УДК 004.942:629.55

И.В. Семушин, Ю.М. Кроливецкая, Е.С. Петрова

ОРИЕНТИРОВАННАЯ НА ФИЛЬТРАЦИЮ КАЛМАНА МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ЦИРКУЛЯЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА ТРАЕКТОРИИ ЦЕЛИ[1]

Семушин Иннокентий Васильевич, *доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные технологии» Ульяновского государственного университета. Имеет монографии, статьи, учебные пособия и патенты на изобретения. Область научных интересов: фильтрация и управление в условиях неопределенности. [e-mail: kentvsem@yandex.ru].*

Кроливецкая Юлия Максимовна, *аспирант кафедры «<Информационные технологии» УлГУ, окончила факультет математики и информационных технологий УлГУ по специальности «Прикладная математика и информатика». Область научных интересов: фильтрация и обнаружение моментов нарушений модельных параметров для стохастических систем. [e-mail: juliakrolivetskaya@gmail.com].*

Петрова Елена Сергеевна, *аспирант кафедры «Информационные технологии» УлГУ; окончила факультет математики и информационных технологий УлГУ по специальности «Прикладная математика и информатика». Область научных интересов: фильтрация и идентификация модельных параметров для стохастических систем. [e-mail: petrovko@list.ru].*

Аннотация

Модель стохастического гармонического осциллятора использована для аппроксимации установившейся циркуляции морского подвижного объекта. Основной мотив к этому подходу заключается в том, чтобы соблюсти требование линейности модели движения относительно вектора состояния даже для изменчивых и сложных траекторий движения и тем самым обеспечить строгость применения стандартного (нерасширенного) фильтра Калмана, избегая его линеаризации.

Ключевые слова: стохастический гармонический осциллятор, внезапное маневрирование, судовождение в сложных условиях, системы предотвращения столкновений.

Innokentiy Vasilyevich Semushin, *Doctor of Science in Engineering, Professor of Information Technology Department at Ulyanovsk State University (UlSU); an author of papers, monographs, and textbooks; holds patents for inventions; his field of interest includes filtering and control under uncertainty. e-mail: kentvsem@yandex.ru.*

Yuliya Maksimovna Krolivetskaya, *Post-graduate student of Information Technology Department at Ulyanovsk State University; graduated from the Faculty of Mathematics and Information Technology of UlSU with the specialty in Applied Mathematics and Computer Science; her field of interest includes filtering and model parameter change point detection for stochastic systems. e-mail: juliakrolivetskaya@gmail.com.*

Elena Sergeevna Petrova, *Post-graduate student of Information Technology Department at UlSU; graduated from Mathematics and Information Technology Faculty of UlSU with the specialty in «Applied Mathematics and Computer Science»; her field of interest includes filtering and model parameter identification for stochastic systems. e-mail: petrovko@list.ru.*

1 Эта работа частично поддержана грантом РФФИ № 13-01-9703513.

Abstract

The model of stochastic harmonic oscillator is used to approximate the steady-circle path. The main motif for the approach is to meet the model linearity requirement with respect to the state vector even for the raplex trajectories and so to make the standard (non-extended) Kalman filter strictly applicable avoiding its linearization.

Key words: stochastic harmonic oscillator, abrupt maneuvering, ship navigation in complex conditions, collision avoiding systems.

Введение

В основе решения LQG-задачи фильтрации, т. е. задачи оценивания с линейными моделями систем, с оптимизацией по квадратическому критерию и с гауссовыми возмущениями, лежит решение матричного нелинейного рекуррентного уравнения Риккати (Recurrent Riccati Equation, RRE) [1]. Прямые итерации RRE включены в алгоритм оптимального LQG-оценивателя (Kalman Filter, KF). Стандартная форма KF, чувствительная к ошибкам округления, может заменяться другими численно устойчивыми формами при компьютерной реализации [2, 3]. Однако эти формы оптимальны лишь для линейных моделей состояния и наблюдений. Когда требование линейности нарушено, фильтр в его любой форме вынужденно подвергают процедуре линеаризации [2, 4] относительно текущей оценки состояния. Получаемый таким образом субоптимальный результат называют расширенным фильтром Калмана (Extended KF, EKF) первого или второго порядка, в зависимости от того, сколько (два [2] или три [3]) членов ряда Тейлора учтено в аппроксимации.

Поскольку движение центра масс корабля при установившейся циркуляции приводит к нелинейным уравнениям, их линеаризация, а следовательно, и субоптимальность фильтра Калмана для этих участков движения кажутся неизбежными [2–4].

Однако это не так. Можно сохранить линейность моделей движения даже для сложных, изменяющихся траекторий движения, если удачно выбрать набор переменных состояния. Цель настоящей работы – продемонстрировать такую возможность. В основе подхода лежит представление хорошо известных фигур Лиссажу как замкнутых траекторий точки, совершающей два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Циркуляция может быть представлена частью простейшей фигуры Лиссажу (окружности).

1 Геометрия (кинематика) задачи

Изобразим графически переключение на модель циркуляции после участка равномерного прямолинейного движения (рис. 1).

Запишем уравнения связи систем координат:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - x_s, \\ y' &= y - y_s, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \xi &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ \eta &= -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Из (1) получаем функции времени:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_s + \xi(t)\cos\alpha - \eta(t)\sin\alpha, \\ y(t) &= y_s + \xi(t)\sin\alpha + \eta(t)\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где (см. рис. 1)

$$\left.\begin{aligned} \xi(t) &= r\sin\omega_n(t-t_s), \\ \eta_L(t) &= r\left[1-\cos\omega_n(t-t_s)\right], \\ \eta_R(t) &= r\left[\cos\omega_n(t-t_s)-1\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2) при повороте влево (индекс L, left), находим:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_s + r\sin\left[\omega_n(t-t_s)+\alpha\right] - r\sin\alpha, \\ y(t) &= y_s - r\cos\left[\omega_n(t-t_s)+\alpha\right] + r\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Подставляя (3) в (2) при повороте вправо (индекс R, right), находим:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_s + r\sin\left[\omega_n(t-t_s)-\alpha\right] + r\sin\alpha, \\ y(t) &= y_s + r\cos\left[\omega_n(t-t_s)-\alpha\right] - r\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Следующим этапом решения будет построение четырех динамических моделей (четырех систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)), а именно: $ОДУ_x^{left}$, $ОДУ_y^{left}$, $ОДУ_x^{right}$, $ОДУ_y^{right}$, для которых решениями являются, соответственно, функции времени (4) и (5).

2 Гармонический осциллятор

Прежде чем построить необходимые ОДУ, запишем уравнения гармонического осциллятора (например, математического маятника) и их решение.

Для простоты ниже предполагаем, что величины $\bar{\theta}_{xt} \triangleq x_{1t}$ и $\bar{\omega}_{xt} \triangleq x_{2t}$ заданы гармоническим осциллятором с амплитудой колебаний A_x, уравнения которого известны как

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_t \tag{6}$$

с начальными условиями

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{x0} = x_{10} \\ \bar{\omega}_{x0} = x_{20} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Пусть наблюдается первая координата $\bar{\theta}_{xt} \triangleq x_{1t}$ в виде некоторого

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_t, \qquad t \in [0; +\infty) \tag{8}$$

(здесь символы x и y не связаны с обозначениями координат на рисунке 1).

Решение для первой координаты (6) с начальными условиями (7) известно:

$$\bar{\theta}_{xt} \triangleq x_{1t} = y_t = A_x \sin(\omega_n t + \varphi), \tag{9}$$

доподобия, записанные ниже вместе с решающими правилами:

$$\ln\lambda_{1|0} = \ln\frac{p(Z\,|\,\mathbf{H}_1)}{p(Z\,|\,\mathbf{H}_0)} \in \begin{cases} [A;\infty) & => \mathbf{H}_1, \\ (A;B) & => \text{continue}, \\ (-\infty;B] & => \mathbf{H}_0; \end{cases}$$

$$\ln\lambda_{2|0} = \ln\frac{p(Z\,|\,\mathbf{H}_2)}{p(Z\,|\,\mathbf{H}_0)} \in \begin{cases} [A;\infty) & => \mathbf{H}_2, \\ (A;B) & => \text{continue}, \\ (-\infty;B] & => \mathbf{H}_0; \end{cases}$$

$$\ln\lambda_{2|1} = \ln\frac{p(Z\,|\,\mathbf{H}_2)}{p(Z\,|\,\mathbf{H}_1)} \in \begin{cases} [A;\infty) & => \mathbf{H}_2, \\ (A;B) & => \text{continue}, \\ (-\infty;B] & => \mathbf{H}_1 \end{cases}$$

(continue означает решение «продолжить тест», $\Rightarrow$ читается «принять»).

Условные плотности вероятностей $p(Z|H_j)$ измерений Z (точнее, их логарифмы) могут вычисляться в этой схеме синхронно с фильтрацией Калмана без особых дополнительных затрат [8]. Поскольку между собой конкурируют три отношения $\lambda_{1|0}$, $\lambda_{2|0}$ и $\lambda_{2|1}$ и каждое порождает одно из трех решений («принять альтернативную гипотезу», «продолжить тест» или «отвергнуть альтернативную гипотезу»), общее число ситуаций для принятия окончательного решения равно $3^3=27$. Соответствующие построения выходят за рамки задачи данной статьи и будут изложены позднее.

Заключение

В данной статье представлено решение задачи построения линейных (относительно вектора состояния) моделей динамических систем, описывающих типовые траектории движения надводного морского объекта: движение прямолинейное или круговое с постоянной скоростью. Линейность этих моделей позволяет применять фильтры Калмана без упрощающей линеаризации для решения ряда практических задач: оценивание траекторий и обнаружение непредвиденного маневрирования, всегда представляющего опасность для морских подвижных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mosca E. Optimal, Predictive and Adaptive Control. – NJ: Prentice Hall, 1995.
2. Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Zakharov K.V. Robust Filter Algorithms – Survey And New Results For Ship Navigation And Conning Systems // Automatization of Control Processes, No. 1(27), 2012, pp. 37-46 [in Russian].
3. Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Zakharov K.V. Robust Filter Algorithms – Survey And New Results For Ship Navigation And Conning Systems // Information Technilogy and Computing Systems, ISA of RAS, No. 4, 2013, pp. 17-39 [in Russian].
4. Daowang F., Teng L., Tao H.Z. Square-Root Second-Order Extended Kalman Filter and Its Application in Target Motion Analysis // Radar, Sonar & Navigation, IET, No. 4, Iss. 3, 2008, pp. 329 – 335. [doi: 10.1049/iet-rsn.2008.0070].
5. Maybeck P.S. Stochastic Models, Estimation and Control ; Volume 1. / P.S. Maybeck – N.Y. ; San Francisco ; London : Academic Press, 1979.
6. Wald A. Sequential Analysis. – N.Y.: Wiley, 1947.
7. Levin B.R. Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering. Volume 2. – Moscow : Sov. Radio, 1968.
8. Semushin I.V., Tsyganova Yu.V. An Efficient Way to Evaluate Likelihood Functions in Terms of Kalman Filter Variables // In: George E. Lasker and Alexandru Murgu (ads.) Adaptive, Cooperative and Competitive Process in Systems Modeling, Design and Analysis. Proceeding of the InterSymp-2000, The 12th International Conference on System Research, Informatics & Cybernetics. 29-31 July, 2000, Baden-Baden, Germany. – The International Institute for Advanced Studies / L'Institut International pour les Etudes Avancees: University of Windsor, Windsor, Ontario, Canada, 2001, P. 64-74. – ISBN 1894613120 (1-894613-12-0).