования сырья и задача составления рациона являются «кирпичиками» при построении сложных моделей.

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Анализируя предыдущие задачи приходим к общей постановке задач линейного программирования.

Общая задача ЛП:

$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \qquad \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \otimes b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \otimes b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \otimes b_m \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots n \end{cases}$$

где $\otimes$ один из следующих трех знаков -

$$\otimes = \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases}$$

Графическое решение задач ЛП

В тех случаях , когда в задачах ЛП только 2 переменные, их можно решить графическим способом.

Замечание. Иногда графическим способом можно решать задачи ЛП и в тех случаях, когда число переменных больше 2.

Основные идеи графического метода решения задач рассмотрим на примере задачи использования сырья (1).

$Z=50x_1+40x_2 \qquad \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Решение задачи графическим способом распадается на 2 этапа. На первом этапе строим область допустимых решений, удовлетворяющую системе всех ограничений.

На втором этапе среди всех допустимых решений выбирается оптимальное решение. Для этого используют линии уровня или градиент целевой функции.

1.Рассмотрим декартову систему координат на плоскости x_1Ox_2. Допустимым решением задачи оптимизации называется упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющий всем ее ограничениям. Такой упорядоченный набор можно считать точкой в пространстве R^n. Множество всех допустимых решений называется областью допустимых решений. В задаче заданы ограничения $x_1, x_2 \geq 0$. Одновременно этим двум условиям удовлетворяет только первая четверть. Следовательно, область допустимых решений целиком лежит в первой четверти. Рассмотрим первое ограничение системы (1). От неравенства перейдем к уравнению $2x_1 + 5x_2 = 20$. Это уравнение прямой. Построим эту прямую. Для этого достаточно найти две точки. Если положить x_1=0, получим x_2=4, если положить x_2=0, то $x_1 = 10$.

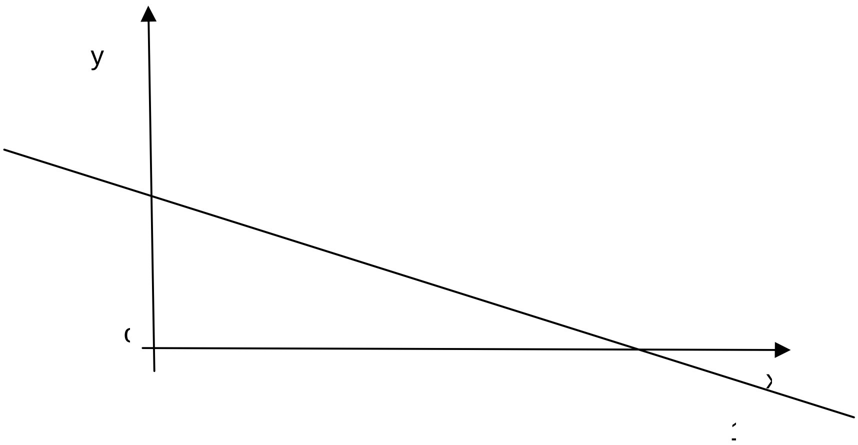
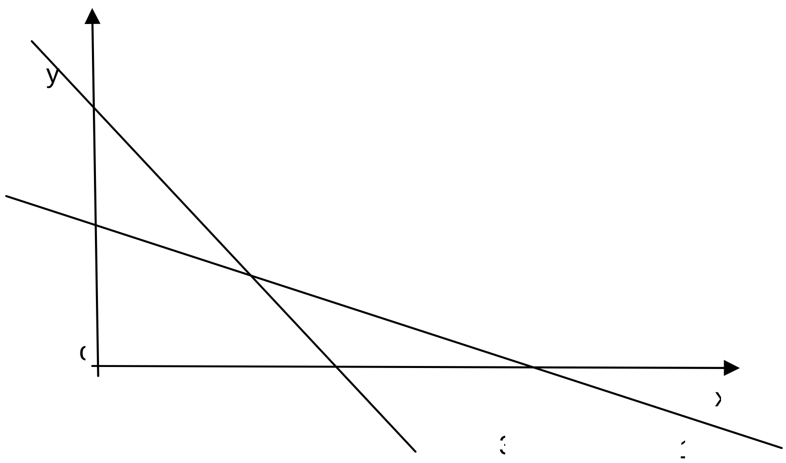


Рисунок 1.

Эта прямая разбила плоскость на две полуплоскости, в одной из них выполняется первое неравенство, там левая часть меньше правой, в другой полуплоскости левая часть больше правой. Для выбора нужной полуплоскости возьмем любую точку, не лежащую на прямой, и подставим ее координаты в первое неравенство. Возьмем, например, точку (0; 0), получим 0<20. Следовательно нам нужна полуплоскость, лежащая ниже прямой. Тогда получим, что область допустимых решений находится в треугольнике, расположенном между этой прямой и осями координат (рисунок 1).

Затем берем второе неравенство из (1), превращаем его в уравнение и строим соответствующую прямую на том же чертеже – получим рисунок 2.



Получим, что область допустимых решений лежит в четырехугольнике, образованном первой и второй прямыми и осями координат. Затем берем третье ограничение и поступаем с ним аналогично. В итоге получим пятиугольник, образованный тремя прямыми и осями координат. Это и будет область допустимых решений.

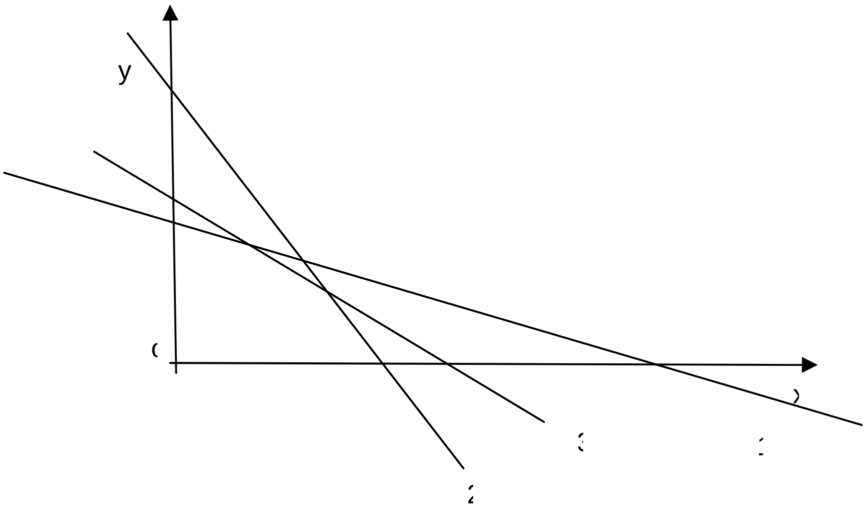


Рисунок 3- область допустимых решений.

Этот пятиугольник содержит бесконечное число точек – допустимых решений, из них нужно выбрать одно – оптимальное решение. Для его нахождения построим линии уровня целевой функции. Линией уровня функции двух переменных называется множество всех точек плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение, обычно это какая-нибудь линия, Стараются выбирать такие значения функции, при которых эти линии удобно строить. В данной задаче удобно взять z=200, так как 200 одновременно делится на 40 и 50, что пригодится при построении. Имеем 200=$50x_1 + 40x_2$. Это уравнение прямой, построим ее на том же чертеже – получим рисунок 4.

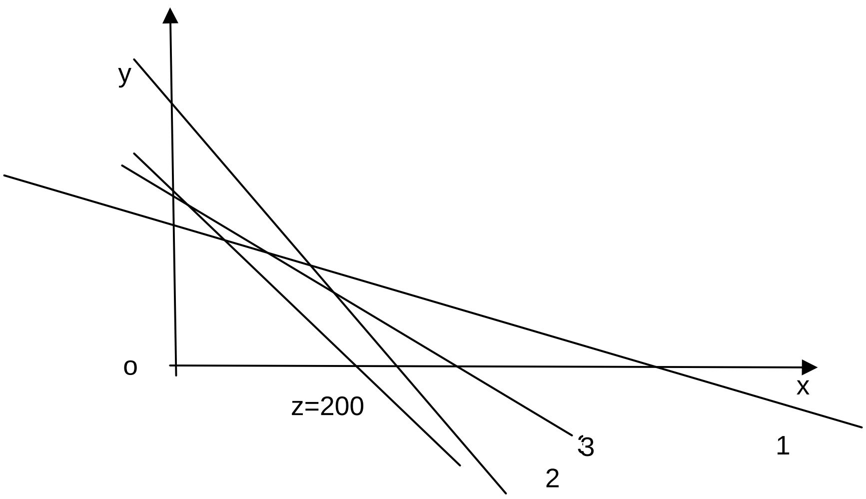


Рисунок 4.

Одной линии уровня для определения того, в каком направлении нужно двигаться для нахождения оптимального решения недостаточно, нужна еще хотя бы одна. Положим теперь z=400, тогда имеем
$400 = 50x_1 + 40x_2$. Это уравнение прямой, построим ее на том же чертеже.

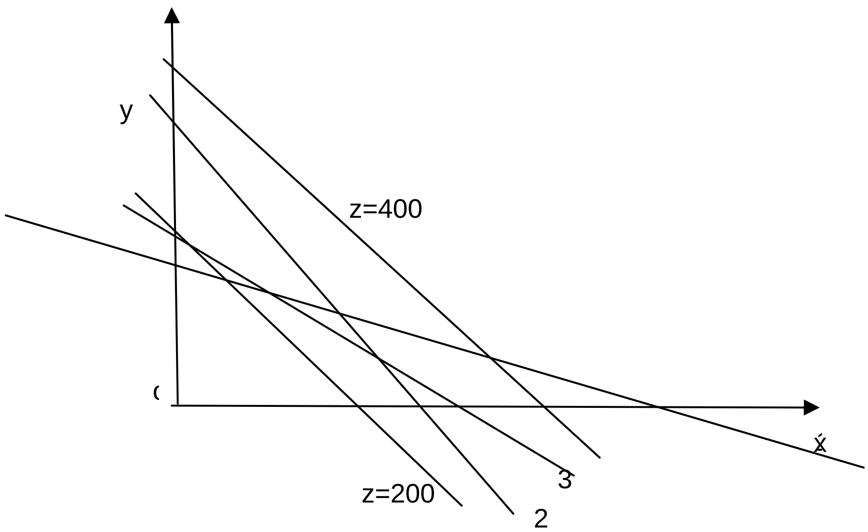


Рисунок 5.

Из чертежа 5 видно, что для того, чтобы достигнуть максимума целевой функции необходимо двигаться от линии уровня z=200 к линии уровня z=400, не выходя из области допустимых решений. Наиболее удаленной от линии уровня z=200 и наиболее близкой к линии уровня z=400 является угловая точка области допустимых решений, в которой пересекаются вторая и третья прямые. Эта точка и является оптимальным решением. Найдем координаты этой точки. Для этого решим систему уравнений, в которую входят уравнения второй и третьей прямых, имеем

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим оптимальное решение

$$x_1 = \frac{90}{23}, x_2 = \frac{40}{23}$$

Подставляя эти значения в целевую функцию, найдем оптимальное значение целевой функции

$$z_{\max} = 50 * \frac{90}{23} + 40 * \frac{40}{23} = \frac{6100}{23} \approx 265.2$$

Особые случай при решении графических задач ЛП.

При решении задач ЛП могут встречаться особые случаи. Наиболее важными являются следующие.

1) Область допустимых решений пуста, т.е. система ограничений противоречива.

2) Целевая функция неограничена на ОДР.

3) Множество оптимальных решений бесконечно.

Пример I случая.

$z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 10 \begin{matrix} x_1 = 0 & x_2 = 10 \\ x_2 = 0 & x_1 = 5 \end{matrix} \\ x_1 + x_2 \leq 2 \begin{matrix} x_1 = 0 & x_2 = 2 \\ x_2 = 0 & x_1 = 2 \end{matrix} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решений нет

Пример II случая.

$z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \begin{matrix} x_1 = 0 & x_2 = 2 \\ x_2 = 0 & x_1 = 4 \end{matrix} \\ x_1 + x_2 \leq 2 \begin{matrix} x_1 = 0 & x_2 = 2 \\ x_2 = 0 & x_1 = 2 \end{matrix} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Если на практике мы встретимся с случаями 1 или 2 то это означает, что у нас неверно выписана система ограничений, в первом случае лишнее ограничение, во 2-м случае наоборот не достаёт каких-то ограничений.

Пример II случая.

$z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$z = x_1 + x_2$

$x_1 + x_2 = 5$

$x_1 + x_2 = 7$

$x_1 + x_2 = 10$

Множество оптимальных решений - весь отрезок AB.

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ, ЛЕЖАЩИЕ В ОСНОВЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Из анализа решений графических задач видно, что функция Z линейная поэтому она не имеет локальных минимумов и максимумов, т.к. частные производные не обращаются в ноль ни в одной точке.

Все линии уровня целевой функции являются прямыми параллельными друг другу, следовательно, функция растёт (убывает) быстрее всего в направлениях перпендикулярных этим уровням.

Легко догадаться, что оптимальные значения всегда будут находиться на границе области допустимых решений. Граница тоже состоит из бесконечного множества точек, но среди оптимальных точек всегда есть хотя бы одна угловая (опорная). Поэтому можно рассматривать только угловые точки при нахождении оптимального плана, следовательно, оптимальное решение плана можно найти, просто перебирая угловые точки. Каждая угловая точка задаётся системой линейных уравнений следовательно можно просто перебирать решения системы линейных уравнений. Перебирать точки не как попало, а следуя некоторому алгоритму. Все эти идей были заложены Хичкоком при создании универсального метода решения задач ЛП (симплекс-метод).

ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Прежде чем решать симплекс-методом их нужно привести к каноническому виду. Для приведения задач к каноническому виду требуется проделать:

1) Привести все неравенства в уравнения введением дополнительных переменных.

2) Все свободные члены должны быть >0. (В случае необходимости умножить на (-1))

3) Все переменные должны быть >0.

4) В матрице системы уравнений должна содержаться единственная подматрица порядка m (m - количество уравнений в системе ограничений).

5) Задача решается на максимум.

Покажем на примере, как приводят задачу к каноническому виду.

$$z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$$

$$w = -z = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 - 4x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_3 \ge -9 \qquad -x_1 ..... - x_3 \le 9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 - 4x_2 = 4 \\ -x_1 ..... - x_3 = 9 \\ xj \ge 0 \qquad j = 1, \bar{i} \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что в матрице системы ограничений столбцы единичной подматрицы могут быть переставлены местами .

В процессе приведения задачи к каноническому виду мы вместо z ввели w=-z, там, где функция z достигает минимума функция w достигает максимума. Также были введены дополнительные переменные x_4, x_5, x_6. кроме того, иногда при приведении задачи к каноническому виду приходится вводить искусственные переменные.

Основные определения и теоремы.

Общая задача ЛП имеет несколько форм записи.

1) Развёрнутая
2) Векторная

3) Матричная
4) С помощью знаков суммирования.

$z = \bar{c} * \bar{x}$ - векторная

$$A_1X_1 + A_2X_2 + ... + A_nX_n = A_0 \qquad (Д)$$

$$\bar{c} = (c_1, c_2....c_n) \quad \bar{x} = (x_1, x_2....x_n) \quad x_j > 0$$

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \bar{A}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Определение 1. Планом или допустимым решением задачи ЛП называется набор переменных (x) удовлетворяющий условию (Д)

Определение 2. План x называется опорным, если векторы A_J входящие в разложение (Д) с положительными коэффициентами являются линейно независимыми.

Определение 3. Оптимальным решением задачи ЛП называется набор переменных, в котором достигается max или min.

Замечание: В спорный план может входить не более чем m векторов.

Определение 5. Множество называется выпуклым, если вместе с любыми 2мя точками оно содержит отрезок их соединяющий.

В задачах ЛП область допустимых решений всегда выпукла.

Определение 6. Непустое множество решений канонической задачи называется многогранником решений, а всякая опорная точка является угловой, т.е. вершиной многогранника.

Справедлива теорема: Если каноническая задача ЛП имеет оптимальное решение, то max значение целевой функции принимает в одной из вершин. Если оптимальное решение принимается более чем в одной точке, то множество оптимальных решений бесконечно и состоит из точек являющихся выпуклой линейной комбинацией нескольких вершин.

Теорема: Если система векторов в разложении (1) линейно независима и такова: $X_1A_1+X_2A_2+....+X_iA_i=A_0$ $\quad X_i>0$, то точка с координатами (X_1, X_2.....X_i, 0, 0,....,0) является опорным планом многогранника решений.

Выводы:

1. Непустое множество решений канонической задачи ЛП образует выпуклый многогранник;
2. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план;
3. В одной из вершин значение целевой функции является оптимальным (максимальным, если функция ограничена сверху на множестве допустимых решений);
4. Если максимальное значение функция Z принимает более чем одной точке, то она принимает это значение на выпуклой линейной комбинации данных точек.

Симплексный метод.

Мы рассмотрим две модификации симплексного метода сначала изучим простейший случай – случай когда в матрице ограничений есть единичная подматрица порядка m, где m – число ограничений или, что то же самое в системе векторов A_1, A_2, ….. A_n в разложении (Д) есть m – единичных и различных, очевидно, что эти вектора являются линейно независимыми и образуют базис m-мерном пространстве.

Для простоты будем рассматривать симплексный метод и его основные идеи на конкретном примере. Основную работу будем вести в специальной таблице (симплексная таблица).

Задача 1. Для изготовления различных изделий A,B,C предприятие использует 3 вида сырья. Информация о производстве и запасах сырья приведена в таблице. Требуется составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведённой продукции будет наибольшей.

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие			Запасы сырья
	A	B	C	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Цена 1 изделия, д.е.	9	10	16	

Составим математическую модель задачи.

1. Введем управляемые переменные.

x_1 – количество единиц изделия A

x_2 – количество единиц изделия B

x_3 – количество единиц изделия C

2. Составим функцию цели $Z=9x_1+10x_2+16x_3 \to \max$

Введем систему ограничений

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \\ x_{1,2,3,} \ge 0 \end{cases}$$

Приведём задачу к каноническому виду введением дополнительных переменных:

$z=9x_1+10x_2+16x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,6}$$

Введённые x_4, x_5, x_6 называются дополнительными переменными и в данной задаче показывают величину неиспользуемого соответствующего ресурса: x_4 – для первого, x_5 – для второго, x_6 – для третьего.

Решение задачи симплексным методом проводим в симплексных таблицах. Они заполняется по следующему правилу: Число столбцов таблицы на три больше, чем число всех переменных задачи, в нашем случае 6+3=9. В первом столбце стоят векторы, входящие в базис (единичные вектора, в нашем это вектора, являющиеся коэффициентами при x_4, x_5, x_6). Во втором стодбце стоят коэффициенты в целевой функции для соответствующих переменных, в нашем случае при переменных x_4, x_5, x_6 . В третьем столбце располагается столбец свободных членов, затем в последующих 6 столбцах располагаются коэффициенты при переменных, входящих в левую часть ограничений и в целевую функцию. В последней строке находятся числа, вычисляемые по формуле Z_j-C_j =$C_б$*A_j-C_j , здесь $C_б$*A_j - скалярное произведение векторов, стоящих во втором столбце и столбце j.

Базис	Сб	0	9	10	16	0	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	360	18	15	12	1	0	0
← A_5	0	192	6	4	8	0	1	0
A_6	0	180	5	3	3	0	0	1
Z_j-C_j		0	-9	-10	-16 ↑	0	0	0

Таблица 1. Первоначальное опорное решение.

Получили первое опорное решение задачи, оно извлекается из таблицы следующим образом: все x_j у которых вектор с коэффициентом Сб не входит в базис равны 0, а те, у которых вектор входит в базис равны соответствующему значению из столбца A_0.

A_1, A_2, A_3– не входят в базис , следовательно соответствующие x_1,x_2,x_3 равны 0, x_3 ,x_4 ,x равны соответственно 360,192,180 . Следовательно первое опорное решение - (0, 0, 0, 360, 192, 180), Z=0 (первая, вторая, третья продукция не производится суммарная стоимость равна 0).

Это опорное решение не является оптимальным т.к. не выполняется критерий оптимальности. Критерий оптимальности в симплексном методе является следующим: в строке Z_j - C_j не должно быть отрицательных членов, а они у нас есть, следовательно, решение не оптимальное. Выбираем то отрицательное число, модуль которого наибольший, соответствующий вектор войдёт в новый базис, это будет вектор A_3. Выясним, какой при этом вектор выйдет из базиса. Для этого надо рассмотреть так называемые симплексные отношения. Они рассматриваются только для тех элементов вектора, входящего в базис, которые являются положительными. Симплексные отношения равны отношению элемента стоящего в столбце A_0 к соответствующему элементу вводимого в базис вектора Имеем

$$\frac{360}{12} = 30 - A$$

$$\frac{192}{8} = 24 - B$$

$$\frac{180}{3} = 60 - C$$

Выбирают тот элемент, симплексное отношение которого минимально. У нас это 8, так как у него симплексное отношение равно 24. Этот элемент называют разрешающим.

Все элементы симплексной таблицы пересчитываются и изменяются по следующим правилам:

1) сначала производим пересчёт той строки, где стоит разрешающий элемент (8). Это строка называется разрешающей. Все элементы этой строки нужно разделить на разрешающий элемент;

2) Выписываем столбцы соответствующие базисным векторам, они состоят из нулей и одной единички в соответствующей строке;

3) Все остальные элементы таблицы пересчитываем с помощью правила прямоугольника:

$$a_{ij} = \frac{a_{ij} * a_{i_0 j_0} - a_{i_0 j} * a_{ij_0}}{a_{i_0 j_0}},$$

где i_0 – номер разрешающей строки, j_0 – номер разрешающего столбца, i,j определяют позицию пересчитываемого элемента.

Справа стоят элементы старой таблицы слева новой. После пересчета получаем новую таблицу

Базис	$C_б$	A_0	9	10	16	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
← A_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
A_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
A_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
Z_j-C_j		384	3	-2 ↑	0	0	2	0

Таблица 2. Второе опорное решение.

Получили второе опорное решение X_2 =(0,24,0,72,0,108), z=384. Следовательно, первая продукция не производится, вторая выпускается в объеме 24 единицы, третья не производится, осталось 72 единицы первого сырья, второе сырье закончилось, третьего осталось 108 единиц. План не оптимальный, так как в строке Z_j - C_j есть отрицательные числа. Отрицательное число стоит в столбце, соответствующем вектору A_2, следовательно он войдет в базис. Найдем соответствующие симплексные отношения, имеем

72/9=8, 24/(1/2)=48, 108/(3/2)=72, следовательно разрешающим элементом будет 9, и из базиса выйдет вектор A_4.Пересчитываем таблицу 2 по вышеуказанным правилам и получаем следующую таблицу.

Базис	$C_б$	A_0	9	10	16	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	10	8	1	1	0	1/0	-1/6	0
A_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
A_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
Z_j-C_j		400	5	0	0	2/9	5/3	0

Таблица 3. Третье опорное решение.

Получили третье опорное решение X_3 =(0,8,20,0,0,96), z=400. Следовательно, первая продукция не производится, вторая выпускается в объеме 8 единиц, третья в объеме 20 единиц, первого сырья не осталось, второе сырье также закончилось, третьего осталось 96 единиц. План оптимальный, так как в строке Z_j - C_j отрицательных чисел нет.

ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛП СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ (ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ НЕОГРАНИЧЕНА НА ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ).

При решении задач ЛП симплекс-методом также возникают особые случаи, рассмотрим следующий пример

$$z = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24 \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Данная задача является канонической, так как выполняются все необходимые условия, выпишем соответствующую симплексную таблицу.

Базис	Сб	A_0	2	-6	0	0	5	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	0	20	-2	1	1	0	1	0
← A_4	0	24	-1	-2	0	1	3	0
A_6	0	18	3	-1	0	0	-12	1
Z_j-C_j		0	-2	6	0	0	-5 ↑	0

Таблица 4. Первое опорное решение.

Это опорное решение не является оптимальным, так как в строке Z_j- C_j есть отрицательные числа. После пересчета получим следующую таблицу. Введем в базис вектор A_5, сравнивая симплексные отношения, видим, что из базиса надо удалить вектор A_4.

A3	0	12	-5/3	5/3	1	-1/3	0	0
A5	5	8	-1/3	-2/3	0	1/3	1	0
A6	0	114	-1	-9	0	1	0	1
Z_j-C_j		40	-11/3 ↑	8/3	0	5/3	0	0

Таблица 5. Второе опорное решение.

В столбце, соответствующем вектору A_1 в строке Z_j- C_j находится отрицательное число, поэтому этот вектор надо ввести в базис, но это невозможно сделать, так как в данном столбце нет положительных чисел, следовательно, невозможно рассматривать симплексные отношения, и мы не можем из старого базиса вывести какой-либо вектор. Получили противоречие. В данном примере наблюдается особый случай - целевая функция неограничена на области допустимых решений, следовательно, не существует оптимального плана. Если с таким случаем сталкиваются на практике, то в системе ограничений не хватает какого то важного ограничения (или ограничений).

Модифицированный симплекс метод (М-метод).

Мы рассмотрели наиболее простой случай симплекс-метода, а именно тот случай когда в канонической задаче сразу существуют единичные вектора, образующие единичную подматрицу порядка m. Обычно это легко достигается в тех задачах, у которых исходные ограничения были со знаком ≤, а все свободные члены неотрицательны. Например, такая ситуация была в задаче использования сырья.

Однако часто такой единичной подматрицы не существует и для создания её приходится вводить искусственные переменные и применять метод искусственного базиса. Обычно такие ситуации возникают в тех случаях, когда в системе ограничений исходной задачи правые части неотрицательны, а в системе ограничений есть знаки ≥ или =. Например, в задаче составления рациона.

Рассмотрим применение метода искусственного базиса на примере.

Пример: Найти минимум функции $Z=-2X_1+3X_2-6X_3-X_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \ge 10 \\ x_{1,2,3,4} \ge 0 \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду, имеем

$$W = -Z = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10 \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Переменная x_7 была введена только для того, чтобы получилась единичная подматрица, она называется искусственной и в процессе работы обязательно должна быть выведена из базиса. Поэтому необходимо ввести её в целевую функцию так, чтобы она вышла из базиса в автоматическом режиме. Для этого умножаем эту переменную на очень большое (превосходящее на несколько порядков все остальные коэффициенты целевой функции) число М и помещаем это произведение в целевую функцию со знаком -. Тогда целевая функция может достигнуть максимума только в том случае, если эта переменная будет выведена из базиса и при этом ,естественно, станет равной нулю.

Составим симплексную таблицу, в которой будет на одну строку больше чем в простейшем варианте симплекс-метода.

Базис	Сб	A_0	2	-3	6	1	0	0	-M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_4	1	24	2	1	-2	1	0	0	0
A_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
$\leftarrow A_7$	-M	10	1	-1	2	0	0	-1	1
Z_j-C_j		24	0	4	-8	0	0	0	0
		-10	-1	1	-2 ↑	0	0	1	0

Таблица 6. Первое опорное решение.

Последняя строка будет Z_j-C_j двойной, при этом числа будут помещаться в верхнюю подстроку, а коэффициенты при М в нижнюю подстроку. Наприме, для столбца A_0 имеем 1*24+0*22+(-M)*10=24-10M, для столбца A_1

1*2+0*1+(-M)*1-2=0-M и так далее. План не является оптимальным, так как среди коэффициентов при М в строке Z_j-C_j есть отрицательные. Наибольшее нарушение находится в столбце вектора A_3-следовательно, в новый базис введем этот вектор. Рассмотрев симплексные отношения, видим, что из базиса исключается вектор A_7. После пересчета получим таблицу 7. Заметим, что столбец, соответствующий вектору A_7 из таблицы можно исключить, так как он соответствует искусственной переменной и в базис уже не вернется.

A_4	1	35	5/2	2	0	1	0	0
A_5	0	1	-1/2	-2	0	0	1	1
A_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	0	0
Z_j-C_j		68	2	8	0	0	2	0

Таблица 7. Второе опорное решение.

План оптимальный, так как в строке отрицательных чисел нет.

$X_{опт}(0,0,11/2,35,0,1)$, $W_{опт}=68$. Так как при приведении задачи к каноническому виду у целевой функции менялся знак, то имеем),), $Z_{опт}=-W_{опт}=-68$.

Проверка: подставим в целевую функцию полученные оптимальные значения переменных, получим.

$Z=-2*0+3*0+6*11/2-3*5+0*0+0*1=-68$

ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛП СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ (ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ПУСТАЯ).

Рассмотрим этот особый случай на примере.

Пример 4.

$Z=2X_1-X_2-X_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 \geq 18 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 36 \\ x_{1,2,3} \geq 0 \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду

$$F = -Z = -2x_1 + x_2 + x_4 + Mx_7 - Mx_8 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 + x_7 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 + x_8 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad , j = 1{,}8$$

Здесь x_7, x_8 – искусственные переменные.

Базис	Сб	A_0	-2	1	0	1	0	0	-M	-M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_3	0	10	1	-2	1	0	0	0	0	0
A_7	-M	18	-2	-1	0	-2	-1	0	1	0

$\leftarrow A_8$	-M	36	3	2	0	1	0	-1	0	1
Z_j-C_j		0	2	-1	0	0	0	0	0	0
		-54	-1	-1↑	0	1	1	1	0	0
A_3	0	46	4	0	1	1	0	-1	0	
A_7	-M	36	-1/2	0	0	-3/2	-1	-1/2	1	
A_2	1	18	3/2	1	0	S	0	-1/2	0	
Z_j-C_j		18	7/2	0	0	72/2	0	-1/2	0	
		-36	1/2	0	0	3/2	1	-1/2	0	

Таблицы 8 и 9. Первое и второе опорные решения.

Из базиса надо исключить искусственную переменную x_7 и соответствующий вектор A_7, но мы не можем этого сделать, т.к. все элементы стоящие в нижней строке (кроме элемента стоящего в столбце A_6) неотрицательны, а вектор A_6 мы не можем включить в базис, так как среди его компонент нет положительных. Такая ситуация говорит о том, что исходная задача не имеет опорного плана (а значит оптимального). Другими словами система ограничений первоначальной задачи несовместима, то есть существуют ограничения, противоречащие друг другу. Если в практической задаче встречается такая ситуация, то это означает, что систему ограничений нужно пересмотреть.

Двойственные задачи линейного программирования.

В каждой задаче ЛП можно определённым образом сопоставить некоторую другую задачу ЛП называемую двойственной или сопряжённой по отношению к исходной.

Рассмотрим например следующую задачу ЛП.

$Z=C_1x_1+C_2x_2+\ldots+C_nx_n \to \max$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \quad (1)$$

$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,n}$

Двойственной к ней будет являться следующая:

$W= b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m \to \min$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases} \quad (2)$$

$y_i \ge 0 \quad i = \overline{1,m}$

Нетрудно видеть, что задача (1) – это задача использования ресурсов – сколько и какой продукции x_i необходимо произвести, чтобы при заданных ценах C_j и размерах имеющихся ресурсов b_i максимизировать выпуск продукции, в денежном выражении.

Сформулируем экономический смысл двойственной задачи с теми же (исходными данными). Допустим, что организация решила закупить все ресурсы которыми располагает хозяйство. Необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы исходя из следующих условий:

1) Общую стоимость ресурсов покупающая организация стремиться минимизировать.

2) Однако за каждый вид ресурсов хозяйство требует уплатить не менее той суммы которую она может выручить при его переработке в готовую продукцию. В противном случае хозяйству выгоднее не продавать ресурсы, а организовать собственное производство.

Обозначим через y_i искомую цену ресурсов, тогда первое требование приведёт к целевой функции W задачи (2), а второе требование приведёт к системе ограничений задачи (2).

Задачи (1) и (2) являются двойственными по отношению друг к другу. Мы видим, что:

1) В одной задаче целевая функция стремится к максимуму, а другая к минимуму.

2) Матрица ограничений одной задачи получается из матрицы ограничений другой задачи транспонированием (строка становится столбцом и наоборот).

3) Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в исходной задаче (справедливо и обратное).

4) Коэффициентами целевой функции в двойственной задаче являются свободные члены исходной задачи и наоборот.

5) Неравенство в системах ограничений прямой и двойственной задач имеют противоположный смысл.

Очевидно, что понятие двойственности взаимно, т.е. обе эти задачи взаимно двойственные и образуют пару двойственных задач. Двойственные пары задач подразделяют на:

- симметричные,
- несимметричные.

Задачи (1) и (2) образуют симметричную пару. В несимметричных двойственных задачах нет такой чёткой системы, как было описано ранее. Например: система ограничений исходной задачи может описываться в виде равенств, причём во (2) задаче переменные могут быть и отрицательными.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением симметричных двойственных задач. Теория двойственности работает в экономике весьма плодотворно, в частности теория двойственности применяется для определения цен природных ресурсов, таких как вода, земля и т.д.

Справедлива теорема (двойственности).

Если одна из пар двойственных задач обладает оптимальным планом, то и другая задача имеет оптимальный план (решение) причём значение их целевых функций в точках оптимума равны, т.е. $Z_{min}=W_{max}$ или $Z_{max}=W_{min}$.

Если целевая функция одной из двойственных задач не ограничена на множестве допустимых решений, то у другой задачи множество допустимых решений пусто.

Рассмотрим пару двойственных задач

Пример.

$Z=2X_1+7X_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -2X_1+3X_2 \le 14 \\ X_1+X_2 \le 8 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

Двойственная:

$W = 14y_1 + 24y_2 + 12y_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -2y_1+y_2 \ge 2 \\ 3y_1+y_2 \ge 7 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Нахождение решений двойственных задач симплекс-методом.

При решении какой либо задачи ЛП симплекс методом в симплексной таблице находится информация, позволяющая сразу получить решение задачи двойственной первоначальной.

Для нахождения решения двойственной задачи необходимо сравнить первоначальную и последнюю симплексные таблицы (в предположении, что мы получили оптимальное решение). Оптимальное решение двойственной задачи находится в строке Z_J-C_J, в тех клетках, где первоначально находились единичные (базисные вектора).

Компоненты y_i оптимального решения находятся как $yi=Z_j-C_j+C_j$. Покажем решение двойственной задачи.

Пример:

Решить прямую и двойственную задачи симплекс методом.

$Z=X_1+2X_1-X_3 - \max$

$$\begin{cases} -X_1+4X_2-2X_3 \le 12 \\ X_1+X_2+2X_3 \le 17 \\ 2X_1-X_2+2X_3 = 4 \end{cases}$$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

Базис	Сб	A_0	1	2	-1	0	0	-11
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	12	-1	4	-2	1	0	0
A_5	0	17	1	1	2	0	1	0
A_6	-14	4	2	-1	2	0	0	1

Z_j-C_j		0	-1	-2	1	0	0	0
		-4	-2	1	-2	0	0	0
A_4	0	14	0	7/2	-1	1	0	½
A_5	0	15	0	3/2	1	0	1	-1/2
A_1	1	2	1	-1/2	1	0	0	½
Z_J-C_J		2	0	-5/2	2	0	0	½
A_2	2	4	0	1	-2/7	2/7	0	1/7
A_5	0	9	0	0	13/7	-3/7	1	-5/7
A_1	1	4	1	0	6/7	1/7	0	4/7
Z_j-C_j		12	0	9/7	5/7	0	6/7	

Выпишем решения.

Прямая: X(4,4,0,0,9,0) Z_{max}=12

Двойственная:

Y^*(5/7,0,6/7) W=Z_{max}=12

Пример.