


Федеральное агентство по образованию Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Тест по дисциплине Численные методы		

Специальность (направление):

- 010501 – «Прикладная математика и информатика»
- 080801 – «Прикладная информатика (по областям)»

Решена следующая задача:

### Задача 1

Для матрицы  $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  выполнить:

1. Построить  $UL$ -разложение матрицы  $A$  (гауссово исключение по столбцам).
2. С помощью  $UL$ -разложения матрицы  $A$  решить систему линейных уравнений  $Ax=b$ , где вектор  $b=(5,2,0)^T$ .
3. С помощью  $UL$ -разложения найти определитель матрицы  $A$ .
4. С помощью  $UL$ -разложения найти матрицу  $A^{-1}$ .

Выберите правильный вариант ответа:

Вариант А:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \det A = -6, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Вариант Б:


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \det A = 2, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант В:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \det A = 6, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Вариант Г:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \det A = 12, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{7}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Федеральное агентство по образованию Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Тест по дисциплине Численные методы		

Специальность (направление):

- 010501 – «Прикладная математика и информатика»
- 080801 – «Прикладная информатика (по областям)»

Решена следующая задача:

### Задача 1

Для матрицы  $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -5 & -10 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  выполнить:

1. Построить  $\overline{UL}$ -разложение матрицы  $A$  (гауссово исключение по столбцам).
2. С помощью  $\overline{UL}$ -разложения матрицы  $A$  решить систему линейных уравнений  $Ax=b$ , где вектор  $b=(10,-16,5)^T$ .
3. С помощью  $\overline{UL}$ -разложения найти определитель матрицы  $A$ .
4. С помощью  $\overline{UL}$ -разложения найти матрицу  $A^{-1}$ .

Выберите правильный вариант ответа:

Вариант А:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \det A = -6, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Вариант Б:


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \det A = 2, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант В:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \det A = 6, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Вариант Г:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \det A = 12, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{7}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Федеральное агентство по образованию Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Тест по дисциплине Численные методы		

Специальность (направление):

- 010501 – «Прикладная математика и информатика»
- 080801 – «Прикладная информатика (по областям)»

Решена следующая задача:

### Задача 1

Для матрицы  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  выполнить:

1. Построить  $L\bar{U}^{-1}$ -разложение матрицы  $A$  (исключение Гаусса-Жордана).
2. С помощью  $L\bar{U}^{-1}$ -разложения матрицы  $A$  решить систему линейных уравнений  $Ax=b$ , где вектор  $b=(0,-1,-2)^T$ .
3. С помощью  $L\bar{U}^{-1}$ -разложения найти определитель матрицы  $A$ .
4. С помощью  $L\bar{U}^{-1}$ -разложения найти матрицу  $A^{-1}$ .

Выберите правильный вариант ответа:

Вариант А:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \det A = -6, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Вариант Б:


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \det A = 2, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант В:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \det A = 6, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Вариант Г:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \det A = 12, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{7}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Федеральное агентство по образованию Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Тест по дисциплине Численные методы		

Специальность (направление):

- 010501 – «Прикладная математика и информатика»
- 080801 – «Прикладная информатика (по областям)»

Решена следующая задача:

### Задача 1

Для матрицы  $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \\ -8 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  выполнить:

1. Построить  $\bar{L}^{-1}U$ -разложение матрицы  $A$  (исключение Гаусса-Жордана).
2. С помощью  $\bar{L}^{-1}U$ -разложения матрицы  $A$  решить систему линейных уравнений  $Ax=b$ , где вектор  $b=(-3,0,0)^T$ .
3. С помощью  $\bar{L}^{-1}U$ -разложения найти определитель матрицы  $A$ .
4. С помощью  $\bar{L}^{-1}U$ -разложения найти матрицу  $A^{-1}$ .

Выберите правильный вариант ответа:

Вариант А:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \det A = -6, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Вариант Б:


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \det A = 2, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант В:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \det A = 6, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Вариант Г:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \det A = 12, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{7}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Федеральное агентство по образованию Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Тест по дисциплине Численные методы		

Специальность (направление):

- 010501 – «Прикладная математика и информатика»
- 080801 – «Прикладная информатика (по областям)»

Решена следующая задача:

### Задача 1

Для матрицы  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ -1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  выполнить:

1. Построить  $L\bar{U}$ -разложение матрицы  $A$  (компактная схема “строка за строкой”).
2. С помощью  $L\bar{U}$ -разложения матрицы  $A$  решить систему линейных уравнений  $Ax=b$ , где вектор  $b=(12,-7,-1)^T$ .
3. С помощью  $L\bar{U}$ -разложения найти определитель матрицы  $A$ .
4. С помощью  $L\bar{U}$ -разложения найти матрицу  $A^{-1}$ .

Выберите правильный вариант ответа:

Вариант А:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \det A=3, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & 6 & -3 \\ -\frac{5}{3} & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант Б:


$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & -32 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \det A=64, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{32} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{32} & -\frac{7}{32} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{32} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}$$

Вариант В:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \det A=-2, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{29}{2} & -3 & 5 \\ -\frac{11}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант Г:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -5 & -10 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \det A=-30, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} \\ \frac{59}{10} & \frac{11}{10} & -\frac{2}{5} \\ -16 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Федеральное агентство по образованию Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Тест по дисциплине Численные методы		

Специальность (направление):

- 010501 – «Прикладная математика и информатика»
- 080801 – «Прикладная информатика (по областям)»

Решена следующая задача:

### Задача 1

Для матрицы  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 11 \\ -4 & -3 & -15 \end{bmatrix}$  выполнить:

1. Построить  $\bar{L}U$ -разложение матрицы  $A$  (компактная схема Краута).
2. С помощью  $\bar{L}U$ -разложения матрицы  $A$  решить систему линейных уравнений  $Ax=b$ , где вектор  $b=(2,2,-10)^T$ .
3. С помощью  $\bar{L}U$ -разложения найти определитель матрицы  $A$ .
4. С помощью  $\bar{L}U$ -разложения найти матрицу  $A^{-1}$ .

Выберите правильный вариант ответа:

Вариант А:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \det A=3, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & 6 & -3 \\ -\frac{5}{3} & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант Б:


$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & -32 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \det A=64, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{32} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{32} & -\frac{7}{32} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{32} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}$$

Вариант В:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \det A=-2, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{29}{2} & -3 & 5 \\ -\frac{11}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант Г:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -5 & -10 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \det A=-30, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} \\ \frac{59}{10} & \frac{11}{10} & -\frac{2}{5} \\ -16 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Федеральное агентство по образованию Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Тест по дисциплине Численные методы		

Специальность (направление):

- 010501 – «Прикладная математика и информатика»
- 080801 – «Прикладная информатика (по областям)»

Решена следующая задача:

### Задача 1

Для матрицы  $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -5 & 14 & -3 \\ 3 & -9 & 4 \end{bmatrix}$  выполнить:

1. Построить  $L\bar{U}$ -разложение матрицы  $A$  (гауссово исключение по строкам).
2. С помощью  $L\bar{U}$ -разложения матрицы  $A$  решить систему линейных уравнений  $Ax=b$ , где вектор  $b=(6,-16,8)^T$ .
3. С помощью  $L\bar{U}$ -разложения найти определитель матрицы  $A$ .
4. С помощью  $L\bar{U}$ -разложения найти матрицу  $A^{-1}$ .

Выберите правильный вариант ответа:

Вариант А:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \det A=3, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & 6 & -3 \\ -\frac{5}{3} & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант Б:


$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & -32 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \det A=64, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{32} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{32} & -\frac{7}{32} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{32} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}$$

Вариант В:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \det A=-2, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{29}{2} & -3 & 5 \\ -\frac{11}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант Г:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -5 & -10 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \det A=-30, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} \\ \frac{59}{10} & \frac{11}{10} & -\frac{2}{5} \\ -16 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Федеральное агентство по образованию Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Тест по дисциплине Численные методы		

Специальность (направление):

- 010501 – «Прикладная математика и информатика»
- 080801 – «Прикладная информатика (по областям)»

Решена следующая задача:

### Задача 1

Для матрицы  $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -40 & -14 \\ 3 & -24 & -9 \end{bmatrix}$  выполнить:

1. Построить  $\bar{L}U$ -разложение матрицы  $A$  (гауссово исключение по столбцам).
2. С помощью  $\bar{L}U$ -разложения матрицы  $A$  решить систему линейных уравнений  $Ax=b$ , где вектор  $b=(-1,1,-12)^T$ .
3. С помощью  $\bar{L}U$ -разложения найти определитель матрицы  $A$ .
4. С помощью  $\bar{L}U$ -разложения найти матрицу  $A^{-1}$ .

Выберите правильный вариант ответа:

Вариант А:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \det A=3, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & 6 & -3 \\ -\frac{5}{3} & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант Б:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & -32 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \det A=64, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{32} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{32} & -\frac{7}{32} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{32} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}$$

Вариант В:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \det A=-2, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{29}{2} & -3 & 5 \\ -\frac{11}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант Г:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -5 & -10 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \det A=-30, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} \\ \frac{59}{10} & \frac{11}{10} & -\frac{2}{5} \\ -16 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$