

2. АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Задачи анализа

Анализ систем управления состоит в изучении их общесистемных свойств, условий выполнения ими своих функций и достижения заданных целей. В результате анализа качественно констатируются свойства поведения систем в целом и количественно оценивается степень удовлетворения требований к процессам управления. Анализ в широком смысле должен также объяснять, почему система с определенной структурой причинно-следственных взаимосвязей элементов с известными характеристиками имеет то или иное поведение.

Безусловными требованиями к свойствам поведения систем управления являются:

- устойчивость движений;
- инвариантность управляемой переменной к возмущениям и ковариантность с задающим воздействием;
- грубость (параметрическая инвариантность, робастность), т.е. ограниченная чувствительность свойств системы к вариациям характеристик элементов или связей.

Требования удобно рассматривать как множество систем \mathcal{M}^d , поведение которых удовлетворительно. Формально анализ при этом сводится к проверке принадлежности системы M к множеству удовлетворительных:

$$M \in \mathcal{M}^d. \quad (2.1)$$

При описании множества \mathcal{M}^d учитываются требования к свободным движениям собственно систем (M_S^d), свойствам каналов передач систем со связями со средой (M_{YSF}^d) и вынужденных движений расширенных систем M_{RS}^d , а также к дополнительным движениям, вызванным вариациями характеристик элементов и неполной определенностью моделей.

Описание множества \mathcal{M}^d , как правило, сводится к указанию допустимого отклонения от желаемой системы M^* . В идеальной желаемой системе мгновенно затухают переходные процессы, управляемая переменная абсолютно инвариантна к возмущениям, а вариации характеристик элементов не сказываются на этом идеальном поведении. Сопоставление с идеалом не всегда конструктивно. Часто формируют желаемые системы M^* , учитывающие естественную динамику объектов управления, характеристики воздействий среды, ресурсы управления и ограничения на переменные. Желаемые системы задают в виде типовых распределений корней характеристических полиномов, нулей и полюсов передаточных функций временных или частотных характеристик.

Показатели качества являются количественной мерой отклонения $\rho(M, M^*)$ анализируемой системы M от желаемой системы M^* .

В том случае, когда анализируемая система определена не полностью, т.е. является множеством $\{M\}$ полностью определенных моделей (см.1.6), процедура анализа сводится к проверке условия теоретико-множественного включения

$$\mathcal{M} = \{M\} \subset \mathcal{M}^d. \quad (2.2)$$

Если результат проверки положителен, т.е. при всех вариациях удовлетворяются требования, то анализируемая система робастна.

Непосредственная проверка условий (2.1), (2.2) возможна, если множества \mathcal{M} и \mathcal{M}^d заданы одним и тем же способом. Основная проблема анализа во многих случаях обусловлена различием языков описания систем и требований.

Таким образом, задачами анализа систем управления являются :

- установление фактов устойчивости, инвариантности и робастности;
- вычисление показателей качества;
- вывод об удовлетворительном (или неудовлетворительном) поведении системы.

2.2. Анализ устойчивости

Устойчивость по начальным условиям (по Ляпунову) - свойство собственно системы M_S . Если система устойчива, то затухают все составляющие свободных движений, вызванные ненулевыми начальными условиями. Свойство устойчивости анализируется по моделям типа M_S в форме однородных дифференциальных уравнений (1.3) или уравнений в форме пространства состояний (1.13).

2.2.1. Свободные движения

Преобразуя дифференциальные уравнения (1.3) по Лапласу при ненулевых начальных условиях

$$D(s) Y(s) = D_0(s),$$

легко получить изображение свободных движений

$$Y_c(s) = D_0(s)/D(s).$$

Коэффициенты полинома $D_0(s)$ определяются начальными условиями. Если корни $s_i, i=1, \dots, n$, ХП $D(s)$ простые, то выражение для свободных движений имеет вид

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n \frac{D_0(s_i)}{D'(s_i)} e^{s_i t}. \quad (2.3)$$

Знак (') в выражении (2.3) означает дифференцирование полинома по s .

2.2.2. Условие устойчивости

Как видно из выражения (2.3), необходимым и достаточным условием затухания экспонент является отрицательность действительных частей корней ХП:

$$\forall i = 1, \dots, n: \operatorname{Re} s_i < 0. \quad (2.4)$$

Наилучшим решением задачи анализа устойчивости является формирование ХП системы и вычисление всех его корней, что вполне реально в условиях применения соответствующих компьютерных программ. Существуют критерии устойчивости Рауса-Гурвица (Routh-Hurwitz), Михайлова и др., позволяющие устанавливать выполнение условия (2.4) без вычисления корней ХП.

2.2.3. Требования к свободным движениям

Устойчивость - необходимое, но не достаточное условие работоспособности систем управления. Практически требуется принадлежность корней ХП некоторой подобласти левой полуплоскости (рис.2.1). Эта подобласть, по существу, является геометрическим выражением модели требований m_s^d . Параметры подобласти m_s^d являются корневыми показателями качества собственных движений - переходных процессов в системах управления. Наиболее часто ограничивают следующие корневые показатели качества: η - **степень устойчивости** (быстродействие), которая определяет абсолютное затухание; μ - **колебательность**, определяющая относительное затухание (рис.2.1).

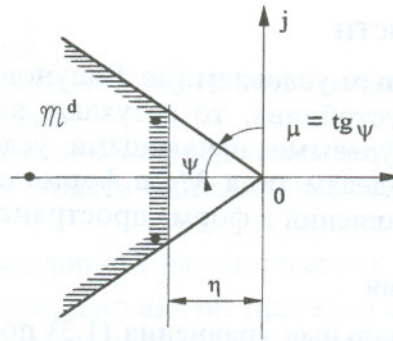


Рис.2.1. Корневые показатели качества

Для идеальных систем переходные процессы затухают мгновенно, т.е. $\eta \rightarrow \infty$ корни ХП стремятся в бесконечность, оставаясь в левой полуплоскости.

2.3. Анализ инвариантности

2.3.1. Формы инвариантности

Под **абсолютной инвариантностью** переменной $y(t)$ понимается полная независимость вынужденных движений от воздействия среды $f(t)$. Если вынужденные движения при ограниченных воздействиях ограничены, то говорят об **инвариантности до ϵ** .

Основным для классической теории инвариантности является случай, когда в воздействиях нет никакой информации, в том числе и статистического характера.

Селективная инвариантность означает независимость (ограниченную зависимость) установившейся реакции системы на воздействия среды определенного вида.

Ковариантность переменных означает их совпадение (близость). Управляемая переменная $y(t)$ должна быть ковариантной с задающим воздействием $g(t)$. Это значит, что переменная ошибки системы управления

$$e(t) = g(t) - y(t)$$

должна быть инвариантной к заданию.

Теоретически без потери общности ограничиваются рассмотрением только условий инвариантности переменных. Практически для следящих систем преиму

щественно исследуют условия ковариантности, а для систем стабилизации и подавления возмущений - условия инвариантности.

Инвариантность - свойство систем по преобразованию сигналов. Инвариантность абсолютная и до ε анализируются по моделям систем со связями со средой M_{YSF} (рис.1.16). Свойство селективной инвариантности анализируется по моделям расширенной системы M_R .

2.3.2. Вынужденные движения систем управления

Изображение реакции системы на воздействие f при нулевых предначальных условиях

$$Y(s) = \Phi(s)F(s)$$

равно произведению ПФ системы

$$\Phi(s) = \frac{B(s)}{D(s)} \quad (2.4)$$

на изображение воздействия

$$F(s) = \frac{B_f(s)}{D_f(s)}. \quad (2.5)$$

Функция времени $y(t)$ - оригинал изображения $Y(s)$ - имеет установившуюся и переходную составляющие

$$y(t) = y_y(t) + y_{\Pi}(t),$$

которые для случая простых полюсов $Y(s)$ запишутся так:

$$y_y(t) = \sum_{k=1}^{n_f} \frac{B(s_k)}{D(s_k)} \frac{B_f(s_k)}{D_f'(s_k)} \exp(s_k t); \quad (2.6)$$

$$y_{\Pi}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B(s_i)}{D'(s_i)} \frac{B_f(s_i)}{D_f(s_i)} \exp(s_i t). \quad (2.7)$$

Характер установившейся составляющей $y_y(t)$ определяется полюсами функции $F(s)$ $\{s_k; k=1, \dots, n_f\}$, иначе - комплексным спектром изображения воздействия (2.5), а переходной $y_{\Pi}(t)$ - полюсами $\{s_i; i=1, \dots, n\}$ ПФ системы (2.4), иначе - собственным спектром системы.

2.3.3. Условия инвариантности

Условие абсолютной инвариантности переменной $y(t)$ записывается так:

$$\forall s: \Phi(s) = 0.$$

Ясно, что при этом не будет ни установившейся, ни переходной составляющей реакции при любых ограниченных воздействиях. Однако будут свободные движения из-за ненулевых предначальных условий.

Если выполняется условие

$$\forall s: |\Phi(s)| < \varepsilon > 0,$$

то реакция системы на любое ограниченное воздействие ограничена.

Селективная абсолютная инвариантность достигается, как это следует из выражения (2.6), при условии обращения в нуль ПФ системы на спектре воздействия

$$\forall s_k: \Phi(s_k) = 0. \quad (2.8)$$

Установившаяся реакция отсутствует при взаимной компенсации нуля ПФ системы и полюса изображения воздействия, т.е. при условии

$$B(s_k) = 0. \quad (2.9)$$

Выполнение условия селективной инвариантности до ε

$$\forall s_k: |\Phi(s_k)| < \varepsilon > 0$$

обеспечивает ограниченность установившихся составляющих реакции.

Селективная инвариантность является обобщением понятия астатизма систем управления на воздействия произвольного вида. Как известно, астатические системы способны подавлять и/или воспроизводить степенные воздействия с нулевой или постоянной установившейся ошибкой. Изображения степенных воздействий (1.17) имеют нулевые полюсы кратности $(\lambda + 1)$, $\lambda = 0, 1, 2, \dots$. Соответственно ПФ астатических систем от точки приложения воздействия до переменной ошибки имеют нули необходимой кратности ν . В случае селективной инвариантности к воздействию произвольного вида $f(t)$ ПФ системы обращается в нуль на не обязательно нулевых полюсах s_k изображения $F(s)$. При этом селективная абсолютная инвариантность обобщает случай, когда порядок астатизма ν превышает степень воздействия ($\nu > l$), а селективная инвариантность до ε - случай, когда порядок астатизма равен степени воздействия ($\nu = l$).

Установившаяся ошибка селективно абсолютно инвариантной системы управления равна нулю независимо от параметров воздействия и параметров системы. Действительно, из выражения (2.6) для установившегося движения видно, что при условии (2.9) оно равно нулю для любых значений $Bf(s_k)/Df(s_k)$ и $D(s_k) \neq 0$. Таким образом, селективно абсолютно инвариантные системы робастны в смысле качества установившихся процессов.

2.3.4. Показатели качества инвариантных систем

Все работоспособные системы управления инвариантны в той или иной форме, однако количественная мера инвариантности может быть различной. Требования

к свойствам каналов преобразования при отсутствии информации о свойствах среды формализуются в виде модели M_{YSF}^d .

Абсолютная инвариантность - свойство идеальных систем, которое практически нереализуемо и не нуждается в количественной оценке.

Количественные оценки инвариантности до ε являются мерами отклонения реакций анализируемой системы от абсолютно инвариантной системы. В условиях полной неопределенности среды рассматриваемый канал удобно оценивать интегрально

$$I = \int_0^{\infty} w^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \Phi(s) \Phi(-s) ds, \quad (2.10)$$

где: $w(t)$ - импульсная переходная функция;

$\Phi(j\omega)$ - комплексная частотная характеристика;

$\Phi(s)$ - ПФ анализируемого канала.

Другой показатель качества оценивает "расстояние" до абсолютно инвариантной системы как максимум амплитудно-частотной характеристики на всем диапазоне частот

$$\varepsilon = \max_{\omega \geq 0} |\Phi(j\omega)|.$$

На рис.2.2а изображены графики амплитудно-частотных характеристик абсолютно инвариантной (прямая 1, совпадающая с осью абсцисс) и инвариантной до ε (кривая 2) систем.

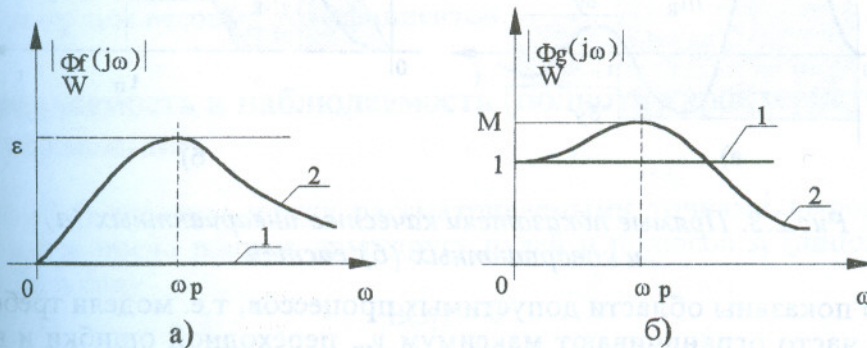


Рис.2.2. Амплитудно-частотные характеристики инвариантных (а) и ковариантных (б) систем

Если оценивается канал воспроизведения задающего воздействия, то его свойства сопоставляются с идеальной системой, в которой выход абсолютно ковариантен со входом. На рис.2.2б изображены графики амплитудно-частотных характеристик абсолютно ковариантной (прямая 1) и ковариантной до ε (кривая

2) систем. Обычно используются следующие косвенные показатели качества: ω_p - резонансная частота; M - показатель колебательности.

Требования к расширенным системам M_R характеризуют свойства каналов по преобразованию сигналов для известной модели среды. Модель требований m_R^d количественно оценивает свойства селективной инвариантности по отношению к указанным воздействиям.

Селективно абсолютно инвариантные системы имеют нулевую установившуюся ошибку.

В селективно инвариантных до ϵ системах значения отличных от нуля установившихся ошибок при указанных воздействиях принимаются за показатели качества.

Если о воздействиях нет полной определенности, а указано только множество существенных частот Ω_f воздействия, то селективная инвариантность до ϵ количественно оценивается по амплитудно-частотной характеристике $|\Phi(j\omega)|$

$$\max_{\omega \in \Omega_f} |\Phi(j\omega)|.$$

Выполнение условий селективной абсолютной инвариантности (2.8) обеспечивает равенство нулю установившейся составляющей (2.6) реакции системы, однако, как видно из выражения (2.7), на выходе системы могут наблюдаться переходные процессы. Прямые показатели качества ограничивают непосредственно переходные процессы (рис.2.3а), а их вычисление, как правило, связано с построением этих процессов.

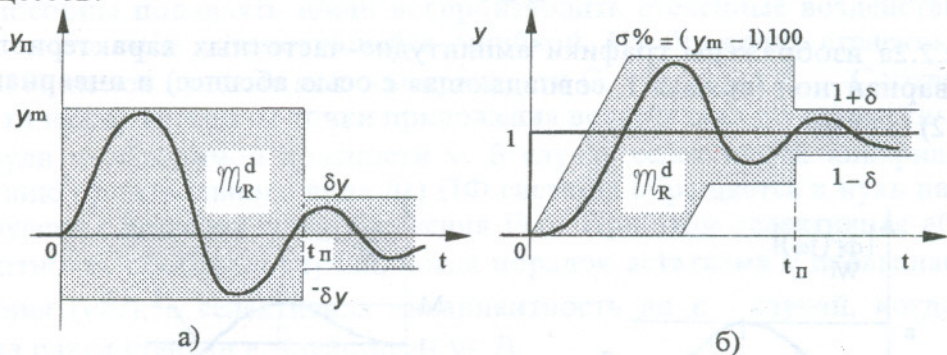


Рис.2.3. Прямые показатели качества инвариантных (а) и ковариантных (б) систем

На рис.2.3 показаны области допустимых процессов, т.е. модели требований.

Наиболее часто ограничивают максимум y_m переходной ошибки и время процессов t_p , по истечении которого ошибка не выходит за пределы достаточно малой окрестности δy оси абсцисс.

Если оценивается канал воспроизведения задающего воздействия, то переходные процессы сопоставляются с реакцией абсолютно ковариантной системы (рис.2.3б). Прямыми показателями качества, ограничивающими протекание процессов, являются: перерегулирование $\sigma\%$, время процессов t_p и др.

Переходные процессы часто оцениваются интегрально

$$I = \int_0^{\infty} y_{\Pi}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Y_{\Pi}(s) Y_{\Pi}(-s) ds,$$

что соответствует оценке "расстояния" до идеальной системы ($y_{\Pi}^*(t) \equiv 0$). Более конструктивные оценки сравнивают анализируемые процессы с желаемыми

$$I = \int_0^{\infty} \left(y_{\Pi}^*(t) - y_{\Pi}(t) \right)^2 dt.$$

Для количественной оценки переходных процессов также используются обобщенные квадратичные функционалы

$$I_p = \int_0^{\infty} \left[a_0 y^2(t) + a_1 \dot{y}^2(t) + \dots + a_p (y^{(p)})^2(t) \right] dt,$$

безусловные экстремали которых $y_{\Pi}^*(t)$ отвечают желаемым процессам, для которых $I_p = I_p^*$, а разница

$$\delta I_p = I_p^* - I_p$$

между значениями функционала служит мерой расстояния анализируемых систем от желаемых.

В том случае, когда модели объектов управления представляются в форме пространства состояний (1.12), функционалы качества описываются в виде:

$$I = \int_0^{\infty} (\mathbf{v}^T \mathbf{Q} \mathbf{v} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt, \quad (2.11)$$

где: \mathbf{v} - вектор состояния;
 \mathbf{u} - вектор управления;
 \mathbf{Q}, \mathbf{R} - матрицы весовых коэффициентов.

2.4. Управляемость и наблюдаемость (полнота характеристик) систем управления

Если ПФ (2.4) системы между рассматриваемыми точками вырождается, т.е. имеет некоторое число равных друг другу нулей и полюсов s_i (диполей), то, как видно из (2.7), в силу

$$B(s_i) = 0$$

реакция системы на воздействие неполная - в ней отсутствуют соответствующие моды - переходные составляющие $\exp(s_i t)$. В более общем случае говорят о неполной управляемости или неполной наблюдаемости состояния системы по рассматриваемому каналу.

Временные и частотные характеристики системы отражают только свойства полной части системы.

Потеря части собственных свойств систем особенно существенна, если s_i - правый корень. Поэтому следует избегать сокращения общих делителей полиномов B и D ПФ, по крайней мере, до того, как будет установлена удовлетворительность динамики неполной части системы.

Свойство полноты относится к модели системы со связями со средой M_{YSP} (рис.1.16). Выявление управляемости и наблюдаемости объектов и систем составляет важную часть анализа систем управления.

Анализ полноты сводится к выявлению нетривиальных общих делителей полиномов B и D числителя и знаменателя ПФ (2.4). Во-первых, можно непосредственно сопоставить нули и полюсы ПФ. Достоинство этого способа в том, что здесь выявляются и приближенные диполи. Во-вторых, наибольший общий делитель полиномов можно найти их делением по алгоритму Евклида. В-третьих, можно исследовать результат полиномов - специальный определитель, построенный из коэффициентов полиномов B и D .

Если модель системы представлена в форме пространства состояний (1.12), то для анализа управляемости и наблюдаемости Калманом (R. Kalman) предложены матричные критерии. Состояние системы управляемо полностью, если матрица управляемости не вырождена, т.е.

$$\det (B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B) \neq 0.$$

Состояние системы полностью наблюдаемо, если не вырождена матрица наблюдаемости, т.е.

$$\det \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

2.5. Анализ влияния вариаций характеристик элементов на свойства систем управления

Из-за неполной идентификации или последующего упрощения моделей, неточной реализации алгоритмов управления или изменения свойств элементов в процессе эксплуатации систем их модели отличаются от оригиналов. При построении математических моделей и проектировании систем управления возникает задача оценки степени влияния неполной определенности моделей или вариаций характеристик элементов на установившиеся и переходные процессы систем в целом.

Необходимым условием нормального функционирования систем управления является их робастность (грубость, параметрическая инвариантность), т.е. ограниченная чувствительность основных свойств системы (устойчивости и инвариантности) к вариациям характеристик элементов и/или связей. Поэтому анализ систем управления должен содержать этап оценки дополнительных движений, вызванных воздействиями среды, приводящими к изменениям динамических свойств элементов этих систем (параметров, структур операторов или даже топологии связей). Результаты такого анализа также помогают объяснить, почему данная система

имеет то или иное поведение, каковы средства его изменения при синтезе в требуемом направлении.

При некоторых условиях вариации систем можно рассматривать как их неполную определенность, а соответствующие модели представлять как множества полностью определенных моделей (подразд. 1.6). В подразд. 2.1 отмечалось, что анализ в этом случае сводится к проверке условия теоретико-множественного включения (2.2) множества анализируемых систем $\{M\}$ в множество требуемых \mathcal{M}^d .

Выше обсуждались задачи анализа полностью определенных моделей третьего ранга $M(R=3)$. В этом подразделе рассматриваются задачи анализа различных ситуаций для не полностью определенных моделей.

2.5.1. Анализ систем при параметрических вариациях

В случае модели $M(2)$ имеет место множество систем, различающихся параметрами (рис. 1.11а). Модели $M(2)$ имеют фиксированную структуру операторов всех элементов, поэтому такая ситуация называется структурированной неопределенностью.

Простейшим методом анализа систем при параметрических вариациях является вычисление приращений характеристик систем при конечных вариациях тех или иных параметров, т.е. многократный анализ систем с различными параметрами.

Разработаны методы анализа устойчивости так называемых интервальных систем, коэффициенты характеристических полиномов которых принадлежат заданным интервалам (критерий В.Л. Харитонов).

Для тех ситуаций, когда неизвестны интервалы изменения параметров, в рамках теории чувствительности систем управления разработаны методы анализа параметрической чувствительности характеристик и показателей качества [20].

2.5.2. Анализ систем при неструктурированных вариациях операторов элементов

Модели первого ранга $M(1)$ имеют фиксированную топологию, однако структуры операторов некоторых элементов определены не полностью. Такую ситуацию неструктурированной неопределенности можно пытаться доопределить до рассмотренного выше случая параметризованных вариаций, однако здесь более плодотворно использование структурной теории чувствительности [20]. Рассмотрение структуры и свойств в частотной области позволяет выявить роль элементов и неструктурированной неопределенности их характеристик в формировании свойств системы в целом.

Для исследования влияния неструктурированных вариаций элементов на условия инвариантности системы используются функции чувствительности (ФЧ) ПФ систем $\Phi(s)$. Логарифмические ФЧ

$$S_i^\Phi(s) = \frac{\partial \ln \Phi(s)}{\partial \ln W_i(s)} = \frac{\partial \Phi(s)}{\partial W_i(s)} \cdot \frac{W_i(s)}{\Phi(s)}$$

позволяют оценить относительное влияние вариаций ПФ элементов на ПФ системы:

$$\frac{\delta \Phi(s)}{\Phi(s)} \cong S_i^\Phi(s) \frac{\delta W_i(s)}{W_i(s)}.$$

Обычно ФЧ оцениваются по их модулям при $s = j\omega$; $\omega \geq 0$. Модули $|S_i^\Phi(j\omega)|$ в виде частотных характеристик (ЧХ) показывают приближенную зависимость относительных приращений амплитудно-частотных характеристик элемента и системы на каждой частоте. Поскольку вариации звена $\delta|W_i(s)|$ не конкретизируются, то ФЧ применимы для исследования систем с неструктурированной неопределенностью операторов звеньев. Логарифмические ФЧ равны ПФ преобразованных графов систем [20]. Преобразования сводятся к введению в графы единичных дуг, так называемых диполей чувствительности.

Если варьируемая дуга принадлежит пути (позиция 1), то ФЧ равна ПФ графа от входа диполя чувствительности, вложенного в варьируемую дугу, до его выхода. Если варьируемая дуга принадлежит контурам, касающимся пути, но не принадлежит ни пути, ни контурам, не касающимся пути (позиция 2), то ФЧ равна ПФ графа от выхода единичной дуги до его входа (обратный диполь чувствительности). Несколько сложнее вычисляется ФЧ к дуге, занимающей позицию 3 к пути, т.е. принадлежащей контурам, не касающимся пути [20].

Рассмотрим пример графа двухконтурной системы (рис.2.4а). Пусть требуется вычислить ФЧ передачи Φ_g из вершины g в вершину y . Логарифмические ФЧ передачи к вариациям объекта (позиция 1) и местной обратной связи (позиция 2) соответственно равны:

$$S_{W_0}^{\Phi_g} = \Phi_{yh}; \quad S_a^{\Phi_g} = \Phi_{ca}.$$

В случае структурных схем (С-графов) следует несколько уточнить правила вычисления ФЧ. На рис.2.4б для примера показано введение единичных звеньев при вычислении ФЧ.

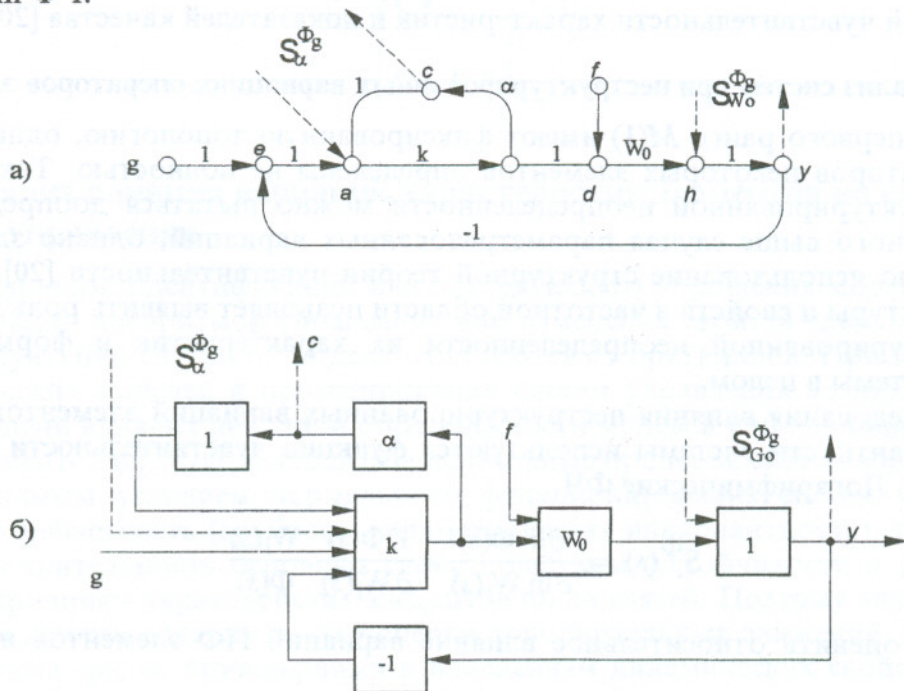


Рис.2.4. Пример двухконтурной системы

Для анализа относительного влияния различных дуг графа или звеньев системы на устойчивость можно использовать ФЧ определителя графа $\Delta(s)$ или ХП $D(s)$. Напомним, что определитель графа равен отношению ХП замкнутой D и разомкнутой D_0 систем.

Логарифмические ФЧ S_{ab}^{Δ} определителя графа к дуге (a,b) и ФЧ ХП к полиному числителя B_{ab} ПФ дуги равны (рис.2.5):

$$S_{B_{ab}}^D(s) = S_{ab}^{\Delta}(s) = -\Phi_{ca}(s).$$

Ясно, что ФЧ определителя графа и ХП отличаются только знаком от ФЧ тех передач графа, по отношению к которым варьируемая дуга занимает позицию 2.

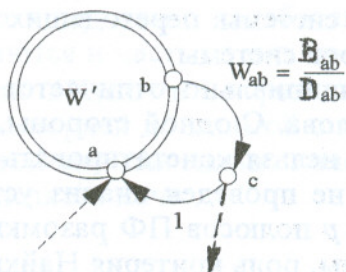


Рис. 2.5. Вычисление чувствительности ХП

2.5.3. Анализ устойчивости систем при топологических вариациях.

Критерий Найквиста

Модель нулевого ранга $M(0)$ - это множество систем, различающихся топологией. При рассмотрении таких систем предполагается, что вариации могут быть столь радикальными, что приводят к изменению числа элементов, разрыву связей между ними или появлению новых связей.

Наиболее интересен анализ влияния топологических вариаций систем на устойчивость процессов.

Если элементы системы не образуют контуров, то ее ХП равен произведению ХП звеньев

$$D(s) = D_0(s) = \prod_{\gamma=1}^N D_{\gamma}(s),$$

а множество его корней есть объединение подмножеств корней ХП звеньев. Вариации связей бесконтурных систем не изменяют их условия устойчивости и характер собственных движений.

В системах автоматического управления, реализующих принцип отрицательной обратной связи, важнейшее значение имеет анализ роли контуров систем в пере-

мещении корней ХП относительно мнимой оси. Целью анализа является определение числа корней ХП, переходящих через определенный контур на комплексной плоскости (для ХП $D(s)$ - контур Найквиста, т.е. мнимая ось) в результате замыкания или размыкания контура или групп контуров системы.

Частотный метод и его варианты, базирующиеся на принципе аргумента, дают возможность анализировать влияние топологических вариаций на устойчивость и качество процессов.

Критерий Найквиста: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) разомкнутой системы $p/2$ раз охватывала против часовой стрелки точку с координатами $(-1, j0)$, где p - число правых полюсов ПФ разомкнутой системы.

В частности, если разомкнутая система устойчива ($p=0$), то для устойчивости замкнутой системы АФХ разомкнутой системы $W(j\omega)$ не должна охватывать точку $(-1, j0)$. В общем случае анализ числа охватов АФХ критической точки позволяет определить число корней ХП системы, переходящих через мнимую ось при замыкании или размыкании контуров системы.

Критерий Найквиста принципиально отличается от критериев устойчивости типа Рауса-Гурвица и Михайлова. С одной стороны, по виду частотных характеристик разомкнутой системы нельзя констатировать устойчивость замкнутой системы, если предварительно не проведен анализ устойчивости разомкнутой системы и не определено число p полюсов ПФ разомкнутой системы вне левой полуплоскости. С другой стороны, роль критерия Найквиста более значительна. Его достоинством является возможность анализа системы в зависимости от характеристик элементов, образующих контур.

Частотные характеристики разомкнутых контуров в форме АФХ $W(j\omega)$ (рис.2.6а) или соответствующих логарифмических частотных характеристик $L(\omega)$ $\varphi(\omega)$ (рис.2.6б) содержат более богатую информацию, чем это необходимо для установления факта устойчивости замкнутой системы.

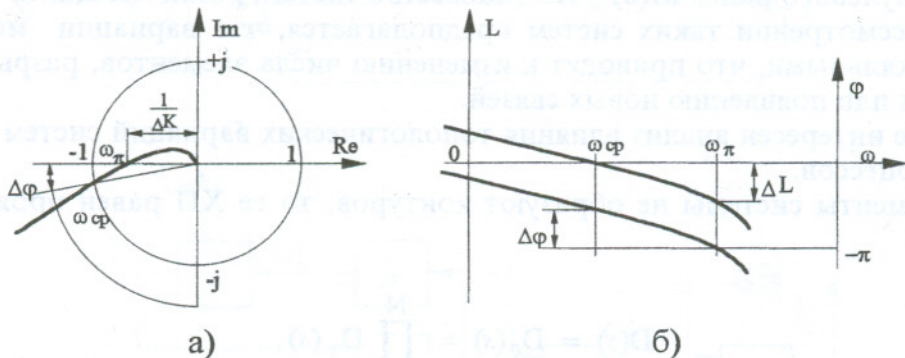


Рис.2.6. Частотные характеристики контура и косвенные показатели качества

По расположению частотной характеристики относительно точки $(-1, j0)$ можно судить о ближайших к мнимой оси - доминирующих - корнях ХП замкнутой системы, в основном определяющих переходные процессы в системах управления. На практике часто используют следующие косвенные показатели качества, оценивающие расстояние от частотной характеристики до критической точки:

$$\Delta K = \frac{1}{|W(j\omega_{\pi})|}; \Delta L = 20 \lg \Delta K$$

- запас устойчивости по модулю и

$$\Delta\varphi = \varphi(\omega_{ср}) + \pi$$

- запас устойчивости по фазе. Частота среза контура $\omega_{ср}$ удовлетворяет условию

$$|W(j\omega_{ср})| = 1; L(\omega_{ср}) = 0,$$

а на частоте ω_{π} фазовая характеристика контура $\varphi(\omega)$ имеет значение $-\pi$ рад.

При привлечении этих косвенных показателей для анализа и оценки качества процессов следует иметь в виду условия их применения. Предполагается, что разомкнутая система устойчива и не сильно колебательна. В результате замыкания контура корни ХП перемещаются и часть из них приближается к мнимой оси. Запасы устойчивости по модулю $\Delta K(\Delta L)$ и по фазе $\Delta\varphi$ показывают относительное расстояние от доминирующих корней до мнимой оси - границы устойчивости. Если разомкнутая система неустойчива или сильно колебательна, то частотные показатели качества следует определять иначе.

2.5.4. Анализ грубости систем управления

Важное значение при анализе систем управления имеет исследование их грубости.

Система называется **грубой** (по А.А. Андронову), если малые изменения параметров не приводят к качественному изменению ее поведения. В линейных системах негрубость имеет место, если в результате малых изменений параметров корни ХП переходят через мнимую ось.

Строго говоря, система, находящаяся на границе устойчивости, является негрубой. Наиболее опасен переход корней из левой полуплоскости в правую через бесконечность. Если при конечном, так называемом бифуркационном, значении некоторого параметра происходит обнуление старшего коэффициента ХП, т.е. понижение его степени, то корень ХП уходит в бесконечность. В случае малых изменений параметра старший коэффициент может стать отрицательным, т.е. корень с бесконечно большим модулем переходит в правую полуплоскость, а соответствующая составляющая процесса катастрофически расходится.

Условием катастрофической негрубости является

$$n < n_0 = \sum_{\gamma=1}^N n_{\gamma}.$$

Здесь: $n = \deg D$; $n_0 = \deg D_0$ - степени ХП системы; n_{γ} - степени ХП звеньев D_{γ} .

2.6. Анализ многоуровневых систем управления

Анализ динамических систем управления со сложной структурой предполагает предварительное построение частных моделей, соответствующих выявляемым свойствам:

- характеристических полиномов - при анализе устойчивости;
- передаточных функций, временных и частотных характеристик - при анализе инвариантности и ковариантности;
- возвратных отношений, т.е. передаточных функций и частотных характеристик разомкнутых систем - при анализе роли контуров;
- функций чувствительности - при анализе влияния вариаций звеньев на свойства систем.

Методы и алгоритмы построения перечисленных и других характеристик разработаны для систем 0-го уровня, представленных в форме систем дифференциальных уравнений (1.7), (1.8), а также для сигнальных графов и структурных схем.

Напомним, что классические структурные схемы, *S*-графы и сигнальные графы являются моделями 1-го уровня частного вида и, как ясно из 1.4, строятся на элементах, описываемых одномерным оператором (с одним входом и одним выходом - типа SISO). Для моделей *L*-го уровня общего вида (рис.1.12), образованных произвольной ориентированной взаимосвязью подсистем (*L*-1)-го уровня со многими входами и выходами (типа MIMO), в классической теории регулирования не создавались специальные методы анализа. Вместе с тем процедуры исследования систем произвольного уровня *L* в некоторых случаях могут быть развиты на основе известных методов.

Из определения многоуровневых систем, введенного в 1.9, следует, что исследование системы любого уровня *L* можно проводить по методам и алгоритмам, разработанным для систем 0-го и 1-го уровней.

Ниже рассмотрены некоторые способы анализа систем 1-го уровня общего вида, базирующиеся на методах, разработанных для систем 0-го уровня и систем 1-го уровня частного вида.

2.6.1. Понижение уровня модели

Если объединить подсистемы уравнений блоков системы 1-го уровня (рис.1.12), то получится система уравнений с блочными матрицами *D*, *B* и *C*:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{x} &= \mathbf{B}\mathbf{f}; \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Диагональными блоками матрицы *D* будут матрицы подсистем \mathbf{D}^m ; $m = 1, \dots, M$; связи между подсистемами представляются недиагональными элементами, позиции которых определяются топологией связей подсистем. В блочной матрице *D*, а также в матрицах *B* и *C* сохраняется исходная информация о системе 1-го уровня.

Приведем для примера структуру блочных матриц системы, изображенной на рис.1.12:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{D} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} \text{D}^1 & & \text{B}_2^1 \\ \hline \text{B}_1^2 & \text{D}^2 & \text{B}_2^2 \\ \hline & \text{B}_2^3 & \text{D}^3 \end{array} \right] \\ \text{C} \end{array} \\
 \times \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \left[\begin{array}{c} \text{x}^1 \\ \text{x}^2 \\ \text{x}^3 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{B} \\ \left[\begin{array}{c} \text{B}_1^1 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \end{array} f^0 \\
 \\
 y = \left[\begin{array}{c} | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right] \times \mathbf{x}
 \end{array}$$

Игнорируя блочный характер матриц \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{C} , получаем обыкновенные матрицы системы 0-го уровня, к которым применимы известные методы получения характеристического полинома и передаточных функций (п.1.8.1).

Ясно, что анализ системы любого уровня L таким образом можно последовательно свести к анализу системы 0-го уровня.

Недостатками этого способа являются:

- невозможность исследования зависимости свойств системы от характеристик подсистем;
- увеличение размеров системы уравнений, которое может вызвать вычислительные проблемы.

По объединенной системе уравнений (2.13) можно построить абстрактный граф (п.1.7.2) - систему 1-го уровня частного вида. Это позволяет использовать топологические методы (например, формулу Мэсона) для анализа системы в целом. Однако из-за несоответствия топологии графа реальным элементам системы управления содержательные задачи теории управления по таким графам в общем случае не решаются.

2.6.2. Построение системных графов

Пусть по каждой из подсистем уравнений системы 1-го уровня построен свой подграф G^m ; $m = 1, \dots, M$. Если подграфы соединить согласно связям между подсистемами, то получится так называемый **системный граф** [13]. На рис. 2.7 показан пример системного графа, соответствующего структуре на рис.1.12.

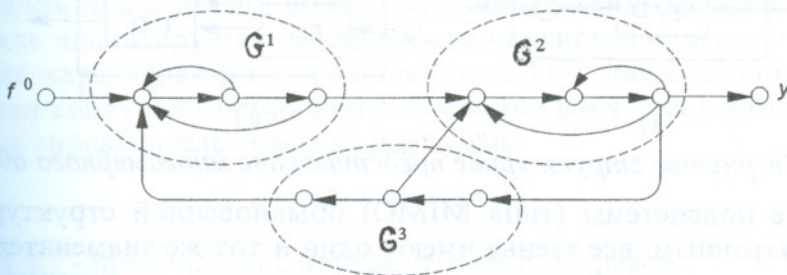


Рис.2.7. Пример системного графа

В системном графе, как и в блочных матрицах, полностью сохраняется исходная информация. Кроме того, благодаря дополнительной информации, привлекаемой при построении подграфов по системам уравнений, полученная система имеет 2-й, искусственно созданный уровень. Для анализа системных графов необходимо разрабатывать и применять свои методы.

2.6.3. Топологическая редукция

Для реализации принципа рекуррентного объяснения необходимо иметь процедуры, позволяющие строить характеристики систем L -го уровня - характеристические полиномы, передаточные функции, частотные и другие характеристики - по характеристикам подсистем $(L-1)$ -го уровня.

Характеристики, иначе избыточные частные модели подсистем, получаются путем исключения внутренних переменных в уравнениях или топологической редукции подграфов.

Задача решается просто, если все подсистемы имеют один вход и один выход (типа SISO). В результате топологической редукции подсистемы описываются скалярными операторами - передаточными функциями, частотными характеристиками. Сворачивание подсистем дает обыкновенный граф, для анализа которого применяются известные методы теории управления.

Если подсистема имеет несколько входов и несколько выходов (типа MIMO), то исключение всех внутренних переменных означает описание подсистемы в виде передаточной матрицы W или пары $\langle D, B \rangle$, где: D - характеристический полином; B - полиномиальная матрица числителей передаточных функций. В результате подсистема "распадается" на несколько параллельно соединенных звеньев (рис.2.8а).

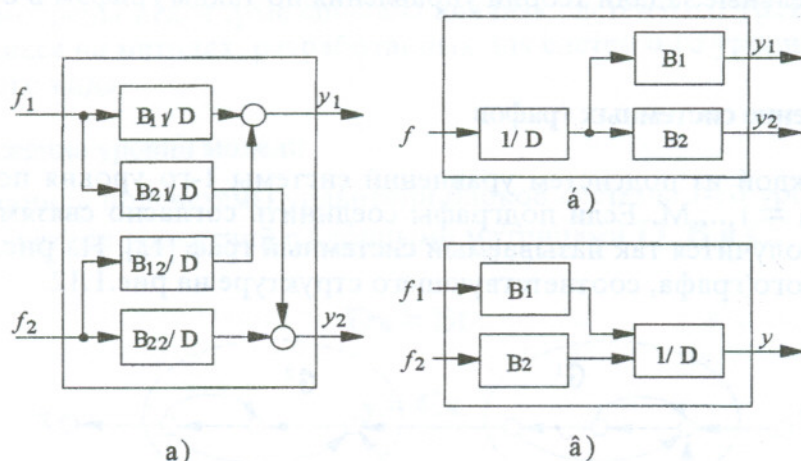


Рис. 2.8. Свернутое структурное представление многомерного объекта

Представление подсистемы (типа MIMO) обыкновенной структурной схемой оказывается избыточным: все звенья имеют один и тот же знаменатель - полином D . К обыкновенным графам, полученным заменой подсистем биграфами (рис.2.8а), не всегда применимы методы классической теории управления. Должны

также модифицироваться алгоритмы построения их характеристик в символьной форме.

В том случае, когда некоторые подсистемы имеют один вход, но несколько выходов (типа SIMO) или несколько входов, но один выход (типа MISO), свернутому описанию подсистем можно сопоставить неизбыточное структурное представление. Для этого вводится отдельное звено с передаточной функцией $1/D$, как это показано на рис.2.8б и рис.2.8в.

Топологическая редукция подсистем, уменьшая число переменных, приводит к росту порядков уравнений, описывающих подсистемы. Появляется задача понижения порядка - структурной редукции. Она решается путем исключения неполных (не полностью управляемых и наблюдаемых) частей подсистем или/и сокращения интервала Ω адекватности моделей по частотной оси (рис.1.10), например за счет игнорирования больших по модулю полюсов и нулей.

Свернутые модели подсистем могут иметь форму частотных характеристик - комплексных матриц (рис.1.13). Это неструктурированная (непараметрическая) форма представления операторов применяется в частотных методах исследования многомерных систем [24,31]. В этом случае отсутствует проблема структурной избыточности. Другое достоинство частотного подхода - по виду ЧХ можно подбирать наиболее существенный для анализа системы данного уровня L частотный диапазон, т.е. одновременно решать задачу структурной редукции за счет сокращения интервалов частот. Кроме того, при описании подсистем в частотной области автоматически исключаются неполные части (компенсирующиеся нули и полюсы передаточных функций). В силу сказанного частотные методы, дополненные контролем образования и исключения неполных частей подсистем, оказываются весьма перспективными при анализе и синтезе многоуровневых систем управления.

2.6.4. Анализ устойчивости многоуровневых систем

Устойчивость системы любого уровня L можно анализировать, понижая ее уровень до 0-го. Однако при этом не будет выявлена роль подсистем и связей между ними. Ниже рассматривается частотный метод анализа устойчивости многоуровневых систем, представленных в форме системного графа.

В результате топологического анализа выявляются сильно связанные компоненты графа, в том числе дуги, не входящие в контуры. Это обеспечивает декомпозицию процедуры анализа - необходимым и достаточным условием устойчивости сложной системы является устойчивость каждого сильного компонента графа.

Пусть выделен сильный системный граф, образованный подграфами G^m ; $m = 1, \dots, M$. Вначале анализируется устойчивость подсистем и выявляется число правых корней их характеристических полиномов D^m ; далее анализ заключается в выявлении роли контуров взаимосвязей подсистем в перемещении этих корней.

Представим определитель графа в виде суммы

$$\Delta = \Delta^0 + \delta\Delta,$$

где: $\Delta^0 = \prod_m \Delta^m$ - произведение определителей подграфов;

$\delta\Delta$ - приращение определителя за счет контуров взаимосвязей подсистем.

Составим отношение

$$K_e = \frac{\delta\Delta}{\Delta^0}, \quad (2.14)$$

которое примем за передаточную функцию эквивалентной одноконтурной системы (рис.2.9). Определитель этой системы

$$\Delta_e = 1 - K_e$$

равен отношению характеристических полиномов системы D и системы с разомкнутыми контурами взаимосвязи подсистем D^0 :

$$\Delta_e = \frac{D}{D^0}, \quad (2.15)$$

где:

$$D^0 = \prod_{m=1}^M D^m.$$

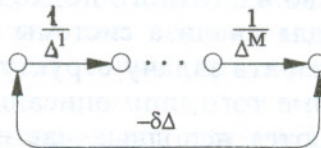


Рис.2.9. Эквивалентная одноконтурная система

Таким образом, одноконтурная система (рис.2.9) оказывается эквивалентной исходной системе в смысле характеристического полинома. В одноконтурной эквивалентной системе ясно видна роль характеристик подсистем и контуров связей.

Представим характеристический полином системы в виде:

$$D = D^0 + \delta D,$$

где δD - приращение за счет контуров взаимосвязей подсистем. Можно показать, что передаточная функция одноконтурной системы равна отношению:

$$K_e = \delta D / D^0.$$

Применение критерия Найквиста к эквивалентной системе (рис.2.9) позволяет установить число корней характеристического полинома, переходящих через мнимую ось в результате замыкания/размыкания контуров связей подсистем.

При отсутствии контуров взаимосвязей подсистем (связи, не образующие контуров, могут присутствовать) приращение определителя графа тождественно равно нулю: $\delta\Delta \equiv 0$, а характеристический полином системы равен произведению характеристических полиномов подсистем (2.15), т.е. устойчивость системы определяется устойчивостью подсистем. Этот факт устанавливается на этапе топологического анализа.

Достаточным условием сохранения числа корней характеристического полинома внутри контура Найквиста - правой полуплоскости является

$$\forall \omega: |\delta\Delta(j\omega)| < |\Delta^0(j\omega)|. \quad (2.16)$$

При этом имеем

$$|K_e(j\omega)| < 1.$$

Условие (2.16) не является необходимым.

По условию (2.16) можно заключить, что увеличение модулей определителей подграфов $|\Delta^m(j\omega)|$ является средством относительного ослабления влияния на устойчивость контуров взаимосвязей подсистем. Повышать модули определителей подграфов можно путем увеличения усиления контуров за счет усиления дуг, не входящих в контуры связи подсистем.

В случае системы 2-го и выше уровня процедура анализа устойчивости остается той же самой: анализируется устойчивость подсистем, после чего исследуется в частотной области влияние контуров связей на устойчивость системы в целом.

2.7. Примеры анализа объектов и систем управления

2.7.1. Анализ магнитного подвеса физического тела

На рис.2.10 изображена линеаризованная для малых отклонений от положения равновесия модель объекта в форме структурной схемы. Магнитный подвес - ферромагнитное тело (ФМТ), удерживаемое на высоте h за счет уравнивания силы тяжести силой тяги электромагнита (ЭМ). Напряжение u_h на выходе оптического датчика положения (ДП) пропорционально малым отклонениям тела от заданной высоты. Усилитель (У) является усилителем мощности с выходным сигналом u_3 , приложенным к ЭМ.

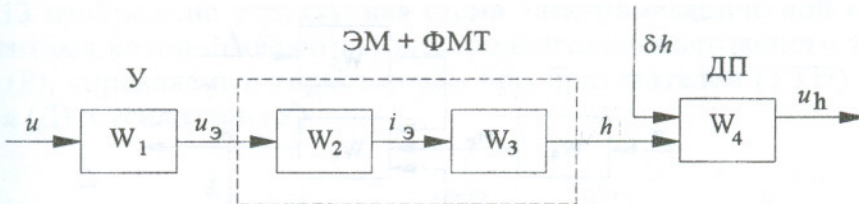


Рис.2.10. Математическая модель магнитного подвеса

ПФ звеньев структурной схемы (элементов объекта) имеют следующий вид:

$$W_1(s) = \frac{50}{0.01s+1}; \quad W_2(s) = \frac{0.1}{0.01s+1};$$

$$W_3(s) = \frac{1}{0.04s^2-1}; \quad W_4(s) = 0.2.$$

Различные по физической природе возмущающие воздействия представлены на структурной схеме в виде приведенного возмущения $\delta h(t)$.

ПФ объекта по каналу управляющего воздействия равна:

$$W_0(s) = \frac{B_0(s)}{D_0(s)} = \frac{1}{(0.01s+1)(0.01s+1)(0.04s^2-1)}.$$

Характеристический полином $D_0(s)$ имеет следующие корни: $s_{1,2} = -100$; $s_{3,4} = \pm 5$.

Объект неустойчив - среди корней ХП есть один положительный. Без создания замкнутой системы управления нельзя удерживать тело в магнитном поле.

Полиномы числителя B_0 и знаменателя D_0 ПФ не имеют одинаковых корней, следовательно, объект по каналу управляющего воздействия - полный (управляем и наблюдаем полностью). Все полюсы ПФ могут быть целенаправленно изменены (перемещены на плоскости корней) путем охвата объекта обратной связью, т.е. построения замкнутой системы стабилизации положения физического тела.

2.7.2 Анализ двигателя внутреннего сгорания

На рис.2.11 изображена математическая модель двигателя внутреннего сгорания (ДВС) как объекта управления частотой вращения [26]. Выходная переменная объекта n - частота вращения, возмущающее воздействие f - момент нагрузки на валу двигателя. Операторы элементов линеаризованной для определенного режима модели имеют вид:

$$W_1(s) = \frac{1}{2.84s} ;$$

$$W_2(s) = -0.1 ;$$

$$W_3(s) = -1 ;$$

$$W_4(s) = \frac{1}{(0.1s+1)},$$

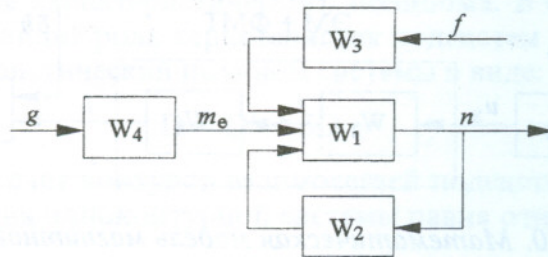


Рис.2.11. Математическая модель ДВС

ПФ объекта по каналу управляющего воздействия

$$W_0(s) = \frac{B_0(s)}{D_0(s)} = \frac{W_4 W_1}{1 - W_1 W_2} = \frac{10}{(28.4s+1)(0.1s+1)}$$

является полной, т.е. полиномы числителя $B_0(s)$ и знаменателя $D_0(s)$ не имеют общих делителей.

Объект устойчив - оба корня ХП полинома D отрицательные: $s_{01} \approx -0.04$; $s_{02} = -10$. На рис.2.12 показан переходный процесс объекта управления при единичном ступенчатом воздействии.

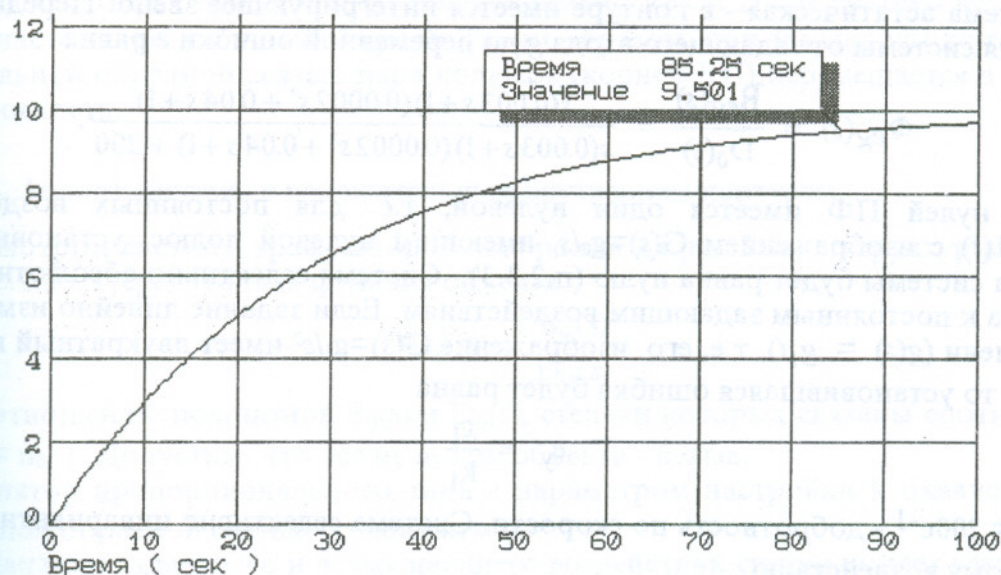


Рис.2.12. Переходная характеристика ДВС как объекта управления

Можно заметить, что переходный процесс имеет характер, близкий к экспоненциальному, определяемому корнем $s_{01} \approx -0.04$ (так как соответствующая второму корню составляющая процесса $\exp(-10t)$ быстро затухает).

2.7.3. Анализ следящей системы

На рис.2.13 изображена структурная схема электромеханической следящей системы, элементами которой являются: электродвигатель постоянного тока (ДПТ) с редуктором (Р), управляемый тиристорным преобразователем (УТП), датчик рассогласования (Д) и усилитель (У).

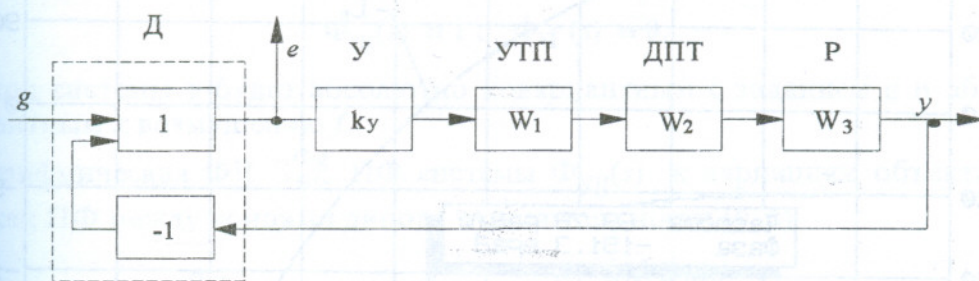


Рис.2.13. Модель следящей системы

Передаточные функции элементов имеют вид:

$$W_1(s) = \frac{10}{0.003s+1}; \quad W_2(s) = \frac{2}{0.0002s^2+0.04s+1};$$

$$W_3(s) = \frac{0.01}{s}; \quad k_y = 1000.$$

Система астатическая - в контуре имеется интегрирующее звено. Передаточная функция системы от задающего входа g до переменной ошибки e равна

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{W_{eg}(s)}{D_0(s)} = \frac{s(0.003s+1)(0.0002s^2+0.04s+1)}{s(0.003s+1)(0.0002s^2+0.04s+1)+200}$$

Среди нулей ПФ имеется один нулевой, т.е. для постоянных воздействий $g(t)=g_0 1(t)$ с изображением $G(s)=g_0/s$, имеющим нулевой полюс, установившаяся ошибка системы будет равна нулю (п.2.3.3). Система селективно абсолютно инвариантна к постоянным задающим воздействиям. Если задание линейно изменяется во времени ($g(t) = g_1 t$), т.е. его изображение $G(s)=g_1/s^2$ имеет двукратный нулевой полюс, то установившаяся ошибка будет равна

$$e_y = \frac{g_1}{k_1},$$

где $k_1 = 200 \text{с}^{-1}$ - добротность по скорости. Система селективно инвариантна до ε_k линейному воздействию.

Как видно из ЛАЧХ разомкнутой системы (рис.2.14), $L_p(\omega = 10 \text{с}^{-1}) \cong 26 \text{дБ}$, т.е. гармонические воздействия $g(t) = A \sin \omega t$ с частотами $\omega \leq 10 \text{с}^{-1}$ воспроизводятся на выходе системы с установившейся ошибкой по амплитуде, не превосходящей $0.05A$, причем чем ниже частота, тем меньше амплитуда ошибки.

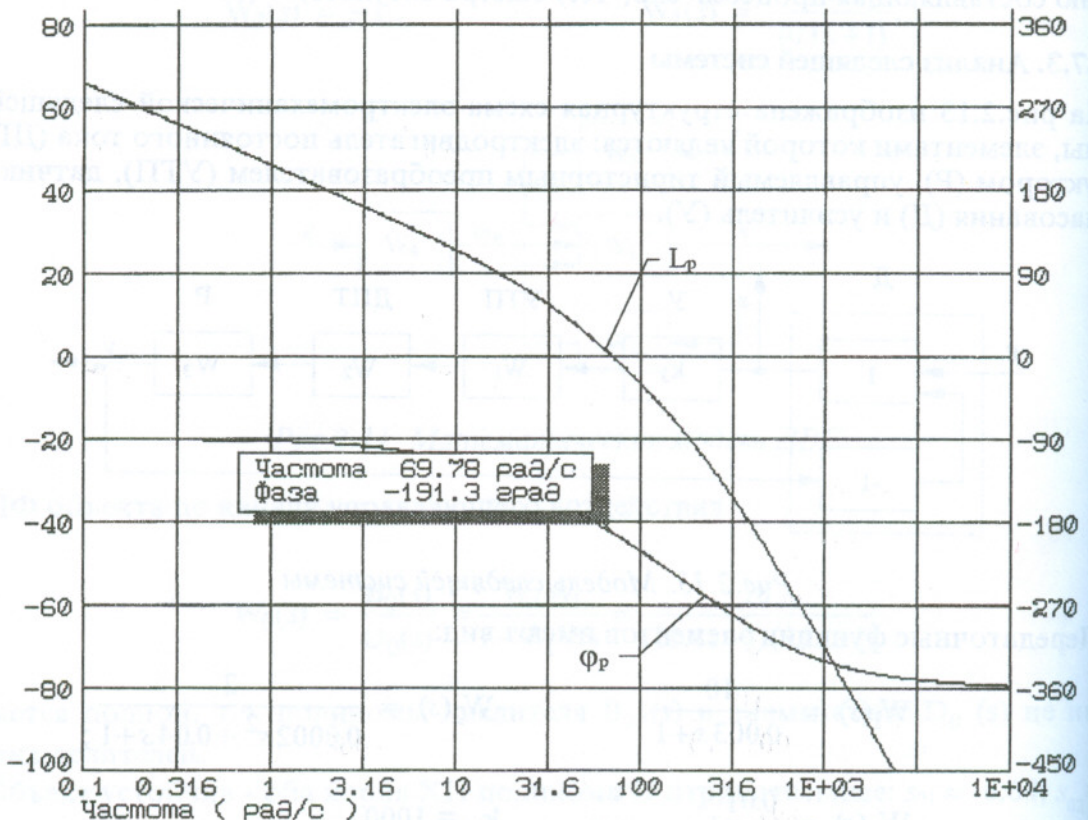


Рис.2.14. ЛЧХ разомкнутой следящей системы

В соответствии с критерием Найквиста замкнутая следящая система неустойчива (на частоте среза $\varphi = -191.3$ град). Таким образом, при замыкании контура отрицательной обратной связью пара полюсов (корней ХП) перемещается в правую полуплоскость.

2.7.4. Анализ системы с положительным внутренним контуром

Рассмотрим систему, граф которой изображен на рис.2.4а, а структурная схема - на рис.2.4б. Передаточная функция объекта

$$W_0(s) = \frac{B_0(s)}{D_0(s)}$$

равна отношению полиномов $B_0(s)$ и $D_0(s)$, степени которых связаны соотношением $m_0 = n_0 - 1$. Допустим, что все нули ПФ объекта - левые.

Регулятор пропорционального типа с параметром настройки k охвачен положительной обратной связью с усилением $\alpha > 0$.

По каналам задающего и возмущающего воздействий система имеет следующие ПФ:

$$\Phi_{yg}(s) = k \frac{B_0(s)}{D(s)} ; \Phi_{yf}(s) = (1 - \alpha k) \frac{D_0(s)}{D(s)},$$

где

$$D(s) = (1 - \alpha k) D_0(s) + k B_0(s) \quad (2.17)$$

- ХП системы, степень которого $n = n_0$.

При условии

$$\alpha^* = \frac{1}{k}, \quad (2.18)$$

когда внутренний контур имеет единичную передачу ($\alpha k = 1$), получим

$$\Phi_{yg}(s) \equiv 1 ; \Phi_{yf}(s) \equiv 0,$$

т.е. выход системы y будет абсолютно ковариантным с заданием g и абсолютно инвариантным к возмущению f .

Логарифмическая ФЧ $S_{W_0}^{\Phi g}$ ПФ системы $\Phi_{yg}(s)$ к вариациям объекта вычисляется как ПФ между концами диполя чувствительности (y, h)

$$S_{W_0}^{\Phi g}(s) = \Phi_{yh}(s) = \frac{(1 - \alpha k) D_0(s)}{(1 - \alpha k) D_0(s) + k B_0(s)}.$$

При условии (2.18) имеем

$$S_{W_0}^{\Phi g}(s) \equiv 0,$$

т.е. ПФ системы абсолютно инвариантна к параметрическим возмущениям (вариациям параметров) объекта.

Система устойчива, поскольку ее вырожденный ХП

$$D(s) = k B_0(s) S$$

при любом устойчивом или неустойчивом объекте будет иметь только корни, равные нулям ПФ объекта, которые по условию - левые.

В результате имеем идеальную систему. Нетрудно заметить, что такая система нереализуема в силу ее негрубости (п.2.5.4). Действительно, при выполнении условия (2.18) ХП системы (2.17) вырождается - происходит обнуление его старшего коэффициента, т.е. понижение степени ХП, и один его корень уходит в бесконечность (п.2.5.4). При любых, даже малых вариациях параметра k или α , когда $\alpha > 1/k$, старший коэффициент ХП становится отрицательным и один из его корней переходит в правую полуплоскость.

Коэффициент передачи замкнутого внутреннего контура при бифуркационном значении параметра α^* равен бесконечности. Следовательно, на всех частотах разомкнутый контур главной обратной связи имеет бесконечное усиление. Этим и объясняется идеальное поведение такой системы.

2.7.5. Анализ системы управления самолета *Grumman F-14*

Упрощенная структурная схема системы управления горизонтальным полетом самолета *Grumman F-14* приведена на рис.2.15. Эта модель, в частности, использована при тестировании ряда программных средств автоматизированного проектирования систем управления [29]. В данной схеме отсутствуют звенья, моделирующие возмущения среды (например, порывы ветра и др.).

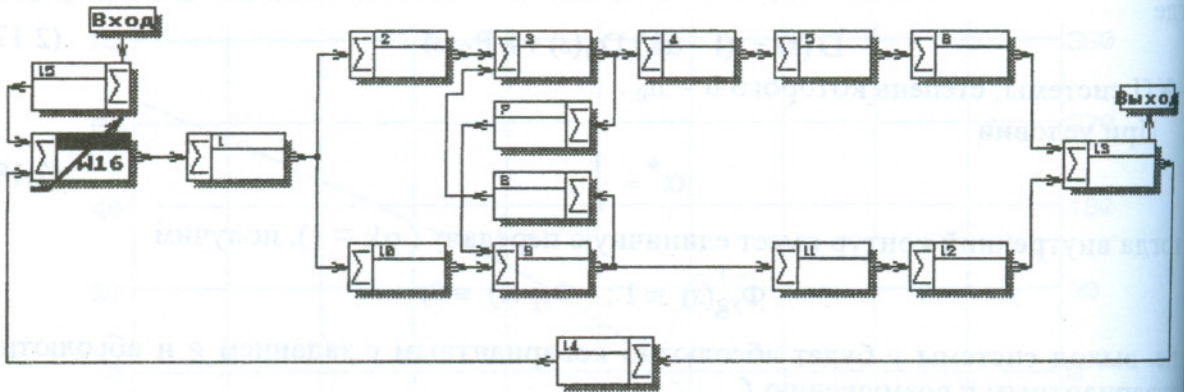


Рис.2.15. Структурная схема системы управления

Звенья структурной схемы имеют следующие ПФ:

$$\begin{aligned}
 W_1(s) &= \frac{1}{1+0.05s}; & W_2(s) &= 64; & W_3(s) &= \frac{1}{0.638+s}; & W_4(s) &= \frac{1}{689}; \\
 W_5(s) &= \frac{1}{1+0.396s}; & W_6(s) &= 0.677; & W_7(s) &= -0.00592; & W_8(s) &= 689; \\
 W_9(s) &= \frac{1}{0.657+s}; & W_{10}(s) &= 6.88; & W_{11}(s) &= \frac{2.97+s}{4.14+s}; & W_{12}(s) &= 0.816; \\
 W_{13}(s) &= 1; & W_{14}(s) &= -1; & W_{15}(s) &= \frac{1}{1+0.1s}; & W_{16}(s) &= \frac{3.86+1.75s}{s}
 \end{aligned}$$

Приведенная модель имеет достаточно сложную структуру и высокий порядок. При ее анализе целесообразно использование ЭВМ и специализированных программных средств (см., например, Приложение 1).

ПФ замкнутой системы имеет вид:

$$\Phi(s) = \frac{77837 + 1.118 \cdot 10^5 s + 70811 s^2 + 22268 s^3 + 2676 s^4}{77837 + 1.3247 \cdot 10^5 s + 95817 s^2 + 37641 s^3 + 8103 s^4 + 898.8 s^5 + 51.81 s^6 + 1.365 s^7}$$

Нули ПФ $\Phi(s)$ совпадают с нулями ПФ системы с разомкнутой обратной связью и равны: $z_1 = -2.213$; $z_2 = -3.470$; $z_{3,4} = -1.319 \pm j1.431$.

Полюсы ПФ $\Phi(s)$, т.е. корни ХП замкнутой системы, равны: $p_1 = -1.813$; $p_2 = -3.123$; $p_{3,4} = -1.672 \pm j1.597$; $p_{5,6} = -9.834 \pm j9.572$; $p_7 = -10.0$.

Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие представлена на рис.2.16.

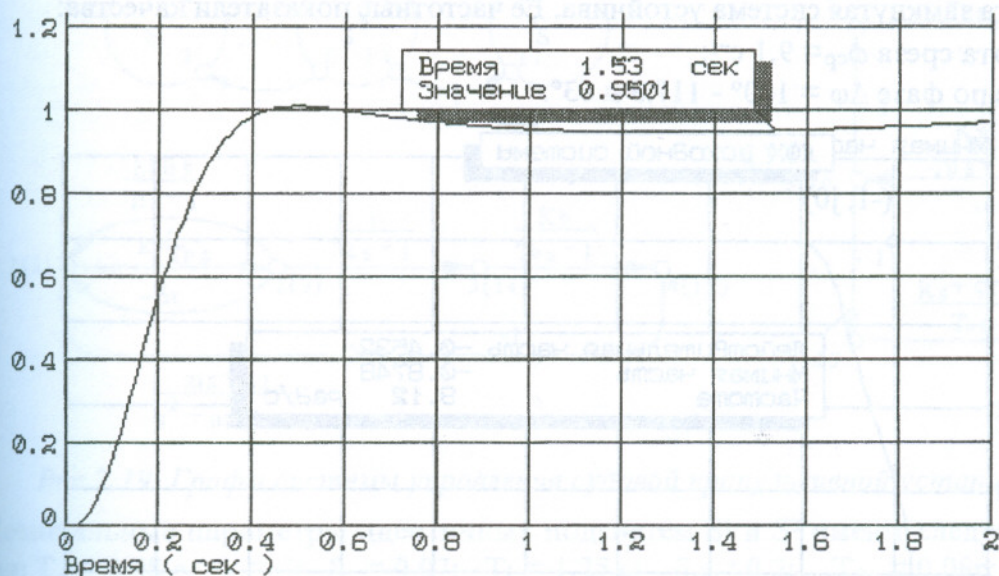


Рис.2.16. Переходная характеристика системы управления

Среди полюсов ПФ замкнутой системы можно выделить две группы. “Быстрые” (имеющие относительно большие модули), в основном определяют начальный участок переходного процесса (рис.2.16) и время “первого согласования” $t_1 \approx 0.3$ с. (т.е. время первого вхождения в пятипроцентную зону от установившегося значения). “Медленные” полюсы (расположенные ближе к мнимой оси) в основном определяют характер и время затухания переходного процесса (перерегулирование $\sigma \approx 1\%$, время регулирования $t_p \approx 1.5$ с.).

Разомкнутая система имеет корни ХП, равные: 0.000 ; -2.526 ; -4.144 ; $-0.6478 \pm j2.020$; -10.000 ; -20.000 .

Логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура (без звена W_{15} , не входящего в контурную часть) представлены на рис.2.17.

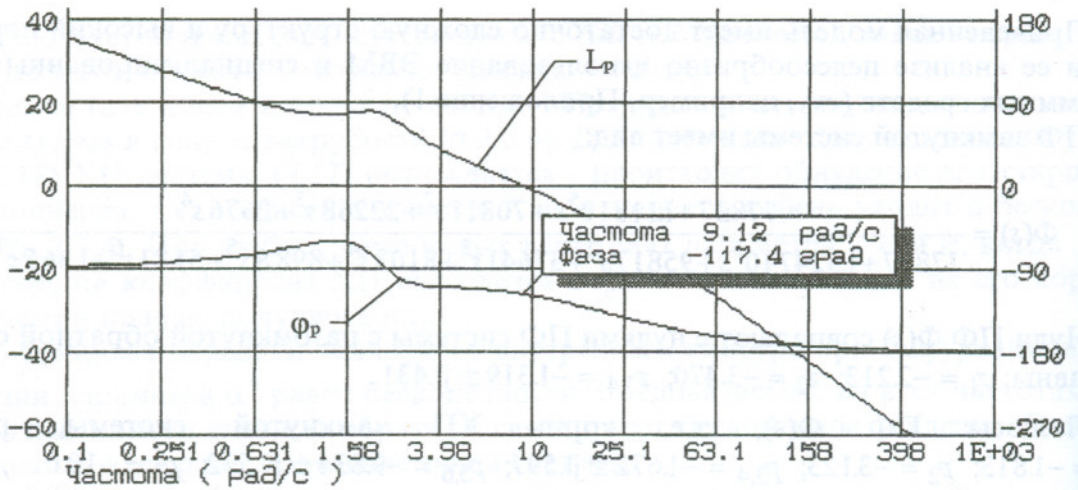


Рис.2.17. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы

С учетом того, что ХП разомкнутой системы не имеет правых корней, по критерию Найквиста замкнутая система устойчива. Ее частотные показатели качества:

- частота среза $\omega_{ср} = 9.1 \text{ с}^{-1}$;
- запас по фазе $\Delta\varphi = 180^\circ - 117.3 \cong 63^\circ$.

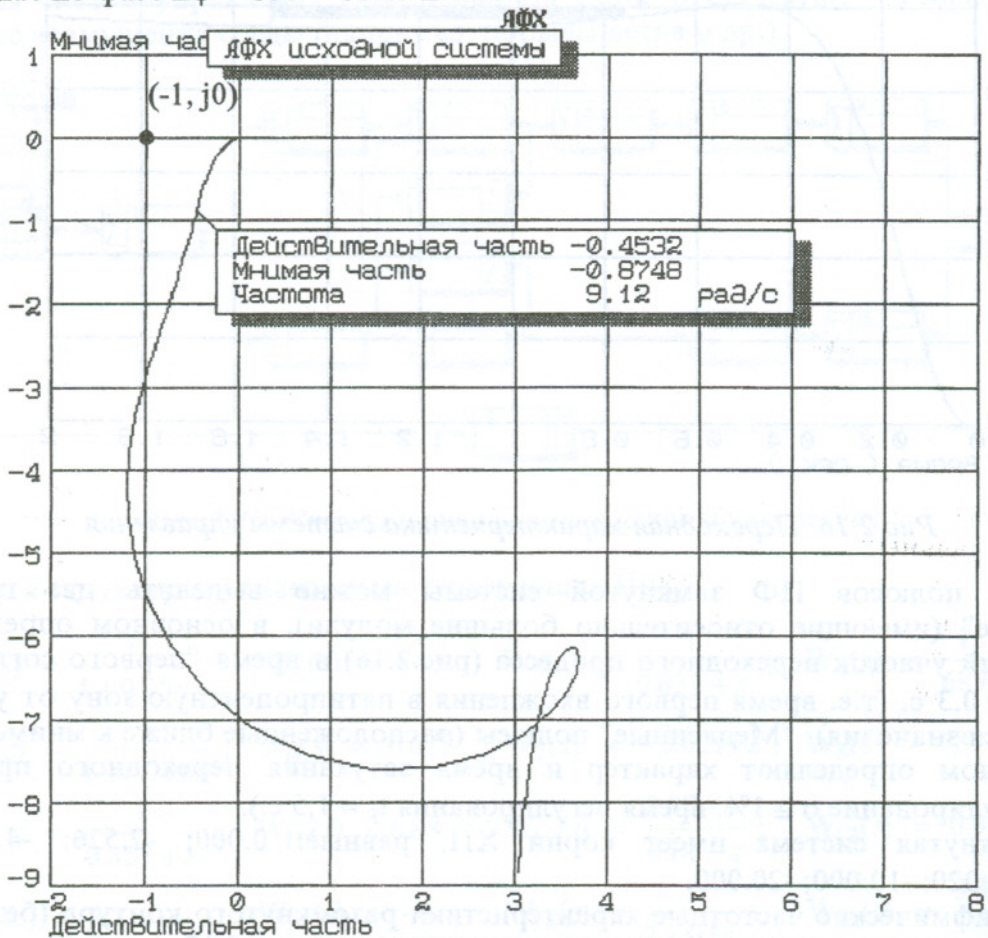


Рис.2.18. АФХ разомкнутой системы

На рис.2.18 показана амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутого контура. Видно, что годограф ЧХ не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

Все полученные здесь результаты анализа совпадают с приведенными в [29].

2.7.6. Анализ двухуровневой системы управления судовой пропульсивной установки

Рассмотрим линейную модель пропульсивной системы (рис.2.19), образованной подсистемами управления S^1 и S^2 частотой вращения двух судовых дизелей, работающих на общую нагрузку - гребной винт регулируемого шага с редуктором и муфтами (подсистема S^3) [26].

Представленная на рис.2.19а система 2-го уровня образована подсистемами 1-го уровня, описанными в форме сигнальных графов: S^1 и S^2 - рис.2.19б; S^3 - рис.2.19в. Дуги связи подсистем имеют единичные передачи.

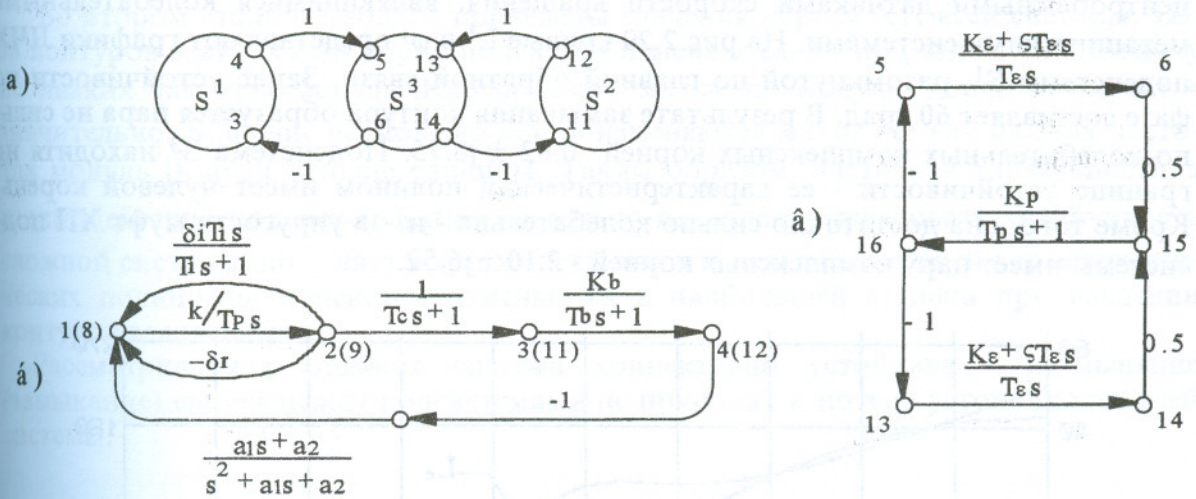


Рис.2.19. Графы системы управления судовой пропульсивной установки

Номинальные параметры идентичных подсистем S^1 и S^2 имеют следующие значения: $T_R = 0.08$ с; $k = 5$; $\delta_r = 0.07$; $T_i = 1.25$ с; $\delta_i = 0.2$; $T_{C1} = 0.08$ с; $T_{C2} = 0.09$ с; $K_b = 10$; $T_b = 28.4$ с; $a_1 = 4.2$; $a_2 = 110.25$. Номинальные параметры подсистемы S^3 : $K_p = 0.308$; $T_p = 0.246$ с.; $K_e = 1.5$; $T_e = 0.04$ с; $\zeta = 0.1$.

Постоянные времени камер сгорания дизелей в различных подсистемах несколько отличаются, что обуславливает некоторое отличие корней их ХП (табл.2.1).

Таблица 2.1

	Корни ХП подсистем	Корни ХП системы
S^1	$-0.82 \pm j0.75$	$-0.68 \pm j4.1$
	$-1.87 \pm j9.77$	$-1.88 \pm j9.54$
	-11.26	-9.97
	-17.76	-17.68

Таблица 2.1 (окончание)

	Корни ХП подсистем	Корни ХП системы
S^2	-0.82 ± j0.74 -1.86 ± j9.78 -11.14 -17.94	-0.67; -1.72 -1.90 ± j9.66 -11.37 -17.75
S^3	0.00 -2.10 ± j6.52	-0.19 -1.71 ± j7.83

Корни ХП подсистем S^1 и S^2 показывают, что обе подсистемы устойчивы. Сильно колебательные пары корней ($-1.87 \pm j9.77$ и $-1.86 \pm j9.78$) порождаются центробежными датчиками скорости вращения, являющимися колебательными механическими системами. На рис.2.20 кривые L^1 и φ^1 представляют графики ЛЧХ подсистемы S^1 , разомкнутой по главной обратной связи. Запас устойчивости по фазе составляет 60 град. В результате замыкания контура образуется пара не сильно колебательных комплексных корней $0.82 \pm j0.75$. Подсистема S^3 находится на границе устойчивости - ее характеристический полином имеет нулевой корень. Кроме того, она достаточно сильно колебательна - из-за упругости муфт ХП подсистемы имеет пару комплексных корней $-2.10 \pm j6.52$.

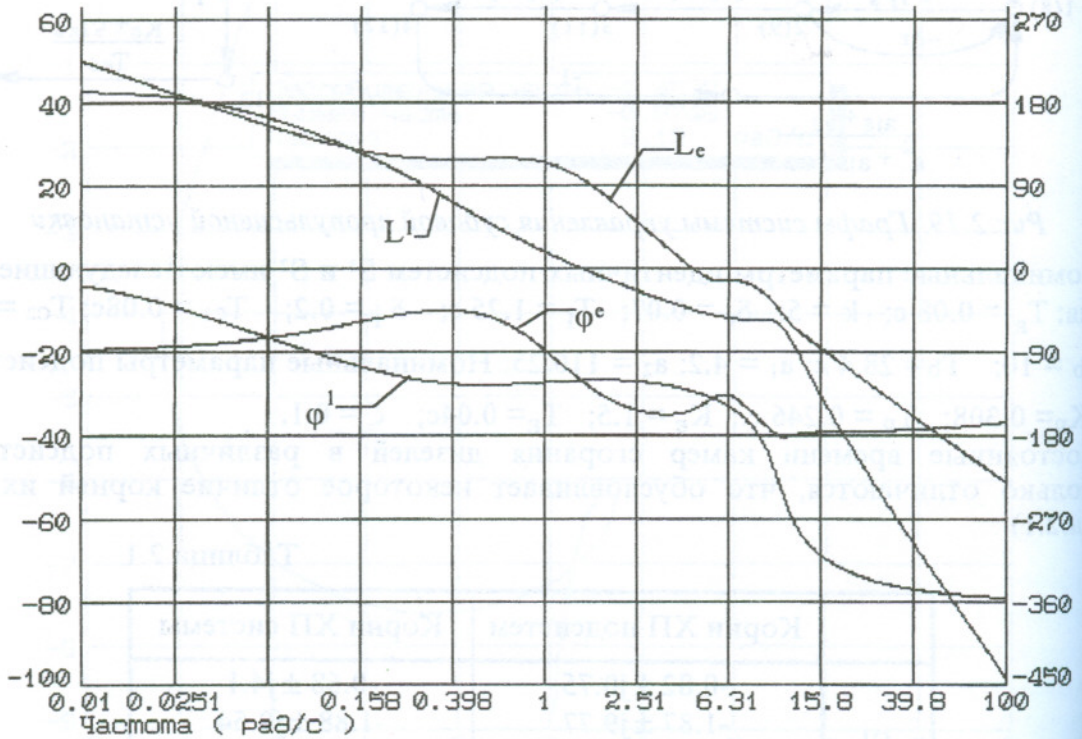


Рис.2.20. Логарифмические частотные характеристики

Следующим этапом анализа является исследование устойчивости всей системы, образованной подсистемами S^1 , S^2 и S^3 . Частотные характеристики эквивалентной одноконтурной системы (2.14) приведены на рис.2.20 в виде кривых:

$$L_e = 20 \lg |K_e(j\omega)| ;$$

$$\varphi_e = \arg K_e(j\omega).$$

На низких частотах ($\omega < 1 \text{ с}^{-1}$), т.е. при больших значениях L_e , взаимодействие подсистем сильное. Для диапазона частот правее частоты среза ($\omega > 5 \text{ с}^{-1}$) взаимодействие ослабляется. В этом примере достаточное условие устойчивости (2.16) не выполняется. Однако система в целом устойчива, что следует из критерия Найквиста, применяемого к эквивалентной одноконтурной системе с передаточной функцией $K_e(s)$.

Во втором столбце табл.2.1 приведены значения корней ХП всей системы. Из-за контуров взаимосвязи корни подсистем изменяются, но по-разному. Поскольку на низких частотах модуль $|K_e(j\omega)|$ велик, малые по модулю корни изменяются значительно. Большие по модулю корни изменяются мало, так как на этих частотах модуль $|K_e(j\omega)|$ меньше единицы. Таким образом, частотная характеристика взаимодействия подсистем $K_e(j\omega)$ не только позволяет исследовать устойчивость сложной системы, но и дает возможность оценить, какие из корней характеристических полиномов подсистем изменяются в наибольшей степени при введении контуров взаимосвязи.

Рассматриваемая сложная система коннективно устойчива - размыкание (замыкание) связей между подсистемами не приводит к потере устойчивости всей системы.