

Характерной особенностью И-закона является то, что управляющее воздействие изменяется до тех пор, пока ошибка не станет равной нулю. Типовой И-закон управления обеспечивает астатизм в системе со статическим объектом, т.е. нулевую установившуюся ошибку при постоянных воздействиях. Повышение добротности контура путем увеличения коэффициента передачи $k_R = 1/T_I$ уменьшает установившуюся ошибку при воздействиях с постоянной скоростью, увеличивая полосу частот и быстродействие системы.

Пропорционально-интегральный закон (ПИ-закон) описывается выражением

$$u(t) = k_R \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \right]$$

или в форме передаточной функции

$$W_R(s) = k_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{k_R (T_I s + 1)}{T_I s}$$

Этот закон наиболее часто реализуется в системах промышленной автоматики, обеспечивая их астатизм. Как видно из выражения для ПФ регулятора, при использовании ПИ-закона ПФ контура дополняется нулем, что позволяет решать задачу стабилизации системы при больших значениях добротности контура. Управляющие устройства, реализующие ПИ-закон, имеют два параметра настройки - коэффициент усиления k_R и время интегрирования T_I .

Иногда применяют управляющие устройства, реализующие пропорционально-дифференцирующий закон (ПД-закон)

$$u(t) = k_R \left[e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

или в форме передаточной функции

$$W_R(s) = k_R (1 + T_D s)$$

Рассмотренные законы не исчерпывают возможностей современных средств контроля и управления, способных реализовывать самые различные алгоритмы.

3.8.2. Параметрический синтез

Параметрический синтез характеризуется относительно малой исходной неопределенностью, так как на предыдущих этапах проектирования приняты решения о точках съема текущей информации и точках приложения воздействий на объект (топологический синтез), выбраны типы алгоритмов управления (структурный синтез), конкретизирована часть параметров и установлены пределы изменения для всех остальных.

Расчет настроек типовых регуляторов также представляет собой задачу параметрического синтеза. Поскольку на этом этапе тип регулятора уже выбран или задан, варианты систем различаются только параметрами, т.е. исходное множество \mathcal{M} представляет собой модель второго ранга $\mathcal{M} = M(2)$.

Параметры настроек q_k ; $k = 1, 2, \dots$, принадлежат допустимой области $\mathcal{M} = Q$, обычно задаваемой в виде ограничений:

$$\mathcal{M} = \{ q_{k \min} \leq q_k \leq q_{k \max}; k = 1, 2, \dots \}. \quad (3.24)$$

В большинстве постановок задачи параметрического синтеза множества требуемых систем \mathcal{M}^d задаются либо в форме ограничений на показатели качества (3.2), либо в виде условий их оптимизации (например минимизации (3.3)).

1. Пусть заданы ограничения на показатели качества

$$I_i(q_1, q_2, \dots) \leq I_{i \max}; \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (3.25)$$

В результате синтеза должны быть найдены значения параметров, при которых удовлетворяются все ограничения (3.25).

Задача параметрического синтеза в такой постановке может иметь множество решений, единственное решение или не иметь ни одного. Рис.3.12 иллюстрирует ситуации, отображенные на рис.3.5а,б:

1 - множество решений, $Q_c = Q \cap Q^d \neq \emptyset$;

2 - отсутствие решения, $Q_c = 0$.

Рассматривается случай, когда выбираются два параметра q_1 и q_2 (рис.3.12а) и предъявлены требования в виде ограничений двух показателей качества $I_1(q_1, q_2)$ и $I_2(q_1, q_2)$ (рис.3.12б). На плоскость показателей качества (I_1, I_2) отображена исходная область I_Q . Отсутствие пересечения образа I_Q с областью \mathcal{M}^d (ситуация 2) означает отсутствие решения.

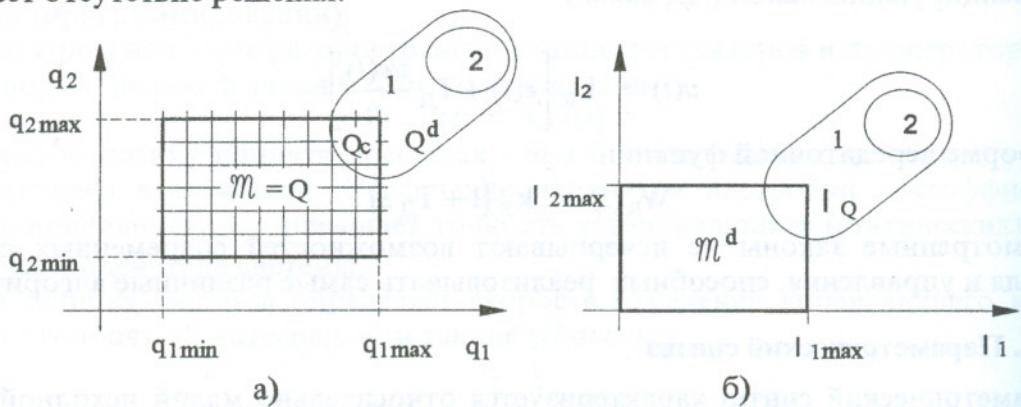


Рис.3.12. Иллюстрация задачи параметрического синтеза

Отображение области Q пространства параметров на пространство показателей качества аналитически возможно лишь для простейших систем. Численное решение задачи с использованием программных средств сводится к многократному вычислению показателей качества. Конечное подмножество элементов Q , как правило, соответствует узлам решетки (сетки), покрывающей область Q (рис.3.12а). В результате простого перебора находится то подмножество параметров, при которых удовлетворяются требования (3.25).

Принципиально сложнее решать задачу обратного отображения - области m^d допустимых значений показателей качества на пространство параметров. Имеется ряд методов, алгоритмов и программ, позволяющих строить поверхности равных значений показателей качества в пространствах параметров без их полного перебора [22]. Особенно эффективно такое построение с использованием средств компьютерной графики.

2. Пусть ограничения на часть показателей качества системы (например быстродействие) не известны или решение задачи синтеза с ограничениями (3.25) дает множество вариантов выбора. Тогда задача параметрического синтеза дополняется оптимизационной постановкой (3.3) - некоторые показатели качества минимизируются при ограничениях на все остальные:

$$I_i(\mathbf{q}) \rightarrow \min_{\mathbf{q} \in Q_c}; \quad i=1, 2, \dots \quad (3.26)$$

В выражении (3.26) предусмотрено, что вектор параметров \mathbf{q} принадлежит подмножеству $Q_c \subseteq Q$, т.е. соблюдены заданные ограничения на показатели качества.

Если система оптимизируется по единственному критерию, то параметрический синтез сводится к поиску условного экстремума функции нескольких аргументов с использованием методов нелинейного программирования [23].

3.8.3. Задача векторной оптимизации

Если одновременно оптимизируются несколько критериев, то имеет место задача векторной оптимизации

$$I(\mathbf{q}) \rightarrow \min_{\mathbf{q} \in Q}$$

Для примера на рис.3.13а иллюстрируется задача минимизации двух критериев $I_1(\mathbf{q})$, $I_2(\mathbf{q})$, зависящих от одного параметра. Поскольку в общем случае оптимальные значения параметра по отдельным критериям не совпадают, т.е.

$q_{10} \neq q_{20}$, то необходимо определить, что следует считать решением задачи векторной (многокритериальной) оптимизации.

По определению, решением задачи многокритериальной оптимизации является множество значений параметров, в котором изменение любого параметра с целью улучшения одного из критериев обязательно ухудшает хотя бы один другой. Такое множество неулучшаемых решений называют *множеством Парето*.

На рис.3.13а множеству Парето на оси q отвечает отрезок P между значениями q_{10} и q_{20} частных оптимумов. Изменение значения q в любой точке открытого интервала (q_{10}, q_{20}) , уменьшая один из показателей качества, приводит к увеличению другого. Иная иллюстрация области Парето P приведена на рис.3.13б, где по осям отложены значения показателей качества.

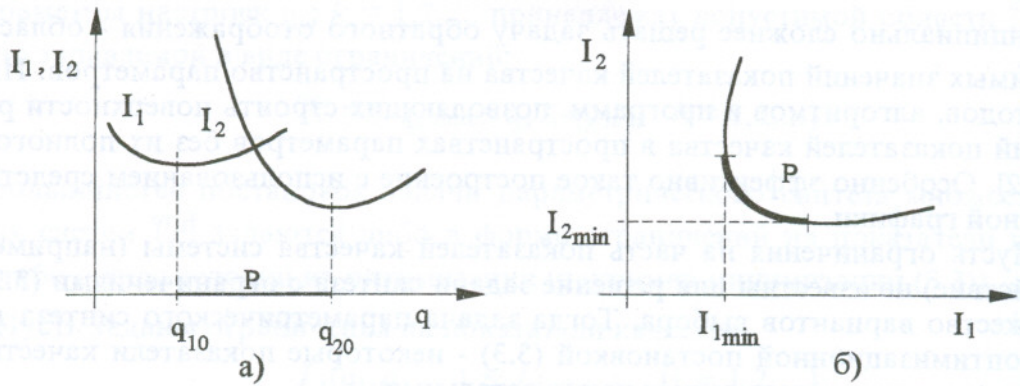


Рис. 3.13. Иллюстрация задачи векторной оптимизации

Неполная определенность решения задачи векторной оптимизации (множественный характер решения) обусловлена неопределенностью, содержащейся в постановке задачи, а именно - в задании требований. При формализации пожеланий проектировщика не установлены приоритеты. Уменьшение неопределенности решения требует привлечения дополнительной информации.

Можно выделить два способа скаляризации задачи оптимизации:

- все частные критерии, кроме одного, представляются в виде ограничений;
- из частных критериев I_i формируется скалярный критерий, который называют обобщенным или глобальным:

$$J[I(q, c)] \rightarrow \min_{q \in Q} .$$

Обобщенный критерий включает ряд весовых коэффициентов $c = (c_1, c_2, \dots)$; $c_i \geq 0$, назначением которых задается предпочтение тем или иным частным критериям.

Обобщенный критерий называют эффективным, если для любых значений весовых коэффициентов его минимум принадлежит области Парето.

Примерами эффективных обобщенных критериев являются аддитивный

$$J(q, c) = \sum_i c_i I_i(q)$$

и мультипликативный

$$J(q, c) = \prod_i I_i^{c_i}(q)$$

критерии. Решая задачу скалярной оптимизации при различных значениях весовых коэффициентов, получают точки области Парето, отвечающие предпочтениям проектировщика. Можно сказать, что конструкция и параметры обобщенного критерия моделируют требования проектировщика в определенном контексте синтеза.

Рассмотренный в подразд. 2.3 обобщенный интегральный квадратичный функционал (2.11) также является аддитивным обобщенным критерием, весовые коэффициенты которого упорядочены в матрицы Q и R .

Часто используемый при синтезе улучшенный интегральный квадратичный критерий

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\infty} [y_{\text{п}}^2(t) + \tau_1^2 \dot{y}_{\text{п}}^2(t)] dt = \\
 &= \int_0^{\infty} y_{\text{п}}^2(t) dt + \tau_1^2 \int_0^{\infty} \dot{y}_{\text{п}}^2(t) dt = I_0 + \tau_1^2 I_1
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

является также аддитивным. Частными критериями в нем являются интегральная оценка I_0 процесса и интегральная оценка I_1 производной процесса по времени с весовыми коэффициентами $c_0 = 1$ и $c_1 = \tau_1^2$ соответственно.

3.9. Примеры синтеза систем управления

3.9.1. Пример коррекции следящей системы

Рассмотрим следящую систему, изображенную на рис.2.13 с ПФ отдельных элементов, приведенными в примере п.2.7.3. Система имеет астатизм первого порядка и добротность по скорости $k_1=200\text{с}^{-1}$; амплитуда установившейся ошибки воспроизведения гармонических воздействий с частотами $\omega \leq 10\text{с}^{-1}$ не превышает 0.05А. Таким образом, система обладает свойством селективной инвариантности переменной ошибки к низкочастотным задающим воздействиям

Задачей коррекции является удовлетворение требований к переходным процессам в системе при сохранении качества ее установившихся движений.

На этапе топологического синтеза выбирается место включения в систему звена (дуги) коррекции. Как отмечалось в п.3.6.1, желательно, чтобы это звено занимало позиции 1 или 2 по отношению к синтезируемому контуру, т.е. либо входило в сам контур (последовательная коррекция), либо в контуры, его касающиеся (коррекция местной обратной связью).

Основу частотного синтеза коррекции составляет процедура построения желаемой ЛАЧХ контура с учетом расположения и типа нулей и полюсов ПФ исходной системы (п.3.6.2). Формирование ЛАЧХ в рассматриваемом примере начинается с низкочастотного участка, имеющего наклон -20 дБ/дек (рис.3.14).

Процедуру формирования желаемой ЛАЧХ можно рассматривать как трансформацию ЛАЧХ исходной разомкнутой системы (кривая 1 на рис.3.14) путем последовательного введения в ПФ этой системы дополнительных действительных отрицательных нулей и полюсов (отмечены на оси частот треугольниками). В случае последовательной коррекции эти нули и полюсы являются нулями и полюсами ПФ звена коррекции.

В рассматриваемом примере дополнительно вводится полюс ($p_1=-1$), что изменяет наклон последующего участка ЛАЧХ до -40дБ/дек; введение нуля ($z_1=-5.3$) дает наклон -20дБ/дек. Далее нулем ($z_2=-29.0$) компенсируется полюс исходной ПФ (создается диполь) и вводится последний полюс ($p_2=-168$), обеспечивающий совпадение желаемой ЛАЧХ (кривая 2) с исходной в области высоких частот.

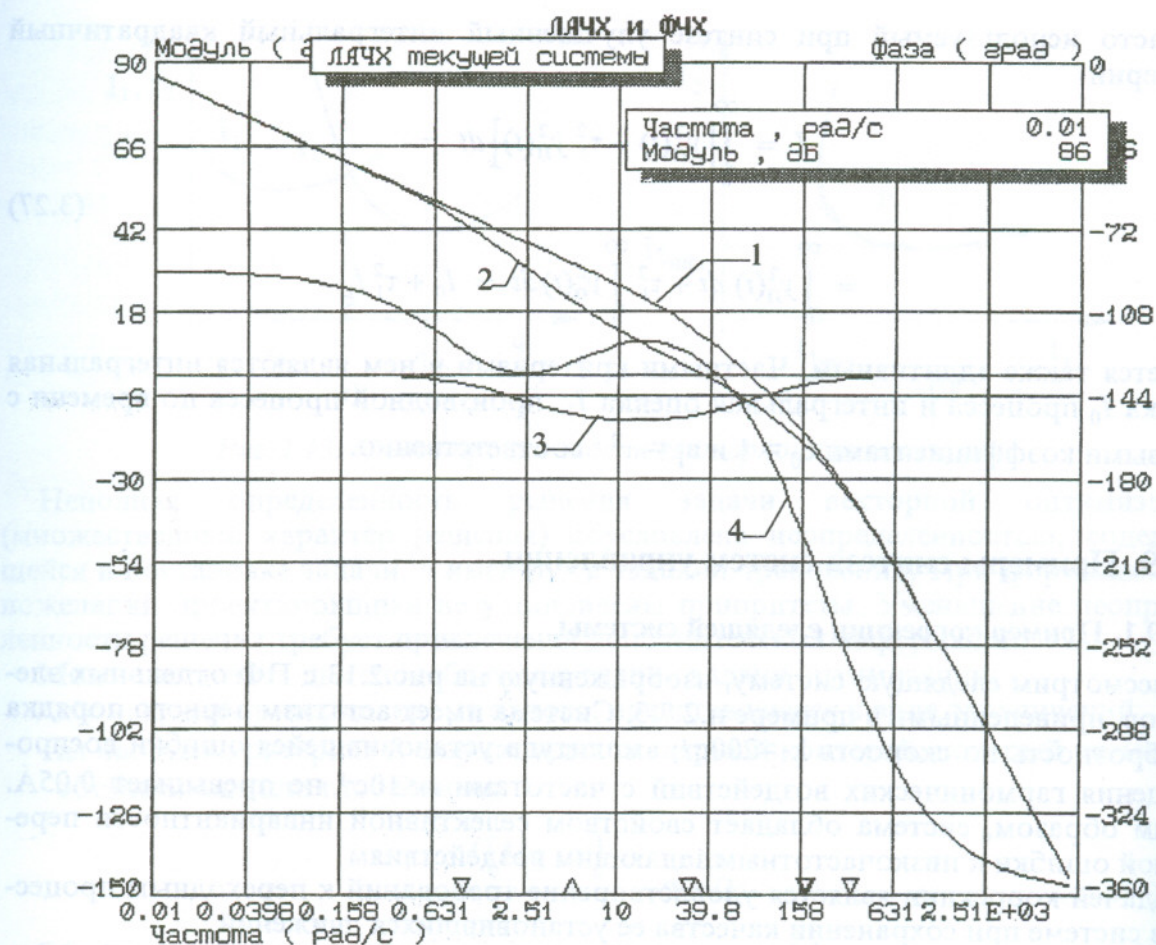


Рис.3.14. Частотные характеристики следящей системы

На рис.3.14 показана ЛАЧХ звена последовательной коррекции (кривая 3), а также желаемая ФЧХ контура (кривая 4). ПФ звена коррекции имеет вид:

$$W_K(s) = \frac{((-1/z_1)s+1)((-1/z_2)s+1)}{((-1/p_1)s+1)((-1/p_2)s+1)} = \frac{1+0.22s+0.0058s^2}{1+1.01s+0.0058s^2}$$

ПФ замкнутой системы с такой коррекцией имеет нули $z_1=-5.13$; $z_2=-33.61$ и полюсы $p_1=-5.755$; $p_2=-43.07$; $p_{3,4}=-33.83 \pm j38.05$; $p_{5,6}=-295.1 \pm j48.22$. Переходный процесс при ступенчатом воздействии - на рис.3.15 (кривая 1). Перерегулирование $\sigma=22\%$, время регулирования $t_p=0.17c$.

Понижение порядков полиномов числителя и знаменателя ПФ $W_K(s)$ (редукция ПФ) приравниванием нулю старших коэффициентов этих полиномов вызывает заметное ухудшение динамических свойств скорректированной системы (кривая 2 на рис.3.15).

Для коррекции рассматриваемой следящей системы можно использовать местную обратную связь по угловой скорости вращения двигателя, измеряемой тахогенератором. Для этого охватим обратной связью двигатель (ДПТ), управляемый тиристорный преобразователь (УТП) и усилитель (У) - рис.2.13.

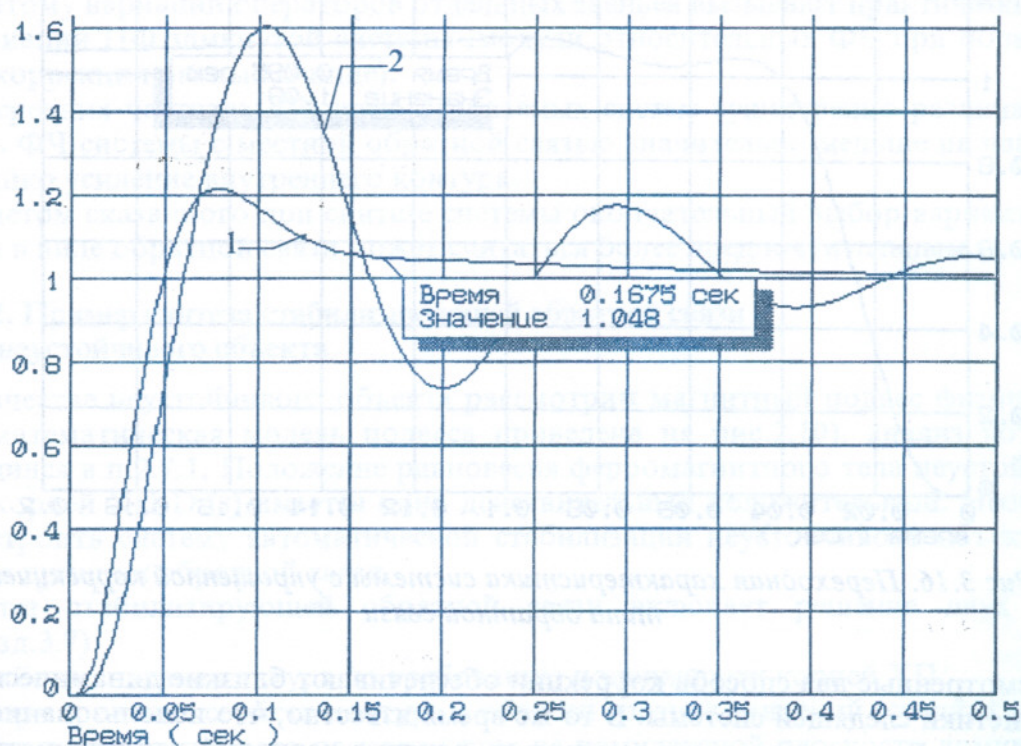


Рис. 3.15. Переходные характеристики следящей системы с последовательной коррекцией

Для синтезированной выше желаемой ЛАЧХ ПФ звена коррекции в обратной связи будет иметь вид:

$$W_K(s) = \frac{-3.87 \cdot 10^{-5} s - 3.16 \cdot 10^{-7} s^2 - 4.44 \cdot 10^{-10} s^3 + 4.67 \cdot 10^{-13} s^4}{1 + 0.188s}$$

Простейшей процедурой редукции ПФ является последовательное приравнение нулю старших коэффициентов полинома числителя с последующим анализом качества системы. Такой процесс продолжается до тех пор, пока показатели качества остаются удовлетворительными. Для синтезируемой системы результатом редукции является простейшая гибкая обратная связь с ПФ

$$W_K(s) = \frac{-3.87 \cdot 10^{-5} s}{1 + 0.188s}$$

Соответствующая переходная характеристика системы с такой коррекцией показана на рис.3.16. Ее прямые показатели качества: $t_p = 0.19$ с; $\sigma = 9\%$.

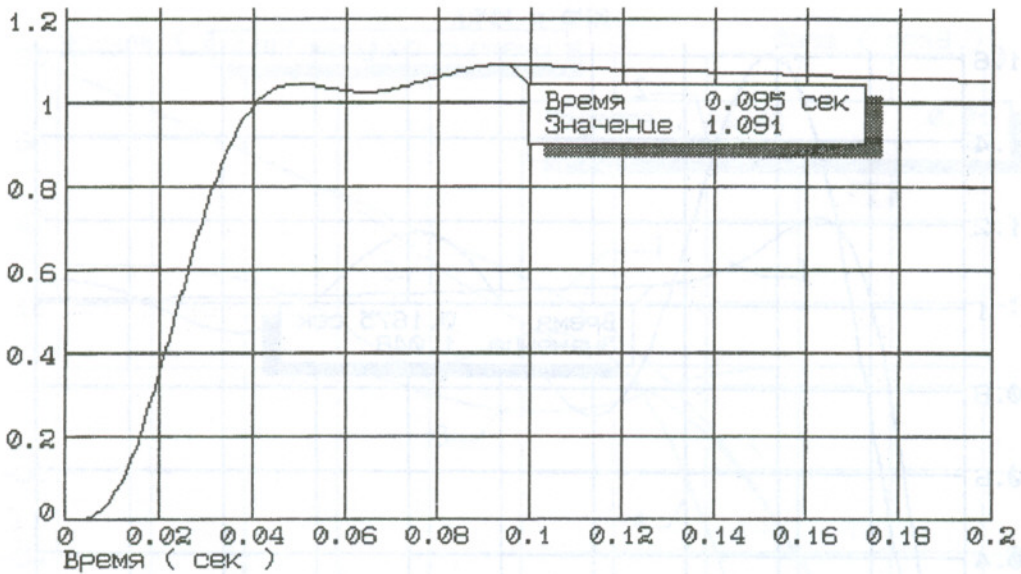


Рис.3.16. Переходная характеристика системы с упрощенной коррекцией типа обратной связи

Рассмотренные два способа коррекции обеспечивают близкие динамические характеристики следящей системы. В то же время известно, что использование местной обратной связи позволяет уменьшить влияние вариаций характеристик. На рис.3.17 приведены ЛАЧХ относительных функций чувствительности передачи от входа к выходу системы к звеньям $W_1(s)$ и $W_2(s)$. Кривая 1 соответствует варианту последовательной коррекции, кривая 2 - обратной связи.

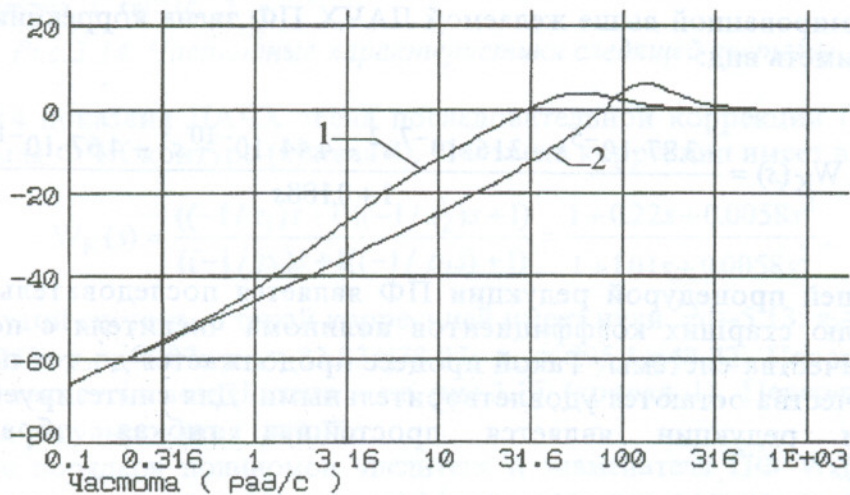


Рис.3.17. ЛАЧХ относительных функций чувствительности

Видно, что на низких и высоких частотах модули ФЧ для любых типов коррекции совпадают. На низких частотах модули ФЧ малы, поскольку при большом усилении основного контура вариации звеньев прямого пути мало влияют на передачу замкнутой системы. На высоких частотах усиление основного контура ма-

ло, поэтому вариации операторов отдельных звеньев вызывают практически такие же вариации ПФ замкнутой системы (модули относительных ФЧ при обоих способах коррекции равны единице).

На средних частотах ФЧ рассматриваемых систем существенно различаются - модуль ФЧ системы с местной обратной связью значительно меньше на частотах, где велико усиление внутреннего контура.

С учетом сказанного при синтезе системы окончательный выбор варианта коррекции в виде обратной связи может считаться более предпочтительным.

3.9.2. Пример синтеза стабилизирующей обратной связи для неустойчивого объекта

В качестве неустойчивого объекта рассмотрим магнитный подвес физического тела (математическая модель подвеса приведена на рис.2.10), анализ которого проводился в п.2.7.1. Положение равновесия ферромагнитного тела неустойчиво - среди корней ХП $D_0(s)$ имеется один действительный положительный. Необходимо построить систему автоматической стабилизации неустойчивого объекта, используя принцип обратной связи.

Синтез стабилизирующей обратной связи включает решение двух задач (подразд.3.7):

- выбор усиления контура по требованию подвижности корней ХП;
- формирование свойств контура в области средних усилений (средних частот) из условия желаемого расположения на комплексной плоскости доминирующих корней ХП замкнутой системы.

Введем отрицательную обратную связь по координате u_h и заданием коэффициента усиления $k_1=5000$ звена У с ПФ $W_1(s)$ повысим коэффициент усиления контура до значения $k=100$, выбранного из условия обеспечения достаточной подвижности корней ХП. На частоте неустойчивого полюса объекта ($\omega=5c^{-1}$) усиление контура при этом равно $L_p \approx 34$ дБ. Логарифмические АЧХ и ФЧХ разомкнутой системы (объекта) при выбранном значении k приведены на рис.3.18 (кривые 1,2).

Замкнутая система по критерию Найквиста неустойчива, т.е. требуется введение регулятора и решение задачи структурно-параметрического синтеза его ПФ $W_R(s)$. Все корни ХП синтезируемой системы должны располагаться в левой полуплоскости и обеспечивать достаточную степень устойчивости. Для минимизации времени затухания переходных процессов необходимо максимально увеличить модули доминирующих корней ХП, учитывая при этом реальную ограниченность области адекватности Ω модели объекта. Дополнительным условием, которое необходимо учитывать, является сохранение усиления контура на частоте неустойчивого полюса.

На рис.3.18 показаны желаемые ЛАЧХ (кривая 3) и ФЧХ (кривая 4) контура, сформированного с учетом этих условий. Эти характеристики могут быть реализованы введением в ПФ системы дополнительно трех нулей и трех полюсов, т.е. при ПФ регулятора, равной

$$W_R(s) = \frac{(1/19.1s+1)(1/100s+1)^2}{(1/912s+1)^3}.$$

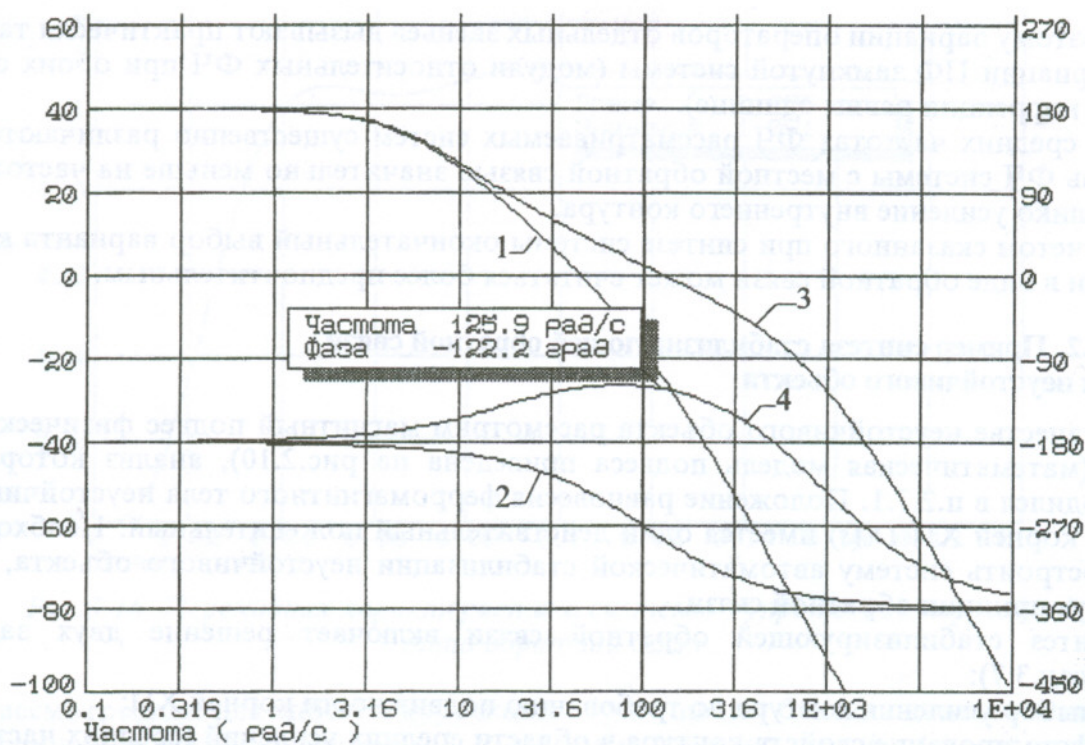


Рис.3.18. ЛЧХ разомкнутой системы

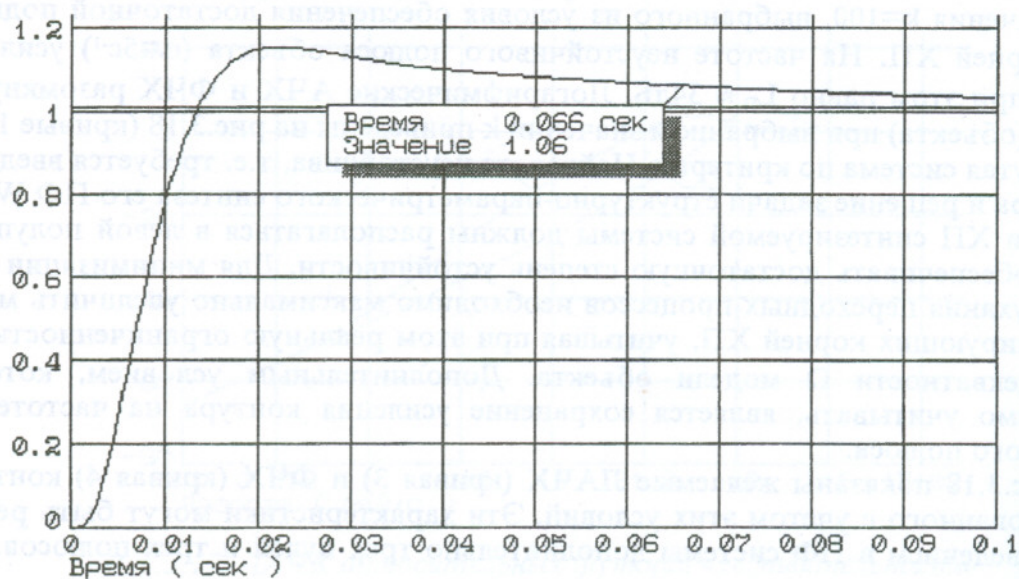


Рис.3.19. Переходная характеристика системы со стабилизирующей обратной связью

Два введенных нуля ($z_{1,2}=-100$) компенсируют два равных им полюса ПФ объекта, т.е. ХП замкнутой системы будет иметь два таких же корня (неподвижные полюсы системы).

Расчет нулей и полюсов ПФ замкнутой системы с синтезируемым регулятором дает следующие результаты. Полюсы ПФ: $p_1=-22.44$; $p_2=-100$; $p_3=-100$; $p_{4,5}=-193.6 \pm j138$; $p_{6,7}=-1163 \pm j351.7$. Нули ПФ: $z_1=-19.1$; $z_2=-100$; $z_3=-100$.

ПФ замкнутой системы имеет два диполя, отражающих неполную часть системы. Степень устойчивости $\eta=22.44$, колебательность $\mu=0.71$. Запасы устойчивости замкнутой системы равны: $\Delta L=15\text{дБ}$; $\Delta\varphi=58$ град.

На рис.3.19 показан переходный процесс в системе при ступенчатом воздействии. Прямые показатели качества равны: $\sigma=15.4\%$; $t_p=0.066$ с.

3.9.3. Пример параметрического синтеза системы управления двигателем внутреннего сгорания

В п.2.7.2 проводился анализ характеристик ДВС как объекта управления с использованием линеаризованной для определенного режима математической модели.

Для улучшения собственной динамики объекта, ослабления влияния вариаций его параметров на динамику и подавления внешних возмущающих воздействий построим систему управления, реализующую принцип обратной связи. На рис.3.20 изображена структурная схема такой системы. В данном примере рассмотрим режим функционирования двигателя при работе под номинальной нагрузкой и положим $W_2(s)=-1$. В качестве датчика обратной связи использован механический (центробежный) датчик угловой скорости с ПФ, равной

$$W_D(s) = \frac{110.25 + 4.2s}{110.25 + 4.2s + s^2}$$

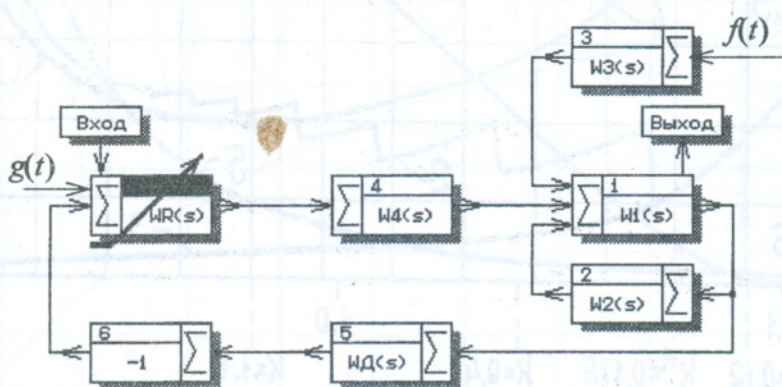


Рис.3.20. Структурная схема системы управления двигателем

Процедура обеспечения удовлетворительного поведения системы будет включать в себя формализацию требований, выбор закона управления и расчет настроек регулятора.

Сформулируем требования к системе управления.

- абсолютная ковариантность к постоянному задающему воздействию и инвариантность к постоянному возмущению.
- максимальное быстродействие системы при ограничении на колебательность в переходных режимах.
- типовой закон управления, реализуемый регулятором.

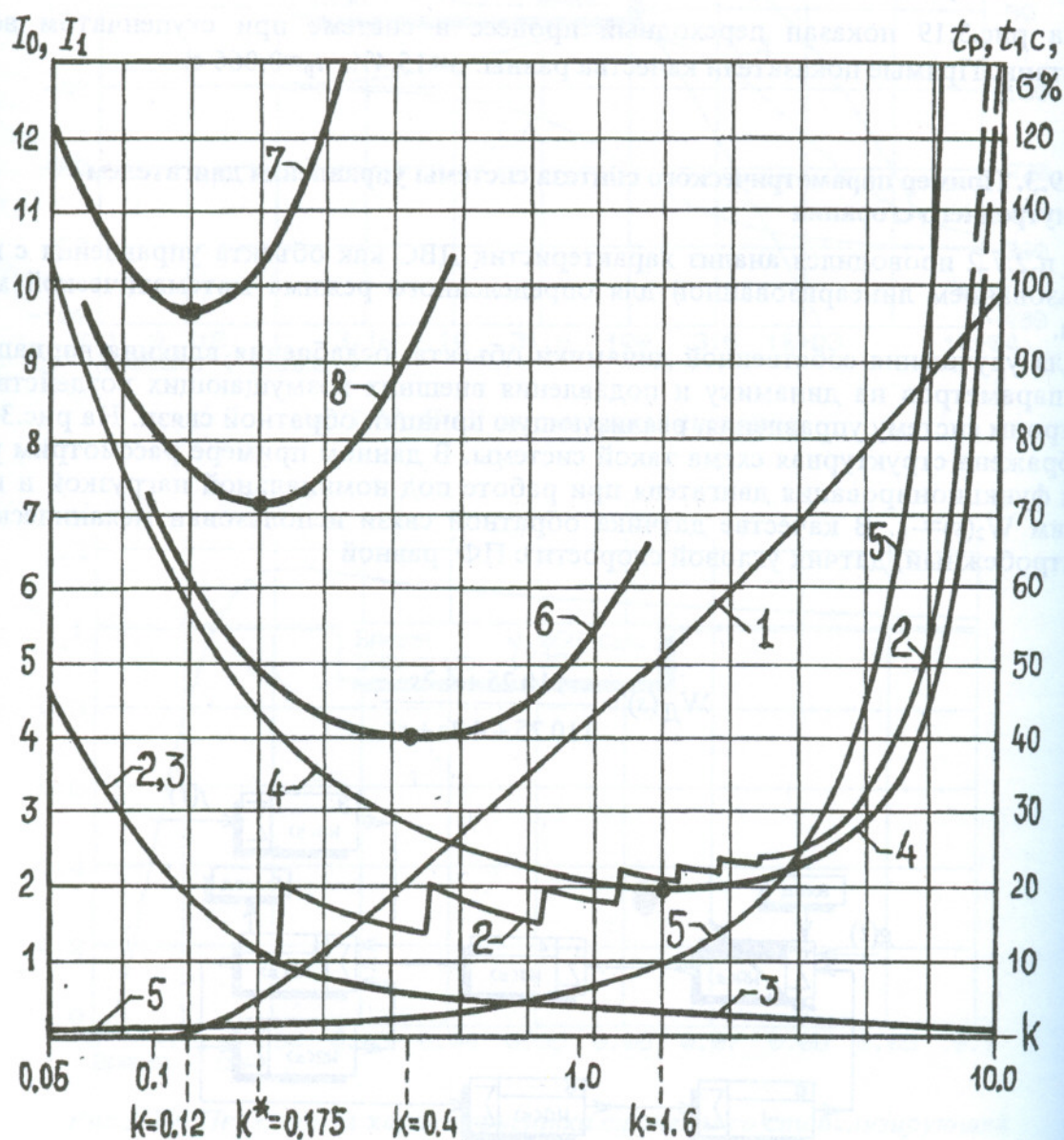


Рис.3.21. Зависимости показателей качества от коэффициента усиления

Первое требование предполагает обеспечение нулевой установившейся ошибки $e_y=0$ при $g(t)=g_0 1(t)$. Второе требование можно трактовать как минимизацию времени окончания переходного процесса $t_p \rightarrow \min$ и перерегулирования $\sigma \rightarrow \min$. Введем также ограничение на значение перерегулирования $\sigma \leq 20\%$.

При оптимизации параметров регулятора будем привлекать также быстроисчисляемые косвенные критерии - интегральные квадратичные оценки. Для иллюстрации механизма действия интегральных оценок и формируемого на их основе "улучшенного интегрального критерия" исследуем зависимости используемых прямых и косвенных показателей качества от варьируемого параметра k_R - рис.3.21.

Алгоритмы управляющего устройства с учетом требования $e_y=0$ ограничим двумя законами управления: И - интегрального и ПИ - пропорционально-интегрального.

И-закон управления

ПФ И-регулятора имеет вид:

$$W_R(s) = \frac{1}{T_I s} = \frac{k_R}{s}$$

Оптимизация будет проводиться в пространстве одного параметра - коэффициента усиления k_R , который будем изменять в широких пределах: $0.05 \leq k_R \leq 10$. При $k_{R\max}=10$ система выходит на колебательную границу устойчивости. При варьировании k_R в этих пределах переходные процессы изменяются от затянутых апериодических (кривая 1 на рис.3.22, соответствующая $k_R=0.05$) до сильно колебательных (кривая 2 на том же рисунке, полученная при $k_R=5$).

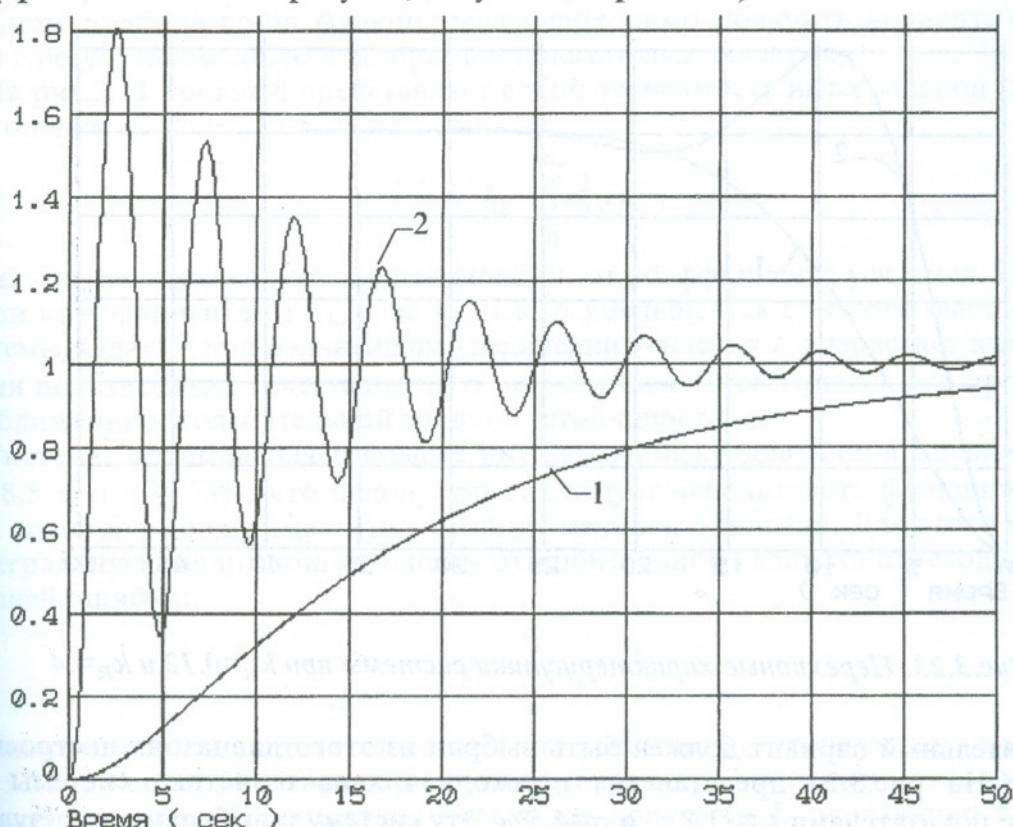


Рис.3.22. Переходные характеристики системы при $k_R=0.05$ и $k_R=5.0$

На рис.3.21 кривая 1 представляет собой зависимость перерегулирования σ , а кривая 2 времени регулирования t_p от коэффициента усиления.

Обратим внимание на скачкообразный характер изменения t_p при $\sigma > 5\%$, что объясняется специфичностью определения этого критерия как времени последнего вхождения в пятипроцентную зону от установившегося значения.

Следует отметить, что для колебательных переходных процессов критерий "время регулирования t_p " может входить в противоречие с понятием "быстродействие", которое связано с полосой пропускания системы и должно расти с увеличением коэффициента усиления в контуре. Если под быстродействием понимать скорость реакции системы на изменение входного воздействия, то можно использовать критерий "время первого согласования" (t_1), т.е. время первого вхождения переходной характеристики в пятипроцентную зону от установившегося значения. На рис.3.21 зависимость этого критерия представлена кривой 3. Очевидно, что при $\sigma < 5\%$ показатели t_p и t_1 совпадают.

Из графика зависимости перерегулирования видно, что для выполнения $\sigma \leq 20\%$ необходимо $k_R \leq 0.4$. Диапазон значений $0.12 \leq k_R \leq 0.4$ является областью Парето по быстродействию системы и ее склонности к колебательности при соблюдении ограничений на допустимые значения отдельных критериев ($\sigma \leq 20\%$). На рис.3.23 кривая 1 является переходной характеристикой при $k_R=0.12$, а кривая 2 - при $k_R=0.4$.

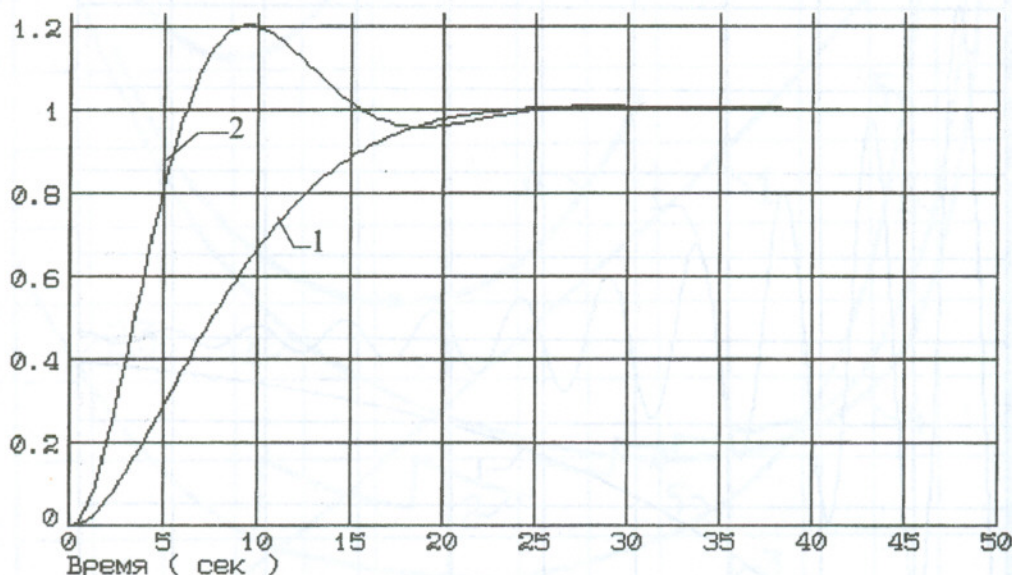


Рис.3.23. Переходные характеристики системы при $k_R=0.12$ и $k_R=0.4$

Окончательный вариант должен быть выбран из этого диапазона настроек регулятора. На рис.3.24 представлена переходная характеристика системы при $k_R=0.175$ с показателями $t_p=11.8$ с. и $\sigma=4.5\%$. Эту систему и выберем как результат синтеза по прямым критериям качества.

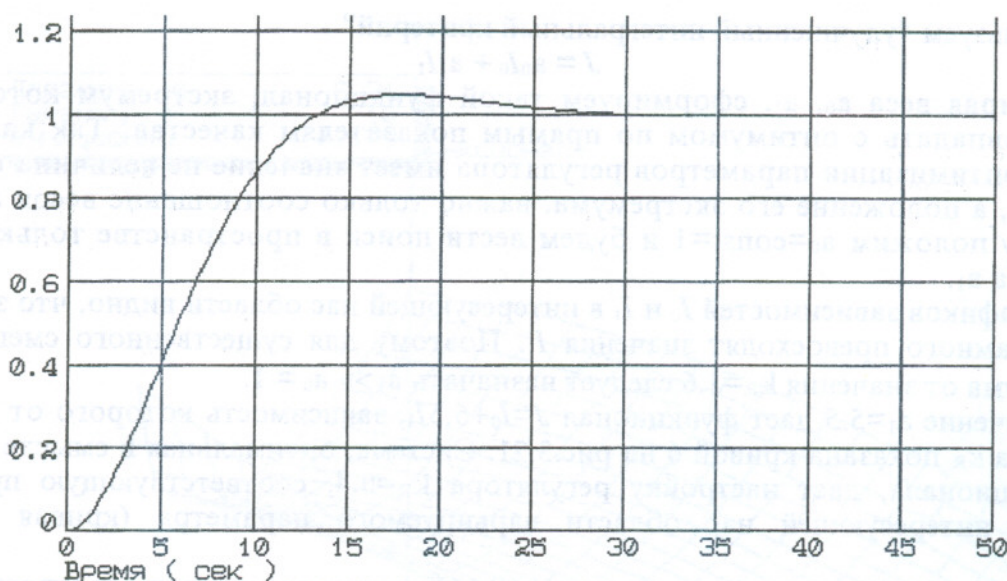


Рис.3.24. Переходная характеристика оптимальной системы с П-регулятором

Использование косвенных критериев качества (в данном случае - интегральных оценок) при автоматизированной процедуре параметрической оптимизации должно приводить в область Парето по прямым показателям качества, а при правильном подборе весов функционала необходимо получить вариант, совпадающий с результатом синтеза по прямым показателям качества.

На рис.3.21 кривая 4 представляет собой зависимость интегральной квадратичной оценки

$$I_0 = \int_0^{\infty} e_{\Pi}^2(t) dt,$$

где e_{Π} - переходная составляющая ошибки, от коэффициента усиления. При увеличении коэффициента от $k_{R\min}$ до $k_R=1.6$, I_0 уменьшается с ростом быстродействия системы. Однако при дальнейшем увеличении усиления I_0 возрастает вместе с прямыми показателями качества t_p и σ из-за затягивания переходного процесса при приближении к колебательной границе устойчивости.

Система, оптимальная в смысле интегральной квадратичной оценки I_0 , имеет $t_p=18.5$ с. и $\sigma = 53\%$, что недопустимо. Следует использовать функционал, оптимум которого можно сместить в сторону меньших усиления. Для этого привлечем интегральную квадратичную оценку от производной квадрата переходной составляющей ошибки:

$$I_1 = \int_0^{\infty} (\dot{e}_{\Pi}(t))^2 dt.$$

Зависимость показателя качества I_1 от усиления k_R представлена кривой 5 на рис.3.21. Во всем диапазоне варьируемого параметра эта зависимость имеет монотонный характер. Оптимизация только по критерию I_1 однозначно приведет к значению $k_{R\min}$, т.е. получим самую медленную систему из возможных.

Используем "улучшенный интегральный критерий"

$$J = a_0 I_0 + a_1 I_1$$

и, подбирая веса a_0 , a_1 , сформируем такой функционал, экстремум которого будет совпадать с оптимумом по прямым показателям качества. Так как для задачи оптимизации параметров регулятора имеет значение не величина функционала, а положение его экстремума, важно только соотношение весов a_0 , a_1 . Поэтому положим $a_0 = \text{const} = 1$ и будем вести поиск в пространстве только одного веса a_1 .

Из графиков зависимостей I_0 и I_1 в интересующей нас области видно, что значения I_0 намного превосходят значения I_1 . Поэтому для существенного смещения экстремума от значения $k_R = 1.6$ следует назначать $a_1 \gg a_0 = 1$.

Назначение $a_1 = 5.5$ дает функционал $J = I_0 + 5.5 I_1$, зависимость которого от коэффициента k_R показана кривой 6 на рис.3.21. Система, оптимальная в смысле такого функционала, дает настройку регулятора $k_R = 0.4$, соответствующую правой границе интересующей нас области варьируемого параметра (кривая 2 на рис.3.23).

Величина $a_1 = 67$ задает функционал $J = I_0 + 67 I_1$, оптимум которого соответствует значению $k_R = 0.12$ - кривая 7 на рис.3.21. Оптимизация в этом случае приведет к левой границе области варьируемого параметра (кривая 1 на рис.3.23).

Таким образом, назначая вес в пределах $5.5 < a_1 < 67$, задаем функционал, оптимизация по которому будет приводить в требуемую область настроек, выделенную по прямым показателям качества. Величина веса $a_1 = 31$ дает функционал $J = I_0 + 31 I_1$, оптимум которого соответствует $k_R = 1.75$ - кривая 8 на рис.3.21. Таким образом, оптимизация по этому улучшенному интегральному критерию приводит к системе, оптимальной также и по прямым показателям качества.

ПИ-закон управления

ПФ ПИ-регулятора имеет вид:

$$W_R(s) = k_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{k_R (T_I s + 1)}{T_I s}$$

Оптимизация производится в пространстве двух параметров - коэффициента усиления k_R и постоянной интегрирования T_I .

ПФ регулятора можно привести к виду

$$W_R(s) = \frac{k_R s + \frac{k_R}{T_I}}{s} = \frac{g_1 s + g_0}{s}$$

и оптимизировать коэффициенты g_0 и g_1 полинома числителя.

Для оптимизации параметров этого регулятора также воспользуемся интегральными оценками качества.

На первом этапе используем функционал, содержащий только одну интегральную оценку: $J = I_0$.

Поверхность отклика - зависимость функционала от варьируемых параметров - представлена на рис.3.25. Поверхность построена в диапазонах варьируемых параметров: $0.1 \leq g_0 \leq 10$; $0.1 \leq g_1 \leq 10$.

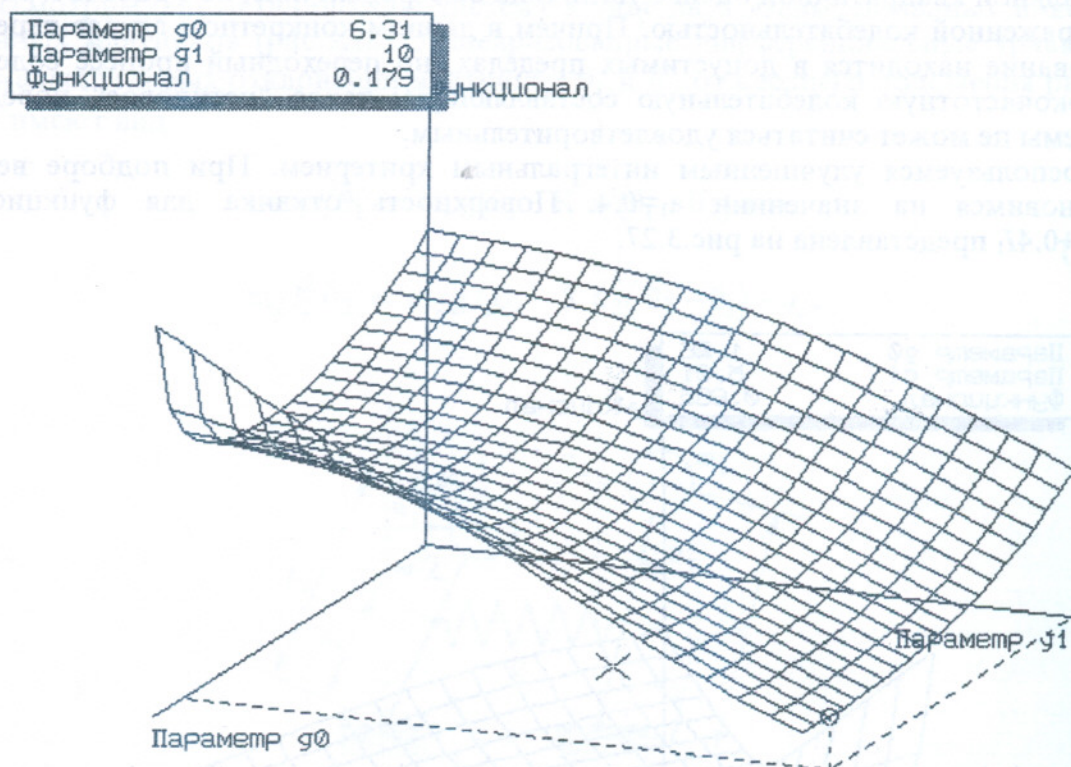


Рис.3.25. Зависимость интегральной квадратичной оценки от варьируемых параметров

На поверхности рис.3.25 изображен экстремум, который находится на максимальном граничном значении параметра g_1 . Действительно, точная оптимизация по функционалу $J=I_0$ приводит к экстремальным значениям $g_0=6.8$, $g_1=10.0$. Анализ прямых показателей качества для этой системы дает $t_p=1.9$ с., $\sigma=10\%$ - рис.3.26, кривая 1.

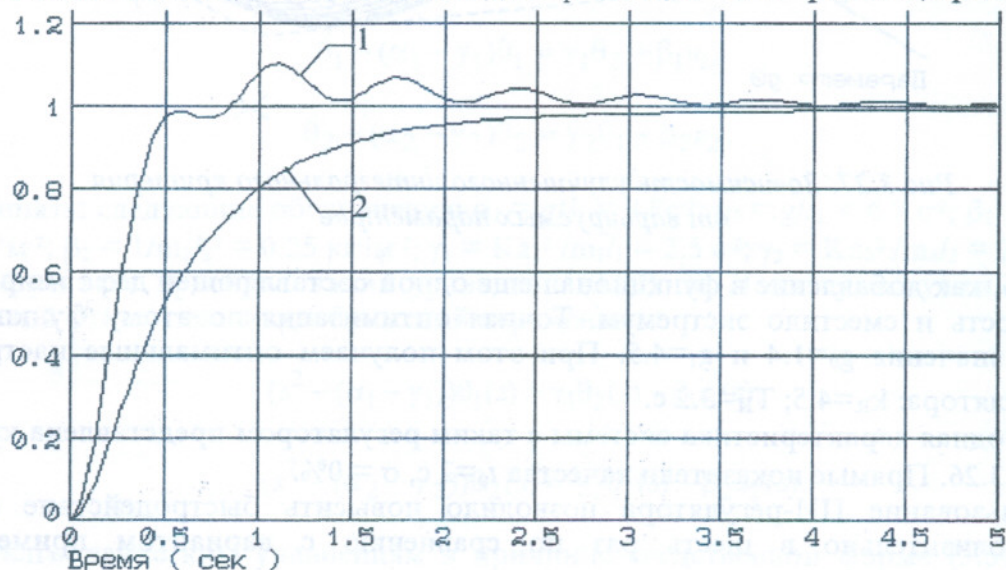


Рис.3.26. Переходные характеристики системы с ПИ-регулятором

Как и в случае использования П-регулятора, оптимизация только по одной интегральной квадратичной оценке увеличила быстродействие, но привела к системе с выраженной колебательностью. Причем в данном конкретном случае перерегулирование находится в допустимых пределах, но переходный процесс содержит высокочастотную колебательную составляющую; такое "нетиповое" поведение системы не может считаться удовлетворительным.

Воспользуемся улучшенным интегральным критерием. При подборе веса a_1 остановимся на значении $a_1=0.4$. Поверхность отклика для функционала $J=I_0+0.4I_1$ представлена на рис.3.27.

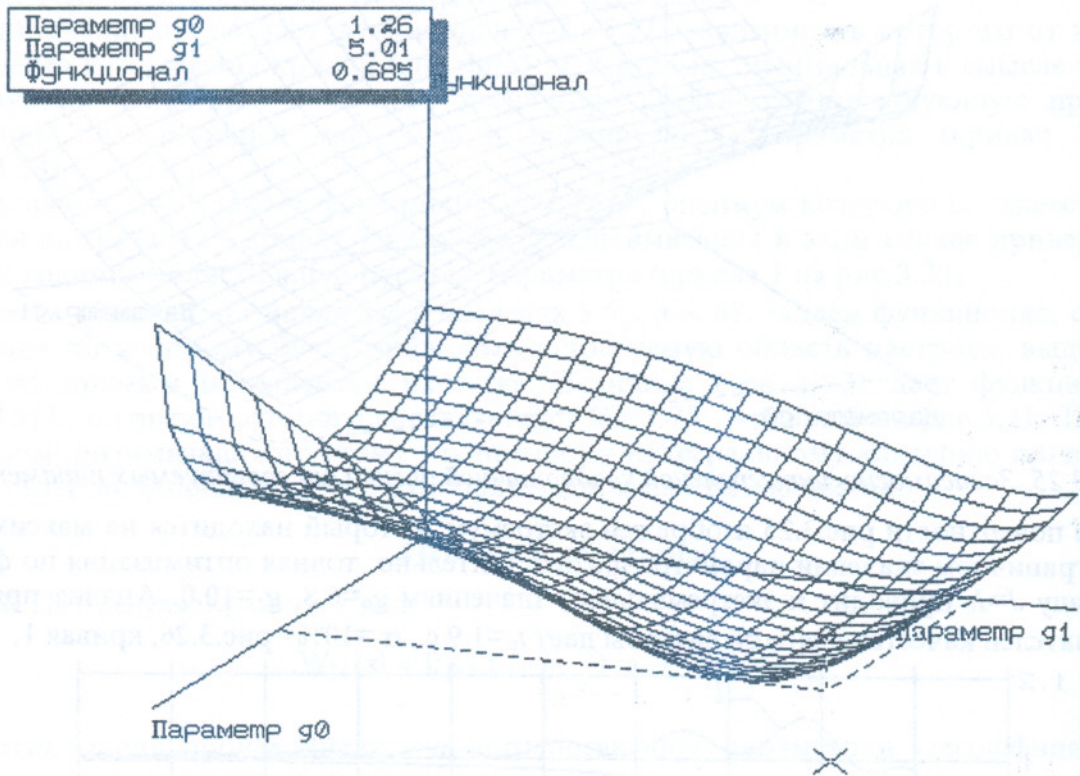


Рис.3.27. Зависимость улучшенного интегрального критерия от варьируемых параметров

Видно, как добавление в функционал еще одной составляющей деформировало поверхность и сместило экстремум. Точная оптимизация по этому функционалу дает значения $g_0=1.4$ и $g_1=4.5$. При этом получаем оптимальные настройки ПИ-регулятора: $k_R=4.5$; $T_H=3.2$ с.

Переходная характеристика системы с таким регулятором представлена кривой 2 на рис.3.26. Прямые показатели качества $t_p=2$ с, $\sigma=0\%$.

Использование ПИ-регулятора позволило повысить быстродействие системы приблизительно в шесть раз по сравнению с вариантом применения И-регулятора.

3.9.4. Пример синтеза системы стабилизации механического объекта

Рассмотрим [34] механическую систему в виде двух взаимосвязанных инвертированных маятников (рис.3.28). Линеаризованные дифференциальные уравнения для малых угловых отклонений маятников θ_1 и θ_2 от верхнего положения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 &= m_1 g l_1 \dot{\theta}_1 - K a_1^2 (\theta_1 - \theta_2) + u_1; \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 &= m_2 g l_2 \dot{\theta}_2 - K a_2^2 (\theta_2 - \theta_1) + u_2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

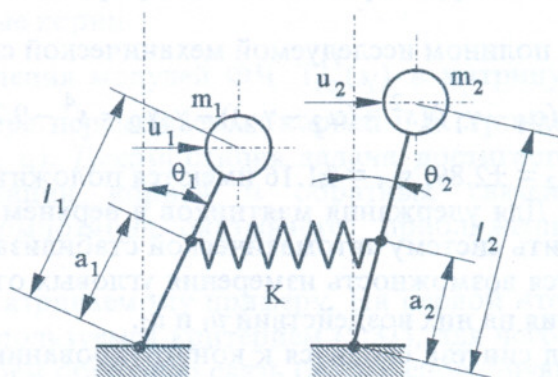


Рис.3.28. Взаимосвязанные инвертированные маятники

Параметры механической системы примем равными: $m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}$; $g = 9.8 \text{ мс}^{-2}$; $l_1 = 1 \text{ м}$; $l_2 = 2 \text{ м}$; $a_1 = 0.5 \text{ м}$; $a_2 = 1 \text{ м}$; $K = 10 \text{ Нм}^{-1}$.

Запишем дифференциальные уравнения системы (3.28) в следующем виде:

$$\ddot{\theta}_1 - (\alpha_1 - \gamma_1)\theta_1 = \gamma_1\theta_2 + \beta_1 u_1; \quad (3.29)$$

$$\ddot{\theta}_2 - (\alpha_2 - \gamma_2)\theta_2 = \gamma_2\theta_1 + \beta_2 u_2,$$

где приняты следующие обозначения: $\alpha_1 = g/l_1 = 9.8 \text{ с}^{-2}$; $\alpha_2 = g/l_2 = 4.9 \text{ с}^{-2}$; $\beta_1 = 1/m_1 l_1^2 = 1 \text{ кг}^{-1} \text{ м}^{-2}$; $\beta_2 = 1/m_2 l_2^2 = 0.25 \text{ кг}^{-1} \text{ м}^{-2}$; $\gamma_1 = K a_1^2 / m_1 l_1 = 2.5 \text{ с}^{-2}$; $\gamma_2 = K a_2^2 / m_2 l_2 = 2.5 \text{ с}^{-2}$.

В результате преобразования уравнений (3.29) по Лапласу получим систему уравнений относительно изображений переменных:

$$(s^2 - (\alpha_1 - \gamma_1))\theta_1(s) = \gamma_1\theta_2(s) + \beta_1 u_1(s); \quad (3.30)$$

$$(s^2 - (\alpha_2 - \gamma_2))\theta_2(s) = \gamma_2\theta_1(s) + \beta_2 u_2(s).$$

По алгебраическим уравнениям в причинно-следственной форме (3.30) легко построить модель системы в форме структурной схемы (рис.3.29).

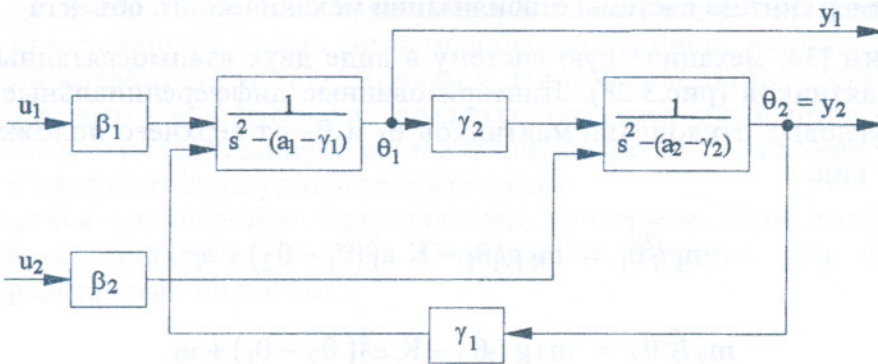


Рис.3.29. Структурная схема (С-граф) объекта

Характеристический полином исследуемой механической системы имеет вид:

$$D(s) = (s^2 - (\alpha_1 - \gamma_1))(s^2 - (\alpha_2 - \gamma_2)) - \gamma_1\gamma_2 = s^4 - 9.7s^2 + 11.3 .$$

Среди корней ХП: $s_{1,2} = \pm 2.89$; $s_{3,4} = \pm 1.16$ имеются положительные, следовательно, объект неустойчив. Для удержания маятников в верхнем положении равновесия необходимо построить систему автоматической стабилизации.

Допустим, что имеется возможность измерения угловых отклонений маятников $y_1 = \theta_1$ и $y_2 = \theta_2$ и оказания на них воздействий u_1 и u_2 .

Аналитический метод синтеза сводится к конструированию наблюдателя и вычислению матрицы коэффициентов регулятора состояния, обеспечивающего заданное расположение корней ХП или минимизирующего квадратичный функционал. Здесь примем частотный метод, связанный с декомпозицией процедуры синтеза.

На этапе топологического синтеза требуется выбрать число регуляторов и места их включения, т.е. подмножество обратных связей, наилучших в принятом смысле. Для рассматриваемого примера исходное множество вариантов включения обратных связей при двух входах $\{u_1, u_2\}$ и двух выходах $\{y_1, y_2\}$ содержит $2^4 - 1 = 15$ элементов. Число требуемых обратных связей заранее неизвестно; задачу стабилизации может решить единственная обратная связь, а может не хватить и всех возможных пар (u_r, y_q) . Решение может быть не единственным. В силу конечности множества вариантов задача топологического синтеза решается перебором. Вместо простого перебора всех вариантов топологий целесообразно использовать эволюционную процедуру синтеза [10, 11, 13].

Эволюционный синтез предполагает, что на каждой итерации $\lambda = 1, 2, \dots$, объект охватывается одной наиболее эффективной обратной связью. Из множества возможных мест включения обратных связей, естественно, наилучшим является то, которое способно обеспечить наибольшее перемещение выбранной группы корней ХП. Выбор критериев оценки потенциальной эффективности вариантов включения стабилизирующей обратной связи базируется на двух соображениях:

- чем больше модуль ФЧ ХП $T_{Tq}^D(s)$ на некотором интервале значений аргумента s , тем больше приращение тех корней ХП, модули которых принадлежат этому интервалу;

- поскольку ФЧ $T_{rq}^D(s)$ не зависит от оператора обратной связи, она может служить оценкой эффективности варианта включения обратной связи до конкретизации ее оператора.

Пусть на λ -ой итерации синтеза ХП системы $D^{(\lambda)}$ имеет подмножество $\{s_i^{(\lambda)}; i=1,2,\dots\}$ плохих корней и имеется множество $\{(r, q); r=1,2,\dots; q=1,2,\dots\}$ вариантов включения обратных связей. Критерий топологического синтеза запишется так

$$\max_{(r,q)} \max_i \text{mod } T_{rq}^D(s_i), \quad (3.31)$$

т.е. на каждой итерации выбирается место включения (r, q) , перемещающее наиболее чувствительные корни.

Упорядочим значения модулей ФЧ $T_{rq}^D(s_i)$ в матрицу $T^{(\lambda)}$, столбцам которой соответствуют номера перемещаемых корней i , а строкам - варианты включения обратных связей (r, q) . Декомпозиция задачи достигается, если матрица T при надлежащей нумерации корней и обратных связей оказывается блочно-диагональной. Декомпозиция оказывается приближенной, если диагональные блоки доминируют.

Вернемся к рассматриваемому примеру. На первой итерации ($\lambda=1$) для выбора обратной связи воспользуемся критерием (3.31), для чего составим матрицу $T^{(1)}$ в виде табл.3.1. Выберем обратную связь (u_1, y_1) , способную перемещать правый корень $s_1 = 2.89$ в наибольшей степени.

Таблица 3.1

	$s_1 = 2.89$	$s_3 = 1.16$
$T_{11}^D = s^2 - 2.4$	5.95	1.05
T_{22}^D	0.263	1.49
T_{12}^D	0.626	0.625
T_{21}^D	2.50	2.50

Проведем этап структурно-параметрического синтеза. По ЛАЧХ контура можно заметить, что его усиление на частоте перемещаемого корня мало: $L_{11}(\omega=2.89) = -24$ дБ. Следовательно, замыкание контура единичной обратной связью переместит корень s_1 незначительно. Для обеспечения большей подвижности корня введем усиление $k_{11} = 100$.

Процесс формирования желаемой ПФ контура $W_{11}^d(s)$ сводится к введению нуля $z_1 = -5.75$, в результате чего наклон ЛАЧХ синтезированного контура $L_{11}^d(\omega)$ в окрестности частоты среза становится равным -20 дБ/дек. Соответствующий регулятор (ПД) имеет ПФ:

$$W_{R11}^{(1)}(s) = 100(1 + 0.174s).$$

Управляющее воздействие u_1 формируется по переменным состояния первого маятника $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ на основе уравнения:

$$u_1 = 100 \theta_1 + 17.4 \dot{\theta}_1.$$

Для выполнения условия физической реализуемости регулятора введем в его ПФ полюс $p_1 = -69$, т.е. примем:

$$W_{R11}^{(1)}(s) = 100 \frac{1 + 0.174s}{1 + 0.0145s}.$$

Анализ системы с синтезированным регулятором показывает, что ее ХП

$$D^{(1)}(s) = -228.7 - 41.54s + 90.30s^2 + 17.24s^3 + s^4 + 0.0145s^5$$

имеет корни: $s_{1,2}^{(1)} = -11.4 \pm j 2.92$; $s_3^{(1)} = 1.57$; $s_4^{(1)} = -1.58$; $s_5^{(1)} = -46.4$. Положительный корень $s_3^{(1)} = 1.16$ переместился мало - он компенсируется положительным нулем ПФ $\Phi_{11}(s)$. Необходима следующая итерация синтеза ($\lambda = 2$).

Наилучшее на этой итерации место (2,2) включения обратной связи выбираем на основе матрицы $T^{(2)}$ в виде табл.3.2.

Таблица 3.2

	$s_3^{(1)} = 1.57$
$T_{22}^D = 23.2 + 4.32s + 0.25s^2 + 0.0036s^3$	30.6
$T_{21}^D = 2.5 + 0.36s$	2.56
$T_{12}^D = 0.625 + 0.009s$	0.639

На частоте неустойчивого корня $s_3^{(1)}$ усиление контура равно -26 дБ, поэтому вводим усиление $k_{22} = 100$, обеспечивающее необходимую подвижность корня $s_3^{(1)}$. На этапе структурно-параметрического синтеза введем нуль $z_1 = -1.91$ и полюс $p_1 = -100$, что обеспечивает типовой вид ЛАЧХ контура. Соответствующая ПФ регулятора имеет вид:

$$W_{R22}^{(2)}(s) = 100 \frac{1 + 0.525s}{1 + 0.01s}.$$

Эта итерация обеспечивает получение устойчивой системы, ХП которой имеет вид:

$$D^{(2)}(s) = 2089 + 1604s + 341.5s^2 + 31.62s^3 + 1.362s^4 + 0.02445s^5 + 0.000145s^6.$$

Его корни: $s_{1,2}^{(2)} = -11.34 \pm j2.973$; $s_3^{(2)} = -2.025$; $s_4^{(2)} = -13.18$; $s_5^{(2)} = -46.41$; $s_6^{(2)} = -84.89$.

На этом можно завершить синтез стабилизирующих обратных связей, если требуется обеспечить только устойчивость системы.

Синтез в частотной области привел к естественному образованию двух подсистем. Представляет интерес анализ степени их динамической взаимосвязи. Роль пружины взаимосвязи маятников (рис.3.28) на структурной схеме (рис.3.29) отражает контур взаимосвязи.

Прежде всего, заметим, что корни ХП автономных маятников (при отсоединении пружины) равны: $s_{1,2} = \pm 3.13$; $s_{3,4} = \pm 2.21$. Пружина, их связывающая, несколько их смещает: $s_{1,2} = \pm 2.89$; $s_{3,4} = \pm 1.16$ (максимальное относительное приращение 47%). Охват объекта контурами стабилизирующих обратных связей приводит к относительному ослаблению контура связи подсистем. Действительно, в синтезированной системе размыкание контура связи (удаление пружины) незначительно меняет корни ХП: $s_{1,2} = -11.38 \pm j2.93$; $s_3 = -2.036$; $s_4 = -13.08$; $s_5 = -46.41$; $s_6 = -84.89$. Максимальное изменение составляет 0.5%.

Анализ иллюстрирует известную декомпозирующую роль обратных связей. Полученная система является частично коннективно устойчивой [34] - при топологической вариации - размыкании контура связи подсистем - она не только сохраняет устойчивость, но и качество процессов (робастна).

ЛИТЕРАТУРА

1. Автоматизированное проектирование систем управления/ Под ред. М. Джамшиди и Ч.Дж. Хергета. - М.: Машиностроение, 1989.
2. Андронов В.Н., Имаев Д.Х. Вопросы построения частных моделей топологически сложных систем управления различных рангов неопределенности//Изв.ЛЭТИ, 1982. Вып.312. С.70-77.
3. Анисимов В.И. Топологический расчет электронных схем. - Л.: Энергия, 1977.
4. Аязян Г.К. Расчет автоматических систем с типовыми алгоритмами регулирования: Учебное пособие. - Уфа: Изд. Уфим. нефт. ин-та, 1989.
5. Богданов В.Н., Имаев Д.Х., Пошехонов Л.Б. Диалоговые программы вычисления характеристик структурно-сложных систем управления //Межвуз.сб.науч.тр. /Под ред.Р.И. Сольничева. - Л.: ЛИАП, 1989. С.92-98.
6. Богданов В.Н., Имаев Д.Х., Пошехонов Л.Б., Арндт Р., Ковальски З. Анализ систем управления со сложной структурой с помощью программы *CLASSiC* для персональных компьютеров/ Микропроцессорные системы контроля и управления//Сб.науч.тр. - Рига: Риж.техн.ун-т, 1992. С.4-13.
7. Вавилов А.А., Имаев Д.Х. Машинные методы расчета систем управления. - Л.: Изд-во Ленингр.ун-та, 1981.
8. Гарднер М.Ф., Бернс Дж.Л. Переходные процессы в линейных системах. - М.: ГИФМЛ, 1961.
9. Имаев Д.Х., Краснопрошина А.А., Яковлев В.Б. Теория автоматического управления. Часть 1. Линейные системы управления. - Киев: Выща школа, 1992.
10. Имаев Д.Х. Анализ и синтез систем управления с применением программы *CLASSiC* для ПЭВМ: Учебное пособие. - С-Пб: ЭТИ, 1992.
11. Имаев Д.Х., Ковальски З. Частотный метод синтеза структурно-сложных систем управления с помощью программы *CLASSiC* //Изв.вузов. Приборостроение. Т.37, №7-8, 1994. С.32-37.
12. Имаев Д.Х., Пошехонов Л.Б., Гладких С.Л., Петропавловский А.В. Алгоритм перечисления ненулевых слагаемых определителей разреженных матриц. Изв.ГЭТУ, вып.465, С-Пб, 1994. С.87-91.
13. Имитационное моделирование производственных систем/Под ред.А.А. Вавилова. - М.: Машиностроение; Берлин: Veb Verlag Technik, 1983.
14. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965.
15. Остром К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления. - М.: Мир, 1973.
16. Расчет систем управления с применением СМ ЭВМ/ В.Н. Андронов, Д.Х. Имаев, Л.Б. Пошехонов и др./Под ред. В.Б. Яковлева. - Л.: ЛЭТИ, 1987.
17. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. - М.: Мир, 1980.
18. Теория автоматического управления/Под ред.А.В. Нетушила. - М.: Высшая школа, 1976.
19. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. / Под ред. В.В. Солодовникова. - М.: Машиностроение, 1967.
20. Томович Р., Вукобратович М. Общая теория чувствительности. - М.: Сов.радио, 1972.

21. Фельдбаум А.А. Электрические системы автоматического регулирования. - М.: ГИОП, 1957.
22. Чернецкий В.И., Дидук Г.В., Потапенко А.А. Математические методы и алгоритмы исследования автоматических систем. - Л.: Энергия, 1970.
23. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975.
24. Doyle J.C., Stein G. Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical / Modern Synthesis / IEEE Trans. on AC. Vol. AC-26, N1, 1981. P.4-15.
25. Kowalski Z., Imajew D., Arendt R. i inni. Cwiczenia laboratoryjne z podstaw automatyki. - Gdansk: PG, 1992.
26. Kowalski Z., Tittenbrun S, Lastowski W.F. Regulacja predkosci obrotowej okretowych silnikow spalinowych. - Gdansk: Wydawnictwo morskie, 1988.
27. Kowalski Z., Imajew D., Arendt R. Poszechonow L. Czesotliwosciowe metody analizy i syntezy ukladow sterowania. - Gdansk: PG, 1996.
28. Matrix_x Users Guide. Integrated Systems, Inc. Palo Alto, CA, 1984.
29. Rimer M., Frederic K. Solutions of the Grumman F-14 Benchmark Control Problem. IEEE Control Systems Magazine, vol.7, N4, 1987. P. 36-39.
30. Rimvall C.M. Computer-Aided Control System Design / IEEE Control Systems. Vol.13, N2, 1993. P.14-16.
31. Rosenbrock H.H. Computer-Aided Control System Design. Academic Press, 1974.
32. Schaufelberger W. Education future of Control Engineering. 11-th IFAC World Congress. - Tallinn, August 13-17, 1990.
33. SIMULINK for Microsoft Windows. User's Guide. The Math Works, Inc., Natic, MA, 1992.
34. Siljak D. Decentralized Control of Complex Systems. - Academic Press, 1991.
35. Thomson P.M. Program CC Tutorial and User's Guide. Systems Technology, Inc., Nawthorne, July, 1989.
36. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. - М.: Наука, 1980.