МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Кафедра Информационных Технологий
и математических методов в экономике**

Лабораторный практикум
по курсу

Элементы экономико-математического моделирования

Для студентов 2-4 курсов дневного и вечернего отделений
экономического факультета

**Составители: В.В. Давнис
И.Н.Щепина
С.И. Мокшина
О.С. Воищева
С.С.Щекунских**

Воронеж 2001

Введение.

Круг вопросов, рассматриваемых в предлагаемом лабораторном практикуме, включает в себя раскрытие понятий и методов математического моделирования социально – экономических систем и процессов. Рассматриваются балансовые модели в статической постановке, однофакторные и многофакторные модели регрессии, модель частичного рыночного равновесия – паутинообразная модель. Кроме того, в лабораторный практикум включены такие прикладные модели, как модель формирования производственной функции, модель фирмы и модель потребления.

Подробно, на примере конкретного задания по каждой теме, описана последовательность проведения расчетов по формированию экономико – математической модели. Для самостоятельной работы студентов предусмотрены лабораторные задания.

Цель лабораторного практикума – закрепление знаний по теории и практическому использованию математических моделей в сложных экономических расчетах и выработка навыков проведения расчетов с использованием электронных таблиц EXCEL в среде WINDOWS.

1. Основные операции матричной алгебры в EXCEL

Приведенные ниже упражнения предлагаются студентам для самостоятельного выполнения с целью повторения и закрепления навыков работы с табличным процессором EXCEL при выполнении основных операций матрично-векторной алгебры.

1. Для матрицы $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ найти ее определитель $|A|$, обратную матрицу A^{-1}, произведение $A*A^{-1}$ и $A^{-1}*A$.

2. Для матриц C=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ и D=$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ найти $|C|$, $|D|$, $|CD|$ $|DC|$ и проверить справедливость равенства: $(CD)^{-1} = C^{-1} * D^{-1} = D^{-1} * C^{-1} = (DC)^{-1}$.

3. Вычислить D=ABC-3E, где A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, C=$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

4. Вычислить D=$(AB)' - C^2$, где A= $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, C=$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

5. Вычислить матрицу B=$11 * (A^{-1})' + A'$, где A=$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Найти $X = |A| * A^{-1} + B * C + E$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей B=$\begin{bmatrix} 10 & 15 \end{bmatrix}$.

Каковы общие затраты предприятия на производство 100 ед.продукции 1-го вида, 200 ед. продукции 2-го вида и 150 ед. продукции 3-го вида?

8 .Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трех видов: сапог, кроссовок и ботинок; при этом используется сырье трех типов: S1, S2, S3. Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви и объем расхода сырья на 1 день заданы таблицей:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одну пару, усл.ед.			Расход сырья на 1 день, усл.ед.
	Сапоги	Кроссовки	Ботинки	
S1	5	3	4	2700
S2	2	1	1	800
S3	3	2	2	1600

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида обуви, решив систему уравнений методом обратной матрицы.

2. Экономико-математическая модель материального баланса производства и распределения продукции

2.1. Принципиальная схема межотраслевого баланса и основные балансовые соотношения.

Предположим, что экономическая система состоит из n взаимосвязанных отраслей (предприятий, экономических объектов). Каждая отрасль выступает в роли поставщика производимой ею продукции и в роли потребителя продукции других отраслей системы.

Введем обозначения:

i - порядковый номер отрасли, производящей продукцию, ($i = 1,2,\ldots,n$);

j - порядковый номер отрасли, потребляющей продукцию, ($j = 1,2,\ldots,n$);

X_i - валовой продукт i-ой отрасли

Y_i - конечный продукт j-ой отрасли

x_{ij} - затраты продукции i-ой отрасли на производство продукции j-ой отрасли;

V_j- условно-чистая продукция j-ой отрасли;

Вся информация об экономической системе представлена в таблице:

Отрасли	1	2	…	j	…	n	Итого	Кон. прод.	Вал. прод.
1	x_{11}	x_{12}		x_{1j}		x_{1n}	$\sum_j x_{1j}$	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}		x_{2j}		x_{2n}	$\sum_j x_{2j}$	Y_2	X_2
…									
i	x_{i1}	x_{i2}		x_{ij}		x_{in}	$\sum_j x_{ij}$	Y_j	X_j
…									
n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nj}		x_{nn}	$\sum_j x_{nj}$	Y_n	X_n
Итого	$\sum_i x_{i1}$	$\sum_i x_{i2}$		$\sum_i x_{ij}$		$\sum_i x_{in}$	$\sum_i \sum_j x_{ij}$	$\sum_i Y_i$	$\sum_i X_i$
Услов.-чистая прод.	V_1	V_2		V_j		V_n	$\sum_j V_j$		
Валовой прод.	X_1	X_2		X_j		X_j	$\sum_j X_j$		

Основные балансовые соотношения:

1. $X_i = Y_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,n$ (1)

- баланс между производством и потреблением.

2. $X_j = V_j + \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad j = 1,2,\ldots,n$ (2)

- стоимостная структура продукции j-ой отрасли.

3. $\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} V_j$ (3)

- равенство суммарного конечного продукта и суммарной условно-чистой продукции.

4. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$

- промежуточный продукт экономической системы.

2.2. Построение математической модели

Введем в рассмотрение **коэффициенты прямых затрат** или **технологические коэффициенты**, рассчитанные по формуле:

$$a_{ij} = x_{ij} / X_j, \qquad i, j = 1,2,\dots,n \qquad (4)$$

Коэффициенты a_{ij} показывают, сколько единиц продукции i-ой отрасли непосредственно затрачивается в качестве средств производства на выпуск единицы продукции j-ой отрасли.

Использование коэффициентов прямых затрат позволяет представить запись баланса (1) в виде:

$$X_i = Y_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j, \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad (5)$$

Если ввести следующие обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix},$$

то систему (5) можно записать в матрично-векторной форме:

$$AX + Y = X. \qquad (6)$$

Система уравнений межотраслевого баланса является отражением реальных экономических процессов, в которых содержательный смысл могут иметь лишь неотрицательные значения валовых выпусков. Таким образом, вектор валовой продукции состоит из неотрицательных компонентов и называется неотрицательным: $X \geq 0$. Встает вопрос, при каких условиях экономическая система способна обеспечить положительный конечный выпуск по всем отраслям. Ответ на этот вопрос связан с понятием продуктивности матрицы коэффициентов прямых материальных затрат. Достаточным признаком продуктивности матрицы A является ограничение на величину ее нормы, т.е. на величину наибольшей из сумм элементов матрицы A в каждом столбце. Если норма матрицы А строго меньше единицы, то эта матрица продуктивна.

Условие о том, что a_{ij} постоянны в некотором промежутке времени, охватывающем как отчетный, так и планируемый периоды, позволяет решать задачу, заключающуюся в том, чтобы на базе данных об исполнении баланса за предшествующий (отчетный) период определить данные на планируемый период.

Эта задача может быть поставлена в трех вариантах.

Первый вариант: по заданным валовым уровням производства всех отраслей (задан вектор X) определить объемы выпуска конечной продукции (вектор Y). В этом случае систему (6) удобно записать в виде:

$$Y = X - A * X. \tag{7}$$

Второй вариант: по заданным уровням конечной продукции отраслей (вектор Y) определить объемы валовой продукции (вектор X). В этом случае система (6) переписывается в виде:

$$X = (E - A)^{-1} * Y, \tag{8}$$

где E - единичная матрица размерности n;

$(E - A)^{-1}$ - обратная матрица к матрице $E - A$.

Элементы этой матрицы есть **коэффициенты полных материальных затрат**, показывающие, сколько всего нужно произвести продукции i-ой отрасли, чтобы получить единицу конечной продукции j-ой отрасли. Исходя из того, что кроме прямых затрат существуют косвенные затраты той или иной продукции на предшествующих стадиях производства, имеет место следующее определение: **коэффициентом полных материальных затрат** называется сумма прямых и косвенных затрат продукции.

Третий вариант: по отдельным отраслям задаются уровни валовой продукции, по другим - уровни конечного продукта (в сумме число заданных величин равно n). Требуется определить значения остальных n переменных. В этом случае расчет неизвестных осуществляется по комбинированной схеме:

$$\overline{X}_1 = (E - A_{11})^{-1} * (\overline{Y}_1 + A_{12} * \overline{X}_2) \tag{9}$$

$$\overline{Y}_2 = (E - A_{22}) * \overline{X}_2 - A_{21} * \overline{X}_1, \tag{10}$$

где $\overline{Y}_1, \overline{X}_2$ - векторы заданных уровней конечного и валового продуктов;

$\overline{X}_1, \overline{Y}_2$ - векторы искомых уровней валового и конечного продуктов;

A_{ik}, $i, k = 1,2$ - блоки разбиения матрицы коэффициентов прямых затрат А.

2.3. Пример и порядок выполнения лабораторного задания

Располагая следующими данными об экономической системе, состоящей из трех экономических объектов: P_1 - промышленность, P_2 - сельское хозяйство, P_3 - транспорт:

Отрасли	P_1	P_2	P_3	$\sum$	Y	X
P_1	20	50			200	300
P_2	10	0	40			500
P_3	0				240	
$\sum$				310		
V		390				
X						

Требуется:

1. Завершить составление баланса.
2. Рассчитать матрицу коэффициентов прямых затрат, полных затрат, косвенных затрат.
3. Рассчитать валовые выпуски 1-ой и 2-ой отраслей и конечный продукт 3-ей отрасли на планируемый период при условии увеличения конечного продукта первых двух отраслей на 3%, оставив без изменения объем валового продукта 3-ей отрасли.
4. Рассчитать новую производственную программу каждой отрасли.

Порядок выполнения задания.

1. Составление баланса.
   1.1. Используя баланс между производством и потреблением продукции отрасли P_1, найдем $\sum_{j=1}^{3} x_{1j}$, а затем x_{13}:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = X_1 - Y_1 = 300 - 200 = 100$$

$$x_{13} = \sum_{j=1}^{3} x_{1j} - (x_{11} + x_{12}) = 100 - (20 + 50) = 30$$

1.2. Используя баланс между производством и потреблением продукции отрасли P_2, найдем Y_2, предварительно подсчитав $\sum_{j=1}^{3} x_{2j}$:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 10 + 0 + 40 = 50$$

$$Y_2 = X_2 - \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 500 - 50 = 450$$

1.3. Используя соотношение между элементами столбца $\sum$, найдем $\sum_{j=1}^{n} x_{3j}$:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{3j} = \sum_{i}\sum_{j} x_{ij} - \sum_{j} x_{1j} - \sum_{j} x_{2j} = 310 - 100 - 50 = 160$$

1.4. Используя баланс между производством и потреблением продукции отрасли P_3, найдем X_3:

$$X_3 = Y_3 + \sum_{j} x_{3j} = 240 + 160 = 400$$

1.5. Вычислим суммарные затраты всех трех отраслей на производство продукции первой отрасли

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 20 + 10 = 30$$

1.6. Используя стоимостную структуру продукции отрасли P_1, найдем ее условно чистую продукцию V_1:

$$V_1 = X_1 - \sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 300 - 30 = 270$$

1.7. Используя соотношение (3), получим условно чистую продукцию отрасли P_3:

$$V_3 = \sum_{j=1}^{3} Y_j - V_1 - V_2 = 200 + 450 + 240 - 270 - 390 = 230$$

1.8. Определим суммарные затраты на производство продукции отраслей P_2 и P_3:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = X_2 - V_2 = 500 - 390 = 110$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i3} = X_3 - V_3 = 400 - 230 = 170$$

1.9. Определим затраты продукции отрасли P_3 на производство продукции P_2 и на собственные производственные нужды :

$$x_{32} = \sum_{i=1}^{3} x_{i2} - x_{12} - x_{22} = 110 - 50 - 0 = 60$$

$$x_{33} = \sum_{i=1}^{3} x_{i3} - x_{13} - x_{23} = 170 - 30 - 40 = 100$$

Окончательно получаем:

Отрасли	P_1	P_2	P_3	$\sum$	Y	X
P_1	20	50	30	100	200	300
P_2	10	0	40	50	450	500
P_3	0	60	100	160	240	400
$\sum$	30	110	170	310		
V	270	390	230			
X	300	500	400			

2. Расчет матрицы коэффициентов прямых затрат, полных затрат и косвенных затрат.

2.1. Элементы матрицы коэффициентов прямых затрат рассчитаем по формуле (4), получим:

$$A = \begin{bmatrix} 0.066 & 0.1 & 0.075 \\ 0.033 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.12 & 0.25 \end{bmatrix}$$

2.2. Проверка условия $\sum_i a_{ij} < 1$, j=1,2, …,n , гарантирующего существование решения:

$$\sum_i a_{i1} = 0.099 < 1,\ \sum_i a_{i2} = 0.22 < 1,\ \sum_i a_{i3} = 0.325 < 1.$$

2.3. Элементы матрицы полных затрат рассчитаем по формуле $A^* = (E - A)^{-1}$, получим:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1.076 & 0.122 & 0.124 \\ 0.036 & 1.020 & 0.140 \\ 0.006 & 0.163 & 1.356 \end{bmatrix}$$

2.4. Элементы матрицы косвенных затрат рассчитаем по формуле $A^{'} = A^* - A$, получим:

$$A^{'} = \begin{bmatrix} 1.009 & 0.022 & 0.049 \\ 0.003 & 1.020 & 0.040 \\ 0.006 & 0.043 & 1.106 \end{bmatrix}$$

2. Расчет валовых выпусков 1-ой и 2-ой отраслей и конечного продукта 3-ей отрасли.

3.1. Определим валовые уровни продукции отраслей P_1, P_2 на планируемый период, предварительно вычислив новые уровни их конечных продуктов:

$$Y_1 = 200 * 1.03 = 206$$

$$Y_2 = 450 * 1.03 = 463.5$$

Расчет произведем по схеме:

$$\overline{X}_1 = (E - A_{11})^{-1} * (\overline{Y}_1 + A_{12}\overline{X}_2),$$

где $\overline{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ - искомый вектор валовой продукции отраслей P_1, P_2;

$\overline{X}_2 = X_3$ - уровень валовой продукции 3-ей отрасли;

$\overline{Y}_1 = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ - новый вектор конечной продукции отраслей P_1, P_2;

A_{ik} - блоки разбиения матрицы A:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}.$$

Результаты расчетов: $\overline{X}_1 = \begin{bmatrix} 307.9 \\ 513.8 \end{bmatrix}$

3.2. Определим объем конечного продукта отрасли P_3 по схеме:

$$Y_3 = (1 - A_{22}) * X_3 - A_{21} * \overline{X}_1,$$

где $\overline{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ - вектор валовой продукции отраслей P_1, P_2, найденный на предыдущем шаге;

A_{21}, A_{22} - блоки разбиения матрицы A: $A_{21} = (a_{31}, a_{32})$; $A_{22} = a_{33}$

Результат расчета: $Y_3 = 238.3$

4. Расчет производственной программы каждой отрасли.
   Расчеты произведем по формуле (4), записанной в виде:

$$x_{ij} = a_{ij} * X_j \qquad (11)$$

Результат расчетов

Отрасли	P_1	P_2	P_3	$\sum$
P_1	20,321	51,380	30	101,701
P_2	10,161	0	40	50,161
P_3	0	61,656	100	161,656
$\sum$	30,482	113,036	170	313,518

5. Результаты расчетов п.3, 4 представим в балансе на планируемый период:

Отрасли	P_1	P_2	P_3	$\sum$	Y	X
P_1	20,321	51,380	30	101,701	206	307,7
P_2	10,161	0	40	50,161	463,5	513,7
P_3	0	61,656	100	161,656	238,3	400
$\sum$	30,482	113,036	170	313,518	907,8	
V	277,218	400,664	230	907,8		
X	307,7	513,7	400			

2.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Определить на планируемый период производственную программу трех групп взаимосвязанных предприятий: гр.1 выпускает станки, гр.2 - электромоторы, гр.3 - металлопрокат. Известно, что данные предприятия должны дать народному хозяйству 15000 шт. станков, 77000 шт. электромоторов и 46000 т. проката. Нормы расхода этих изделий для взаимного и собственного воспроизводства приведены в таблице:

Группы предприятий	Производственное потребление 1 (на 1 шт.)	 2 (на 1 шт.)	 3 (на 1 шт.)
1 (в шт.)	0,03	0,05	0,06
2 (в шт.)	0,02	0,03	0,01
3 (в шт.)	0,01	0,04	0,02

Задача 2. Располагая данными об экономической системе, состоящей из четырех экономических объектов:

Объекты	1	2	3	4	$\sum$	Y	X
1	0	120	30			380	600
2		80	50	30		430	
3	170	150	10	80			480
4	160			20		80	
$\sum$	400				1200		2160
V			330				
X							

1. Завершить составление баланса.
2. Рассчитать матрицу коэффициентов прямых затрат, полных затрат, косвенных затрат.
3. Проверить выполнение условия, гарантирующего существование решения.
4. Рассчитать валовой выпуск на новый ассортимент конечного продукта (450, 260, 130, 110).
5. Рассчитать новую производственную программу каждого экономического объекта.

Задача 3. В составе пищекомбината 3 основных (1,2,3) и 2 заготовительных (4,5) цеха. Данные о межцеховых потоках продукции и объемах конечного выпуска в предшествующий плановому период приведены в таблице:

№ цехов	Межцеховые поставки 1	2	3	4	5	Конечный продукт
1	0	50	70	0	0	900
2	10	0	20	0	0	1500
3	30	40	0	0	0	1600
4	270	380	700	10	0	0
5	350	900	800	0	15	0

Требуется рассчитать:

1. Валовые объемы выпуска продукции каждым цехом;
2. Матрицу коэффициентов прямых затрат;
3. Проверить выполнение условия, гарантирующего существование решения;
4. Матрицы коэффициентов полных и косвенных затрат;
5. Валовой выпуск каждого основного цеха на 3 варианта ассортиментного плана конечной продукции этих цехов в предположении, что объем заготовок в плановом периоде 4-го цеха увеличится на 8%, а 5-го - на 10%:
   I – увеличить выпуск конечной продукции каждого основного цеха на 9%;
   II – увеличить выпуск конечной продукции 1-го цеха на 10%, 2-го – на 7%, 3-го – на 12 %;
   III– увеличить выпуск конечной продукции 1-го и 2-го цехов на 15%, а 3-го на 10% уменьшить;
6. Для III варианта рассчитать производственную программу каждого цеха.

Задача 4. Условно экономика разделена на 4 сектора: 1 - отрасли, производящие средства производства (группа А), 2 - отрасли, производящие предметы потребления (группа Б), 3 - сельское хозяйство, 4 - прочие отрасли. Межотраслевые потоки в предшествующем плановом периоде приведены в таблице:

Отрасли производящие	Отрасли потребляющие: Группа А	Группа Б	С/х	Прочие	Конечный продукт
Группа А	96	17	9	40	318
Группа Б	24	34	6	30	76
Сельское х-во	48	8,5	6	20	67,5
Прочие отр.	96	17	15	10	62

Требуется:

1. По данным исполненного баланса рассчитать:
   1.1. Объемы валовой продукции, выпущенные каждой отраслью;
   1.2. Матрицу коэффициентов прямых затрат;
   1.3. Проверить выполнение условия, гарантирующего существование решения.
2. Для планового периода вычислить:
   2.1. Матрицу коэффициентов полных затрат;
   2.2. Матрицу коэффициентов косвенных затрат;
   2.3. Валовый выпуск каждой отрасли для трех вариантов плана выпуска конечной продукции:
   I – увеличить выпуск конечной продукции в каждой отрасли на 5%;
   II – увеличить выпуск конечной продукции 1-ой отрасли на 4%, 2-ой – на 6%, 3-ей – на 7%, 4-ой – на 6%;
   III– увеличить выпуск конечной продукции 1-ой отрасли на 4%, 2-ой отрасли – на 6%, 3-ей – на 7%, 4-ой – на 6%;
   2.4. Рассчитать межотраслевые поставки, обеспечивающие ассортимент выпуска конечной продукции по 2-му варианту.

3. Модели регрессионного анализа

Регрессионными называют модели, основанные на уравнении регрессии, или системе регрессионных уравнений, связывающих величины эндогенных (выходных, зависимых) и экзогенных (входных, независимых) переменных.

Различают уравнения парной (однофакторной) и множественной (многофакторной) регрессии.

3.1. Однофакторные регрессионные модели.

Эти модели отражают взаимосвязь показателя только с одним фактором. В общем случае однофакторную регрессионную модель можно представить в виде:

$$y_i = f(x_i, A) + E_i\ , \qquad i = 1,\dots,n \qquad (1)$$

где: y_i - значение моделируемого показателя в i - ом периоде;

x_i - значение фактора в i - ом периоде;

A - постоянные коэффициенты (параметры модели);

E_i - случайная величина, представляюшая собой ту часть вариации показателя y_i, которая не объясняется соответствующими изменениями фактора x_i;

n- количество периодов, за которые рассматриваются данные. Чем ниже уровень возможных значений случайной величины E, тем точнее описывается процесс взаимодействия фактора x с показателем y. Поэтому параметры регрессионной модели находятся из условия минимизации суммы квадратов отклонений:

$$S = \sum_i (y_i - f(x_i, A))^2 \to \min \qquad (2)$$

Важным моментом при построении регрессионных зависимостей является выбор функции f, задающей конкретную форму связи. Как правило, при выборе наиболее приемлемой формы связи прибегают к совместному применению методов, использующих эмпирический и логический подход.

Эмпирический подход предполагает детальный анализ исходных данных путем графического представления зависимости y от x в виде ломаной линии, а также построения ряда пробных зависимостей и выбора той из них, которая обеспечивает требуемый уровень точности, обладает необходимым набором свойств. Например, если есть основание считать, что прирост показателя происходит пропорционально изменениям фактора, то в качестве регрессионной модели выбирают линейную:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 x_i, \qquad i = 1,\dots,n \qquad (3)$$

здесь y_i – теоретическое значение результативного признака, полученное по уравнению регрессии.

Параметр a_1 называется **коэффициентом регрессии**. Он показывает, на сколько единиц в среднем изменяется показатель, если фактор изменился на единицу.

Теснота связи показателя с фактором определяется **коэффициентом корреляции**:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum y_i x_i - \overline{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad (4)$$

где σ_x, σ_y - средние квадратические отклонения, вычисляемые по формулам:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \overline{x})^2},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(y_i - \overline{y})^2},$$

$\overline{x}, \overline{y}$ - средние арифметические значения фактора x и показателя y.

Чем ближе значение коэффициента корреляции к единице, тем теснее связь. При $|r| = 1$ связь функциональная, т.е. проявляется определенно и точно в каждом отдельном случае. При r=0 линейной связи нет. Если r >0, то зависимость прямая, то есть с ростом фактора растет показатель, если r <0, то зависимость обратная.

Величина r^2 называется **коэффициентом детерминации** и показывает долю изменения (вариации) показателя под действием фактора. Значение коэффициента детерминации находится в пределах от 0 до 1. Чем ближе r^2 к 1, тем вариация изучаемого показателя в большей мере характеризуется влиянием фактора.

Процедурой МНК можно оценивать параметры и нелинейных моделей, которые определенными преобразованиями приводятся к линейному виду. Если, например, выдвигается гипотеза о том, что процесс хорошо описывается экспоненциальной зависимостью:

$$\hat{y}_i = a_0 a_1^{x_i}, \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (5)$$

то путем логарифмирования ее приводят к линейному виду:

$$\ln \hat{y}_i = \ln a_0 + x_i \ln a_1, \qquad (6)$$

рассчитывают значения $\ln a_0$ и $\ln a_1$, а затем потенцированием этих значений получают a_0 и a_1. Параметр a_1 интерпретируется как **величина относительного роста**, показывающая, во сколько раз в среднем увеличивается значение показателя y при изменении фактора x на единицу.

Если есть основание предполагать, что для моделирования взаимосвязи показателя и фактора используется степенная зависимость:

$$\hat{y}_i = a_0 x_i^{a_1}, \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (7)$$

ее также логарифмированием приводят к линейному виду:

$$\ln \hat{y}_i = \ln a_0 + a_1 \ln x_i, \qquad (8)$$

рассчитывают $\ln a_0$ и a_1, а затем потенцированием $\ln a_0$

получают значение параметра a_0. Параметр a_1 в этом случае показывает процент изменения показателя y на каждый процент изменения фактора x.

3.2. Многофакторные регрессионные модели

Эти модели являются обобщением однофакторных регрессионных моделей. Они позволяют оценить степень совместного влияния нескольких факторов на исследуемый показатель.

Общий вид многофакторной модели:

$$y_i = f(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{mi}, A) + E_i, \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (9)$$

где x_{ki} (к=1,2,…,m) – значение к-го фактора в i-ом периоде;

m – кол-во факторов, включенных в модель.

При построении многофакторных моделей к проблеме выбора функции f, задающей форму зависимости, добавляется проблема отбора для включения в модель значимых факторов, которая может быть решена применением пошаговых процедур включения и исключения факторов.

Чаще других при многофакторном моделировании экономических процессов используется линейная функция:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + ... + a_m x_{mi}, \qquad (10)$$

Параметры a_i находят из условия минимума суммы квадратов отклонений. Они представляют собой **коэффициенты абсолютного роста**, каждый из которых показывает, на сколько изменится показатель y при изменении соответствующего фактора на единицу.

Структура парных взаимосвязей между факторами описывается матрицей парных коэффициентов корреляции $\|r_{kj}\|$, k-j-ый элемент которой рассчитывается по формуле:

$$r_{kj} = \frac{\frac{1}{n}\sum x_{kj} x_{ji} - \bar{x}_k \bar{x}_j}{\sigma_k \sigma_j}, \qquad (11)$$

где $\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_{ki} - \bar{x}_k)^2}$;

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_{ji} - \bar{x}_j)^2}.$$

Теснота линейной связи между показателем y и факторами x_k оценивается по величине парных коэффициентов корреляции:

$$r_{ok} = \frac{\frac{1}{n}\sum y_i x_{ki} - \overline{y}\overline{x}_k}{\sigma_y \sigma_k}, \qquad (12)$$

где $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (y_i - \overline{y})^2}$.

Теснота совместной связи всего набора факторов с моделируемым показателем оценивается по величине **множественного коэффициента корреляции**, который вычисляется по формуле:

$$R = \sqrt{\beta_1 r_{01} + \beta_2 r_{02} + \ldots + \beta_m r_{om}}, \qquad (13)$$

где $\beta_k, (k = 1,\ldots, m)$ - так называемые бета-коэффициенты, $\beta_k = \frac{a_k \sigma_x}{\sigma_y}$, которые позволяют сравнить между собой факторы по степени их влияния на показатель y при учете взаимодействия между самими факторами.

Величина R^2 называется **совокупным коэффициентом детерминации** и показывает долю вариации результативного признака под воздействием факторных признаков.

При оценке параметров регрессии нелинейных моделей экспоненциального и степенного типов предварительно, как и в случае однофакторной регрессии, приводят функцию взаимосвязи операцией логарифмирования к линейному виду.

3.3. Оценка качества регрессионных моделей.

О качестве моделей регрессии можно судить по значениям коэффициента корреляции и коэффициента детерминации для однофакторной модели и по значениям коэффициента множественной корреляции и совокупного коэффициента детерминации для моделей множественной регрессии. Формулы расчета этих коэффициентов приведены в п.п. 3.1. и 3.2. Чем ближе абсолютные величины указанных коэффициентов к 1, тем теснее связь между изучаемым признаком и выбранными факторами и, следовательно, с тем большей уверенностью можно судить об адекватности построенной модели, включающей в себя наиболее влияющие факторы.

Проверка **значимости** модели регрессии проводится с использованием F- критерия Фишера, расчетное значение которого находится как отношение дисперсии исходного ряда наблюдений изучаемого показателя и несмещенной оценки дисперсии остаточной последовательности для данной модели:

$$F_{расч} = \frac{\sigma_y^2 - s_{ост}^2}{s_{ост}^2}, \tag{14}$$

где $s_{ост}^2 = \frac{1}{n-m-1}\sum(y_i - \hat{y}_i)^2$,

$\hat{y}_i$ —значение изучаемого показателя, вычисленное по модели.

Если расчетное значение этого критерия со степенями свободы n-1 и n-m-1 больше табличного значения критерия Фишера при заданном уровне значимости, то модель признается значимой.

При проверке качества регрессионной модели целесообразно оценить также **значимость коэффициентов регрессии**. Эта оценка проводится по t – статистике Стьюдента путем проверки гипотезы о равенстве нулю к-ого коэффициента регрессии (к=1,2,…m). Расчетное значение t – критерия с числом степеней свободы n-m-1 находят по формуле:

$$t = \frac{a_k}{S_{a_k}}, \tag{15}$$

$$S_{a_k} = \sqrt{D(a_k)},$$

где

$$D(a_k) = \frac{1}{n-m-1}\sum E_i^2 * z_{kk},$$

где z_{kk} - диагональный элемент матрицы, обратной матрице системы нормальных уравнений относительно параметров модели.

Это расчетное значение сравнивается с табличным значением критерия Стьюдента при заданном уровне значимости, и если оно больше табличного значения, коэффициент регрессии считается значимым. В противном случае соответствующий данному коэффициенту фактор следует исключить из модели, при этом качество модели не ухудшится.

Если (n-m-1), т.е. число степеней свободы достаточно велико (не менее 8-10), то при 5% - ном уровне значимости критическое значение t – статистики приблизительно равно 2. Можно считать оценку незначимой, если t – статистика по модулю меньше 1, и весьма надежной, если модуль t – статистики больше 3.

Для адекватных моделей имеет смысл ставить задачу оценки их **точности**. Точность модели характеризуется величиной отклонения выхода модели от реального значения экономического показателя. В качестве статистических показателей точности применяются следующие:

среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{1}{n-m}\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}, \qquad (16)$$

средняя относительная ошибка аппроксимации

$$\overline{E}_{\text{отн}} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right| * 100\%, \qquad (17)$$

и другие показатели.

3.4. Пример и порядок выполнения лабораторного задания по построению однофакторной модели регрессии

Исследованием, проведенным в 20 случайно выбранных магазинах, получены следующие данные о числе посетителей магазинов и выручке в течение дня:

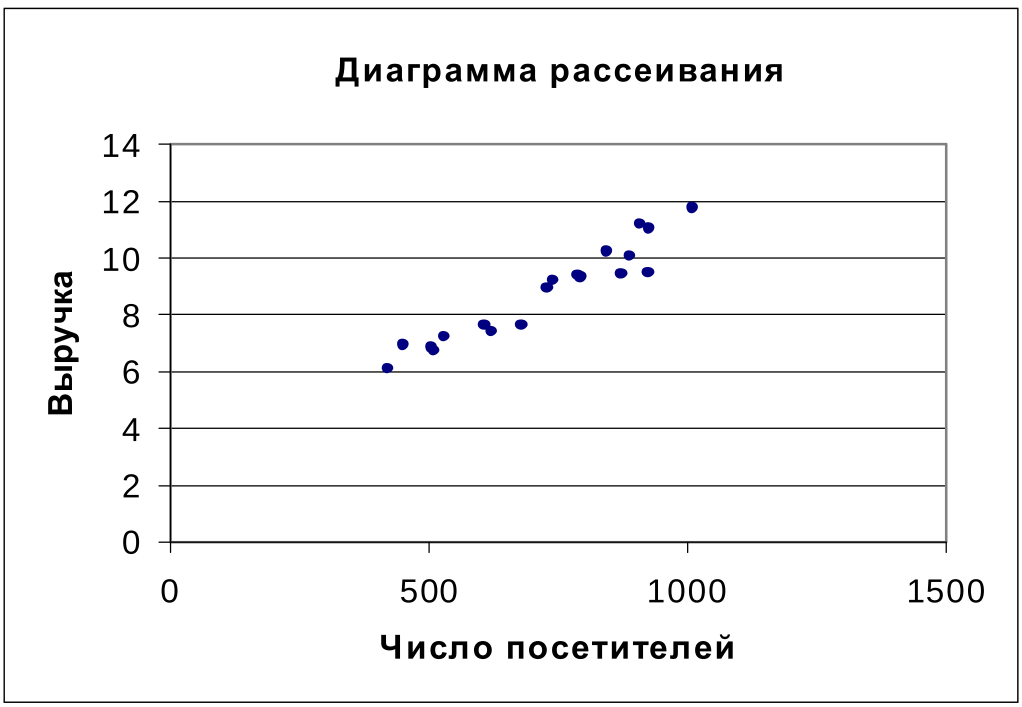
Номер магазина	Число посетителей	Выручка, у.е.
1	907	11.20
2	926	11.05
3	506	6.84
4	741	9.21
5	789	9.42
6	889	10.08
7	874	9.45
8	510	6.73
9	529	7.24
10	420	6.12
11	679	7.63
12	872	9.43

13	924	9.49
14	607	7.64
15	452	6.92
16	729	8.95
17	794	9.33
18	844	10.23
19	1010	11.77
20	621	7.41

Построить точечную диаграмму зависимости выручки от числа посетителей магазина. Выдвинуть гипотезу о виде функции зависимости. Оценить параметры регрессионной модели и предсказать ежедневную выручку магазина, который посетят 600 покупателей.

Порядок выполнения задания

Данные, приведенные в таблице, представим в виде точечной диаграммы – диаграммы рассеивания, которая наглядно показывает наличие линейной зависимости выручки от продажи пива (y) от числа посетителей магазина (x). С увеличением числа посетителей растет выручка от продажи.



1.Рассчитаем параметры уравнения регрессии

$$y = a_0 + a_1 x \qquad (18)$$

с помощью сервисного пакета <**Анализ данных**> (это же можно сделать с помощью встроенной функции линейной регрессии):

1.1. Введем исходные данные на рабочий лист EXCEL;
1.2. Через <**сервис**> входим в пакет <**Анализ данных**> и в окне “Инструменты анализа” выбираем <**Регрессия**>;
1.3. В окне “входной интервал Y” определяем границы столбца “Выручка, у.е.”;
в окне “входной интервал X” определяем границы столбца “Число посетителей”;
1.4.Результаты регрессии будут выданы под заголовком “Вывод итогов”:

ВЫВОД ИТОГОВ						
Регрессионная статистика						
Множественный R	0,95556975					
R-квадрат	0,91311355					
Нормированный R-квадрат	0,90828652					
Стандартная ошибка	0,4981085					
Наблюдения	20					
Дисперсионный анализ						
	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
Регрессия	1	46,9346025	46,9346	189,1669	5,45176E-11	
Остаток	18	4,46601747	0,248112			
Итого	19	51,40062				

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересечение	2,41766179	0,47771655	5,060871	8,14E-05	1,41401579	3,421307787
Переменная X 1	0,00873875	0,00063537	13,7538	5,45E-11	0,007403887	0,010073616

Первая таблица результатов – Регрессионная статистика - дает сведения о значениях множественного коэффициента корреляции (ячейка В4), критерия детерминации (R-квадрат) (ячейка В5), нормированного коэффициента детерминации (ячейка В6), стандартной ошибки для оценки Y (ячейка В7) и количестве наблюдений.

Далее следуют таблицы с результатами Дисперсионного анализа. Первая из них содержит сведения о значениях регрессионной суммы квадратов отклонений (ячейка С12), остаточной суммы квадратов отклонений (ячейка С13), F-статистики (ячейка Е12) и ее значимости (ячейка F12).

Вторая таблица результатов дисперсионного анализа содержит оценки параметров регрессии:

в строке Y-пересеч. – свободный коэффициент регрессии a_0 (ячейка В17);

в строке Перемен.– параметр a_1 (ячейка В18).

Затем следуют стандартные значения ошибок для a_0, a_1, t-статистика Стьюдента, по которой можно судить о значимости коэффициентов регрессии, а также нижние и верхние значения интервалов для коэффициентов при 5%-ном уровне значимости.

Для наших данных уравнение регрессии имеет вид:

$$y = 2.4177 + 0.00874x \qquad (19)$$

2.Оценим качество построенного уравнения.

Коэффициент $a_1 = 0.00874$. Это означает, что при увеличении фактора х на единицу ожидаемое значение у возрастет на 0,00874 (или можно сказать, что ожидаемый прирост ежедневной выручки составит 0,874 у.е. при привлечении в магазин 100 дополнительных посетителей).

Свободный член уравнения $a_0 = 2.4177$, это – значение у при х, равном нулю. Поскольку число посетителей магазина, равное нулю, маловероятно, можно интерпретировать a_0 как меру влияния на величину ежедневной выручки других факторов, не включенных в уравнение регрессии.

Статистической мерой вариации фактических значений у от предсказанных значений является стандартная ошибка оценки у. Для нашего примера она равна 0,498.

Коэффициент детерминации – доля вариации у, которая объясняется независимой переменной в регрессионной модели –

равен 0,913. Следовательно, 91,3% вариации ежедневной выручки магазинов может быть объяснено числом покупателей. Только 8,7% вариации можно объяснить иными факторами, не включенными в уравнение регрессии.

Коэффициент корреляции r=0,956. Близость его к единице свидетельствует о тесной положительной связи между выручкой магазина и числом посетителей.

Для того, чтобы сделать заключение о том, что зависимость объема выручки от числа посетителей магазина статистически существенна на 5%-ном уровне значимости, следует сравнить наблюдаемое значение критерия t (оно равно 13,75) с $t_{крит}$, значение которого по таблице распределения Стьюдента равно 2,1. Так как 13,75>2,1, то нулевая гипотеза H_0 (линейной зависимости нет) отвергается в пользу альтернативной гипотезы H_1 (линейная зависимость есть).

6. Регрессионная модель может быть использована для прогноза объема ежедневной выручки магазина, который посетят 600 покупателей. Для этого следует x=600 подставить в регрессионное уравнение (19):

$$y = 2.4177 + 0.00874 * 600 = 7.661$$

Отсюда, прогнозируемая дневная выручка для магазина с 600 посетителями в день равна 7,661 у.е.

Для прогноза важно помнить, что обсуждаются только значения независимых переменных, находящиеся в пределах от наименьшего до наибольшего значения факторного признака и используемые при создании модели. Так, из данных нашего примера известно, что число посетителей находится в пределах от 420 до 1010, следовательно и предсказание ежедневной выручки может быть сделано только для магазинов с числом покупателей от 420 до 1010 человек.

3.5. Пример лабораторного задания по построению многофакторной модели регрессии

По выборочным данным, представленным в таблице, о выработке деталей за смену 14 рабочими цеха требуется выявить зависимость производительности труда (y) от двух факторов: внутрисменных простоев (x1) и квалификации рабочих (x2)

Порядковый номер рабочего	Внутрисменные простои, мин. x1	Квалификация рабочего (тарифный разряд), x2	Дневная выработка рабочего, шт. y
1	5	3	86
2	8	4	88
3	12	5	94
4	9	4	87
5	13	5	92
6	12	6	94
7	20	2	77
8	14	4	92
9	22	2	75
10	13	5	90
11	18	3	80
12	16	3	82
13	24	2	74
14	11	4	90

Порядок выполнения задания

1. Теоретический анализ исходных данных позволяет установить наличие причинно-следственной связи факторных признаков (внутрисменных простоев и квалификации рабочих) с результативным показателем - производительностью труда в линейной форме:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

2. Для оценки параметров регрессионной модели проведем последовательность действий, описанных в п. 3.4. Заметим при этом, что в окне "Входной интервал X" отмечаются границы блока "Внутрисменные простои" и "Тарифный разряд". Получим уравнение регрессии вида:

$$y = 75.9 - 0.42x_1 + 4.23x_2$$

3. Оценка качества полученного уравнения.

Совокупный коэффициент множественной корреляции равен 0,96, что говорит о достаточно высокой степени связи между результативным и двумя факторными признаками.

По значению совокупного коэффициента множественной детерминации можно говорить о том, что 92% вариации производительности труда обусловлено двумя анализируемыми факторами. Значит, выбранные факторы существенно влияют на показатель производительности труда.

Общая оценка адекватности уравнения может быть получена с помощью дисперсионного F - критерия Фишера. Полученное значение критерия Fрасч.=63,82 . Это больше соответствующего табличного значения. Следовательно, уравнение регрессии значимо и может быть пригодно для практического использования.

3.6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Данные опроса восьми групп семей о расходах на продукты питания в зависимости от уровня доходов семьи приведены в таблице (числа относительные в расчете на 100 руб. дохода и расхода):

Доходы семьи	1,4	3,3	5,5	7,6	9,8	12,0	14,7	18,9
Расходы на продукты питания	1,1	1,4	2,0	2,4	2,8	3,1	3,5	4,0

Требуется:

- представить данные таблицы графически;
- выдвинуть гипотезу о виде функции зависимости расходов на питание от дохода семьи;
- рассчитать параметры модели регрессии и оценить качество построенного уравнения;
- найти коэффициент корреляции и коэффициент детерминации и пояснить их экономический смысл;
- рассчитать теоретические значения расходов на питание по модели и построить графики фактических и расчетных данных.

Задача 2. Результаты обследования десяти статистически однородных филиалов фирмы приведены в таблице (цифры условные):

№ филиала	Производительность труда (y)	Фондовооруженность (x1)	Энерговооруженность (x2)
1	74	33	56
2	84	34	58
3	73	36	67
4	93	35	70

5	56	33	73
6 7	71 117	37 39	77 78
8	111	42	99
9	135	43	93
10	125	44	96

Требуется:
- построить модель множественной линейной регрессии производительности труда от факторов фондо- и энерговооруженности;
- оценить адекватность построенного уравнения;
- найти коэффициент множественной корреляции и совокупный коэффициент детерминации и охарактеризовать степень совместного влияния факторов на производительность труда;
- рассчитать теоретические значения производительности труда по модели и построить графики фактических и расчетных данных.

4. Паутинообразная модель

4.1. Механизм построения паутинообразной модели.

Достаточно полное представление о том, каким образом происходит “нащупывание” состояния равновесия на рынке товаров, дает так называемая паутинообразная модель. Ее построение основано на предположении, что спрос и предложение являются функциями от цены.

Введем обозначения:

y_t^c - спрос в момент времени t;

y_t^n - предложение в момент времени t;

p_t - цена товара в момент времени t.

Естественно считать, что спрос в данный момент времени зависит от цены в этот же момент времени:

$$y_t^c = ap_t + b, \qquad (1)$$

а предложение - от цены в предшествующий момент времени:

$$y_t^n = cp_{t-1} + d, \qquad (2)$$

то есть имеется запаздывание в реакции производства на изменение цены.

Так как с увеличением цены спрос обычно падает, а предложение возрастает, то a <0, c >0.

Равенство в каждый момент времени спроса и предложения

$$y_t^c = y_t^n, \qquad (3)$$

завершает описание паутинообразной модели.

Из соотношения (3) легко получается модель для цены в виде разностного уравнения первого порядка:

$$p_t = c / a * p_{t-1} + (d - b) / a, \qquad (4)$$

Значение цены, при котором устанавливается равенство спроса и предложения и которое не приводит к дальнейшим изменениям их, обозначим через p^*. Это именно та цена, для которой в состоянии равновесия спроса и предложения справедливо соотношение:

$$p^* = \frac{c}{a} p^* + \frac{d - b}{a}, \qquad (5)$$

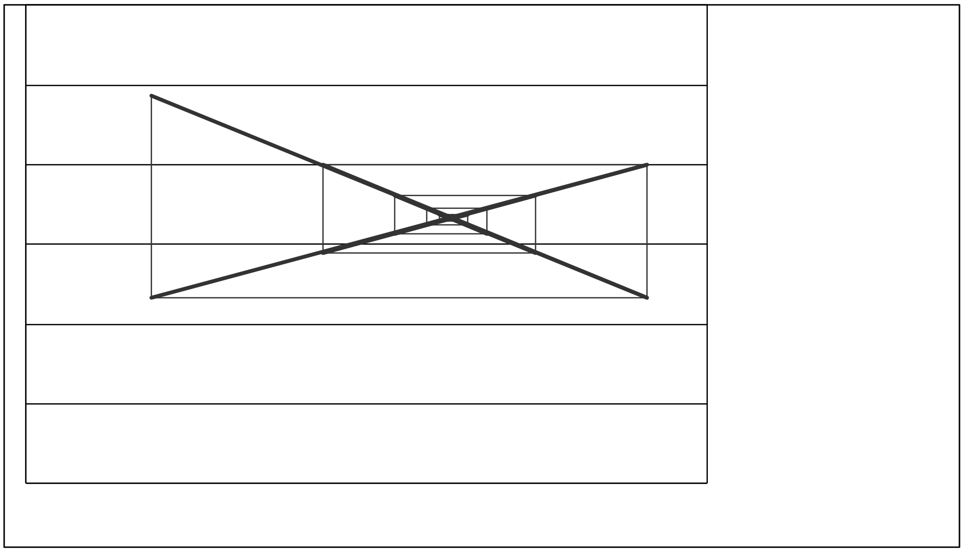
откуда получаем ее значение:

$$p^* = \frac{\gamma}{1 - c / a}, \quad \text{где } \gamma = \frac{d - b}{a}. \qquad (6)$$

Исследование процесса, описываемого моделью, на сходимость дает основание утверждать:

1. Если $r = \left|\frac{c}{a}\right| < 1$, то при $t \to \infty \quad p_t \to p^*$;
2. Если $r = 1$, то при $t \to \infty \quad p_t$ колеблется около равновесного значения;
3. Если $r > 1$, то при $t \to \infty$ цена будет отклоняться на все большую величину от ее равновесного значения.

Графически процесс “нащупывания “ равновесных цен хорошо проиллюстрирован на рисунке:



4.2. Пример и порядок выполнения лабораторного задания по расчету траектории изменения цены, предложения и спроса.

По данным таблицы рассчитать траектории изменения цены, спроса и предложения и построить график движения цены к равновесному состоянию:

№ п/п	Цена	Спрос	Предложение
1	7,50	23,25	10,13
2	15,38	19,32	12,87
3	19,25	17,39	14,24
4	21,12	16,44	14,90
5	24,21	14,90	15,98
6	25,53	14,24	16,44
7	28,25	12,89	17,39
8	33,75	10,13	19,32

Порядок выполнения задания.

1. Введем исходные данные на рабочий лист EXCEL.
2. Оценим параметры регрессионной зависимости спроса от цены с помощью пакета **Анализ данных** или с помощью встроенной функции линейной регрессии. Результаты расчета будут следующие:

$$y_t^c = -0.5p_t + 27 \qquad (7)$$

3. Оценим параметры регрессионной зависимости предложения от цены. Результаты расчета будут следующие:

$$y_t^n = 0.35p_{t-1} + 7.5 \qquad (8)$$

4. Запишем условие равновесия спроса и предложения:

$$-0.5p_t + 27 = 0.35p_{t-1} + 7.5 \qquad (9)$$

или:

$$p_t = \frac{0.35}{-0.5}p_{t-1} + \frac{27 - 7.5}{0.5} \qquad (10)$$

5. Рассчитаем траектории изменения цены, спроса и предложения:
а) на свободное поле рабочего листа EXCEL (например, в ячейки А12 и А13) дважды введем значение первоначальной цены, равной 7,5;
б) в ячейку А14 введем формулу (10) и скопируем ее в блок А15…А27;
в) в ячейку В12 введем формулу (7) и скопируем ее в блок В13…В27;
г) в ячейку С12 введем формулу (8) и скопируем ее в блок С13…С27;
д) в ячейки Д12 и Д13 введем соответственно формулы (7) и (8) и последнюю из них скопируем в блок Д14…Д27.

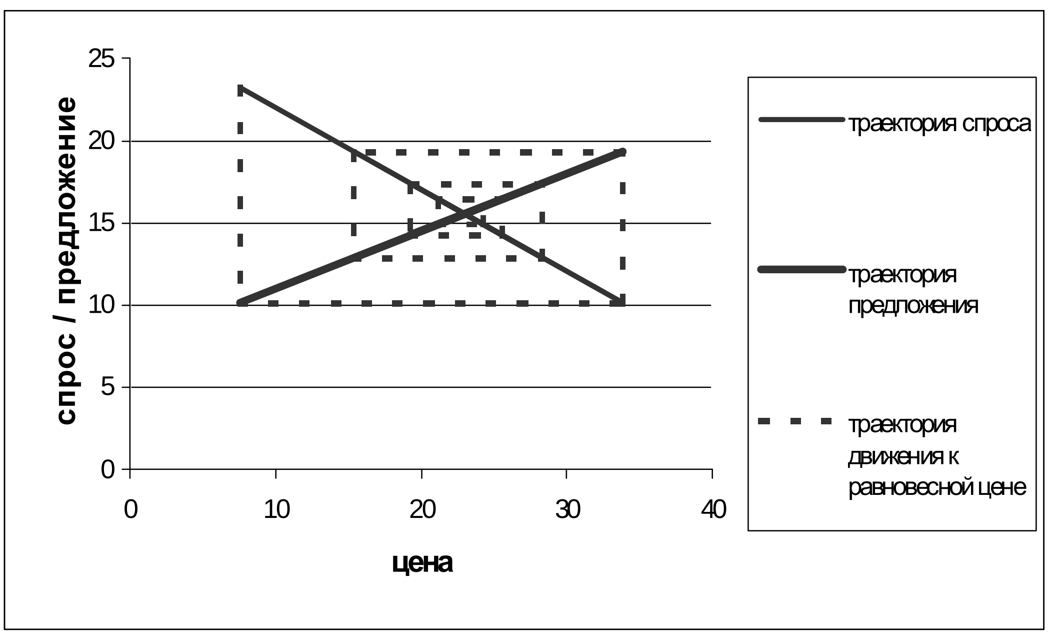
В результате этих действий таблица расчетных значений точек траекторий будет иметь следующий вид:

Цена	Траектория спроса	Траектория предложения	Траектория движения к равновесной цене
7,500	23,254	10,124	23,254
7,500	23,254	10,124	10,124

33,771	10,124	19,326	10,124
33,771	10,124	19,326	19,326
15,359	19,326	12,877	19,326
15,359	19,326	12,877	12,877
28,263	12,877	17,397	12,877
28,263	12,877	17,397	17,397
19,219	17,397	14,229	17,397
19,219	17,397	14,229	14,229
25,557	14,229	16,449	14,229
25,557	14,229	16,449	16,449
21,115	16,449	14,893	16,449
21,115	16,449	14,893	14,893
24,228	14,893	15,984	14,893
24,228	14,893	15,984	15,984

6. По данным, описывающим траекторию цены, спроса и предложения, построим график типа XY, назначив X блок A12…A27, Y1 – блок B12…B27, Y2 – блок C12…C27, Y3 - блок Д12…Д27.

Построенный график будет иметь следующий вид :



4.3 Задача для самостоятельного решения.

По данным таблицы постройте регрессионное уравнение предложения и авторегрессионное уравнение цены. Используя параметры этих уравнений, вычислить параметры уравнения спроса. Определить равновесную цену. С помощью построенных уравнений сгенерировать наборы данных и построить график траектории “нащупывания” равновесной цены.

№ п/п	Цена в момент t	Цена в момент t-1	Предложение
1	-	5	6,74
2	22,52	22,52	12,87
3	10,25	10,25	8,58
4	18,84	18,84	11,58
5	12,83	12,83	9,48
6	17,04	17,04	10,95
7	14,09	14,09	9,92
8	16,15	16,15	10,64

5. Применение производственных функций в экономико-математическом моделировании

5.1. Понятие производственной функции и ее основные свойства.

Производственной функцией называется функция вида

$$Y = F(X), \qquad (1)$$

где Y- объем производства;

$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - вектор производственных затрат;

x_i - объем затрат i-го фактора производства;

n – число факторов производства.

Она выражает количественную взаимосвязь производственных затрат и выпуска продукции. Обычно предполагают, что факторы производства принадлежат экономической области, то есть все неотрицательны, или $X \in R_+^n$

Основные свойства ПФ:

1. Если отсутствует хотя бы один фактор производства, то выпуск продукции равен нулю:

$$F(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, 0, x_{k+1}, ..., x_n) = 0 \qquad (2)$$

2. Если $X^2 \geq X^1$, то $Y^2 \geq Y^1$. Обычно это свойство заменяется усиленным вариантом. Предполагается, что ПФ дважды дифференцируемая функция, то есть $F(X) \in D^2(R_+^n)$ и в экономической области (R_+^n) все первые частные производные по затратам неотрицательны:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \geq 0, \qquad i = 1, ..., n \qquad (3)$$

3. Вторые частные производные в R_+^n отрицательны:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} < 0, \qquad i = 1, ..., n \qquad (4)$$

Это свойство утверждает справедливость закона убывающей производительности факторов.

4. ПФ – однородная функция степени α, если

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^{\alpha} F(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (5)$$

5.2 Примеры производственных функций

В экономике наиболее часто применяются двухфакторные производственные функции, то есть зависящие от двух параметров. Дадим некоторые примеры ПФ.

1. Функция Кобба-Дугласа:

$$Y = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}, \quad A > 0, \quad \alpha_1, \ \alpha_2 \geq 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad (6)$$

2. Линейная производственная функция (функция с полным взаимозамещением ресурсов):

$$Y = a_1x_1 + a_2x_2, \qquad a_1, a_2 \geq 0 \qquad (7)$$

3. ПФ "затраты-выпуск" (функция с полным взаимодополнением ресурсов).
   Эта функция является одной из заданных пропорций, которыми для производства одной единицы выпуска определяется количество затрат каждого вида:

$$Y = \min(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}), \qquad a_1, a_2 > 0 \qquad (8)$$

5.3 Пример и порядок выполнения задания по построению ПФ на основе реальных данных.

Предположим, что необходимо оценить работу некоторой отрасли, если известен объем производства отрасли Y, затраты трудовых ресурсов L и объем используемого капитала К:

№п/п	**Y**	**K**	**L**
1	100	100	100
2	101	107	104.8
3	112	114	110
4	122	122	117.2
5	124	131	121.9
6	122	138	115.6
7	143	149	125
8	152	163	134.2
9	151	176	139.9
10	126	185	123.2

11	155	198	142.7
12	159	208	147
13	153	216	148.1
14	177	226	155
15	184	236	156.2
16	169	244	152.2
17	189	266	155.8
18	225	298	183
19	227	335	197.5
20	223	366	201.1
21	218	387	195.9
22	231	407	194.4
23	179	417	146.4
24	240	431	160.5

Исходя из теоретических знаний можем предположить, что зависимость объема производства от труда и капитала описывается ПФ Кобба-Дугласа.

Выдвинем три гипотезы о предполагаемой зависимости:

1. $Y = A * K^{\alpha} * L^{\beta}$, где $\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad A > 0$ (9)
2. $Y = A * K^{\alpha} * L^{\beta}$, где $\alpha > 0, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1, \quad A > 0$ (10)
3. Если обозначить через λ-темп технического прогресса, то функция Кобба-Дугласса примет вид:

$$Y = Ae^{\lambda t} * K^{\alpha} * L^{\beta},$$

где $\lambda > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1, \quad A > 0,$ t-время (11)

<u>Задание:</u> необходимо оценить значения параметров $A, \alpha, \beta, \lambda$ с помощью линейного регрессионного анализа и определить, какая из гипотез наилучшим образом отражает эмпирические данные рассматриваемой отрасли.

Порядок выполнения задания

1. Проверка 1-ой гипотезы:

а) ПФ вида (9) приведем к линейному виду путем логарифмирования:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L \qquad (12)$$

б) обозначив

$Z = \ln Y, \quad W_1 = \ln K, \quad W_2 = \ln L, \quad \beta_0 = \ln A,$

$\beta_1 = \alpha, \quad \beta_2 = \beta,$ получим уравнение множественной регрессии:

$$Z = \beta_0 + \beta_1 W_1 + \beta_2 W_2 \qquad (13)$$

в) с помощью встроенной функции линейной регрессии или с помощью сервисного пакета "Анализ данных" оценим параметры $\beta_0, \quad \beta_1, \quad \beta_2$:

$\beta_0 =$-0,04302 , $\beta_1 =$0,245099, $\beta_2 =$ 0,766056 .

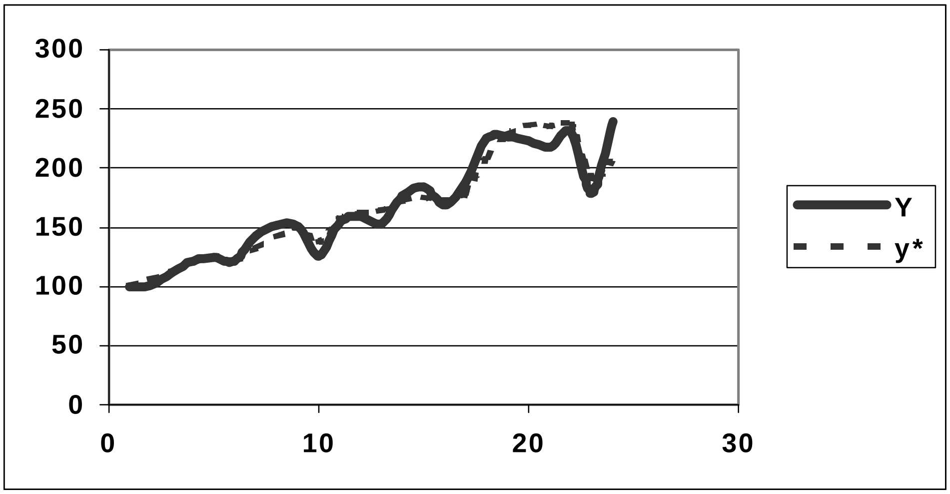
г) запишем параметры $\alpha = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$ и вычислим параметр А. Для этого найдем экспоненту от константы регрессии β_0 с помощью <Мастера функций>.

$\alpha = 0.245 \quad \beta = 0.766 \quad A = 0.958$

д) рассчитаем теоретические значения объема производства по формуле:

$$Y^* = 0.958 K^{0.245} L^{0.766} \qquad (14)$$

е) с помощью <Мастера диаграмм> построим графики фактических Y и теоретических Y^* значений объема производства отрасли.



Вывод: полученная функция (14) достаточно хорошо отражает реальные данные. Значение коэффициента детерминации $R^2 = 0.955$ говорит о хорошей функциональной зависимости. Кроме того, сумма $\alpha + \beta = 0.245 + 0.766 = 1.11$ близка к 1, поэтому можно предположить, что реальная зависимость, возможно, описывается ПФ Кобба-Дугласса.

Гипотезы 2 и 3 проверить самостоятельно. Дадим лишь необходимые комментарии:

2. Для функции Кобба-Дугласса, т.к. $\alpha + \beta = 1$, можно записать:

$$Y = A * K^{\alpha} * L^{\beta} = A * K^{\alpha} * L^{1-\alpha} \qquad (15)$$

Сделав замену переменных $Z = \frac{Y}{L}, \quad X = \frac{K}{L}$, получите:

$Z = A * X^{\alpha}$. После логарифмирования уравнение регрессии примет вид:

$$\ln Z = \ln A + \alpha \ln X \qquad (16)$$

3. Для функции, в которой учтен технический прогресс, проделать те же преобразования, что и для функции Кобба-Дугласса. В результате получите:

$Z = Ae^{\lambda t} X^{\alpha}$. После логарифмирования будете иметь уравнение множественной регрессии:

$$\ln Z = \ln A + \alpha \ln X + \lambda t, \qquad (17)$$

для которого определяются параметры α, A и λ.
t принимает значения от 1 до 24.

6. Модель фирмы

6.1. Экономико-математическая модель задачи

Пусть производственная фирма выпускает один вид продукции или много видов, но в постоянной структуре. Обозначим через X- годовой выпуск фирмы в натурально-вещественной форме. Для производства продукции фирма использует настоящий труд L- среднее число занятых в год, и прошлый труд в виде средств труда K (основные производственные фонды) и предметов труда M (затраченное за год топливо, энергия, сырье и т.п.).

Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - вектор-столбец возможных объемов затрат различных видов ресурсов. Тогда технология фирмы определяется производственной функцией вида:

$$X = F(x), \qquad (1)$$

где F(x)- дважды непрерывно дифференцируемая функция и матрица ее вторых производных отрицательно определена.

Рассмотрим функцию прибыли:

$$\Pi(x)=pF(x) - Wx, \qquad (2)$$

где p – цена единицы продукции,

$W = (W_1, W_2, ..., W_n)$ - вектор-строка цен ресурсов.

Если нет других ограничений на размеры вовлекаемых в производство ресурсов, кроме естественного требования их неотрицательности, то задача на максимум прибыли приобретает вид:

$$\max_{x \geq 0}[pF(x) - Wx]. \qquad (3)$$

Это задача нелинейного программирования. Необходимыми условиями ее решения являются условия Куна-Таккера:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi}{\partial x} = p\frac{\partial F}{\partial x} - W \leq 0, \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial x}x = (p\frac{\partial F}{\partial x} - W)x = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Если в оптимальном решении использованы все виды ресурсов, т.е. $x^* > 0$, то условия (4) принимают вид:

$$p\frac{\partial F(x^*)}{\partial x} = W,$$

или (5)

$$p\frac{\partial F(x^*)}{\partial x_j} = W_j, \quad j = 1,\ldots,n$$

т.е. в оптимальной точке стоимость предельного продукта данного ресурса должна равняться его цене.

Если рассматривать задачу на максимум выпуска при заданном объеме издержек C :

$$\max_{\substack{Wx \le C \\ x \ge 0}} F(x), \qquad (6)$$

то это задача нелинейного программирования с одним линейным ограничением и условием неотрицательности переменных. Для ее решения вначале строим функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda) = F(x) + \lambda(C - Wx),$$

а затем максимизируем ее при условии неотрицательности переменных:

$$\max_{x \ge 0} L(x,\lambda).$$

Условия Куна-Таккера для этой задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda W \le 0 \\ &\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda W\right)x = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

полностью совпадают с (4), если $\lambda = \frac{1}{p}$.

6.2. Пример и порядок выполнения лабораторного задания

Выпуск однопродуктовой фирмы задается производственной функцией Кобба-Дугласса:

$$X = F(K,L) = 3K^{2/3}L^{1/3}.$$

На аренду фондов и оплату труда выделено 150 ден.ед., стоимость аренды единицы фондов W_k =5 ден.ед./ед.ф., ставка заработной платы W_L =10ден.ед./чел.; цена единицы продукции p=5ден.ед..

Определить максимальный выпуск X^* двумя способами: по задаче на максимум прибыли и по задаче на максимум выпуска при заданном объеме издержек.

Решение проиллюстрировать графически, построив изокосты (линии постоянных издержек) для C=50,100,150 и изокванты (линии постоянных выпусков) для X=25.2; X^*.

Определить предельную норму замены одного занятого фондами в оптимальной точке.

Порядок выполнения задания.

1. Определим оптимальный выпуск продукции по задаче на максимум выпуска (см. (6)):

1.1. Т.к. F(0, L)=F(K, 0)=0, то в оптимальном решении $K^* > 0, L^* > 0$. Следовательно, условия (7) принимают вид:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \lambda W_K, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} = \lambda W_L \tag{8}$$

1.2. Подставим в (8) вид производственной функции $F(K, L) = 3K^{2/3}L^{1/3}$; получим:

$$2\frac{L^{1/3}}{K^{1/3}} = \lambda W_K, \qquad \frac{K^{2/3}}{L^{2/3}} = \lambda W_L \tag{9}$$

1.3. Поделим в (9) 1-ое уравнение на 2-ое:

$$2\frac{L}{K} = \frac{W_K}{W_L},$$

т.е. $\dfrac{2L}{K} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$,

или K=4L (10)

1.4. Подставив (10) в условие $W_K K^* + W_L L^* = 150$,

находим: $L^* = 5;\ K^* = 20$.

Следовательно, $X^* = 37{,}8$

2. Определение оптимального выпуска по задаче на максимум прибыли предлагаем провести самостоятельно.
3. Проиллюстрируем решение задачи геометрически. Для этого построим изокосты для C=50, 100, 150 и изокванты для X=25,2; 37,8 :

3.1. Введем значения L (например, от 0 до 20) в ячейки A1:A20;

3.2. Ячейки B1:B20, C1:C20, D1:D20 заполним значениями К, рассчитанными из уравнения

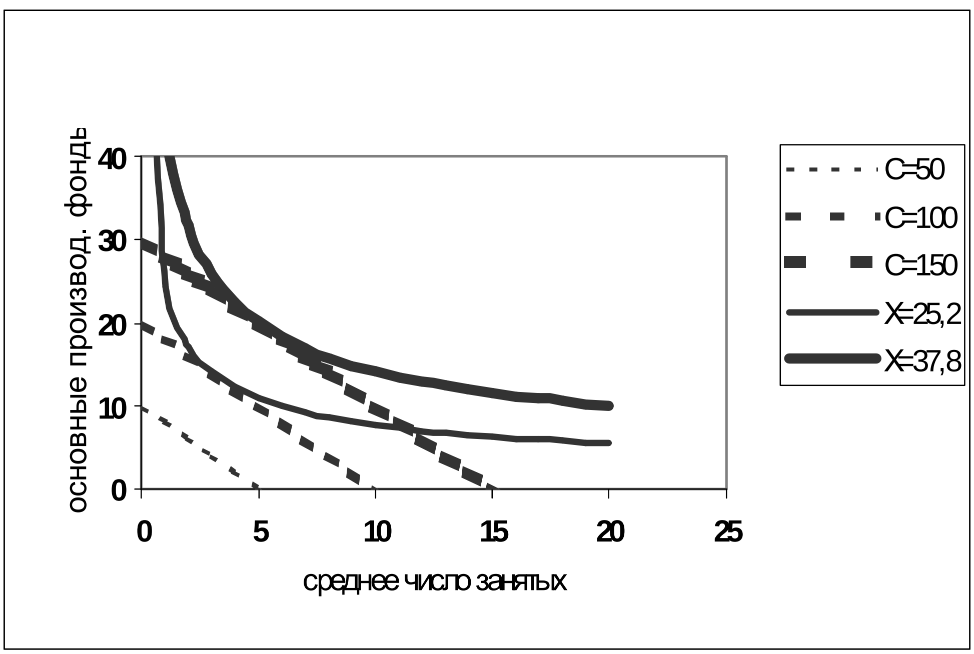
5К +10L=C (C=50, 100, 150)

3.3. Ячейки E1:E20, F1:F20 заполним значениями К, рассчитанными из уравнения

$3K^{2/3}L^{1/3} = X$ (X=25,2; 37,8)

3.4. Выделим блок A1:F20 и с помощью <Мастера диаграмм> построим изокосты и изокванты, выбрав "точечный" вариант построения графиков.

Построенный график должен иметь вид графика, изображенного на рис.



В оптимальной точке (20, 5) изокванта $X^* = 37{,}8$ и изокоста C=150, проходящие через эту точку, касаются, поскольку, согласно (8), нормали к этим кривым, заданные градиентами $(\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial L})$, (W_K, W_L), коллинеарны.

4. Рассчитаем норму замены труда фондами в оптимальной точке:

$$S_K = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K} = \frac{K^*}{2L^*} = \frac{20}{2*5} = \frac{1}{2},$$

т.е. один работающий может быть заменен двумя единицами фондов.

6.3. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Производственная функция фирмы имеет следующий вид:

$$X = -4x_1^2 + 24x_1 + 2x_1x_2 + 6x_2 - x_2^2,$$

где x_1, x_2-затраты ресурсов. Определить максимальный выпуск и обеспечивающие этот выпуск затраты ресурсов.

Задача 2. Производственная функция вида:

$X = 5x_1^{1/3}x_2^{1/3}x_3^{1/3}$ описывает зависимость между затратами ресурсов x_1, x_2, x_3 и выпуском X. Определить максимальный выпуск, если $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Каковы предельные продукты в оптимальной точке?

Задача 3. Производственная функция фирмы имеет следующий вид:

$$X = 3x_1^{1/3}x_2^{2/3}.$$

Определить предельные продукты по ресурсам и построить изокванту X=3. Найти норму замены первого ресурса вторым в точке $x_1 = x_2 = 1$.

7. Модель потребления

7.1. Предпочтения потребителя и его функция полезности.

Введем обозначения:

n – конечное число рассматриваемых товаров;

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - вектор-столбец товаров, приобретенных потребителем за определенный срок при заданных ценах и доходе за тот же срок.

Пространство товаров – это множество всевозможных наборов товаров x с неотрицательными координатами:
$C = \{x : x \geq 0 \}$.

Предполагается, что каждый потребитель имеет свои предпочтения на некотором подмножестве пространства товаров $X \subset C$, т.е. для $\forall x, y \in X$ имеет место одно из трех соотношений:

$x \succ y$ (набор x предпочтительнее y)

$x \prec y$ (набор x менее предпочтительнее, чем y)

$x \approx y$ (оба набора обладают одинаковой степенью предпочтения)

Отношения предпочтения обладают свойствами:

1) если $x \succ y$, $y \succ z$, $x \succ z$ (транзитивность)
2) если $x > y$, то $x \succ y$ (ненасыщаемость: больший набор всегда предпочтительнее меньшего)

Отношения предпочтения потребителя можно представить в виде функции полезности U(x), такой, что из $x \succ y$ следует U(x)>U(y) и из $x \approx y$ следует U(x)=U(y). Такое представление многовариантно. Например если U(x)-функция полезности, то C*U(x), lnU(x) – также функции полезности.

Предполагается, что функция полезности обладает свойствами:

1) $\dfrac{\partial U}{\partial x_i} > 0$ - с ростом потребления блага полезность растет;
2) $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial U}{\partial x_i} = \infty$ - небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность;

3) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} < 0$ - с ростом потребления блага скорость роста полезности замедляется;

4) $\lim\limits_{x_i \to \infty} \dfrac{\partial U}{\partial x_i} = 0$ - при очень большом объеме блага его дальнейшее увеличение не приводит к увеличению полезности.

Предельной полезностью товара называется предел отношения приращения полезности к вызвавшему этот прирост приращению товара:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad (1)$$

Таким образом, предельная полезность показывает, на сколько возрастет полезность, если товар возрастет на малую единицу.

Поверхностью безразличия называется гиперповерхность размера (n-1), на которой полезность постоянна:

$U(x)=C$ – const,

или $$dU = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = 0 \qquad (2)$$

Условие (2) означает, что касательная к поверхности безразличия перпендикулярна градиенту полезности.

Предельной нормой замены одного товара другим называется отношение предельных полезностей этих товаров:

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}} \qquad (3)$$

Норма замены показывает, сколько требуется единиц второго товара, чтобы заменить выбывшую единицу первого товара.

Бюджетным множеством называется множество тех наборов, которые может приобрести потребитель, имея доход M:

$B = \{x : \quad px \le M \}$,

где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ - вектор-строка цен.

7.2. Задача потребительского выбора

Задача рационального поведения потребителя на рынке заключается в выборе такого потребительского набора x^*, который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.

Формально задача потребительского выбора имеет вид:

$$U(x) \to \max$$

при условиях:

$$\begin{aligned} px &\le M \\ x &\ge 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Для решения этой задачи на условный экстремум применим метод Лагранжа. Выписываем функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = U(x) - \lambda(px - M).$$

Необходимые условия локального экстремума:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* = M \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x_i^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i = 0, \qquad i=1,2,\ldots n \qquad (6)$$

Из (6) следует, что потребитель при фиксированном доходе так выбирает набор x^*, что в этой точке отношения предельных полезностей равны отношениям цен:

$$\frac{\partial U(x_1^*)}{\partial x_1} : \ldots : \frac{\partial U(x_n^*)}{\partial x_n} = p_1 : \ldots : p_n \qquad (7)$$

7.3. Пример и порядок выполнения лабораторного задания

Функция полезности потребителя имеет вид:

$$U(x_1, x_2) = 3x_1^{2/3} x_2^{1/3}.$$

Определить максимальную полезность, если потребитель имеет доход в 100д.е., а цены товаров соответственно равны 5 и 10д.е./е.т.. Какова норма замены второго товара первым в оптимальной точке?

Порядок выполнения задания

1. Рассмотрим аналитическое решение данной задачи.

Так как бюджетное ограничение в оптимальной точке должно выполняться как равенство, т.е.

$$5x_1^* + 10x_2^* = 300, \qquad (1)$$

и в силу того, что все товары необходимы, т.е. условие неотрицательности переменных будет выполнено автоматически, условия локального экстремума (5), (7) для данной задачи примут вид следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2x_2^*}{x_1^*} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} \\ 5x_1^* + 10x_2^* = 100 \end{cases} \qquad (2)$$

Из первого условия вытекает, что $4x_2^* = x_1^*$; подставляем это соотношение во 2-ое уравнение системы (2) и находим:

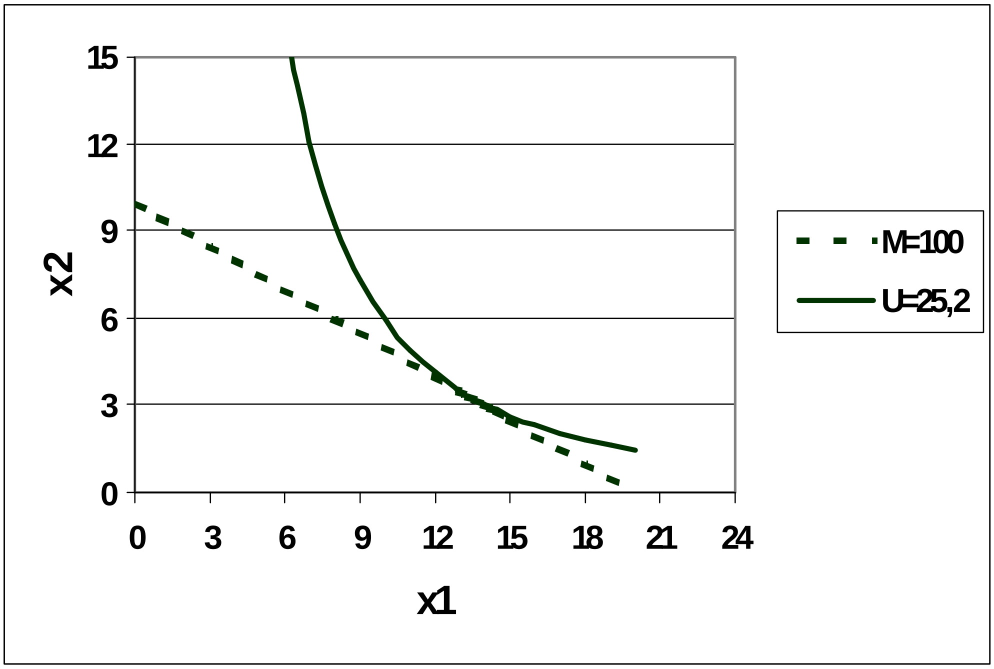
$$x_1^* = \frac{40}{3}; \quad x_2^* = \frac{10}{3}.$$

Следовательно, оптимальный набор товаров $x^* = (\frac{40}{3}, \ \frac{10}{3})$,

а максимальная функция полезности U_{max} =25,2

2. Геометрическое решение данной задачи состоит в следующем. Допустимое множество (то есть множество наборов благ, доступных для потребителя) представляет треугольник, ограниченный осями координат и бюджетной прямой. На этом множестве требуется найти точку, принадлежащую кривой безразличия с максимальным уровнем полезности. Поиск этой точки можно интерпретировать графически как последовательный переход на линии все более высокого уровня полезности до тех пор, пока эти линии еще имеют общие точки с допустимым множеством.

Графическая иллюстрация решения данной задачи, когда бюджетная прямая имеет вид уравнения $5x_1 + 10x_2 = 100$, а уровень максимальной полезности $3x_1^{2/3}x_2^{1/3}$= 25,2 представлена на рис.



3. Рассчитаем норму замены одного товара другим в оптимальной точке:

$$\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{2x_2^*}{x_1^*} = \frac{2*\frac{10}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{1}{2},$$

т.е. потребуется 2 ед. второго товара, чтобы заменить одну выбывшую единицу первого товара.

7.4. Задача для самостоятельного решения

Определить, какой набор товаров выберет потребитель, обладающий доходом в 300ден.ед., если его функция полезности

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3},$$

а цены товаров p_1=2д.е./е.т., p_2=4д.е./е.т., $p_3 = 1$д.е./е.т.

Литература

1. Федосеев В.В., Гармаш А.Н., и др. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов.- М.: ЮНИТИ, 1999.
2. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике.- М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Изд-во “Дело и Сервис”, 1999.
3. В.А. Колемаев. Математическая экономика.- М.: ЮНИТИ,1998.
4. Давнис В.В., Лихачева Л.Н., Эйтингон В.Н. Модели макроэкономического равновесия.- Воронеж, Изд-во ВГУ,1995.
5. Драйпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ.-М.: ФиС, 1986.

Содержание

Составители: Давнис Валерий Владимирович
Щепина Ирина Наумовна
Мокшина Светлана Ивановна
Воищева Ольга Станиславовна
Щекунских Светлана Станиславовна

Редактор: Бунина Т.Д.