Тематика контрольных работ

Стохастические модели, оценки и управление – учебные задания

Контрольная работа №1: Динамические модели с непрерывным временем. Представление в пространстве состояний. Переход от одного описания к другому. Декомпозиция системы – выделение полностью управляемой и полностью наблюдаемой части системы.

Типовое задание (ниже даются 42 варианта этого задания для студентов):

Дано описание системы в пространстве состояний:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Требуется:

1. Построить эквивалентную модель в пространстве состояний (по 2 входу), в которой отделены переменные, образующие часть 1, — полностью управляемую и наблюдаемую.
2. Определить, к какой категории — с точки зрения свойств управляемости и наблюдаемости — относится другая часть переменных состояния.
3. Проиллюстрировать решение по пп. 1 и 2 блок-схемой или графом эквивалентной модели.

Варианты задач для контрольной работы № 1

Вариант 1.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 2.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 3.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -9 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 4.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -11 & -7 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

————————————————————————

Вариант 5.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -13 & -8 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

————————————————————————

Вариант 6.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -15 & -9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

————————————————————————

Вариант 7.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -17 & -10 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

————————————————————————

Вариант 8.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -19 & -11 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

————————————————————————

Вариант 9.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -21 & -12 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

————————————————————————

Вариант 10.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -11 & -23 & -13 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 11.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -25 & -14 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 12.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -13 & -27 & -15 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 13.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -14 & -29 & -16 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 14.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -31 & -17 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 15.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -16 & -33 & -18 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 16.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -17 & -35 & -19 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 17.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -37 & -20 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 18.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -19 & -39 & -21 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 19.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -41 & -22 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 20.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -21 & -43 & -23 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 21.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -22 & -45 & -24 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 22.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -23 & -47 & -25 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 23.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -49 & -26 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 24.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -25 & -51 & -27 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 25.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -26 & -53 & -28 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 26.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -27 & -55 & -29 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 27.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -28 & -57 & -30 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 28.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -29 & -59 & -31 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

———————————————————————

Вариант 29.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -61 & -32 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

———————————————————————

Вариант 30.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -31 & -63 & -33 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

———————————————————————

Вариант 31.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -32 & -65 & -34 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

———————————————————————

Вариант 32.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -33 & -67 & -35 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

———————————————————————

Вариант 33.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -34 & -69 & -36 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

———————————————————————

Вариант 34.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -35 & -71 & -37 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 35.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -36 & -73 & -38 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 36.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -37 & -75 & -39 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 37.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -38 & -77 & -40 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 38.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -39 & -79 & -41 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 39.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -40 & -81 & -42 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Вариант 40.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -41 & -83 & -43 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

———————————————————————————

Вариант 41.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -42 & -85 & -44 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

———————————————————————————

Вариант 42.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -43 & -87 & -45 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

———————————————————————————

Контрольная работа №2: Определение свойств полной управляемости и полной наблюдаемости заданной вырожденной системы. Идентификация уравнений системы по ее передаточной функции. Структурные схемы. Стандартная управляемая модель. Стандартная наблюдаемая модель. Каноническая модель многомерной системы. Анализ свойств управляемости и наблюдаемости всех указанных вариантов моделирования системы. Обоснование математической модели, эквивалентной заданной системе.

Типовое задание:

Дана линейная динамическая система, состоящая из двух последовательно соединенных элементов. Элементы характеризуются их передаточными функциями $G_1(s)$ и $G_2(s)$. Для описания системы используются следующие физические переменные: входной управляющий сигнал $u(t)$, промежуточный сигнал между элементами $y(t)$ и выходной сигнал $z(t)$.

Имеются четыре варианта соединения элементов системы, что определяет так называемую *физическую модель* (ФМ):

Вариант 1: входной элемент – блок $G_1(s)$, выходной элемент – блок $G_2(s)$.

Вариант 2: входной элемент – блок $G_2(s)$, выходной элемент – блок $G_1(s)$.

Вариант 3: входной элемент – блок $G_2(s)$, выходной элемент – параллельное соединение двух блоков, являющихся элементами разложения на простые дроби функции $G_1(s)$.

Вариант 4: входной элемент – параллельное соединение двух блоков, являющихся элементами разложения на простые дроби функции $G_1(s)$, выходной элемент – блок $G_2(s)$.

Варианты контрольной работы приведены в следующей таблице (по списку группы студентов):

№ варианта	Вариант соединения элементов	Варианты построения ФМ
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	1
5	1	2
6	2	3
7	3	1
8	4	2
9	1	3
10	2	1
11	3	2
12	4	3
13	1	1
14	2	2
15	3	3
16	4	1
17	1	2
18	2	3
19	3	1
20	4	2
21	1	3
22	2	1
23	3	2
24	4	3

Требуется в срок до 22 декабря сдать на проверку (для допуска к зимней сессии) письменную работу с решением следующих задач по этому контрольному заданию:

1. Построить модель состояния и модель наблюдения, использующую физические переменные системы (физическую модель – ФМ). Построение физической модели вести по следующим вариантам:

- Вариант 1: На основе стандартной управляемой модели (СУМ).
- Вариант 2: На основе стандартной наблюдаемой модели (СНМ).
- Вариант 3: На основе канонической (КМ).

2. Определить $z(t)$ как общее решение соответствующего дифференциального уравнения, выписать его в явном виде.

3. Определить, обладает ли физическая модель свойствами полной управляемости и полной наблюдаемости. При каких условиях эти свойства, а также свойство устойчивости, могут быть утрачены?

4. Построить три математические модели, отвечающие данной системе:
- стандартную управляемую модель,
- стандартную наблюдаемую модель, и
- каноническую модель.

Для каждой модели проанализировать свойства полной управляемости и полной наблюдаемости.

5. Построить модель в пространстве состояний, эквивалентную данной системе, в которой полностью управляемая и полностью наблюдаемая часть отделена от остальной части.

6. По результатам проделанной работы сформулировать выводы, которые Вам представляются общезначимыми для задач построения математических моделей реальных динамических систем.

7. Дать развернутые ответы на следующие контрольные вопросы:

- каким образом свойства управляемости, наблюдаемости и устойчивости системы проявляются в $z(t)$?
- как найти, пользуясь общим решением $z(t)$, импульсную переходную характеристику и передаточную функцию системы?
- можно ли построить каноническую модель, полностью эквивалентную данной системе, и если “да”, то как это сделать?
- какой смысл заключен в терминах “стандартная управляемая” и “стандартная наблюдаемая” модель?
- какие условия эксперимента нужно предположить, чтобы наблюдения входа $u(t)$ и выхода $z(t)$ системы с известной передаточной функцией не давали возможности обнаружить вырожденность системы, то есть наличие в системе неуправляемой и/или ненаблюдаемой части?

Примечания:

1. Контрольную работу необходимо сдать до 22 декабря в отдельной тетради. Кроме этого, на последнем семинаре нужно сдать на проверку тетрадь с полным решением всех домашних (самостоятельно выполненных) заданий, выбранных, в частности, из раздела “Самостоятельная работа”.
2. Результаты проверки Контрольной работы № 1, Контрольной работы № 2 и Домашних заданий непосредственно влияют на итоговую (экзаменационную) оценку по данному курсу.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

В начале семестра студенты получают Таблицы соответствий по преобразованию Лапласа, которые они должны доказать самостоятельно. Кроме того, для самостоятельного доказательства оставлены теоремы об управляемости и наблюдаемости для дискретных систем, — рекомендуется проводить эти доказательства по аналогии с тем, как это делается на лекциях для непрерывных систем.

Задание 1. Доказать соответствия «оригинал–изображение» по Лапласу, приведенные в следующей Табл. 1, применяя теоремы о свойствах прямого преобразования Лапласа.

Таблица 1. Соответствие «оригинал–изображение» по Лапласу

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$1(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$e^{at}\sin(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{\omega\cos\varphi+(s-a)\sin\varphi}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1	$e^{at}\cos(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{(s-a)\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{(s-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	t	$\dfrac{1}{s^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$t\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$t\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{2s\omega}{(s^2-\omega^2)^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$t\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$

Задание 2. Доказать соответствия «изображение–оригинал» по Лапласу, приведенные в следующей Табл. 2, применяя теоремы о свойствах обратного преобразования Лапласа.

Табл. 2 помещена на следующей странице.

Задание 3. Доказать соответствия «изображение–оригинал» по Лапласу, приведенные в следующей Табл. 3, применяя теоремы о свойствах обратного преобразования Лапласа.

Табл. 3 помещена на следующей странице.

Таблица 2. Оригиналы для дробно-рациональных изображений

$F(s)$	$f(t)$
$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
$\dfrac{1}{1+\tau s}$	$\dfrac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\dfrac{1}{s(s-a)}$	$\dfrac{1}{a}\left(e^{at}-1\right)$
$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
$\dfrac{b+cs}{s(s-a)}$	$-\dfrac{b}{a}+\left(c+\dfrac{b}{a}\right)e^{at}$
$\dfrac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)e^{at}$
$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$
$\dfrac{b+cs}{s^2+a^2}$	$c\cos at+\dfrac{b}{a}\sin at$
$\dfrac{1}{s^2+as+b}$ если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}>0\,,$ то если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}<0\,,$ то если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}=0\,,$ то	 $\dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}e^{-\frac{at}{2}}\sin\sqrt{\Delta}t$ $\dfrac{1}{\sqrt{-\Delta}}e^{-\frac{at}{2}}\operatorname{sh}\sqrt{-\Delta}t$ $te^{-\frac{at}{2}}$
$\dfrac{b+cs}{s^2-a^2}$	$c\operatorname{ch}at+\dfrac{b}{a}\operatorname{sh}at$

Таблица 3. Оригиналы для дробно-рациональных изображений	
$\boldsymbol{F(s)}$	$\boldsymbol{f(t)}$
$\dfrac{1}{s^2(s-a)}$	$\dfrac{1}{a^2}(e^{at}-1-at)$
$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)^2}$	$\dfrac{e^{at}-[1+(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\dfrac{e^{at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{bt}}{(a-b)(c-b)}+$ $+\dfrac{e^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\dfrac{1}{(s-a)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2e^{at}$
$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)^2}$	$\dfrac{ae^{at}-[a+b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\dfrac{ae^{at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{be^{bt}}{(a-b)(c-b)}+$ $+\dfrac{ce^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\dfrac{s}{(s-a)^3}$	$\left(t+\dfrac{1}{2}at^2\right)e^{at}$
$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$
$\dfrac{1}{s(s^2-a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}(\operatorname{ch} at-1)$
$\dfrac{s}{s^2+as+b}$	
если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}>0$, то	$e^{-\frac{at}{2}}\left(\cos\sqrt{\Delta}t-\dfrac{a}{2\sqrt{\Delta}}\sin\sqrt{\Delta}t\right)$
если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}<0$, то	$e^{-\frac{at}{2}}\left(\operatorname{sh}\sqrt{-\Delta}t-\dfrac{a}{2\sqrt{-\Delta}}\operatorname{sh}\sqrt{-\Delta}t\right)$
если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}=0$, то	$e^{-\frac{at}{2}}\left(1-\dfrac{at}{2}\right)$