И. В. Семушин

Практикум по методам оптимизации

Ульяновск 1999

Министерство общего и профессионального образования РФ
Ульяновский государственный технический университет

И. В. Семушин

Практикум по методам оптимизации

Ульяновск 1999

УДК 519.852 + 517.977.5 (075)
ББК 73я7
С30

Рецензенты: д-р экон. наук, профессор В.Т. Чая,
канд. физ.-мат. наук, Г.Ю. Куликов

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Семушин И.В.
С 30 Практикум по методам оптимизации: Уч. пособие для вузов. - Ульяновск: УлГТУ, 1999.- 148с.
ISBN 5-89146-000-0

Содержит основные положения и 70 учебных заданий по курсу линейного програмирования, а также программу из 30 учебных проектов по методам нелинейной оптимизации.

Для студентов вузов, обучающихся по специальностям "Информационные системы", "Прикладная математика"и другим, применяющим ЭВМ в задачах оптимизации.

УДК 519.852 + 517.977.5 (075)
ББК 73я7

ISBN 5-89146-000-0

Оглавление

Введение

Базовый курс методов оптимизации охватывает задачи, существенно отличающиеся по двум основным признакам: линейность/нелинейность и наличие/отсутствие ограничений. В соответствии с этим курс содержит линейное программирование и нелинейное (выпуклое) программирование, причем последний раздел распадается на две части: безусловная минимизация и задачи на условный экстремум.

Для специалистов и студентов экономического профиля линейное программирование, как инструмент решения прикладных задач, встречается довольно часто, может быть, чаще, чем другие методы. В то же время некоторые методы нелинейного программирования используют решения задач линейного программирования как часть своих алгоритмов. В связи с этим, а также по методическим соображениям, в данном учебном пособии большее внимание уделено именно линейному программированию.

Линейное программирование является хорошо изученным и разработанным разделом прикладной математики. По нему имеется обширная научная и учебная литература, часть которой приведена в списке литературы по данному пособию. Эта литература, в своем большинстве, дает основные теоретические сведения и иногда практические указания, как запрограммировать тот или иной вариант симплекс-метода. Для студентов такое программирование очень выгодно по многим причинам. Оно, в отличие от слепого использования готовых програмных продуктов, позволяет понять и освоить симплекс-метод изнутри, что существенно для современного специалиста, менеджера, математика. Оно также совершенствует "компьютерную"культуру специалиста, поскольку требует изощренного программирования. И, наконец, оно развивает общие способности к анализу в поиске решений прикладных проблем, ориентированных на использование математических методов и ЭВМ.

При организации и проведении практикума на ЭВМ всегда возникает проблема индивидуализации заданий. Многие пособия в этом вопросе идут по наиболее простому пути - размножают задания за счет различий в исходных данных по одной и той же теме выполняемой работы. То, что это малополезно, вполне очевидно. Делать лишь небольшие различия в заданиях - значит отказаться от всех указанных выше выгод.

Цель данного пособия - снабдить студентов полным, тщательно выверенным набором возможных вариантов симплекс-метода для решения задач линейного программирования и на этой основе максимально размножить задания не по вводимым для решения задачам, а по алгоритмам, подлежащим программированию. Для этого после кратких вводных определений (гл. 1) собраны базовые теоретические факты, относящиеся к стандартной задаче линейного программирования (гл. 2). Далее основное внимание сосредоточено на детальном и строгом обосновании каждой разновидности симплекс-метода во всевозможных вариантах реализации (гл. 3,4 и 5). Особые случаи функционирования алгоритмов рассмотрены в главе 6.

Следующие главы являются перечислением учебных заданий по линейному программированию (гл. 7) и учебных проектов, в основном, по нелинейной оптимизации (гл. 8).

Глава 1

Общие определения

Определение 1. Точка *или* **вектор** *в* R^n *есть упорядоченная совокупность n вещественных чисел :* $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$.

При использовании векторно-матричных операций принято вектор отождествлять с матрицей-столбцом. Мы будем также этим пользоваться, хотя в обычном тексте удобнее векторные компоненты писать в строку для экономии места. Если же в записи вектора потребуется акцент на то, что он трактуется как матрица-столбец, то будем пользоваться символом транспонирования : $x = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$ или $x^T = (x_1, x_2 \dots x_n)$.

Определение 2. Отрезок $\overleftarrow{PQ}$, *где* P *и* Q *суть две точки, представленные векторами* $p, q \in R^n$, *есть множество точек, определяемых соотношением*

$$\Theta p + (1 - \Theta) q, \qquad 0 \leq \Theta \leq 1.$$

Эквивалентная запись $q + \Theta(p - q), \quad 0 \leq \Theta \leq 1$, имеет наглядную геометрическую интерпретацию: к концу вектора q добавляется доля $\Theta \quad (0 \leq \Theta \leq 1)$ разностного вектора $(p - q)$, который направлен из точки Q в точку P. Поскольку всегда можно заменить Θ на $\gamma, \quad \gamma = 1 - \Theta$, то на самом деле направленность отрезка, обозначенная здесь верхней стрелкой, не имеет значения, и можно этот отрезок обозначать чертой: $\overline{PQ}$.

Определение 3. *Точечное множество S называется* **выпуклым**, *если $\forall p, q \in S: \quad \Theta p+(1-\Theta)q \in S, \quad 0 \le \Theta \le 1$, т.е. если любой отрезок, ограниченный точками из S, лежит в S.*

Определение 4. *Экстремальная, или крайняя точка (или* **вершина**, *или угловая точка) выпуклого множества S есть любая его точка, не лежащая внутри отрезка, соединяющего произвольную пару точек множества.*

Другими словами: точка $b \in S$ есть вершина выпуклого множества S, если не существуют две такие точки $p, q \in S$, что $b = \Theta p + (1-\Theta)q$ при некотором $0 < \Theta < 1$.

Определение 5. Выпуклая оболочка *точек $P_1, P_2, \ldots P_k$, представленных соответствующими векторами $p_1, p_2 \ldots p_k$, есть множество точек вида*

$$y = \Theta_1 p_1 + \Theta_2 p_2 + \ldots \Theta_k p_k, \quad \sum_{i=1}^{k} \Theta_i = 1, \quad 0 \le \Theta_i, \quad i = \overline{1,k}.$$

Выпуклую оболочку можно конструктивно вывести (построить), последовательно применяя определение отрезка. Одновременно это будет объяснением условия на весовые коэффициенты Θ_i . Дадим такой вывод.

Пусть P_1, P_2 - произвольные точки. Тогда

$$y_2 = k_2 p_2 + (1-k_2)p_1, \quad 0 \le k_2 \le 1$$

есть любая точка отрезка $\overline{P_1 P_2}$. Соединим ее отрезком с произвольной точкой P_3. Тогда

$$y_3 = k_3 p_3 + (1-k_3)y_2 = k_3 p_3 + (1-k_3)k_2 p_2 + (1-k_3)(1-k_2)p_1, \quad 0 \le k_3 \le 1$$

есть любая точка трехгранника $P_1 P_2 P_3$. Соединим ее отрезком с произвольной точкой P_4. Тогда

$$y_4 = k_4 p_4 + (1-k_4)y_3 = k_4 p_4 + (1-k_4)k_3 p_3 +$$

$$+(1-k_4)(1-k_3)k_2p_2+(1-k_4)(1-k_3)(1-k_2)p_1, \quad 0 \le k_4 \le 1$$

есть любая точка четырехгранника $P_1P_2P_3P_4$.

Такой процесс можно продолжать и далее или прекратить после исчерпания всех имеющихся точек. Например, если последняя из имеющихся точек есть P_5, то соединяя ее отрезком с точкой y_4, получим, что

$$y_5 = k_5p_5 + (1-k_5)y_4 =$$

$$k_5p_5+(1-k_5)(k_4p_4+(1-k_4)(k_3p_3+(1-k_3)(k_2p_2+(1-k_2)p_1))), \quad 0 \le k_5 \le 1$$

есть любая точка пятигранника $P_1P_2P_3P_4P_5$.

По построению имеем

$$y_5 = \Theta_5p_5 + \Theta_4p_4 + \Theta_3p_3 + \Theta_2p_2 + \Theta_1p_1,$$

где

$$\Theta_5 = k_5,$$
$$\Theta_4 = (1-k_5)k_4,$$
$$\Theta_3 = (1-k_5)(1-k_4)k_3,$$
$$\Theta_2 = (1-k_5)(1-k_4)(1-k_3)k_2,$$
$$\Theta_1 = (1-k_5)(1-k_4)(1-k_3)(1-k_2).$$

Пусть теперь наложено условие на весовые коэффициенты Θ_i, а именно:

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 = 1, \quad \Theta_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

Тогда, выбрав любые $\Theta_i, 0 \le \Theta_i \le 1$, удовлетворяющие этому условию, последовательно найдем:

$$k_5 = \Theta_5, \quad 0 \le k_5 \le 1,$$

$$k_4 = \frac{\Theta_4}{(1-\Theta_5)} = \frac{\Theta_4}{(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4)}, \quad 0 \le k_4 \le 1,$$

$$k_3 = \frac{\Theta_3}{(1-\Theta_5-\Theta_4)} = \frac{\Theta_3}{(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3)}, \quad 0 \le k_3 \le 1,$$

$$k_2 = \frac{\Theta_2}{(1-\Theta_5-\Theta_4-\Theta_3)} = \frac{\Theta_2}{(\Theta_1+\Theta_2)}, \quad 0 \le k_2 \le 1.$$

Это те же самые k_2, k_3, k_4 и k_5, которые выше участвуют в построении любых точек: двухгранника (k_2), трехгранника (k_3), четырехгранника (k_4) и пятигранника (k_5). Тем самым доказано, что выпуклая оболочка точек $p_1, p_2, \ldots, p_k$ определена полностью условием $\Theta_1+\Theta_2+\ldots+\Theta_k = 1$ на неотрицательные коэффициенты Θ_i в линейной комбинации

$$y = \Theta_1 p_1 + \Theta_2 p_2 + \ldots + \Theta_k p_k \ .$$

Глава 2

Стандартная задача линейного программирования

Все излагаемое ниже относится к задаче ЛП в стандартной форме, к которой легко приводится любая задача линейного программирования.

Задача ЛП (в стандартной форме) имеет:

- ограничения $Ax = b$, $A = A(m,n)$, $rankA = m$, $(m < n)$,

$x \in R^n$, $\quad b \in R^m$;

- условие неотрицательности координат вектора x, $x \geq 0$ (т. е. $\forall i: \ x_i \geq 0$),

и при этом требует $\min_x c^T x$, где $c \in R^n$.

Замечание. Вектор коэффициентов c определяет целевую функцию $z = c^T x$ и является ее градиентом: $\operatorname{grad} z = c$. Вектор градиента, указывающий направление скорейшего возрастания функции в пространстве векторов $x \in R^n$, ортогонален линиям (фиксированного) уровня функции, - это общее свойство градиента.

Данная задача обладает следующими основными свойствами: (1) выпуклость множества допустимых решений; (2) существование базисных допустимых решений; (3) тождественность базисных допустимых решений и вершин множества допустимых решений и (4) совпадение хотя бы одного оптимального решения задачи (если оно существует) с какой-либо вершиной допустимого множества решений. Докажем эти свойства последовательно.

2.1 Выпуклость множества допустимых решений

Определение 1. *Множество X точек в R^n, удовлетворяющих ограничениям и условию задачи ЛП, $Ax = b, \; x \geq 0$, есть* **множество допустимых решений.**

Теорема 1. Множество X допустимых решений x, $Ax = b, \; x \geq 0$ задачи ЛП выпукло.

Доказательство. Пусть x, y - произвольная пара точек из X. Тогда

$$Ax = b, \; x \geq 0; \quad Ay = b, \; y \geq 0.$$

Отрезок, соединяющий эти точки, обозначим как множество
точек w,

$$w = \alpha x + \beta y, \; \alpha + \beta = 1, \; \alpha \geq 0, \; \beta \geq 0, \; w \geq 0 \; .$$

Имеем

$$Aw = A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha b + \beta b = (\alpha + \beta) b = b \; ,$$

то есть $Aw = b, \; w \geq 0$. Теорема доказана.

2.2 Существование базисных допустимых решений (БДР)

Определение 2. Базисным решением *задачи ЛП (в стандартной форме) называется вектор*

$$x = P \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ O \end{pmatrix} \; ,$$

где P - матрица перестановок столбцов матрицы A, такая что $AP = [B : R]$ и B - матрица полного ранга размера $m \times m$; O - $(n-m)$ нулевых элементов вектора; R - $(n-m)$ столбцов, линейно выражающиеся через столбцы матрицы B.

Все базисные решения в количестве C_n^m определяются различными сочетаниями m линейно независимых столбцов матрицы A из n ее столбцов. Матрица перестановок P здесь введена, чтобы в результате перестановок все m линейно независимых столбцов матрицы A оказались сгруппированы влево в виде подматрицы B. Тогда ограничение $Ax = b$ равносильно уравнению $APy = b$, где $y = P^{-1}x$.

Разбивая вектор y на две части, $y = (y^B, y^F)$, y^B - первые m компонент, y^F - остальные $(n-m)$ компонент, имеем

$$y^B = B^{-1}b - B^{-1}Ry^F \ ,$$

$$y = \begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Ry^F \\ \dots \\ y^F \end{pmatrix} .$$

Таким образом, решение y уравнения $APy = b$ выражено через свободные переменные y^F. Обращая их в нуль, получаем вектор

$$y = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ O \end{pmatrix} .$$

От него вектор x отличается лишь перестановкой элементов: $x = Py$. Этот x и называется базисным решением.

Определение 3. *Нулевые элементы вектора $x = Py$, получившиеся равными нулю вследствие обращения в нуль свободных (последних $n - m$) переменных y^F в составе вектора y, удовлетворяющего ограничению $APy = b$, называются* **небазисными переменными.** *Остальные m элементов вектора $x = Py$ называются* **базисными переменными** *и образуют* **базис.** *(Относительно матрицы P см. определение 2.).*

Определение 4. *Если базисное решение обладает свойством неотрицательности своих элементов, то оно называется* **базисным допустимым решением.**

Чтобы избежать формального понятия матрицы перестановок P в данных выше определениях, перефразируем их, используя следующее

Определение 4. *Векторами ограничений $a_i \in R^m, i = \overline{1,n}$, называются столбцы матрицы A :*

$$A = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Сами ограничения тогда имеют вид:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = b.$$

Свойство матрицы ограничений A: так как $rankA = m$, то среди ее n столбцов существуют наборы по m линейно независимых столбцов-векторов ограничений. Число таких различных линейно независимых наборов достигает C_n^m(сочетания из n по m).

Определение 3'. *Переменные x_i, стоящие коэффициентами при векторах ограничений a_i в каждом линейно независимом наборе из m векторов, называются* **базисными переменными** *, а остальные -* **небазисными переменными** *(небазисные переменные иногда называют свободными переменными).*

Определение 5. *Любой вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий ограничению*

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = b$$

и условию неотрицательности координат ($x_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$) называется **допустимым решением задачи ЛП.**

Определение 2'. *Точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая удовлетворяет ограничениям*

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = b,$$

называется **базисным решением**, *если векторы a_i, не входящие в линейно независимый набор, имеют в ограничениях в качестве коэффициентов x_i нулевые значения.*

Базисное решение оказывается не всегда допустимым. Это случается тогда, когда в нем имеются отрицательные элементы.

Определение 4'. *Точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется* **базисным допустимым решением** *(или опорным планом) задачи ЛП, если система векторов a_i, входящих в ограничение*

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b$$

с положительными коэффициентами x_i, $x_i > 0$, линейно независима.

Из этого определения следует, что число r положительных компонент БДР не больше, чем m, $r \leq m$, так как некоторые коэффициенты при векторах ограничений a_i в линейно независимом наборе из m векторов ограничений могут оказаться нулевыми.

Теорема 2. Если ограничения имеют допустимое (неотрицательное) решение, то они имеют и базисное (допустимое) решение.

Доказательство. (непосредственным построением БДР). Пусть в допустимом решении $(n - r)$ переменных равны нулю, а остальные r положительны. Без потери общности (с учетом возможной перенумерации переменных, см. матрицу P в определении 2), это запишем так:

$$x_j = 0, \quad j = r+1, r+2, \ldots, n \ ,$$

$$\sum_{j=1}^{r} x_j a_j = b, \quad x_j > 0, \ j = 1, 2, \ldots, r.$$

Случай (1) : a_j, $j = 1, 2, \ldots, r$ - линейно независимы. Тогда $r \leq m$, где

$m = rankA$, и данное допустимое решение является БДР, в котором $(m - r)$ переменных оказались равны нулю. Для этого случая теорема доказана.

Случай (2) : $a_j,\ j = 1, 2, \ldots, r$ - линейно зависимы. Это означает, что равенство

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_j = 0$$

выполняется не при всех $\alpha_i = 0$. Пусть $\alpha_k > 0$ для некоторого $k = \overline{1, r}$. (При необходимости последнее равенство может быть умножено на -1). Тогда

$$a_k = -\sum_{j=1, j \neq k}^{r} (\frac{\alpha_j}{\alpha_k}) a_j \ .$$

Имеем ограничение

$$x_1 a_1 + \ldots + x_k a_k + \ldots + x_r a_r = b \ .$$

Подставим сюда последнее выражение для a_k:

$$x_1 a_1 + \ldots + x_k(\ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} a_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} a_{k+1} - \ldots) + \ldots + x_r a_r = b \ .$$

Приведем подобные и получим

$$\sum_{j \neq k, j=1}^{r} (x_j - \frac{\alpha_j x_k}{\alpha_k}) a_j = b \ .$$

Всегда можно выбрать k так, что

$$\frac{x_k}{\alpha_k} = \min_j (\frac{x_j}{\alpha_j}; \alpha_j > 0) \ .$$

В силу этого значения

$$X_j = x_j - \alpha_j (\frac{x_k}{\alpha_k}), j \neq k, j = \overline{1, r},$$

оказываются положительными и

$$X_j = 0, j = k, r+1, r+2, \ldots, n.$$

В итоге решение $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ допустимо, так как ограничение

$$\sum_{i=1}^{n} X_i a_i = b$$

выполнено и $X_i \geq 0, i = \overline{1,n}$, причем в этом решении $(r-1)$ переменных строго положительны и $(n-r+1)$ переменных равны нулю.

Таким образом, количество строго положительных переменных в допустимом решении оказалось уменьшено на единицу. Продолжая, подобно этому, процесс исключения линейно зависимого вектора ограничений a_k из числа тех векторов $a_j, j = \overline{1,r}$, которые входят в ограничение $Ax = b$ с положительными коэффициентами, придем к случаю 1, в котором $r \leq m$, то есть построим БДР.

2.3 Тождественность БДР и вершин множества допустимых решений

Теорема 3. Базисные допустимые решения суть вершины (выпуклого) множества X допустимых решений $x,\ Ax = b,\ x \geq 0$.

Доказательство. Обозначим по определению

$$x^0 = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$$

какое-нибудь базисное допустимое решение. Это означает, что x^0- единственное решение уравнения $Ax = b$ при условии $x \geq 0$, имеющее нули в последних $(n-m)$ координатах.

Замечание 2.3.1. Иная формулировка теоремы 3: Для того чтобы допустимое решение x^0 задачи ЛП было базисным допустимым решением, необходимо и достаточно, чтобы x^0 было вершиной выпуклого множества X допустимых решений $x,\ Ax = b,\ x \geq 0$.

(1) **Условие необходимо.** (Дано : x^0 - базисное допустимое решение. Доказать : x^0 - вершина). Предположим противное, а именно, что x^0- не вершина. Тогда в X найдутся две другие различные точки u и v такие, что $x^0 = \theta u + (1-\theta)v$ для некоторого $\theta,\ 0 < \theta < 1$. Имеем: $Au = b,\ Av = b,\ u, v \geq 0$, что означает $u, v \in X$. Следовательно, послед-

ние $(n-m)$ координат векторов u и v удовлетворяют условиям равенства нулю:

$0 = \theta u_{m+1} + (1-\theta)v_{m+1},$

$0 = \theta u_{m+2} + (1-\theta)v_{m+2},$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$0 = \theta u_n + (1-\theta)v_n.$

В этих равенствах оба коэффициента θ и $(1-\theta)$ положительны, так как по предположению x^0 - внутренняя точка отрезка между точками u и v. Кроме того, $u_{m+1}, \ldots, u_n \geq 0$ и $v_{m+1}, \ldots, v_n \geq 0$.

С учетом этих обязательств указанные равенства нулю возможны только при $u_j = 0$ и $v_j = 0,\ j = m+1, \ldots, n$. Но тогда u и v подпадают под определение БДР, а оно, по определению, единственное решение уравнения $Ax = b,\ x \geq 0$, с нулевыми последними $(n-m)$ координатами. Очевидное противоречие доказывает, что $x^0 = u = v$ есть вершина.

(2) **Условие достаточно.** (Дано : x^0 - какая-нибудь вершина допустимой области X. Доказать : x^0 есть БДР). Обозначим через r число координат вектора x^0, которые строго положительны. Докажем, что $r \leq m$ и что соответствующие этим r координатам векторы ограничений a_j линейно независимы, то есть, что x^0 есть БДР. Для этого будем действовать так же, как в доказательстве Теоремы 2. Как и там, имеем здесь **случай (1)** и **случай (2)** . В случае (1) доказательство готово. Случай же (2) означает, что не при всех $\alpha_j = 0,\ j = \overline{1,r}$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_j = 0\ .$$

Введем число ρ такое, что для этих $\alpha_j \neq 0$

$$0 < \rho < \min_j \frac{x_j^0}{\mid \alpha_j \mid}.$$

Тогда векторы

$$x^1 = x^0 + \rho\alpha,$$

$$x^2 = x^0 - \rho\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$ - вектор, окажутся неотрицательны: $x^1 \geq 0$ и $x^2 \geq 0$. С учетом обозначения для вектора α исходное равенство перепишем в виде $A\alpha = 0$. На этом основании имеем:

$$Ax^1 = A(x^0 + \rho\alpha) = Ax^0 + \rho A\alpha = Ax^0 = b,$$

$$Ax^2 = A(x^0 - \rho\alpha) = Ax^0 - \rho A\alpha = Ax^0 = b.$$

Беря полусумму последних двух равенств и учитывая, что

$$x^0 = \frac{1}{2}(x^1 + x^2) = \theta x^1 + (1 - \theta)x^2, \quad \theta = \frac{1}{2} \ ,$$

убеждаемся, что построены две различные точки $x^1, x^2 \in X$, отличные от x^0 и такие, что x^0 - внутренняя точка (середина) отрезка, их соединяющего, то есть x^0 - не вершина. Это противоречит данному условию, поэтому все α_j в исходном равенстве равны нулю, то есть векторы $a_j, \ j = \overline{1, r}$ линейно независимы. Но, как известно, если $a_j \in R^m$, то число r таких векторов не может превышать $m, \ r \leq m$. Возвратились к случаю (1), для которого достаточность условия теоремы доказана.

Замечание 2.3.2. Теорему 3 удобно сформулировать и наоборот : Для того чтобы точка x^0 была вершиной выпуклого множества X допустимых решений задачи ЛП, необходимо и достаточно, чтобы векторы ограничений a_j, имеющие в качестве коэффициентов положительные координаты этой точки в ограничениях $Ax = b, \ x \geq 0$, были линейно независимы.

В этой (эквивалентной) формулировке, очевидно, необходимость и достаточность просто меняются местами.

2.4 Совпадение решения задачи ЛП с вершиной допустимого множества решений

Следующее утверждение является главным для дальнейшего перехода к практическому вычислительному методу, позволяющему сравнительно быстро отыскать решение задачи ЛП.

Теорема 4. Если целевая функция $z = c^T x$ имеет конечный минимум, то по крайней мере одно оптимальное решение является базисным допустимым решением (то есть вершиной допустимого многогранника X).

Доказательство. Пусть все БДР определяются векторами $p_1, p_2, \ldots, p_k$ и пусть целевая функция принимает в этих точках значения, соответственно, $z_1, z_2, \ldots, z_k$. Так как $z = c^T p_i$, то

$$z_i = c^T p_i,\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Уже известно (из теоремы 3), что $p_1, p_2, \ldots, p_k$ - это все вершины множества X допустимых решений, и что это множество выпукло (из теоремы 1), и что любая выпуклая оболочка данных точек определяется как множество точек x вида

$$x = \theta_1 p_1 + \theta_2 p_2 + \ldots \theta_k p_k, \quad \theta_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1\ .$$

В любой такой точке x, $x \in X$, имеем

$$z = c^T x = \theta_1 c^T p_1 + \theta_2 c^T p_2 + \ldots \theta_k c^T p_k = \theta_1 z_1 + \theta_2 z_2 + \ldots \theta_k z_k\ .$$

Следовательно, отыскание решения $x \in X$, оптимального в смысле $\min z = \min c^T x$ сводится к задаче нахождения таких чисел $\theta_i \geq 0$, которые в сумме дают 1 и при этом доставляют минимум величине

$$z = \theta_1 z_1 + \theta_2 z_2 + \ldots \theta_k z_k\ ,$$

где $z_i = c^T p_i$ - вещественные числа. Среди конечного набора чисел z_i всегда найдется одно или несколько, имеющих наименьшее значение $z_{\min}$.

Пусть, без ограничения общности, это первые l чисел : $z_j = z_{\min}$, $j = 1, 2 \ldots, l$. Тогда величина $z = \theta_1 z_1 + \ldots \theta_k z_k$ будет, очевидно, наименьшей, равной z_{min}, если неотрицательные весовые коэффициенты выбрать так : $\theta_1 + \ldots \theta_l = 1$ и $\theta_i = 0$ при $i = l + 1, \ldots, k$. Таким образом, доказано, что минимум функции $z = c^T x$ достигается в некоторой вершине p_j или же в выпуклой оболочке конечного числа вершин $p_1, p_2, \ldots, p_l$, то есть в точке

$$x = \sum_{i=1}^{l} \theta_i p_i, \quad \sum_{i=1}^{l} \theta_i = 1, \; 0 \leq \theta_i$$

допустимого многогранника X.

Вывод по разделу 1 : При поиске решения задачи ЛП (в стандартной форме) достаточно ограничиться нахождением базисных допустимых решений и только их (то есть вершин допустимого многогранника решений). Симплекс-метод, излагаемый ниже, представляет собой конечную целенаправленную процедуру поиска такого решения.

Глава 3

Симплекс-метод

Слово **simplex** в обычном смысле означает простой, несоставной, в противоположность слову **complex** . Как математическое понятие, симплекс есть выпуклая оболочка m точек n-мерного метрического пространства; 0-мерный симплекс есть точка, 1-мерный симплекс - отрезок, 2-мерный - треугольник, 3-мерный - тетраэдр, и т.д. Поскольку уже установлено (см.разд. 1), что в задаче ЛП решение ищется в вершинах множества допустимых решений X, являющегося, как видно, симплексом, сама процедура поиска получила такое название "симплекс-метод". Он разработан Г. Данцигом в 1947 году. Метод получил несколько различных форм (алгоритмов). Для удобства их изложения рассмотрим предварительно представление стандартной задачи ЛП в иной, эквивалентной, форме.

3.1 Приведение задачи ЛП к канонической форме для базиса

По определению БДР для его нахождения нужно сначала найти m линейно-независимых столбцов a_j матрицы ограничений А. Пусть они уже найдены и (с учетом возможной перенумерации переменных) являются сомножителями при первых m переменных, $x_1, x_2, \dots,$

x_m. Эти столбцы образуют невырожденную матрицу

$$B = [a_1, a_2, \ldots, a_m] \ .$$

Следовательно, $A = [B \mid R]$, где $R = [a_{m+1}, \ldots, a_n]$ - матрица из столбцов, являющихся линейными комбинациями столбцов матрицы B. Введем еще соответствующие обозначения. Вектор $x^B = (x_1, x_2, \ldots .x_m)^T$, составленный из базисных переменных, и вектор $x^F = (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)^T$, составленный из небазисных (свободных) переменных. Тогда $x = (x^B, x^F)$. Аналогично $c_B = (c_1, \ldots, c_m)^T$,$c_F = (c_{m+1}, \ldots, c_n)^T$ и $c = (c_B, c_F)$.

Имеем стандартную задачу ЛП: Минимизировать целевую функцию

$$z = c^T x$$

при ограничениях $Ax = b,\ x \geq 0$. Теперь с помощью введенных обозначений эту задачу перепишем в другой форме, учитывая, что B^{-1} существует.

Сначала перепишем ограничения $Ax = b$:

$$Bx^B + Rx^F = b, \quad x^B + B^{-1}Rx^F = b', \quad b' = B^{-1}b.$$

Матрицу $B^{-1}R$, имеющую размеры $m \times (n - m)$, обозначим A' и запишем как совокупность столбцов :

$$A' = B^{-1}R = [a'_{m+1} : a'_{m+2} : \ldots a'_n],$$

$$a'_j = B^{-1}a_j, \quad j = m+1, \ldots, n.$$

Далее, перепишем целевую функцию $z = c^T x$:

$$z = c_B^T x^B + c_F^T x^F = c_B^T(b' - A'x^F) + c_F^T x^F = c_B^T b' + (c_F^T - c_B^T A')x^F = z_0 + c'^T x^F,$$

где новые коэффициенты обозначены c', $c'^T = c_F^T - c_B^T A'$, то есть

$$c'_j = c_j - c_B^T a'_j,\ j = m+1, \ldots, n,$$

и значение целевой функции z при $x^F = 0$ обозначено z_0, $z_0 = c_B^T b'$.

Следовательно, стандартная задача ЛП:

$$\min_x (z = c^T x),\ Ax = b, \quad x \geq 0,$$

имеет следующую эквивалентную формулировку, так называемую **каноническую форму задачи для базиса** $x^B = (x_1, \ldots, x_m)$:

Минимизировать целевую функцию

$$z - z_0 = c'^T x^F$$

при ограничениях

$$x^B + A' x^F = b', \quad x^B \geq 0, \quad x^F \geq 0,$$

где

$$z_0 = c_B^T b';\ b' = B^{-1} b;\ A' = \{a_j'\},\ j = m+1, \ldots, n;$$

$$c_j' = c_j - c_B^T a_j,\ a_j' = B^{-1} a_j,\ j = m+1, \ldots, n.$$

При этом в обозначениях учтено, что

$$B = \{a_j\},\ j = \overline{1, m},\ rank B = m;\ A = \{a_j\},\ j = \overline{1, n}.$$

Особенность данной формы заключается в следующем: (1) базисные переменные x^B входят в ограничения с единичной матрицей, но при этом в целевую функцию не входят; (2) целевая функция $(z - z_0)$ выражена только через свободные, небазисные переменные x^F. Такое представление задачи ЛП удобно для построения той вычислительной процедуры, которая успешно решает задачу и известна как симплекс-метод.

3.2 Симплекс-метод при известном базисном допустимом решении

Приведение задачи ЛП к канонической форме для базиса означает, что найдено какое-нибудь базисное решение и оно имеет вид:

небазисные переменные $x^F = 0$;

базисные переменные $x^B = b'$;

целевая функция $z = z_0 = c_B^T b'$.

Если при этом окажется, что $b' \geq 0$, то это базисное решение есть базисное допустимое решение (одна из вершин допустимого многогранника), в противном случае оно не является допустимым решением.

В данном пункте предполагаем, что в начале или на очередном шаге решения оказалось $b' \geq 0$. Спрашивается, нельзя ли сделать еще шаг и еще уменьшить значение целевой функции z, переходя к какой-либо другой вершине допустимого многогранника ?

Ответ на этот вопрос получаем, обратившись к виду z :

$$z - z_0 = c'^T x^F.$$

Если все коэффициенты c' неотрицательны, $c' \geq 0$, то в допустимой области при $x^F \geq 0$ нельзя уменьшить z, двигаясь от $x^F = 0$. Минимум $z = z_0$ найден.

Если же среди коэффициентов c' есть хотя бы один строго отрицательный, то z можно уменьшить и далее, если увеличивать от 0 те свободные переменные в составе x^F, которые входят в целевую функцию $(z - z_0) = c'^T x^F$ с отрицательными коэффициентами c', но следя за тем, чтобы остаться в допустимой области

$$X^B + A' x^F = b', \quad x^B \geq 0, \; x^F \geq 0.$$

Безразлично, сколько таких переменных и какие из них выбрать одновременно для увеличения, но симплекс-метод предлагает увеличивать только одну. Целесообразно выбрать ту переменную из x^F, которая входит в $(z - z_0) = c'^T x^F$ с наибольшим по модулю отрицательным коэффициентом. Это отвечает скорейшему спуску по z среди возможных вариантов покоординатного спуска.

Допустим, выбор сделан и x_s есть именно та свободная переменная, которую будем увеличивать от нуля, оставляя все другие небазисные переменные в x^F неизменными и равными нулю. Тогда ограничения, за которыми надо следить, приобретают простой вид

$$x_i^B + a'_{is}x_s = b'_i, \quad x_i^B \geq 0,\ x_s > 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Теперь нужно ответить на вопрос : до какого предела можно увеличивать x_s ? С точки зрения отдельного взятого i - го ограничения: увеличение x_s влечет уменьшение x_i^B, и поскольку уменьшать x_i^B можно только до нулевого значения, $x_i^B = 0$, увеличивать x_s можно только до значения $x_s = b'_i/a'_{is}$. Однако, с точки зрения всех m ограничений одновременно, увеличение x_s допустимо лишь до наименьшего значения

$$x_s = \min_{i=\overline{1,m}}(\frac{b'_i}{a'_{is}}) \ .$$

Допустим, что это наименьшее значение обнаружено в k-й строке ограничений, то есть

$$x_s = \min_{i=\overline{1,m}}(\frac{b'_i}{a'_{is}}) = \frac{b'_k}{a'_{ks}}.$$

Тогда имеем следующий результат : выбранная из числа небазисных переменная x_s увеличена с нулевого значения до значения b'_k/a'_{ks} и одновременно k-я переменная x_k из числа базисных уменьшена до нулевого значения. То есть x_s введена в базис, а x_k выведена из базиса, - совершен переход из одного БДР к другому БДР, при котором уменьшено значение целевой функции.

Это и есть очередной шаг симплекс-метода. Поскольку число БДР (вершин допустимого многогранника) конечно (не превышает C_n^m), минимум целевой функции будет найден за конечное число шагов.

3.3 Алгоритм симплекс-метода при известном базисном допустимом решении

Из (п. 3.1) видно, что стандартная задача ЛП имеет множество представлений, называемых канонической формой для базиса, - для каждого базиса своя каноническая форма. С другой стороны, в п. 3.2 показано, что очередной шаг симплекс-метода, на котором происходит переход к меньшему значению целевой функции, означает введение в базис некоторой переменной x_s взамен другой переменной x_k, которая из базиса выводится. Таким образом, чтобы выполнить шаг симплекс-метода, формально нужно переписать задачу ЛП в канонической форме для следующего, очередного базиса. Опишем эти действия.

Дана стартовая или текущая каноническая форма задачи ЛП для базиса (см. п. 3.1) в виде системы при $b' \geq 0$:

$$\begin{bmatrix} I & | & A' \\ --- & | & --- \\ O & | & c'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^B \\ --- \\ x^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ --- \\ z - z_0 \end{bmatrix}, \quad x^B \geq 0, x^F \geq 0.$$

Здесь I - единичная матрица размера $(m \times m)$; $A' = \{a'_j\}$, $j = m+1, \ldots, n,$ - матрица из векторов-столбцов a'_j ; c' - вектор (столбец) коэффициентов при небазисных переменных x^F ; $z_0 = c_B^T b'$ - исходное значение целевой функции для (стартового или текущего) БДР : $x = (x^B, x^F),\ x^B = b',\ x^F = 0.$

(1) Выясняют, какую из переменных x^F можно увеличить от нуля, чтобы уменьшить z. (Свидетельством этому служит отрицательный коэффициент в последней строке блочной матрицы, указанной выше системы , то есть среди элементов вектора c'). Выбранную переменную x_s называют **ведущей переменной.**

(2) Выясняют, которая из m строк ограничений (первые m строк

записанной выше системы) обеспечивает

$$\min_{i=\overline{1,m}} \frac{b'_i}{a'_{is}}.$$

Номер этой строки обозначают k и эту строку называют **ведущей (ключевой) строкой.**

(3) Нормируют k - ю строку, деля ее на **ведущий элемент** a'_{ks}, в результате в этой строке ведущая переменная x_s получает коэффициент 1 .

(4) Проводят серию вычитаний пронормированной k- й строки, беря ее с подходящими коэффициентами, из всех других строк системы, с тем чтобы исключить ведущую переменную x_s из всех уравнений системы, кроме k-го. (Подходящие коэффициенты к этому моменту времени уже находятся в матрице системы на пересечении всех строк, кроме k-й, с **ведущим столбцом**, имеющим номер s).

В результате этих четырех действий s- й столбец станет столбцом единичной матрицы, а k- й столбец системной матрицы перестанет быть таковым. Это и означает, что переменная x_s оказалась введена в базис, а переменная x_k оказалась выведена из базиса. Совершен переход к канонической форме задачи ЛП для другого базиса. На следующем шаге алгоритма эти действия повторяют, пока действие (1) не даст останова из-за отсутствия ведущей переменной.

Очевидно, что действия (3) и (4) совпадают с процедурой исключения переменной x_s по методу Гаусса-Жордана из данной системы уравнений. Действия же (1) и (2) предваряют эту процедуру лишь специфическим выбором: ведущей переменной (действие (1)) и ведущей строки (действие (2)).

Пример 3.3.1. Минимизировать

$$-2x_1 - 4x_2 = z$$

при ограничениях $x_1, x_2 \geq 0$ и

$$2x_1 + 3x_2 \leq 120,$$

$$3x_1 + 9x_2 \leq 270.$$

Сначала запишем эту задачу ЛП в стандартной форме, введя две дополнительные переменные $x_3, x_4 \geq 0$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 120 \ , \\ 3x_1 & + & 9x_2 & & & + & x_4 & = & 270 \ , \\ -2x_1 & - & 4x_2 & & & & & = & z \ . \end{array}$$

В матричном виде :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 270 \\ z \end{bmatrix}.$$

Одновременно это служит стартовой канонической формой задачи для базиса $x^B = (x_3, x_4)$. Свободные, небазисные переменные: $x^F = (x_3, x_4)$. Стартовое базисное допустимое решение: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$. Значение целевой функции для него: $z = z_0 = 0$.

Для функционирования симплекс-метода, то есть для выполнения составляющих его действий (1)-(4), достаточно оперировать только с расширенной матрицей. В этом примере она имеет следующий стартовый вид:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 0 & 120 \\ 3 & 9 & 0 & 1 & 270 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & z \end{array}\right].$$

(Такая матрица называется **симплекс-таблицей**).

Выполним в ней необходимые действия (1)-(4).

Шаг 1.

(1) $x_s = x_2$ (ведущий столбец - второй).

(2) $\min(\frac{120}{3}, \frac{270}{9}) = \min(40, 30) = 30;$

$k = 2$ (ведущая строка - вторая).

(3) После нормировки :

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & | & 120 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/9 & | & 30 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & | & z \end{bmatrix}.$$

$$\uparrow$$

(ведущий столбец и ведущая строка помечены для наглядности стрелками).

(4) После вычитаний :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1/3 & | & 30 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/9 & | & 30 \\ -2/3 & 0 & 0 & 4/9 & | & z+120 \end{bmatrix}.$$

Это следущая каноническая форма для базиса $x^B = (x_2, x_3)$.Свободные переменные : $x^F = (x_1, x_4)$. Базисное допустимое решение : $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 30, 40, 0)$. Значение целевой функции для него : $z + 120 = 0$, то есть $z = z_0 = -120$.

Шаг 2.

(1) $x_s = x_1$ (ведущий столбец - первый).

(2) $\min(\frac{40}{1}, \frac{30}{1/3}) = \min(40, 90) = 40;$

$k = 1$ (ведущая строка - первая) .

(3) После нормировки :

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1/3 & | & 30 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/9 & | & 30 \\ -2/3 & 0 & 0 & 4/9 & | & z+120 \end{bmatrix}.$$
$$\uparrow$$

(4) После вычитаний :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1/3 & | & 30 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/9 & | & 20 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/9 & | & z+140 \end{bmatrix}.$$

Это следующая каноническая форма для базиса $x^B = (x_1, x_2)$. Свободные переменные: $x^F = (x_3, x_4)$. Базисное допустимое решение: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (30, 20, 0, 0)$. Значение целевой функции для него: $z + 140 = 0$, то есть $z = z_0 = -140$.

Шаг 3.

(1) Нет свободной переменной, у которой был бы отрицательный коэффициент, среди n первых элементов, $n = 4$, в последней строке матрицы. Процесс решения закончен. Решением данной задачи являются: $x_1 = 30, x_2 = 20$ и $z = -140$.

Замечание 3.3.1.

Если изобразить данную задачу геометрически на плоскости (Ox_1x_2), то решение стартовало из точки начала координат ($x_1 = x_2 = 0$). После шага 1 решение переместилось в точку с координатами $x_1 = 0, x_2 = 30$ (вдоль ребра четырехугольника ограничений, так как x_1 оставалось неизменным, $x_1 = 0$). После шага 2 решение переместилось вдоль граничной линии $3x_1 + 9x_2 = 270$ в точку с координатами $x_1 = 30,\ x_2 = 20$. Если бы на шаге 1 в действии (1) был выбран вариант $x_s = x_1$, что тоже допустимо, то после такого шага 1 решение переместилось бы в точку $x_1 = 60,\ x_2 = 0$, а после шага 2 оно переместилось бы вдоль граничной линии $2x_1 + 3x_2 = 120$ в ту же окончательную точку $x_1 = 30,\ x_2 = 20$ и $z = -140$. Для этих двух вариантов действий число шагов до окончательного решения здесь оказалось одинаковым (2 шага). В общем случае такого совпадения не случается, и заранее трудно, а то и невозможно, предсказать, какой из вариантов действий приводит быстрее к окончательному решению.

Замечание 3.3.2.

В симплекс-таблице позиция в правом нижнем углу отведена для значения целевой функции. Вначале элемент в этой позиции равен 0. Символ z в ней был записан выше для пояснения, и он более не нужен. Само же значение целевой функции всегда равно значению этого элемента, взятому с противоположным знаком, так как в точке любого базисного допустимого решения имеем $z - z_0 = 0$.

3.4 Организация вычислений симплекс-метода при известном базисном решении

Имеем симплекс-таблицу в виде двумерного массива (матрицы A) размера $(m+1) \times (n+1)$. Первые m строк содержат коэффициенты и правые части ограничений, представленных в канонической форме для базиса. С точностью до перенумерации переменных x (то есть перестановки столбцов) эти ограничения в указанной форме имеют вид уравнений

$$[I \mid A'] \begin{bmatrix} x^B \\ x^F \end{bmatrix} = b'.$$

В этом пункте мы снимаем ограничение $b' \geq 0$. Последняя, $(m+1)$ - я, строка матрицы содержит коэффициенты целевой функции, имеющей в канонической форме для базиса следующий вид:

$$[O \mid c'^T] \begin{bmatrix} x^B \\ x^F \end{bmatrix} = z - z_0 \ .$$

Последний, $(n+1)$ - й, элемент этой строки отведен для числового значения целевой функции, взятого с противоположным знаком. Это значение, достигаемое целевой функцией на текущем базисном решении, равном ($x^B = b'$, $x^F = 0$), и в начале процесса вычислений оно равно 0.

Кроме этого, удобно ввести два указателя: (1) указатель $NB(i)$, $i = \overline{1, m}$, базисной переменной в i - м ограничении, и (2) указатель $NF(j)$, $j = 1, 2, \ldots, n-m$, свободных переменных в канонической форме для целевой функции $z - z_0$. В этих указателях хранятся номера базисных и, соответственно, свободных переменных.

На каждом шаге алгоритма выполняют следующие действия (1)-(4):

(1) Пробегают номера свободных переменных в $NF(j)$, с тем чтобы проверить значения элементов

$$a(m+1, NF(j)), \ j = 1, 2, \ldots, n-m,$$

есть ли среди них отрицательные. Если "нет", решение найдено и определено равенствами $x^B = b', \quad x^F = 0, \quad z_{\min} = z_0$, то есть для базисных переменных:

$$x(NB(i)) = a(i, n+1), \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

для свободных переменных :

$$x(NF(j)) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-m;$$

и для целевой функции :

$$z_{\min} = -a(m+1, n+1).$$

Если "да", то выбирают из указанных отрицательных элементов один, например, наибольший по абсолютной величине. Пусть он имеет номер s, $s = NF(l)$. Это номер свободной переменной, переводимой в базисные. Тем самым столбец с номером s обьявлен ведущим столбцом матрицы и соответствующая переменная $x(s)$ объявлена ведущей.

(2) Пробегают номера строк, $i = 1, 2, \dots m$ чтобы по определенному правилу выделить ключевую (ведущую) строку, ее номер k. Это правило заранее определяют так, чтобы базисная переменная, имеющая номер $NB(i)$, не вышла из допустимой области в результате увеличения ведущей переменной, имеющей номер s. Для этого записывают i - е ограничение:

$$x(NB(i)) + a'_{is}x(s) = b'_i,$$

где a'_{is} - элемент приведенной выше подматрицы A'; b'_i - элемент вектора b' правой части ограничений. В принятых обозначениях для симплекс-таблицы (матрица A, ее элементы $a(i,j)$) это же ограничение имеет вид:

$$x(NB(i)) + a(i,s)x(s) = a(i, n+1).$$

Теперь, в зависимости от варианта сочетаний знаков и критических (нулевых) значений для величин a'_{is} и $b'_i = a(i, n+1)$, определяют, до какого предельного значения $\max(x_s)$ можно увеличивать ведущую переменную $x(s)$, чтобы переменная $x(NB(i))$ не вышла в область отрицательных (недопустимых) значений. Полный перебор вариантов сведём в табл. 3.4.1.

Нужно пройти эту таблицу для каждой строки, $i = 1, 2, \dots, m$, при этом: если появится хотя бы один "запрет", то переменную $x(s)$ как ведущую следует отклонить и вернуться к действию (1), чтобы найти другую переменную $x(s)$ и проделать с ней действие (2); если же нет ни одного "запрета", то следует выбрать ключевое (наиболее сильное) ограничение, его номер k, по правилу :

$$k = \arg \min_{i=\overline{1,m}} \frac{b'_i}{a'_{is}} = \arg \min_{i=\overline{1,m}} \left[\frac{a(i, n+1)}{a(i,s)} \right].$$

Таблица 3.4.1.

Для базисной переменной, входящей в i - е ограничение с коэффициентом ” + 1”

$a'_{is} = a(i,s)$	$b'_i = a(i,n+1)$	$\max(x_s)$
> 0	> 0	b'_i/a'_{is}
< 0	> 0	∞
$= 0$	> 0	∞
> 0	< 0	$-\infty$ *(запрет)*
< 0	< 0	∞
$= 0$	< 0	∞ (*)
> 0	$= 0$	$-\infty$ *(запрет)*
< 0	$= 0$	∞
$= 0$	$= 0$	∞

(*) - решение остается в недопустимой области

В результате этого обьявляют коэффициент $a'_{ks} = a(k,s)$ ведущим элементом и k - ю строку - ключевой, или ведущей строкой, для выполнения следующих двух действий, составляющих один цикл исключения по методу Гаусса-Жордана для систем линейных алгебраических уравнений. Факт такого исключения означает перевод базисной переменной с номером $s = NF(l)$ в число базисных. Такая "рокировка"должна быть зафиксирована в итоге регистрацией взаимного обмена номеров:

$$NF(l) \longleftrightarrow NB(k).$$

(3) Нормируют строку k по ведущему элементу $a(k,s)$ делением на него всех элементов строки.

(4) Вычитают строку k, умноженную на коэффициент $a(k,s)$, из всех других строк, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, кроме $i = k$.

Замечание 3.4.1. Видно, что всегда пересчитываются только $(n-m+1)$ столбцов симплекс-таблицы (матрицы A), а именно:
(1) столбец с номером $n+1$, где хранятся элементы правой части b' ограничений;
(2) все столбцы для свободных переменных, кроме ведущего, который заменяется тривиальным столбцом (все нули и одна единица вместо ведущего элемента $a(k,s)$), всего $(n-m-1)$ столбцов;
(3) столбец базисной переменной $x(NB(k))$, переводимой в число свободных переменных.

Остальные m столбцов можно не пересчитывать. В целом же приведенный алгоритм представляет собой обычное исключение Гаусса-Жордана со специальным выбором ведущего элемента $a(k,s)$.

Пример 3.4.1. Найти решение $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ следующей задачи ЛП:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 50 & & \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 10 & & \\ x_1 & & & \geq & 20 & & \\ & & x_2 & \geq & 10 & & \\ -2x_1 & - & 3x_2 & = & z & \to & \min \end{array}$$

Геометрическое построение показывает, что допустимая область есть четырехугольник на плоскости ox_1x_2 с вершинами в точках: $P=(20,10)$; $Q=(20,15)$; $R=(30,20)$; $S=(40,10)$. Перемещая линию уровня z в направлении антиградиента $-\operatorname{grad}(z)=(2,3)$, определяем, что решение достигается в вершине R со значением $z_{min}=-120$. Имея этот результат для проверки, выполним изложенный алгоритм формально.

Сначала запишем задачу в стандартной форме:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 50 \\
-x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 10 \\
x_1 & & & & & & & - & x_5 & & & = & 20 \\
 & & x_2 & & & & & & & - & x_6 & = & 10 \\
-2x_1 & - & 3x_2 & & & & & & & & & = & z \to \min
\end{array}
$$

Заполняем массивы $A(5,7)$; $NB(4)$ и $NF(2)$ исходными данными:

A

	1	1	1	0	0	0	50
$\rightarrow$	–1	2	0	1	0	0	10
	–1	0	0	0	1	0	–20
	0	–1	0	0	0	1	–10
	–2	–3	0	0	0	0	0
		$\uparrow$					

NB

(1)	3
(2)	4
(3)	5
(4)	6

NF

(1)	1
(2)	2

$$\text{БР} = (0, 0, 50, 10, -20, -10) \neq \text{БДР}$$

Отмечено, что исходное базисное решение (БР) не является допустимым.

Шаг 1.

(1) $s\ \boxed{2}$ $l\ \boxed{2}$

(2) $\min(50/1, 10/2, \infty, \infty) = 5;$ $k\ \boxed{2}$

В результате действий (1), (2) найдены (выше и ниже в таблице помечены стрелками) ведущий столбец, $s = 2$, и ведущая строка, $k = 2$; ведущий элемент 2 находится на их пересечении.

(3) После нормировки ведущей строки:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \\ \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|rrrrrr|r|}
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
-1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 5 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -20 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\
\hline
-2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array} \\
\quad\ \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{c|c|}
\cline{2-2}
(1) & 3 \\ \cline{2-2}
(2) & 4 \\ \cline{2-2}
(3) & 5 \\ \cline{2-2}
(4) & 6 \\ \cline{2-2}
\end{array} \\ \\ \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{c|c|}
\cline{2-2}
(1) & 1 \\ \cline{2-2}
(2) & 2 \\ \cline{2-2}
\end{array} \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

(4) После вычитаний и регистрации обмена $NF(l) \longleftrightarrow NB(k)$:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|r|r|r|r|r|r|r|}
\hline
3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 45 \\ \hline
-1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 5 \\ \hline
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -20 \\ \hline
-1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & -5 \\ \hline
-7/2 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 & 15 \\ \hline
\end{array} \\
\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{c|c|}
\cline{2-2}
(1) & 3 \\ \cline{2-2}
(2) & 2 \\ \cline{2-2}
(3) & 5 \\ \cline{2-2}
(4) & 6 \\ \cline{2-2}
\end{array} \\ \\ \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{c|c|}
\cline{2-2}
(1) & 1 \\ \cline{2-2}
(2) & 4 \\ \cline{2-2}
\end{array} \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0, 5, 45, 0, -20, -5) \neq \text{БДР}$$

Шаг 2.

(1) $\qquad s\ \boxed{1} \qquad l\ \boxed{1}$

(2) $\qquad \min(\frac{45}{3/2}, \infty, \infty, \infty) = 30; \qquad k\ \boxed{1}$

Найдены ведущий столбец, $s = 1$, и ведущая строка, $k = 1$, в таблице выше и ниже они помечены стрелками; ведущий элемент $3/2$ находится на их пересечении.

(3) После нормировки ведущей строки:

A

→	1	0	2/3	−1/3	0	0	30
	−1/2	1	0	1/2	0	0	5
	−1	0	0	0	1	0	−20
	−1/2	0	0	1/2	0	1	−5
	−7/2	0	0	3/2	0	0	15
	↑						

NB

(1)	3
(2)	2
(3)	5
(4)	6

NF

(1)	1
(2)	4

(4) После вычитаний и регистрации обмена $NF(l) \longleftrightarrow NB(k)$:

A

1	0	2/3	−1/3	0	0	30
0	1	1/3	1/3	0	0	20
0	0	2/3	−1/3	1	0	10
0	0	1/3	1/3	0	1	10
0	0	7/3	1/3	0	0	120

NB

(1)	1
(2)	2
(3)	5
(4)	6

NF

(1)	3
(2)	4

Шаг 3. Решение найдено, $x_1 = 30,\ x_2 = 20,\ z_{\min} = -120.$

В геометрической интерпретации решение было найдено путем перемещения из начала кооординат $(0,0)$ в точку $(0,5)$ и затем в точку $R = (30,20)$. Первые две точки не находились в допустимой области. Таким образом, увеличение ведущей переменной от нулевого значения позволяет не только уменьшать значение целевой функции, но и вводить решение в допустимую область.

Замечание 3.4.2. По поводу ситуации $-\infty$ (запрет) в табл. 3.4.1. см. ниже пример 4.1.4, п. 4.1

3.5 Симплекс-метод без порождения начального БДР

Рассмотренный в пп. 3.3 и 3.4 алгоритм симплекс-метода пригоден для случая, когда какое-нибудь базисное допустимое решение известно с самого начала. Так происходит, если $b \geq 0$ и все m ограничений имеют вид "меньше или равно". Тогда для приведения каждого такого ограничения к виду "равно"в него вводят свою добавочную неотрицательную переменную (с коэффициентом "+1", см. табл. 3.4.1 для использования в алгоритме). Добавленные таким образом переменные как раз и являются базисными переменными x^B в начальном ≥ 0.

Если кроме ограничений вида "меньше или равно"имеются ограничения вида "больше или равно ", то, как видно из последнего примера в п. 3.4, данный алгоритм также работает, хотя стартует не из допустимой области, а из некоторого необязательно неотрицательного базисного решения, БР. Это происходит в случае предварительного умножения на -1 таких неравенств для перевода их в категорию "меньше или равно", так как при этом нарушается неравенство $b \geq 0$.

Если кроме ограничений вида "меньше или равно", появляющихся в указанных двух случаях, имеются ограничения "равно", то начальное БР не очевидно. Поэтому в такое ограничение также вводят переменную но не добавочную, а искусственную неотрицательную переменную, действуя с ней так, как описано в следующем п. 3.6.

Пример 3.5.1. Для $x_1, x_2 \geq 0$ решить задачу:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & & \\ -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 & & \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 21 & & \\ -2x_1 & - & 5x_2 & = & z & \to & \min \end{array}$$

Шаг 0. Ввод числовых коэффициентов из данных условий и автоматическое заполнение остальных числовых значений для получения следующего исходного вида массивов :

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{rc}
 & A \\
\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
-2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 21 \\
\hline
-2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array} \\
 & \begin{array}{cccccc} & \uparrow & & & & \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} NB \\ \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ 3 \\ 4 \\ \hline \end{array} \\ \\ \\ \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} NF \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ 2 \\ \hline \end{array} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0, 0, 3, 21, 6) = \text{БДР}, \quad 0 = z.$$

Шаг 1.

(1) $s = 2, \quad l = 2.$

(2) $\min(6, 1, 7) = 1, \quad k = 2.$

(3) после нормировки:

$$
\begin{array}{rc}
 & A \\
\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
-2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 21 \\
\hline
-2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array} \\
 & \begin{array}{cccccc} & \uparrow & & & & \end{array}
\end{array}
$$

(4) после вычитаний:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{rc}
 & A \\
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
5/3 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & 5 \\
-2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 1 \\
4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 18 \\
\hline
-16/3 & 0 & 5/3 & 0 & 0 & 5 \\
\hline
\end{array} \\
 & \begin{array}{cccccc} \uparrow & & & & & \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} NB \\ \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ 2 \\ 4 \\ \hline \end{array} \\ \\ \\ \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} NF \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ 3 \\ \hline \end{array} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0, 1, 0, 18, 5) = \text{БДР}; \qquad -5 = z.$$

Шаг 2.

(1) $\quad s = 1, \quad l = 1.$

(2) $\quad \min(3, \infty, 9/2) = 3, \quad k = 1.$

(3) $\quad$ после нормировки:

$$
\begin{array}{c}
 \\
\rightarrow \\
 \\
 \\
 \\
\end{array}
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
1 & 0 & -1/5 & 0 & 3/5 & 3 \\
-2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 1 \\
4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 18 \\
\hline
-16/3 & 0 & 5/3 & 0 & 0 & 5 \\
\hline
\end{array} \\
\begin{array}{l}\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\end{array}
\end{array}
$$

(4) $\quad$ после вычитаний:

$$
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
1 & 0 & -1/5 & 0 & 3/5 & 3 \\
0 & 1 & 1/5 & 0 & 2/5 & 3 \\
0 & 0 & -1/5 & 1 & -12/5 & 6 \\
\hline
0 & 0 & 3/5 & 0 & 16/5 & 21 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
1 \\
2 \\
4 \\
\hline
\end{array} \\
\\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
5 \\
3 \\
\hline
\end{array} \\
\\
\\
\end{array}
$$

$$
\text{БР} = (3, 3, 0, 6, 0) = \text{БДР}; \qquad -21 = \min z.
$$

В геометрической интерпретации здесь на плоскости ox_1x_2 происходило движение по точкам: $(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (3, 3)$.

Если в исходных ограничениях имеются ограничения вида "больше или равно", то не обязательно их предварительно умножать на -1 для перевода в категорию "меньше или равно", а можно ввести в каждое из них свою добавочную неотрицательную переменную с коэффициентом -1. Тогда в алгоритме потребуется следующая табл. 3.5.1 (ср. с табл. 3.4.1.).

Таблица 3.5.1.

Для базисной переменной,входящей в i-е ограничение с коэффициентом -1

$a'_{is} = a(i,s)$	$b'_i = a(i,n+1)$	$\max(x_s)$
> 0	> 0	∞
< 0	> 0	$-\infty$ *(запрет)*
$= 0$	> 0	∞ (*)
> 0	< 0	∞
< 0	< 0	b'_i/a'_{is}
$= 0$	< 0	∞
> 0	$= 0$	∞
< 0	$= 0$	$-\infty$ *(запрет)*
$= 0$	$= 0$	∞

(*) - решение остается в недопустимой области

Пример 3.5.2. Для $x_1, x_2 \geq 0$ решить задачу:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
2x_1 & & & \geq & 3 & & \\
& & x_2 & \geq & 1 & & \\
x_1 & + & x_2 & = & 6 & & \\
-2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 & & \\
2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 21 & & \\
-2x_1 & - & 5x_2 & = & z & \to & \min
\end{array}$$

Шаг 0. Ввод числовых коэффициентов из данных условий и автоматическое заполнение остальных числовых значений для получения следующего исходного вида массивов:

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \to \\ \\ \\
\end{array}
\overset{A}{\begin{array}{|rrrrrrr|r|}
\hline
2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
-2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 21 \\
\hline
-2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}}
\qquad
\overset{NB}{\begin{array}{|c|}
\hline
3 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \\
\hline
\end{array}}
\qquad
\overset{NF}{\begin{array}{|c|}
\hline
1 \\ 2 \\
\hline
\end{array}}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \uparrow & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\text{БР} = (0, 0, -3, -1, 3, 21, 6) \neq \text{БДР}; \qquad 0 = z.
$$

Шаг 1.

(1) $s = 2, \quad l = 2.$

(2) $\min(\infty, \infty, 6, 1, 7) = 1, \quad k = 4.$

(3) после нормировки:

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \to \\ \\ \\
\end{array}
\overset{A}{\begin{array}{|rrrrrrr|r|}
\hline
2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
-2/3 & 1 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 21 \\
\hline
-2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \uparrow & & & & & &
\end{array}
$$

(4) после вычитаний:

$$
\begin{array}{c}
\\
\\
\\
\rightarrow\\
\\
\\
\\
\\
\end{array}
\begin{array}{|rrrrrrr|r|}
\multicolumn{8}{c}{A}\\
\hline
2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\\
2/3 & 0 & 0 & -1 & -1/3 & 0 & 0 & 0\\
5/3 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & 5\\
-2/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1\\
4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 18\\
\hline
-16/3 & 0 & 0 & 0 & 5/3 & 0 & 0 & 5\\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & & & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|}
\multicolumn{1}{c}{NB}\\
\hline
3\\ 4\\ 7\\ 2\\ 6\\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|}
\multicolumn{1}{c}{NF}\\
\hline
1\\ 5\\
\hline
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0,1,-3,0,0,18,5) \neq \text{БДР}; \qquad -5 = z.$$

Шаг 2.

(1) $\quad s = 1, \quad l = 1.$

(2) $\quad \min(\infty, \infty, 3, \infty, 9/2) = 3, \quad k = 3.$

(3) после нормировки:

$$
\begin{array}{c}
\\
\\
\\
\rightarrow\\
\\
\\
\\
\\
\end{array}
\begin{array}{|rrrrrrr|r|}
\multicolumn{8}{c}{A}\\
\hline
2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\\
2/3 & 0 & 0 & -1 & -1/3 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 3/5 & 3\\
-2/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1\\
4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 18\\
\hline
-16/3 & 0 & 0 & 0 & 5/3 & 0 & 0 & 5\\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & & & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
$$

(4) после вычитаний:

$$
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|ccccccc|c|}
\hline
0 & 0 & -1 & 0 & 2/5 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1/5 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 3/5 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1 & 0 & 6 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 0 & 21 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
7 \\ 5 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (3,3,3,2,0,6,0) = \text{БДР}; \qquad -21 = \min z.$$

В геометрической интерпретации здесь на плоскости ox_1x_2 происходит движение по точкам: $(0,0) \to (0,1) \to (3,3)$, причем первые две точки лежат вне допустимой области.

Замечание 3.5.1. В примере 3.5.2 третье ограничение имеет вид "равно", но данный пример показывает, как не нужно действовать в случае таких ограничений. Действительно, хотя ответ (результат) в данном примере правильный, ход решения не является таковым, потому что он не отличим от случая, когда это третье ограничение было бы заменено на "меньше равно". Ответ правильный, потому что ограничение $x_1+x_2 \le 6$ "поглощено"ограничением $2x_1+3x_2 \le 21$, то есть это последнее ограничение могло бы быть без ущерба отброшено как более широкое. Как нужно действовать в случае ограничений типа "равно", см. ниже в п. 3.6 и пример 4.1.4. Этому посвящён также отдельный п. 4.3 и, кроме того, п. 5.7.

3.6 Симплекс-метод с порождением БДР

Предыдущий алгоритм (пп. 3.3 - 3.5) не исключает появления базисных решений, не являющихся допустимыми, в исходном состоянии или на промежуточных шагах. Чтобы исключить такую ситуацию, применяют следующий алгоритм. Он основан на введении не только добавочных неотрицательных переменных (как изложено в п. 3.5), но и искусственных неотрицательных переменных, а также искусственной целевой функции w, которую вводят как сумму всех искусственных переменных. Тогда на этапе I решения задачи отыскивают допустимое решение, доставляющее $\min(w)$, это и будет начальным БДР для этапа II. Этап II выполняют обычным, изложенным выше способом, игнорируя (выбросив из процесса) искусственные переменные и искусственную целевую функцию.

Пример 3.6.1. Решим задачу с условием из примера 3.5.2, одновременно иллюстрируя возможную организацию вычислений для общего случая, включающего ограничения любых типов.

Шаг 0. Ввод/вычисление значений для следующих величин:

np - исходное количество переменных, здесь $np = 2$.

ng - количество ограничений вида "$\geq$", здесь $ng = 2$.

ne - количество ограничений вида "$=$", здесь $ne = 1$.

nl - количество ограничений вида "$\leq$", здесь $nl = 2$.

$na = ng + nl$, - число добавочных переменных, здесь $na = 4$.

$ns = ng + ne$, - число искусственных переменных, здесь $ns = 3$.

$n = np + na + ns$, - общее число добавочных переменных, здесь $n = 9$.

$m = ns + nl$, - общее число ограничений, здесь $m = 5$.

Выделение памяти для массивов:

$A(1 \dots m+2, 1 \dots n+1)$, здесь $A(7, 10)$, – матрица (7×10).

$NB(m)$, здесь $NB(5)$, – вектор размерности 5.

$NF(n-m)$, здесь $NF(4)$, - вектор размерности 4.

Ввод коэффициентов из условий задачи в части матрицы A:

$A(1 \dots m+1, 1 \dots np)$, здесь $A(1 \dots 6, 1 \dots 2)$;

$A(1 \dots m+1, n+1)$, здесь $A(1 \dots 6, 10)$;

и автоматическое заполнение остальных элементов массивов; в результате здесь они имеют вид:

$$
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|ccccccccc|c|}
\hline
2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
-2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 21 \\
\hline
-2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
7 \\ 8 \\ 9 \\ 5 \\ 6 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0,0,0,0,3,21,3,1,6) = \text{БДР}; \qquad 0 = \min z; \qquad 0 = w.$$

Замечание 3.6.1. Из этого заполнения массивов видно, что переменные распределены следующим образом:

x_1, x_2 - исходные переменные,

x_3, x_4, x_5, x_6 - добавочные переменные,

x_7, x_8, x_9 - искусственные переменные.

Такое упорядочение переменных может быть закреплено в программной реализации. Искусственные переменные вводят только в неравенства вида "$\geq$"и "$=$". В матрице A снизу добавлена еще одна строка, в которой хранят коэффициенты для искусственной цепевой функции w. Для значения этой функции с противоположным знаком $(-w)$ отведен элемент на пересечении нижней строки и правого столбца. Вторая снизу строка, как и ранее, предназначена для коэффициентов основной целевой функции и ее значения с противоположным знаком $(-z)$. Значение $-z$ хранит крайний справа элемент этой строки.

Подготовительный шаг 0 завершают так, чтобы выразить искусственную целевую функцию w только через небазисные, свободные переменные. Здесь по определению $w = x_7 + x_8 + x_9$, но все искусственные переменные ($x_7,\ x_8,\ x_9$) предназначены войти как базисные в начальное БДР. Поэтому для нужного завершения шага 0 достаточно вычесть из последней строки все те строки, куда были введены искусственные переменные. При данном упорядочении переменных для этого надо вычесть из последней строки первые ns строк. Здесь $ns = 3$, и после такого подготовительного вычисления имеем:

$$
\begin{array}{r}
\\
\rightarrow \\
\\
\\
\\
\\
\\
\\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|rrrrrrrrr|r|}
\hline
2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
-2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 21 \\
\hline
-2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\
\hline
\end{array} \\
\begin{array}{l}\uparrow\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\end{array}
\end{array}
$$

В результате этого вычитания получено правильное (исправленное) начальное значение искусственной целевой функции: $10 = w$.

Замечание 3.6.2. При принятом порядке записи ограничений (сначала "$\geq$", затем "$=$", и потом "$\leq$-) базисными переменными в начальном БДР будут всегда те переменные, которые имеют номера, начиная с $(np + ng + 1)$ и кончая $n = np + na + ns$, в данном примере с 5 по 9.

С этого момента начинается этап I, где применяют обычный симплекс-алгоритм (см пп. 3.3 - 3.4) для решения вспомогательной задачи $w \rightarrow \min$.

Шаг 1.

(1) $\quad s = 1, \quad l = 1.$

(2) $\quad \min(3/2, \infty, 6, \infty, 21/2) = 3/2, \quad k = 1.$

(3) после нормировки:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|rrrrrrrrr|r|}
\hline
1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
-2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 21 \\
\hline
-2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\
\hline
\end{array} \\
\begin{array}{l} \quad\uparrow \end{array}
\end{array}
$$

(4) после вычитаний:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \\ \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|lrrrrrrrr|r|}
\hline
1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 9/2 \\
0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 18 \\
\hline
0 & -5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
0 & -2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 & -11/2 \\
\hline
\end{array} \\
\begin{array}{l} \qquad\uparrow \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
1 \\ 8 \\ 9 \\ 5 \\ 6 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
7 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (3/2, 0, 0, 0, 6, 18, 1, 9/2) = \text{БДР}; \quad -3 = z; \quad 11/2 = w.$$

Шаг 2.

(1) $s = 2, \quad l = 2.$

(2) $\min(\infty, 1, 9/2, 2, 6) = 1, \quad k = 2.$

(3) после нормировки (так как ведущий элемент, указанный выше в матрице на пересечении стрелок, оказался равен 1, деление на него ведущей строки ничего не меняет) матрица сохранила свой вид.

(4) после вычитаний:

$$
\begin{array}{c}
\\
\rightarrow\\
\\
\\
\end{array}
\overset{A}{
\begin{array}{c|ccccccccc|c|}
\cline{2-11}
 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2\\
 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & 1 & 7/2\\
\rightarrow & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 3\\
 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 15\\
\cline{2-11}
 & 0 & 0 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 8\\
\cline{2-11}
 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & 0 & 0 & 3/2 & 2 & 0 & -7/2\\
\cline{2-11}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & & & \uparrow & & & & & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}}
\qquad
\overset{NB}{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ 2\\ 9\\ 5\\ 6\\ \hline\end{array}}
\qquad
\overset{NF}{\begin{array}{|c|}\hline 7\\ 8\\ 3\\ 4\\ \hline\end{array}}
$$

БР $= (3/2, 1, 0, 0, 3, 15, 0, 0, 7/2) =$ БДР; $\quad -8 = z; \quad 7/2 = w.$

Шаг 3.

(1) $s = 4, \quad l = 4.$

(2) $\min(\infty, \infty, 7/2, 1, 5) = 1, \quad k = 4.$

(3) после нормировки:

$$
\overset{A}{
\begin{array}{c|ccccccccc|c|}
\cline{2-11}
 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2\\
 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & 1 & 7/2\\
\rightarrow & 0 & 0 & -1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & -1 & 0 & 1\\
 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 15\\
\cline{2-11}
 & 0 & 0 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 8\\
\cline{2-11}
 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & 0 & 0 & 3/2 & 2 & 0 & -7/2\\
\cline{2-11}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & & & \uparrow & & & & & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}}
$$

(4) после вычитаний:

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|rrrrrrrrr|r|}
\hline
1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 \\
0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 5/6 & 0 & -1/3 & 0 & -5/6 & 0 & 1 & 5/2 \\
0 & 0 & -1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 12 \\
\hline
0 & 0 & -8/3 & 0 & 5/3 & 0 & 8/3 & 0 & 0 & 13 \\
\hline
0 & 0 & -5/6 & 0 & 1/3 & 0 & 11/6 & 1 & 0 & -5/2 \\
\hline
\end{array} \\
\qquad\qquad \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
1 \\ 2 \\ 9 \\ 4 \\ 6 \\
\hline
\end{array} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
7 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \\
\hline
\end{array} \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (3/2, 2, 0, 1, 0, 12, 0, 0, 5/2) = \text{БДР}; \quad -13 = z; \quad 5/2 = w.$$

Шаг 4.

(1) $s = 3, \quad l = 3.$

(2) $\min(\infty, \infty, 3, \infty, 6) = 3, \quad k = 3.$

(3) после нормировки:

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|rrrrrrrrr|r|}
\hline
1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 \\
0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -2/5 & 0 & -1 & 0 & 6/5 & 3 \\
0 & 0 & -1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 12 \\
\hline
0 & 0 & -8/3 & 0 & 5/3 & 0 & 8/3 & 0 & 0 & 13 \\
\hline
0 & 0 & -5/6 & 0 & 1/3 & 0 & 11/6 & 1 & 0 & -5/2 \\
\hline
\end{array} \\
\qquad\qquad \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}
$$

(4) после вычитаний:

$$
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|cccccccccc|c|}
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -2/5 & 0 & -1 & 0 & 6/5 & & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 0 & -1 & 2/5 & & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1 & 0 & 0 & -12/5 & & 6 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 0 & 0 & 16/5 & & 21 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & 0 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\
\hline
\end{array} \\ \\ \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
7 \\ 8 \\ 9 \\ 5 \\
\hline
\end{array} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (3,3,3,2,0,6,0,0,0) = \text{БДР}; \quad -21 = \min(z); \quad 0 = \min(w).$$

Этап I заключается в последовательном уменьшении w до нуля и этим он завершился, так как нет отрицательных коэффициентов в нижней строке матрицы A. Здесь этап II не потребовался, так как во второй снизу строке матрицы A нет отрицательных коэффициентов. Минимумы для z и w достигнуты одновременно. В геометрической интерпретации здесь на плоскости ox_1x_2 были переходы по следующим точкам: $(0,0) \to (3/2,0) \to (3/2,1) \to (3/2,2) \to (3,3)$.

Чтобы показать, как выполняют этап II, выберем после шага 2 другой возможный путь:

Шаг 3.

(1) $s = 3, \quad l = 3.$

(2) $\min(\infty,\infty,7,\infty,15) = 7, \quad k = 3.$

(3) после нормировки:

$$
\begin{array}{c}
 \\
 \\
\rightarrow \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
\end{array}
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|rrrrrrrrr|r|}
\hline
1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 7 \\
0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 15 \\
\hline
0 & 0 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 8 \\
\hline
0 & 0 & -1/2 & -1 & 0 & 0 & 3/2 & 2 & 0 & -7/2 \\
\hline
 & & \uparrow & & & & & & & \\
\end{array}
\end{array}
$$

(4) после вычитаний:

$$
\begin{array}{c}
A \\
\begin{array}{|rrrrrrrrr|r|}
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 8 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 15 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\
\hline
\end{array} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
7 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \\
\hline
\end{array} \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

БР $= (5, 1, 7, 0, 10, 8, 0, 0, 0) =$ БДР; $\quad -15 = z; \quad 0 = \min(w)$.

Признаком успешного окончания этапа I является 0 для w и неотрицательность всех коэффициентов для w в нижней строке. Если бы все эти коэффициенты оказались неотрицательны, но w не обратилась в 0, то этап II не может быть начат: исходные ограничения не имеют БДР.

Переход к этапу II. В данном варианте продолжения примера этап II возможен и он необходим, так как z не достигла минимума: имеется отрицательный коэффициент -3 в предпоследней строке матрицы A. Для этапа II уже не нужны ни искусственные переменные, ни искусственная целевая функция. Поэтому они в дальнейшем как бы вычеркнуты из всех действий. Вычеркивают те столбцы матрицы A, для которых в последней строке получены единицы, а так же всю последнюю строку. Это те столбцы, которые при данном упорядочении переменных имеют номера с $(np + na + 1)$ по n, здесь с 7 по 9. Кроме того, из вектора NF вычеркивают элементы, содержащие эти же номера; при данном упорядочении это всегда первые ns элементов вектора, здесь $ns = 3$.

Этап II :

Шаг 4.

(1) $\quad s = 4, \quad l = 4.$

(2) $\quad \min(5, \infty, 7/2, 2, 8) = 2, \quad k = 4.$

(3) после нормировки: $\qquad$ (4) после вычитаний:

$$
\begin{array}{r|cccccc|c|}
 & \multicolumn{7}{c}{A} \\ \cline{2-8}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\
 \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 2 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ \cline{2-8}
 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 15 \\ \cline{2-8}
 & \multicolumn{3}{c}{} & \uparrow & \multicolumn{3}{c}{}
\end{array}
\quad
\begin{array}{|cccccc|c|}
 \multicolumn{7}{c}{A} \\ \hline
 1 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & 0 & 3 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -2/5 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1 & 6 \\ \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 21 \\ \hline
 \multicolumn{7}{c}{}
\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|}
 \multicolumn{1}{c}{NB} \\ \hline
 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ \hline
 \multicolumn{1}{c}{} \\ \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
 NF \\ \boxed{5} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (3, 3, 3, 2, 0, 6) = \text{БДР}; \quad -21 = \min(z).$$

В геометрической интерпретации на плоскости ox_1x_2 здесь было движение по точкам: $(0, 0) \rightarrow (3/2, 0) \rightarrow (3/2, 1) \rightarrow (5, 1) \rightarrow (3, 3)$.

Глава 4

Двойственный симплекс-метод

Линия (гиперплоскость) уровня $z = z_{\min}$ делит все пространство переменных задачи ЛП на две части: в одной из них $z > z_{\min}$ и в ней находится допустимая область, а в другой $z < z_{\min}$ и в ней нет допустимой области значений переменных. Обычный симплекс-метод, изложенный выше, работает, если он стартует из области, где $z > z_{\min}$. Если же стартовое базисное решение (БР) лежит в области, где $z < z_{\min}$, то требуется не уменьшать, а увеличивать z до значения $z_{\min}$, переходя от недопустимых БР к БДР. Для этого предназначен двойственный симплекс-метод. Другая ситуация, для которой он создан, может возникнуть в результате наложения дополнительных ограничений на уже решенную задачу. Она обязательно возникнет, если наложенное, дополнительное ограничение не содержит целиком исходное допустимое множество, а отделяет от него лишь некоторую часть. Тогда, естественно, новое $z_{\min}$ больше прежнего, из которого двойственный симплекс-метод и стартует, чтобы не решать всю задачу как новую.

Поскольку при движении из области $z < z_{\min}$ требуется увеличивать z, пребывание в этой области индицируется тем условием, что все коэффициенты целевой функции, в канонической форме для базиса, неотрицательны. Движение к $z_{\min}$ обеспечивается последовательным исключением отрицательных переменных из базисных решений. Их отсутствие делает базисное решение допустимым и, при сохранении указанного условия, оптимальным.

4.1 Алгоритм с корректным видом базиса

Неважно, из-за чего сложилась ситуация готовности для работы двойственного симплекс-метода. Она определена двумя признаками: (1) нет отрицательных коэффициентов целевой функции в канонической форме для базиса и (2) соответствующее базисное решение не является допустимым (содержит отрицательные значения переменных). Чтобы легче обнаружить второй признак, вхождения базисных переменных (x^B) в ограничения делают всегда с коэффициентом $+1$. Это так называемый корректный вид базиса. Чтобы его с самого начала иметь, возможное появление коэффициента -1 устраняют предварительным умножением соответствующей строки ограничений на -1. Следовательно, используют известную каноническую форму задачи для базиса,

$$\begin{bmatrix} I & | & A' \\ -- & | & -- \\ O^T & | & c'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^B \\ --- \\ x^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ --- \\ z - z_0 \end{bmatrix}, \qquad c' \geq 0,$$

с базисным решением БР $= (x^B = b', x^F = 0)$. Тем самым проверка второго признака сведена к ответу на вопрос, нет ли отрицательных элементов в векторе b'. С этого начинается любой шаг двойственного симплекс-метода. В целом же каждый его шаг распадается на следующие 4 действия:

(1) Проверяют элементы b'. Если среди них нет отрицательных, то $z_{\min} = x_0$ найден со значением БДР $= (x^B = b', x^F = 0)$. Если есть несколько отрицательных элементов, то выбирают ту строку ограничений, ее номер k, куда входит наиболее отрицательный элемент b'_k вектора b'. Тем самым найдена одна базисная переменная $x_r, r = NB(k)$, которая

должна быть далее выведена из состава x^B из-за того что $x_r = b'_k < 0$.

Далее возникает вопрос, какую из небазисных, свободных переменных в составе x^F ввести в базис путем ее увеличения от нулевого значения взамен выводимой переменной x_r? Допустим, этот вопрос решен, и выбрана свободная переменная x_s. Она предназначена для исключения из всех уравнений канонической формы, кроме $k-$го уравнения, которое должно быть предварительно нормировано делением на ведущий элемент $a'_{ks} < 0$. Благодаря такой нормировке, сохраняют корректность вида базиса и устраняют один отрицательный элемент в столбце b'. Исключение же в строке для целевой функции важно сделать таким, чтобы сохранить первый из указанных признаков для применимости и в последующем двойственного симплекс-метода. Чтобы прояснить это, запишем формулу пересчета $j-$го коэффициента целевой функции при исключении:

$$c_j^+ = c'_j - c'_s a''_{kj}.$$

Здесь a''_{kj} есть $j-$й коэффициент $k-$й строки после ее нормировки:

$$a''_{kj} = a'_{kj}/a'_{ks}.$$

Первый признак требует $c_j^+ \geq 0$ при исходных $c'_j \geq 0$ и $c'_s \geq 0$. Ясно, что только для тех столбцов j существует опасность нарушить требование $c_j^+ \geq 0$, для которых $a''_{kj} > 0$. Так как $c_j^+ \geq 0$ равносильно неравенству

$$\frac{c'_j}{\mid a'_{kj} \mid} \geq \frac{c'_s}{\mid a'_{ks} \mid},$$

то выбор s, номера ведущей переменной x_s, оказывается подчинен условию

$$\frac{c'_s}{\mid a'_{ks} \mid} = \min_{j:\ a'_{kj}<0} \frac{c'_j}{\mid a'_{kj} \mid}\ .$$

Таким образом, выполняют следующие действия:

(2) В $k-$й (ведущей) строке ищут только среди свободных переменных отрицательные коэффициенты a'_{kj}. Если их нет, то не существует базисного допустимого решения (выход из алгоритма с этим сообщением).

Если таковые есть, то среди них выбирают один, a'_{ks}, его номер s, для которого выполнено только что указанное условие. Элемент a'_{ks} объявляют ведущим.

(3) Нормируют делением на a'_{ks} $k-$ю строку.

(4) Вычитают $k-$ю строку, умноженную на элемент a'_{is} матрицы задачи, из каждой $i-$й строки $(i \neq k)$.

Отсюда видно, что двойственный симплекс-метод равносилен исключению переменных по схеме Гаусса-Жордана в действиях (3),(4) при выборе на каждом шаге ведущего элемента по специальным правилам в действиях (1),(2).

Пример 4.1.1. Найти неотрицательное решение $x_1, x_2 \geq 0$ задачи

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 120 & & \\ 3x_1 & + & 9x_2 & \leq & 270 & & \\ -2x_1 & - & 4x_2 & = & z & \to & \min \end{array}$$

двойственным симплекс-методом.

Прежде всего запишем задачу в исходном стандартном виде с канонической формой для базиса:

2	3	1	0	120
3	9	0	1	270
-2	-4	0	0	0

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 120 \\ 270 \end{pmatrix}$$
$$c^T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Ax = b,$$
$$c^T x = z.$$

Эта форма отвечает базисному решению БР $= (0, 0, 120, 270) =$ БДР, $\quad z = 0$, которое изображается точкой $(0, 0)$ на плоскости oxy. Всего же здесь имеется $C_4^2 = 6$ вариантов выбора двух линейно независимых векторов-столбцов ограничений из четырех : (1,2), (1,3),
(1,4), (2,3), (2,4), (3,4).

Вариант (3,4) записан выше. Запишем и все остальные варианты, чтобы иметь полную картину базисных решений, с их изображением на плоскости.

Вариант (1,2)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 2/9 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/9 \end{pmatrix}, \quad b' = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{|cccc|c|} \hline 1 & 0 & 1 & -1/3 & 30 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/9 & 20 \\ \hline 0 & 0 & 2/3 & 2/9 & 140 \\ \hline \end{array}$$

БР$=(30, 20, 0, 0)=$БДР,
$-140 = z_{\min}$,
точка $(30, 20)$.

Вариант (1,3)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -3 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad b' = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 90 \\ -60 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{|cccc|c|} \hline 1 & 3 & 0 & 1/3 & 90 \\ 0 & -3 & 1 & -2/3 & -60 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 2/3 & 180 \\ \hline \end{array}$$

БР$=(90, 0, -60, 0) \neq$ БДР,
$-180 = z < z_{\min}$,
точка $(90, 0)$.

Вариант (1,4)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b' = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{|cccc|c|} \hline 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 60 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 1 & 90 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 120 \\ \hline \end{array}$$

БР$=(60, 0, 0, 90)=$БДР,
$-120 = z > z_{\min}$,
точка $(60, 0)$.

Вариант (2,3)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/9 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 & 1/9 \\ 1 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}, \quad b' = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{|cccc|c|} \hline 1/3 & 1 & 0 & 1/9 & 30 \\ 1 & 0 & 1 & -1/3 & 30 \\ \hline -2/3 & 0 & 0 & 4/9 & 120 \\ \hline \end{array}$$

БР$=(0, 30, 30, 0)=$БДР,
$-120 = z > z_{\min}$,
точка $(0, 30)$.

Вариант (2,4)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 1/3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b' = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 40 \\ -90 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{|cccc|r|} \hline 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 40 \\ -3 & 0 & -3 & 1 & -90 \\ \hline 2/3 & 0 & 4/3 & 0 & 160 \\ \hline \end{array}$$

БР$=(0, 40, 0, -90)$,
$-160 = z < z_{\min}$,
точка $(0, 40)$.

Чтобы применить двойственный симплекс-метод, нужно стартовать из области $z < z_{\min}$, то есть из любого БР $\neq$ БДР. В данном примере для этого годятся две точки: $(90, 0)$ или $(0, 40.)$ Возьмем, например, в качестве стартового вариант $(1, 3)$:

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} A \\ \begin{array}{|cccc|r|} \hline 1 & 3 & 0 & 1/3 & 90 \\ 0 & -3 & 1 & -2/3 & -60 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 2/3 & 180 \\ \hline \end{array} \\ \quad\uparrow \end{array} \qquad \begin{array}{c} NB \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ 3 \\ \hline \end{array} \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{c} NF \\ \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ 4 \\ \hline \end{array} \\ \\ \end{array}.$$

Шаг 1.

(1) $k = 2$. Выбор второй строки, $k = 2$, в качестве ведущей показан выше, слева от таблицы стрелкой.

(2) $\min\limits_{l=1,2;\ j=NF(l)} \left(\dfrac{2}{\mid -3 \mid}, \dfrac{2/3}{\mid -2/3 \mid} \right) = \dfrac{2}{3}; \quad l = 1; \quad s = 2.$

Выбор второго столбца, $s = 2$, в качестве ведущего показан выше, снизу от таблицы стрелкой.

(3) после нормировки:

A

1	3	0	1/3	90
0	1	−1/3	2/9	20
0	2	0	2/3	180

(4) после вычитаний:

A, NB, NF

					NB	NF
1	0	1	−1/3	30	1	3
0	1	−1/3	2/9	20	2	4
0	0	2/3	2/9	140		

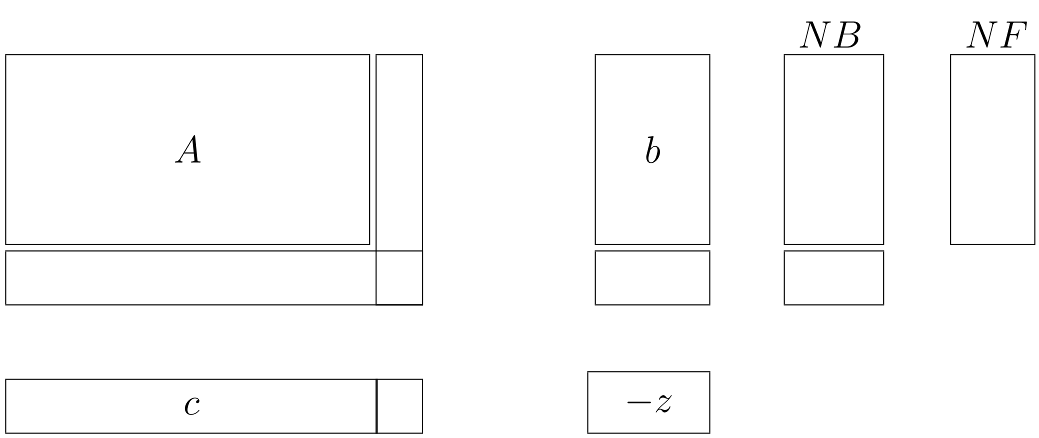
Шаг 2.

(1) Решение найдено: БР $= (30, 20, 0, 0) =$ БДР, $-140 = z_{\min}$

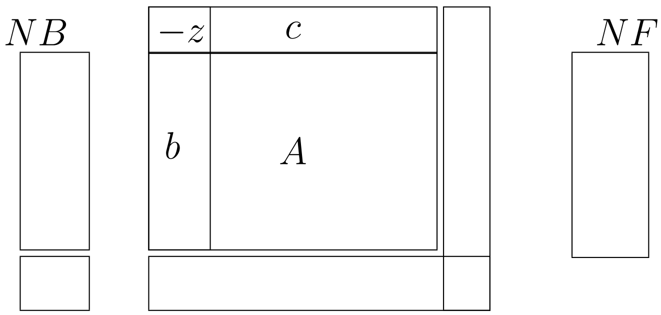
Пример 4.1.2. Будем считать, что на задачу примера 4.1.1 наложено дополнительное ограничение

$$5x_1 + 3x_2 \le 150.$$

Можно решить всю задачу, применяя обычный симплекс-метод, но можно сэкономить время, если продолжить решение примера 4.1.1 с того места, где оно было найдено, добавив еще одно ограничение. Схема добавления может быть такой:



Однако технически это может оказаться неудобным, если $(A, b, c, -z)$ хранятся в едином массиве. В этом случае более удобным представляется или раздельное наименование массивов, или другое расположение этих же и добавленных данных в едином массиве следующего вида:



Если язык программирования допускает для массива нумерацию с нуля строк и столбцов, то нулевую строку этого массива удобно отвести для хранения $(-z, c)$, а нулевой столбец - для b. С учетом этого перепишем результат примера 4.1.1 и еще снизу и справа к таблице добавим строку и столбец для дополнительного ограничения и дополнительной переменной x_5 :

Шаг 0. Ввод дополнительной строки ограничений:

NB	140	0	0	2/3	2/9	0	NF
1	30	1	0	1	$-1/3$	0	3
2	20	0	1	$-1/3$	2/9	0	4
(5)	150	5	3	0	0	1	

Здесь эта нижняя строка еще не соответствует каноническому виду для базиса, поэтому в NB номер 5 пока проставлен в скобках. Чтобы этот вид узаконить, нужно провести исключение прежних базисных переменных x_1 и x_2 по добавленной строке. Здесь для этого делают два предварительных вычитания из введенной строки: (1) вычитают первую строку, умноженную на 5, и (2) вычитают вторую строку, умноженную на 3. В результате получают:

$$
\begin{array}{cc}
 & NB \\
 & \\
 & 1 \\
 & 2 \\
\rightarrow & 5
\end{array}
\quad
\begin{array}{|r|rrrrr|}
\hline
140 & 0 & 0 & 2/3 & 2/9 & 0 \\
\hline
30 & 1 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\
20 & 0 & 1 & -1/3 & 2/9 & 0 \\
-60 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NF \\
\\
3 \\
4 \\
\\
\end{array}
$$

$$
\uparrow
$$

$$
\text{БД} = (30, 20, 0, 0, -60) \neq \text{БДР}, \quad -140 = z.
$$

Шаг 1. (1) $k = 3$

$$
(\mathbf{2}) \quad \min\left(\frac{2/3}{|-4|}\right) = \frac{1}{6}; \quad l = 1,\ s = NF(l) = 3.
$$

(3) после нормировки:

$$
\begin{array}{c}
\\
\\
\\
\rightarrow
\end{array}
\begin{array}{|r|rrrrr|}
\hline
140 & 0 & 0 & 2/3 & 2/9 & 0 \\
\hline
30 & 1 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\
20 & 0 & 1 & -1/3 & 2/9 & 0 \\
15 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\uparrow
$$

(4) после вычитаний и обмена $NB(k) \longleftrightarrow NF(l)$:

$$
\begin{array}{c}
NB \\
\\
1 \\
2 \\
3
\end{array}
\quad
\begin{array}{|r|rrrrr|}
\hline
130 & 0 & 0 & 0 & 7/18 & 1/6 \\
\hline
15 & 1 & 0 & 0 & -1/12 & 1/4 \\
25 & 0 & 1 & 0 & 5/36 & -1/12 \\
15 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NF \\
\\
5 \\
4 \\
\\
\end{array}
$$

$$
\text{БД} = (15, 25, 15, 0, 0) = \text{БДР}, \quad -130 = z_{\min}.
$$

В геометрической интерпретации на плоскости Ox_1x_2 здесь было движение от точки $(30, 20)$ в области $z < z_{\min}$ к точке $(15, 25)$. Что эта точка есть решение задачи, распознается в начале шага 2 по отсутствию отрицательных значений среди $(15, 25, 15)$ в нулевом столбце матрицы. Решение найдено за один шаг, поскольку здесь дополнительное ограничение было наложено, когда запись задачи была получена в форме найденного решения примера 4.1.1. Это ограничение можно наложить на другую запись задачи, где коэффициенты целевой функции неотрицательны, и тогда решение двойственным симплекс-методом может занять большее число шагов.

Чтобы показать это, наложим дополнительные ограничения на вариант $(2, 4)$ примера 4.1.1:

Шаг 0. Ввод дополнительного ограничения:

NB	160	2/3	0	4/3	0	0	NF
2	40	2/3	1	1/3	0	0	1
4	−90	−3	0	−3	1	0	3
(5)	150	5	3	0	0	1	

Обеспечивая готовность к двойственному симплекс-методу, исключаем из введенного ограничения переменные x_2 и x_4, являющиеся базисным перед началом шага 0. Для этого вычитаем из введенной строки k−ю строку, умноженную на подходящий коэффициент; сначала $k = 1$, то есть исключаем базисную переменную x_2, так как $NB(k) = NB(1) = 2$, и подходящий коэффициент, определяемый этим номером в добавленной строке, есть 3. Получаем после вычитания:

	NB	160	2/3	0	4/3	0	0	NF
	2	40	2/3	1	1/3	0	0	1
→	4	−90	−3	0	−3	1	0	3
	5	30	3	0	−1	0	1	
			↑					

Затем $k = 2$, и нужно исключить базисную переменную x_4, так как $NB(k) = NB(2) = 4$. Однако из-за того, что коэффициент в последней строке, определяемый этим номером, равен 0, вычитание не требуется. (Проверки на нуль такого рода желательны в программе, чтобы устранить ненужные затраты времени). Готовность к двойственному симплекс-методу обеспечена:

$$\text{БД} = (0, 40, 0, -90, 30) \neq \text{БДР}, \qquad -160 = z < z_{\min}\ .$$

Шаг 1.

(1) k=2.

(2) В $k-$й строке только среди свободных переменных ищут наличие отрицательных коэффициентов. NF указывает, что надо проверить 1 - й и 3 - й элементы этой строки. Они оба оказались отрицательны. Среди отрицательных ищут тот, который обеспечивает

$$\min_{j=1,3}\left(\frac{c'_j}{\mid a'_{kj}\mid}\right) = \min\left(\frac{2/3}{\mid -3\mid}, \frac{4/3}{\mid -3\mid}\right) = \min\left(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right) = \frac{2}{9}.$$

Минимум обеспечен первым элементом, то есть $l = 1,\ j = NB(l) = s = 1$.

Таким образом, действием (1) найдена ведущая строка, а действием (2) найден ведущий столбец, что выше в таблице указано стрелками. Ведущий элемент для последующего исключения по методу Гаусса-Жордана находится на их пересечении и здесь равен -3.

(3) после нормировки:

$$\begin{array}{c|rrrrrr|}
\cline{2-7}
 & 160 & 2/3 & 0 & 4/3 & 0 & 0 \\
\cline{2-7}
 & 40 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \\
\rightarrow & 30 & 1 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\
 & 30 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
\cline{2-7}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{r}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}$$

(4) после вычитаний и обмена $NB(k) \longleftrightarrow NF(l)$:

$$\begin{array}{cc|r|rrrrr|cc}
 & NB & 140 & 0 & 0 & 2/3 & 2/9 & 0 & & NF \\
\cline{3-8}
 & \boxed{2} & 20 & 0 & 1 & -1/3 & 2/9 & 0 & & \boxed{4} \\
 & \boxed{1} & 30 & 1 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & & \boxed{3} \\
\rightarrow & \boxed{5} & -60 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & & \\
\multicolumn{2}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{2}{c}{}
\end{array}$$

$$\text{БР} = (30, 20, 0, 0, -60) \neq \text{БДР}, \quad -140 = z < z_{\min}.$$

Шаг 2.

(1) k=3.

(2) $l = 2, \quad j = NF(l) = 3, \quad s = 3.$

(3) после нормировки:

$$\begin{array}{r|r|rrrrr|}
\cline{2-7}
 & 140 & 0 & 0 & 2/3 & 2/9 & 0 \\
\cline{2-7}
 & 20 & 0 & 1 & -1/3 & 2/9 & 0 \\
 & 30 & 1 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\
\to & 15 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 \\
\cline{2-7}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{r}{} & & & \uparrow & & \multicolumn{1}{r}{}
\end{array}$$

(4) после вычитаний и обмена $NB(k) \longleftrightarrow NF(l)$:

$$\begin{array}{c} NB \\ \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \end{array}} \end{array} \quad
\begin{array}{|r|rrrrr|}
\hline
130 & 0 & 0 & 0 & 7/18 & 1/6 \\
\hline
25 & 0 & 1 & 0 & 5/36 & -1/12 \\
15 & 1 & 0 & 0 & -1/12 & 1/4 \\
15 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 \\
\hline
\end{array} \quad
\begin{array}{c} NF \\ \boxed{\begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array}} \\ \end{array}$$

$$\text{БР} = (15, 25, 15, 0, 0) = \text{БДР}, \quad -130 = z_{\min}.$$

Шаг 3. **(1)** решение найдено.

В геометрической интерпретации здесь было движение за два шага по точкам: $(0, 40) \to (30, 20) \to (15, 25)$.

Пример 4.1.3. Для $x_1, x_2 \geq 0$ решить задачу (ср. с примером 3.5.2)

$$\begin{array}{rcrcrcl}
2x_1 & & & \geq & 3 & & \\
 & & x_2 & \geq & 1 & & \\
-2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 & & \\
2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 21 & & \\
-2x_1 & - & 5x_2 & = & z & \to & \min
\end{array}$$

и затем наложить дополнительное ограничение

$$x_1 + x_2 \leq 6.$$

Шаг 0.

$$
\begin{array}{cc|c|cccccc|c}
 & NB & 0 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & NF \\ \hline
 & 3 & 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
\rightarrow & 5 & 3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 & 6 & 21 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline
 & & & & \uparrow & & & & &
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0,0,-3,-1,3,21) \neq \text{БДР}, \quad 0 = z.$$

Сначала решаем задачу обычным симплекс-методом, как в п. 3.5.

Шаг 1.

(1) s=2, l=2.

(2) $\min(\infty, \infty, 3/3, 21/3) = 1,\ k = 3.$

(3) после нормировки:

$$
\begin{array}{|c|cccccc|}
\hline
0 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & -2/3 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\
21 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}
$$

(4) после вычитаний и обмена $NB(k) \longleftrightarrow NF(l)$:

$$
\begin{array}{cc|c|cccccc|c}
 & NB & 5 & -16/3 & 0 & 0 & 0 & 5/3 & 0 & NF \\ \hline
 & 3 & 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 4 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & -1 & -1/3 & 0 & 5 \\
 & 2 & 1 & -2/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & \\
\rightarrow & 6 & 18 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \\ \hline
 & & & \uparrow & & & & & &
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0,1,-3,0,0,18) \neq \text{БДР}, \quad -5 = z.$$

Шаг 2.

(1) s=1, l=1.

(2) $\min(\infty, \infty, \infty, 18/4) = 9/2,\ k = 4.$

(3) после нормировки:

$$
\begin{array}{r|r|rrrrrr}
\cline{2-8}
 & 5 & -16/3 & 0 & 0 & 0 & 5/3 & 0 \\
\cline{2-8}
 & 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & -1 & -1/3 & 0 \\
 & 1 & -2/3 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\
\rightarrow & 9/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\
\cline{2-8}
\multicolumn{2}{c}{} & \uparrow & & & & &
\end{array}
$$

(4) после вычитаний и обмена $NB(k) \longleftrightarrow NF(l)$:

$$
\begin{array}{c|r|rrrrrr|c}
NB & 29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 4/3 & NF \\
\hline
3 & -6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 6 \\
4 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/6 & -1/6 & 5 \\
2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & \\
1 & 9/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 &
\end{array}
$$

$$
\text{БР} = (\frac{9}{2}, 4, 6, 3, 0, 0) = \text{БДР}, \quad -29 = z_{\min}.
$$

Теперь накладываем дополнительное ограничение и одновременно в полученном только что решении обеспечиваем корректный вид базиса (умножаем на -1 первые две строки). Нумерацию шагов начинаем заново, переходя к применению двойственного симплекс-метода:

Шаг 0.

$$
\begin{array}{c|r|rrrrrr||r|c}
NB & 29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 4/3 & 0 & NF \\
\hline
3 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 6 \\
4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & 0 & 5 \\
2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & \\
1 & 9/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 & \\
\hline
(7) & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Исключаем из добавленной строки ограничений те переменные, которые до этого были в списке базисных, $(3,4,2,1)$, и которые вошли в эту строку не с нулевыми коэффициентами (т.е. 1 и 2). Для этого применяем схему Гаусса исключения по добавленной строке, после чего имеем:

$$
\begin{array}{cc}
 & NB \\
 & \\
 & 3 \\
 & 4 \\
 & 2 \\
 & 1 \\
\rightarrow & 7 \\
 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{|r|rrrrrrr|}
\hline
29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 4/3 & 0 \\
\hline
6 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & 0 \\
4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 \\
9/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\
-5/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & -5/12 & 1 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{} & & & & & & \uparrow &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NF \\
6 \\
5
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (\frac{9}{2}, 4, 6, 3, 0, 0, -\frac{5}{2}) \neq \text{БДР}, \quad -29 = z.$$

С этого момента стартует двойственный симплекс-метод.

Шаг 1.

(1) k=5. Переменную x_7, $NB(5) = 7$, будем выводить из базиса, так как $x_7 = -5/2 < 0$.

(2) s=6, l=1, так как

$$\min_{l,j=NF(l):a'_{kj}<0} \left(\frac{c'_j}{\mid a'_{kj} \mid} \right) = \min_{j=6} \left(\frac{4/3}{\mid -5/12 \mid} \right) = \frac{16}{5} \ .$$

(3) после нормировки:

$$
\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
\rightarrow \\

\end{array}
\begin{array}{|r|rrrrrrr|}
\hline
29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 4/3 & 0 \\
\hline
6 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & 0 \\
4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 \\
9/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1 & -12/5 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{} & & & & & & \uparrow &
\end{array}
$$

(4) после вычитаний и обмена $NB(k) \longleftrightarrow NF(l)$:

$$
\begin{array}{c}
NB \\
\boxed{\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{array}}
\end{array}
\quad
\begin{array}{|r|rrrrrrr|}
\hline
21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 16/5 \\
\hline
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/5 & 0 & 6/5 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 2/5 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 2/5 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 3/5 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1 & -12/5 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NF \\
\boxed{\begin{array}{c} 7 \\ 5 \end{array}}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (3,3,3,2,0,6,0) = \text{БДР}, \quad -21 = z_{\min}.$$

Покажем особенности, когда дополнительно наложенное ограничение имеет вид -".

Пример 4.1.4. Решить задачу предыдущего примера 4.1.3 и затем наложить дополнительное ограничение

$$x_1 + x_2 = 6 \ .$$

Продолжим решение после завершения шага 2 и для этого ограничения введем искусственную переменную x_7 и искусственную целевую функцию $w = x_7$. С этого момента нумерацию шагов начнем заново. Запись симплекс-таблиц будем вести в форме, принятой здесь везде, кроме примеров 4.1.2 и 4.1.3. Кроме того, обеспечим корректный вид базиса (алгоритм без этого вида базиса изложен ниже, в п. 4.2).

Шаг 0.

								NB	NF
0	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	6	3	5
0	0	0	1	$1/6$	$1/6$	0	3	4	6
0	1	0	0	$1/6$	$1/6$	0	4	(2)	
1	0	0	0	$-1/4$	$1/4$	0	$9/2$	(1)	
1	1	0	0	0	0	1	6	(7)	
0	0	0	0	$1/3$	$4/3$	0	29		
0	0	0	0	0	0	1	0		

Из-за введения третьей снизу строки (пятое ограничение) переменные $x_2,\ x_1$ перестали быть базисными. Также не является пока базисной и искусственная переменная x_7 по отношению к искусственной целевой функции (последняя строка). Легко восстановить для них вхождение в число базисных: нужно исключить переменные $x_2,\ x_1$ из пятого ограничения и переменную x_7 из последней строки путем очевидных вычитаний строк. Получим:

									NB		NF
	0	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	6	3	1	5
	0	0	0	1	$1/6$	$1/6$	0	3	4	2	6
	0	1	0	0	$1/6$	$1/6$	0	4	2		
	1	0	0	0	$-1/4$	$1/4$	0	$9/2$	1		
$\rightarrow$	0	0	0	0	$1/12$	$-5/12$	1	$-5/2$	7		
	0	0	0	0	$1/3$	$4/3$	0	29			
	0	0	0	0	$-1/12$	$5/12$	0	$5/2$			
					$\uparrow$						

$$\text{БР} = (9/2, 4, 6, 3, 0, 0, -5/2) \neq \text{БДР}, \quad z = -29,\ w = -5/2.$$

Этап I. Обычный симплекс-метод для целевой функции w, поскольку в нижней строке имеется отрицательный коэффициент $-1/12$.

Шаг 1. **(1)** $l = 1,\ s = 5.$

$$(\mathbf{2}) \min\left(\infty, \frac{3}{1/6}, \frac{4}{1/6}, \infty, -\infty\right).$$

Согласно табл. 3.4.1, ∞"означает "запрет". Если всё же ведущую строку выбрать по этому признаку, в данном примере $k = 5$, то это будет означать, что свободная переменная x_5 теперь станет базисной, но с отрицательным значением (это и есть "запрет "выхода из допустимой области). Однако x_5, становясь отрицательной, благодаря отрицательному коэффициенту $-1/12$, увеличит искусственную целевую функцию от её значения $-5/2$. Это и нужно, так как этап I должен завершиться значением $w = 0$. Поэтому выбор $k = 5$ оправдан и фактически не должен рассматриваться как запретный. ("Запрет"означает лишь выход из допустимой области, куда всегда снова можно попасть с применением двойственного симплекс-метода).

(3) после нормировки :

	0	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	6
	0	0	0	1	$1/6$	$1/6$	0	3
	0	1	0	0	$1/6$	$1/6$	0	4
	1	0	0	0	$-1/4$	$1/4$	0	$9/2$
$\rightarrow$	0	0	0	0	1	-5	12	-30
	0	0	0	0	$1/3$	$4/3$	0	29
	0	0	0	0	$-1/12$	$5/12$	0	$5/2$
					$\uparrow$			

(4) после вычитаний :

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr|r|cc|c|cc|c|}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{7}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & & \multicolumn{1}{c}{NB} & \multicolumn{1}{c}{} & & \multicolumn{2}{c}{NF} \\
\cline{2-9} \cline{12-12} \cline{15-15}
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 6 & -9 & & \multicolumn{1}{|c|}{3} & & 1 & \multicolumn{1}{|c|}{7} \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 8 & & \multicolumn{1}{|c|}{4} & & 2 & \multicolumn{1}{|c|}{6} \\
\cline{15-15}
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 9 & & \multicolumn{1}{|c|}{2} & & & \multicolumn{1}{c}{} \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & & \multicolumn{1}{|c|}{1} & & & \multicolumn{1}{c}{} \\
\rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 12 & -30 & & \multicolumn{1}{|c|}{5} & & & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-9} \cline{12-12}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 39 & & \multicolumn{1}{c}{} & & & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-9}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \multicolumn{1}{c}{} & & & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-9}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & \multicolumn{1}{c}{} & & \multicolumn{1}{c}{} & & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (-3, 9, -9, 8, -30, 0, 0) \neq \text{БДР}, \quad z = -39, \ w = 0.$$

Этап I успешно завершен. Нижняя строка, седьмой столбец и $NF(1) = 7$ могут быть вычеркнуты. После этого вид оставшейся нижней строки коэффициентов $(0, 0, 0, 0, 0, 3)$ и вид столбца свободных членов $(-9, 8, 9, -3, -30)$ говорят, что далее должен быть применён двойственный симплекс-метод по отношению к целевой функции z.

Этап II. Двойственный симплекс-метод с корректным видом базиса (см. п. 4.1).

Шаг 2.

(1) $k = 5$.

(2) $s = 6$.

(3) после нормировки :

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \\ \rightarrow \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -9 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 8 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1 & 6 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 39 \\
\hline
\multicolumn{5}{c}{} & \uparrow & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
$$

(4) после вычитаний :

$$
\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & -2/5 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1 & 6 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 21 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \\
\hline
\end{array}
\\ \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
(7) \\ 5 \\
\hline
\end{array}
\\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
\text{БР} = (3, 3, 3, 2, 0, 6) = \text{БДР} = \text{БОР}, \quad z_{\min} = -21.
$$

(БОР - базисное оптимальное решение).

Геометрически, на плоскости ox_1x_2, здесь после наложения ограничения типа равенства $x_1 + x_2 = 6$ произошло движение из точки $(9/2, 4)$, которая была оптимальной до наложения ограничения, в точку $(-3, 9)$ пересечения линий $2x_1 + 3x_2 = 21$ и $x_1 + x_2 = 6$ за пределы допустимой области (шаг 1). Следующее движение (шаг 2) произошло в точку $(3, 3)$, доставляющую минимум функции z.

Замечание 4.1.1. Из сравнения примеров 4.1.3 и 4.1.4 видно, что ограничение типа -"требует введения искусственной переменной и целевой функции.

4.2 Алгоритм без корректного вида базиса

Выше двойственный симплекс-метод изложен для ситуаций, когда все неравенства в ограничениях задачи заранее приведены к виду "меньше или равно."Тогда добавленные переменные входят с коэффициентами +1, и следовательно, эти, а также и все последующие базисные переменные имеют в качестве векторов ограничений столбцы единичной матрицы. Такой базис (в виде столбцов единичной матрицы) условно называют корректным, чтобы отличить его от других ситуаций, когда одни базисные переменные входят в ограничения с коэффициентом +1, а другие с коэффициентами -1. Очевидно, эти ситуации соответствуют включению ограничений как вида "меньше или равно", так и "больше или равно"в исходную запись задачи. Изложение двойственного симплекс-метода для этого варианта включим в следующий пример, который иллюстрирует также тип условий, при которых решение удобно начинать искать именно двойственным симплекс-методом: начало координат, обычно служащее стартовой точкой, лежит в полупространстве, где $z < z_{\min}$.

Замечание 4.2.1. Пребывание текущего базисного решения в полупространстве $z < z_{\min}$ обнаруживают по условию неотрицательности коэффициентов при небазисных (свободных) переменных в строке целевой функции и наличию среди них положительных. Лишь это условие разрешает применять двойственный симплекс-метод.

Пример 4.2.1. Для $x_1, x_2 \geq 0$ решить задачу

$$\begin{array}{rcrcll} 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 & \\ 2x_1 & + & 6x_2 & \geq & 9 & \\ 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 & \\ x_1 & + & 4x_2 & = & z & \to \min \end{array}$$

Шаг 0.

$$
\begin{array}{c|ccccc|c|cc|cc}
\multicolumn{1}{c}{} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b' & \multicolumn{2}{c}{NB} & \multicolumn{2}{c}{NF} \\
\cline{2-7}
 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 6 & 1 & \boxed{3} & 1 & \boxed{1} \\
\rightarrow & 2 & 6 & 0 & -1 & 0 & 9 & 2 & \boxed{4} & 2 & \boxed{2} \\
 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 7 & 3 & \boxed{5} & & \\
\cline{2-7}
 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\cline{2-7}
\multicolumn{1}{c}{} & \uparrow & & & & & \multicolumn{1}{c}{} & & & &
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0, 0, -6, -9, 7) \neq \text{БДР}, \quad 0 = z.$$

Разрешено применять двойственный симплекс-метод.

Шаг 1.

(1) Смотрят через $NB(i)$ на столбец b' и находят те строки, где $a'[i, NB(i)] * b'(i) < 0$. Из них выбирают номер k строки, в которой это отрицательное число - наименьшее. Если таких строк не найдено, то задача решена, конец. Здесь $k = 2$.

(2) Смотрят через $NF(i)$ на те коэффициенты для свободных переменных в $k-$й строке, которые положительны, если $a'[k, NB(k)] = -1$, и отрицательны, если $a'[k, NB(k)] = +1$. Среди них выбирают такой, который доставляет

$$\min_j \left(\frac{c'_j}{\mid a'_{kj} \mid} \right),$$

в данном примере

$$\min \left(\frac{1}{\mid 2 \mid}, \frac{4}{\mid 6 \mid} \right) = \frac{1}{2}.$$

Фиксируют номера $i = l$ и $s = NF(l)$, при которых этот минимум найден, в данном примере $l = 1, \quad s = 1$.

(3) После нормировки k-й строки делением ее на ведущий элемент

a'_{ks}, в данном примере $a'_{ks} = 2$, находят:

$$\begin{array}{r}
\\ \rightarrow \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 6 \\
1 & 3 & 0 & -1/2 & 0 & 9/2 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\
\hline
1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\uparrow & & & & & \\
\end{array}$$

(4) После вычитаний k-й строки, умножаемой на a'_{is}, из всех других строк $(i \neq k)$ и после замены $NB(k) \leftrightarrow NF(l)$ находят:

$$\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
0 & -3 & -1 & 1 & 0 & -3 \\
1 & 3 & 0 & -1/2 & 0 & 9/2 \\
0 & -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -9/2 \\
\hline
 & \uparrow & & & & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{r|c|}
\cline{2-2}
1 & 3 \\
2 & 1 \\
3 & 5 \\
\cline{2-2}
\end{array} \\ \\ \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{r|c|}
\cline{2-2}
1 & 4 \\
2 & 2 \\
\cline{2-2}
\end{array} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

$$\text{БР} = (9/2, 0, 3, 0, -2) \neq \text{БДР}, \quad 9/2 = z.$$

Шаг 2.

(1) $a'[3, NB(3)] * b'(3) < 0, \quad \Rightarrow k = 3.$

(2) $a'[3, NB(3)] = +1;$ один отрицательный коэффициент $-4 \Rightarrow l = 2,\ s = 2.$

(3) После нормировки:

$$\begin{array}{r}
\\ \\ \rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
0 & -3 & -1 & 1 & 0 & -3 \\
1 & 3 & 0 & -1/2 & 0 & 9/2 \\
0 & 1 & 0 & -1/4 & -1/4 & 1/2 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -9/2 \\
\hline
 & \uparrow & & & & \\
\end{array}$$

(4) После вычитаний:

$$
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
0 & 0 & -1 & 1/4 & -3/4 & -3/2 \\
1 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 3 \\
0 & 1 & 0 & -1/4 & -1/4 & 1/2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & -5 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & NB \\
1 & \boxed{3} \\
2 & \boxed{1} \\
3 & \boxed{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & NF \\
1 & \boxed{4} \\
2 & \boxed{5} \\
 &
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (3, 1/2, 3/2, 0, 0) = \text{БОР}, \quad 5 = z = z_{\min}.$$

Шаг3.

(1) Все $\quad a'[i, NB(i)] * b'(i) \geq 0, \quad \Rightarrow$ конец.

Замечание 4.2.2. Искусственные переменные с искусственной целевой функцией, как в п. 3.6, и двойственный симплекс-метод, на первый взгляд, несовместимы. Действительно, если такие переменные ввести для всех ограничений типа " $\geq$ " и $-$", то все базисные решения перейдут в категорию БДР (базисных допустимых решений). В результате исчезнут условия применимости двойственного симплекс-метода, который работает лишь в области, где БР $\neq$ БДР. (См. подробнее п. 4.3).

Это замечание иллюстрируем следующей задачей, где в первом примере ограничение типа -"вводим в решение не с помощью искусственной переменой x_6 с искусственной целевой функцией $w = x_6$, а с заменой $-$" на " $\leq$ " и одновременно " $\geq$ " (практически такой приём может оказаться чувствительным к ошибкам вычислений).

Пример 4.2.2. Для $\quad x_1, x_2 \geq 0$ решить задачу

$$
\begin{array}{rcrcl}
2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\
2x_1 & + & 6x_2 & \geq & 9 \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
2x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\
x_1 & + & 2x_2 & = & z \;\rightarrow\; \min
\end{array}
$$

Шаг 0.

$$
\begin{array}{c}
\\ \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|ccccccc|c|}
\hline
2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
2 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & \uparrow & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|}
\multicolumn{2}{c}{NB} \\
\cline{2-2}
1 & 3 \\
2 & 4 \\
3 & 5 \\
4 & 6 \\
5 & 7 \\
\cline{2-2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|}
\multicolumn{2}{c}{NF} \\
\cline{2-2}
1 & 1 \\
2 & 2 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0, 0, -6, -9, 4, 7, -7) \neq \text{БДР}, \quad 0 = z.$$

Разрешено применять двойственный симплекс-метод.

Шаг 1.

(1) $a'[1, NB(1)] * b'(1) = -6 \ < \ 0,$

$a'[2, NB(2)] * b'(2) = -9 \ < \ 0,$

$a'[5, NB(5)] * b'(5) = -7 \ < \ 0, \quad \Rightarrow \quad k = 2.$

(2) $a'[2, NB(2)] = -1$, два положительных коэффициента:

$a'[2, NF(1)] = 2, \quad a'[2, NF(2)] = 6.$

$$\min\left(\frac{1}{|\ 2\ |}, \frac{2}{|\ 6\ |}\right) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow l = 2, \ s = 2.$$

(3) После нормировки:

$$
\begin{array}{c}
\\ \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rcccccc|r|}
\hline
2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
1/3 & 1 & 0 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & \uparrow & & & & & &
\end{array}
$$

(4) После вычитаний:

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \\ \rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rrrrrrr|r|}
\hline
1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\
1/3 & 1 & 0 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\
2/3 & 0 & 0 & 1/6 & 1 & 0 & 0 & 5/2 \\
4/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
4/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & -1 & 4 \\
\hline
1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & & & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|c|}
\multicolumn{2}{c}{NB} \\
\cline{2-2}
1 & 3 \\
2 & 2 \\
3 & 5 \\
4 & 6 \\
5 & 7 \\
\cline{2-2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|c|}
\multicolumn{2}{c}{NF} \\
\cline{2-2}
1 & 1 \\
2 & 4 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0, 3/2, -3/2, 0, 5/2, 4, -4) \neq \text{БДР}, \quad 3 = z.$$

Шаг 2.

(1) $a'[1, NB(1)] * b'(1) = -3/2 \ < \ 0,$

$a'[5, NB(5)] * b'(5) = -4 \ < \ 0, \quad \Rightarrow k = 5.$

(2) $a'[5, NB(5)] = -1, \quad \& \quad a'[5, NF(1)] = 4/3 > 0, \quad \&$

$a'[5, NF(2)] = 1/3 > 0.$

$$\min\left(\frac{1/3}{|\ 4/3\ |}, \frac{1/3}{|\ 1/3\ |}\right) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow l = 1,\ s = 1.$$

(3) После нормировки:

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \\ \rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rrrrrrr|r|}
\hline
1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\
1/3 & 1 & 0 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\
2/3 & 0 & 0 & 1/6 & 1 & 0 & 0 & 5/2 \\
4/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & -3/4 & 3 \\
\hline
1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & & & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
$$

(4) После вычитаний:

$$
\begin{array}{|cccccccc|c|}
\hline
0 & 0 & -1 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & & -3/2 \\
0 & 1 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & 1/4 & & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & -3/4 & & 3 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & & -4 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|}
\multicolumn{2}{c}{NB} \\
\cline{2-2}
1 & 3 \\
2 & 2 \\
3 & 5 \\
4 & 6 \\
5 & 1 \\
\cline{2-2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|}
\multicolumn{2}{c}{NF} \\
\cline{2-2}
1 & 7 \\
2 & 4 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (3, 1/2, 3/2, 0, 1/2, 0, 0) = \text{БОР}, \quad -4 = z_{\min}.$$

Шаг 3.

(1) Все $\quad a'[i, NB(i)] * b(i) \geq 0, \quad \Rightarrow \quad$ конец.

4.3 Алгоритм без корректного вида базиса с искусственными переменными

Теперь для этой же задачи в следующем примере покажем совместимость искусственных переменных и двойственного симплекс-метода.

Пример 4.3.1. Для $x_1, x_2 \geq 0$ решить задачу

$$
\begin{array}{rcrcl}
2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\
2x_1 & + & 6x_2 & \geq & 9 \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
2x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\
x_1 & + & 2x_2 & = & z \;\rightarrow\; \min
\end{array}
$$

Здесь в начальных условиях есть ограничение типа -". Только для него введем искусственную переменную, здесь x_6, и соответственно искусственную целевую функцию $w = x_6$.

Шаг 0.

$$\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6\\
2 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 9\\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\
2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7\\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
\hline
\end{array}$$

Нижняя строка здесь отведена для коэффициентов и значения функции w. Чтобы в начальное БР, применительно к w, вошли переменные (x_3, x_4, x_5, x_6), сделаем подготовительное вычитание, т.е. исключим x_6 из строки (выражения) для w. В результате получим стартовое состояние :

$$\begin{array}{c|cccccc|c|c}
 & & & & & & & & NB \quad NF \\
 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \quad 1\;\boxed{1} \\
 & 2 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 9 & 4 \quad 2\;\boxed{2} \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 5 \\
\rightarrow & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 6 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & \\
\hline
 & \uparrow & & & & & & & \\
\end{array}$$

$$\text{БР} = (0, 0, -6, -9, 4, 7) \neq \text{БДР}, \quad 0 = z,\ 7 = w.$$

По последней строке таблицы распознаем, что для минимизации целевой функции w (этап 1) здесь должен быть применен обычный (недвойственный) симплекс-метод без порождения начального БДР (см. п. 3.5).

Этап 1. **Шаг 1.**

(1) $l = 1,\ s = 1.$

(2) $\min\left(\infty, \infty, \dfrac{4}{1}, \dfrac{7}{2}\right) = 7/2 \quad \Rightarrow\ k = 4.$

(3) после нормировки :

$$\begin{array}{c|cccccc|c|}
\cline{2-8}
 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
 & 2 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 9 \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
\rightarrow & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 7/2 \\
\cline{2-8}
 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{2-8}
 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\
\cline{2-8}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}$$

(4) после вычитаний :

$$\begin{array}{c|cccccc|c|}
\cline{2-8}
 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
\rightarrow & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 7/2 \\
\cline{2-8}
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -7/2 \\
\cline{2-8}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\cline{2-8}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{c|c|}
\cline{2-2}
1 & 6 \\
2 & 2 \\
\cline{2-2}
\end{array}
\end{array}$$

$$\text{БР} = (7/2, 0, 1, -2, 1/2, 0) \neq \text{БДР}, \quad 7/2 = z, \ 0 = w.$$

Этап 1 успешно завершён, искусственная целевая функция (последняя строка) и искусственная переменная x_6 далее не нужны. Однако БР осталось недопустимым. Далее, по второй снизу строке распознаем, что должен быть применён двойственный симплекс-метод (см. замечание 4.2.1 в п. 4.2).

Этап 2. Шаг 2.

(1) $a'[2, NB(2)] * b'(2) = -2 < 0, \quad \Rightarrow \quad k = 2.$

(2) $a'[2, NB(2)] = -1$, один положительный коэффициент: $a'[2, NF(2)] = 4.$

$$\min_j \left(\frac{c'_j}{\mid a'_{kj} \mid} \right) = \min \left(\frac{1}{\mid 4 \mid} \right) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad l = 2,\ s = 2.$$

(3) после нормировки :

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & -1/4 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7/2 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -7/2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \uparrow & & & \end{array}$$

(4) после вычитаний :

$$\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
0 & 0 & -1 & 1/4 & 0 & -3/2 \\
0 & 1 & 0 & -1/4 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\
1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & -4 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} NB \\ \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \\ \hline \end{array} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} NF \\ \begin{array}{c|c|} \cline{2-2} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ \cline{2-2} \end{array} \end{array}$$

$$\text{БР} = (3, 1/2, 3/2, 0, 1/2) = \text{БДР} = \text{БОР}, \quad 4 = z_{\min}.$$

Шаг 3. **(1)** Все $a'[i, NB(i)] * b'(i) \geq 0, \quad \Rightarrow$ конец.

Глава 5

Модифицированный симплекс-метод

Этот вариант называют также улучшенным симплекс-методом, поскольку он уменьшает объем вычислений на каждом шаге. Идея заключается в том, что на каждом шаге каноническую форму задачи для текущего базиса можно получать независимо от других таких форм непосредственно из исходной записи стандартной задачи ЛП. Для этого нужно : (1) сохранять исходную запись задачи на протяжении всей работы метода, это та цена, которую приходится платить за большее быстродействие; (2) использовать так называемые симплекс-множители π - коэффициенты для непосредственного перехода от исходной записи задачи к ее текущей канонической форме для базиса; и (3) использовать обращенный базис B^{-1} - матрицу размера $m \times m$, позволяющую вычислять на каждом шаге ведущий столбец a'_s и обновлять симплекс-множители π.

5.1 Симплекс-множители

Пусть дана исходная запись стандартной задачи ЛП:

$$Ax = b, \qquad x \in R^m, \qquad b \in R^m, \qquad m < n,$$

$$rank(A) = m, \qquad x \geq 0, \qquad c^T x = z \to \min .$$

Текущий шаг симплекс-вычислений определяется каким-нибудь выбором

m элементов вектора x для включения их в набор базисных переменных, x^B, при этом остальные $n-m$ элементов оказываются включены в набор небазисных (свободных) переменных, x^F. Допустим, такой выбор сделан, и оказалось $x = (x^B, x^F)$.

Замечание 5.1.1. Допущение, что именно первые m элементов вектора x вошли в x^B, не ограничительно и сделано лишь для удобства изложения и записей.

Выбор x^B означает, что из n столбцов матрицы ограничений A соответственно выбраны m линейно независимых столбцов, как известно, образующих базис в R^m. Эту совокупность столбцов, упорядоченную согласно вхождению элементов вектора x в x^B, называют "текущий базис"и рассматривают в виде матрицы B. Естественно, что и элементы вектора c коэффициентов целевой функции оказываются разделены на две группы: c_B - для x^B и c_F - для x^F.

При сделанном допущении имеем для исходной записи задачи следующее представление:

$$\begin{bmatrix} B & | & R \\ -- & | & -- \\ c_B^T & | & c_F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^B \\ --- \\ x^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ --- \\ z \to \min \end{bmatrix},$$

где через R обозначена матрица столбцов, с которыми входят в систему ограничений $Ax = b$ небазисные переменные, соответственно их возрастающей нумерации в x^F.

Текущий шаг симплекс-метода требует использования канонической формы задачи для выбранного базиса вместо данного представления исходной записи задачи. Как изложено в п. 3.1, этого достигают в два действия: (1) умножение векторного уравнения ограничений слева на обращенный базис B^{-1}, чтобы иметь ограничения в виде уравнения

$$\left[\begin{array}{ccc} I & | & A' \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x^B \\ --- \\ x^F \end{array}\right] = b'; \quad A' = B^{-1}R, \quad b' = B^{-1}b;$$

(2) умножение этого уравнения на c_B^T слева с получением записи

$$\left[\begin{array}{ccc} c_B^T & | & c_B^T A' \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x^B \\ --- \\ x^F \end{array}\right] = c_B^T b',$$

которую затем вычитают из уравнения целевой функции, чтобы ее представить в виде

$$\left[\begin{array}{ccc} O^T & | & c'^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x^B \\ --- \\ x^F \end{array}\right] = z - z_0 \to \min, \quad c'^T = c_F^T - c_B^T A',$$

и тем самым выяснить возможность ее дальнейшей минимизации (за счет увеличения какой-либо свободной переменной из набора x^F) относительно значения $z = z_0, \quad z_0 = c_B^T b'$, уже полученного на данном шаге, то есть на текущем базисном решении БР $= (x^B = b', x^F = 0)$.

Однако того же самого можно достичь внешне иными, но вполне идентичными действиями: умножение векторного уравнения ограничений слева на матрицу-строку коэффициентов $\pi^T = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m]$ и сложение полученного скалярного произведения с уравнением целевой функции для представления ее в виде

$$\left[\begin{array}{ccc} (\pi^T B + c_B^T) & | & (\pi^T R + c_F^T) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x^B \\ --- \\ x^F \end{array}\right] = \pi^T b + z \to \min,$$

где наложено условие $\pi^T B + c_B^T = 0^T$. Выбранные из этого условия множители π, $\pi^T = -c_B^T B^{-1}$ называют **симплекс-множителями**, так как

они служат той же самой цели - представлению задачи в той же канонической форме для базиса, что и выше. Поэтому
$c'^T = \pi^T R + c_F^T, \quad z_0 = -\pi^T b.$

Выражения $\pi^T B + c_B^T$ и $\pi^T R + c_F^T$, очевидно, определяют собой обновленные (пересчитанные) значения коэффициентов при x^B и x^F в целевой функции. Эти выражения совершенно одинаковы по правилу пересчета, а именно: если хотят пересчитать i-й коэффициент (при переменной x_i), то берут i-й столбец из матрицы ограничений A, в исходной системе ограничений $Ax = b$, умножают его скалярно на симплекс-множители π и складывают с коэффициентом, который был задан для переменной x_i в исходном выражении $c^T x = z$ для целевой функции. Для этого, естественно, нужны значения симплекс-множителей π.

Их определяют следующим образом. Берут очередной набор m линейно независимых столбцов из исходной матрицы A с номерами $j_1, j_2, \ldots j_m$, организуя из них матрицу B. (Выбор этих столбцов означает выбор переменных с соответствующими номерами для их включения в базисный набор переменных x^B). Умножают B слева на матрицу-строку π^T, складывают результат с коэффициентами $c_B^T = (c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots c_{j_m})$, которые были заданы для соответствующих переменных в исходном виде $c^T x = z$ целевой функции, и требуют равенства нулю этих сумм. Этому требованию, то есть линейной системе уравнений $\pi^T B = -c_B^T$, и подчиняются искомые симплекс-множители π. Каждый раз они единственны, так как $rankB = m$, и каждый раз они определяются (как и обновленные коэффициенты $c'^T = \pi^T R + c_F^T$ при свободных переменных x^F), отталкиваясь от **исходных** столбцов матрицы ограничений A и **исходных** коэффициентов c_B^T, c_F^T при переменных x^B, x^F в целевой функции $c^T x = z$.

Один случай указанного пересчёта коэффициентов отметим особо. Если исходный столбец a_j матрицы A имел вид q-го столбца, e_q, единичной матрицы и соответствующий исходный коэффициент c_j был равен нулю, то: (1) при включении такого столбца a_j в базис B имеем $\pi_q = 0$; (2) при включении такого столбца a_j в небазисную матрицу R имеем $c'_q = \pi_q$. Таким образом, любой элемент памяти компьютера, отведенный для пересчитываемого коэффициента целевой функции при той переменной задачи ЛП, которая входила в ее исходную стандартную формулировку с единичным вектором ограничений вида e_q и с нулевым значением этого коэффициента, в действительности сохраняет не что иное как симплекс-множитель соответственно вида π_q, причем $\pi_q = 0$, если соответствующая переменная на данном шаге симплекс-метода оказалась включена в базисный набор x^B.

5.2 Обращенный базис

Как уже отмечалось в пп. 3.3 и 4.1, симплекс-метод представляет собой исключение Гаусса-Жордана, как при решении систем линейных алгебраических уравнений, которому на каждом шаге предшествуют действия 1 и 2 по специальному выбору ведущего элемента. При этом в обычном симплекс-методе (п. 3.3) сначала находят ведущий столбец (действие 1) и затем ведущую строку (действие 2), а в двойственном симплекс-методе (п. 4.1) наоборот: сначала находят ведущую строку (действие 1) и затем ведущий столбец (действие 2). Для исключения Гаусса-Жордана не имеет значения, в каком порядке действий найдены ведущая строка и ведущий столбец. Существенно то, что ведущий элемент, расположенный в матрице на их пересечении, найден, чтобы выполнить один шаг исключения. С точки зрения решения систем, любой такой шаг означает исключение ведущей переменной (при ведущем столбце) из всех уравнений, кроме ведущего, где она останется с коэффициентом 1. Рассмотрим процедуру исключения Гаусса-Жордана с точки зрения обращения базиса в симплекс-методе.

Воспользуемся элементарными матрицами двух видов. Первая - диагональная размера $m \times m$ элементарная матрица D_k, которая имеет все диагональные элементы, равные 1, кроме одного, k-го, который не равен 0. Если надо пронормировать ведущую k-ю строку матрицы A путем деления ее на ведущий элемент a_{ks}, то результат удобно записать в виде $D_{ks}^{-1}A$, где D_{ks} обозначает матрицу D_k, в которой k-й диагональный элемент равен a_{ks} (взят из s-го столбца матрицы A).Тем самым выполнена подготовка к исключению переменной x_s из всех уравнений и одновременно к включению этой переменной в базисный набор x^B взамен переменной $x_r,\ r = NB(k)$, выводимой из этого набора в набор x^F.

Вторая - полная столбцовая размера $m \times m$ элементарная матрица T_k^c; ее ненулевые элементы расположены только на диагонали и в k-м столбце, причем все диагональные элементы равны 1. Если для ее k-го столбца, кроме единицы на диагонали, взяты соответствующие элементы s-го столбца матрицы A, то эту матрицу будем обозначать T_{ks}^c. Обратная к ней матрица, $(T_{ks}^c)^{-1}$, отличается инвертированием знаков всех внедиагональных элементов k-го столбца. С помощью этой матрицы удобно записать результат второго действия в исключении Гаусса-Жордана, а именно: после вычитания пронормированной k-й строки из всех других строк матрицы A имеем результат $(T_{ks}^c)^{-1}D_{ks}^{-1}A$.

При решении систем, когда матрица A имеет размер $m \times m$, номера k и s совпадают и пробегают все значения в естественном порядке: $k = s = 1, 2, \ldots, m$. Тогда после m шагов исключения Гаусса-Жордана имеем

$$(T_{mm}^c)^{-1}D_{mm}^{-1} \ldots (T_{22}^c)^{-1}D_{22}^{-1}(T_{11}^c)^{-1}D_{11}^{-1}A = I,$$

поэтому

$$A^{-1} = (T_{mm}^c)^{-1}D_{mm}^{-1} \ldots (T_{22}^c)^{-1}D_{22}^{-1}(T_{11}^c)^{-1}D_{11}^{-1}I.$$

Это выражает тот известный факт, что применение стандартной процедуры исключения Гаусса-Жордана к единичной матрице I дает обратную матрицу A^{-1}. Рекуррентно данная процедура запишется так:

$$A_t^{-1} = (T_{tt}^c)^{-1} D_{tt}^{-1} A_{t-1}^{-1}; \quad A_0^{-1} = I, \quad t = 1, 2, \ldots, m,$$

где t номер шага процедуры и $A_m^{-1} = A^{-1}$.

В симплекс-методе обычным является введение в задачу добавочных и иногда искусственных (см. п. 3.6) переменных, после чего их общее число равно n. Будем считать, что они введены в каждое из ограничений по порядку и с коэффициентами 1 (как, например, в пп. 3.3, 3.4, 3.6). В этом случае $m \times n$ -матрица ограничений A содержит два блока, в исходном виде $A = [\ G \quad | \quad I\ ]$, где G - левый блок, I - правый блок, в исходном виде это единичная размера $m \times m$ матрица. Аналогично стандартной процедуре Гаусса-Жордана для решения систем присутствующая в симплекс-методе специальная процедура Гаусса-Жордана в той ее части, которая касается правого блока матрицы A, имеет вид:

$$B_t^{-1} = (T_{ks}^c)^{-1} D_{ks}^{-1} B_{t-1}^{-1}; \quad B_0^{-1} = I, \quad t = 1, 2, \ldots, N,$$

где t- номер шага симплекс-метода; B_t- базис на шаге t; B_t^{-1}- обращенный базис на шаге t; B_0^{-1}- обращенный базис на шаге 0 (в исходном состоянии); N- полное число шагов этой процедуры. В данном выражении номера k и s (ведущей строки и ведущего столбца в пределах пересчитываемой на каждом шаге матрицы A) определяются по правилам обычного или двойственного симплекс-метода для каждого t, поэтому к ним следовало бы здесь приписать индекс t, но он для простоты опущен.

Таким образом, на месте правого блока матрицы A, имеющего в исходном виде значение I и собственную нумерацию столбцов $k = 1, 2, \ldots, m$, в результате применения указанной процедуры Гаусса-Жордана после t шагов оказывается вычислен обращенный базис B_t^{-1}. От обращенного базиса B_{t-1}^{-1} его отличие определяется следующим: базис B_t равен базису B_{t-1} после замены в нем k-го столбца, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, столбцом номер s, $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$, взятым из всей матрицы A. Именно такова роль сомножителей $(T^c_{ks})^{-1}D^{-1}_{ks}$ в приведенной записи процедуры вычисления обращенного базиса.

Фактически, конечно, не производится никакого умножения матрицы B^{-1}_{t-1} на эти сомножители. Их действие в алгоритме вычисления обращенного базиса сводится, очевидно, к следующему.

Обозначим элементы матрицы обращенного базиса B^{-1} через β_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$, то есть

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mm} \end{bmatrix}.$$

При $t = 0$ сюда помещают правый блок исходной матрицы A, равный единичной матрице I. До шага $t,\ t = 1, 2, \ldots, N$, здесь находится B^{-1}_{t-1}. После шага $t,\ t = 1, 2, \ldots, N$, сюда помещают B^{-1}_t. Пересчет, то есть обновление обращенного базиса (от B^{-1}_{t-1} к B^{-1}_t) осуществляют следующим образом, реализующим действие сомножителей $(T^c_{ks})^{-1}D^{-1}_{ks}$.

Действие матрицы D^{-1}_{ks}:

Для $j = 1, 2, \ldots, m$ вычислить $\beta^+_{kj} = \beta_{kj}/a'_{ks}$.

Действие матрицы $(T^c_{ks})^{-1}$:

Для $i = 1, 2, \ldots, m, \quad i \neq k$ вычислить $\beta^+_{ij} = \beta_{ij} - a'_{is}\beta^+_{kj}$.

Здесь знаком "$+$"отмечены элементы матрицы B^{-1} после обновления; a'_{ks}- ведущий элемент (k-й элемент s-го столбца всей матрицы A); a'_{is}- любые другие элементы этого ведущего столбца a'_s.

Участвующий здесь ведущий столбец a'_s определяется, очевидно, равенством

$$a'_s = B^{-1}a_s,$$

где $B^{-1} = B^{-1}_t$. Эта формула есть часть более общего выражения $A' = B^{-1}R$ в описании любого текущего шага симплекс-метода, п. 5.1.

5.3 Последовательное обновление симплекс-множителей

В п. 5.1 определено, что симплекс-множители на любом шаге симплекс-метода заданы выражением $\pi^T = -c_B^T B^{-1}$, где используются исходные столбцы матрицы ограничений A, образующие на этом шаге базис B, и исходные коэффициенты c_B^T при переменных, образующих на этом шаге набор x^B. На следующем шаге, принадлежность к которому всюду обозначаем индексом "+", соответственно, имеем

$$\pi_+^T = -c_{B+}^T B_+^{-1}.$$

Для j-го элемента вектор-строки π_+^T это дает следующее выражение, которое преобразуем с учетом ранее установленных выражений для элементов B_+^{-1} (п. 5.2):

$$\pi_j^+ = -\sum_{i=1}^m c_i^+ \beta_{ij}^+ = -\sum_{i=1,(i\neq k)}^m c_i^+ \beta_{ij}^+ - c_k^+ \beta_{kj}^+ =$$

$$= -\sum_{i=1,(i\neq k)}^m c_i^+ [\beta_{ij} - a'_{is}\frac{\beta_{kj}}{a'_{ks}}] - c_k^+ \beta_{kj}^+ =$$

$$= -\sum_{i=1}^m c_i[\beta_{ij} - a'_{is}\beta_{kj}^+] - c_k^+\beta_{kj}^+ = -\sum_{i=1}^m c_i\beta_{ij} - \beta_{kj}^+[c_k^+ - \sum_{i=1}^m c_i a'_{is}] = \pi_j - \beta_{kj}^+ c'_s.$$

В этих преобразованиях первое, второе, третье и пятое равенства очевидны. Четвертое равенство освобождает в сумме от ограничения $i \neq k$, так как предыдущая разность в квадратных скобках при $i = k$ формально обращается в нуль. Кроме того, благодаря этому же обстоятельству c_j^+ заменено на c_i, так как именно k-й элемент вектора c_B, и только он один, обновляется при переходе к вектору c_{B+}. Шестое равенство получено из-за того, что

$$c'_s = c_k^+ - \sum_{i=1}^m c_i a'_{is}.$$

Это, по существу, s-й элемент формулы $c'^T = c_F^T - c_B^T A'$, установленной в п. 5.1 для пересчета тех коэффициентов, которые до следующего шага (отмеченного здесь индексом "+"), были в наборе c_F. Действительно, в вектор-строке c_{B+}^T на k-м месте в качестве c_k^+ теперь расположен исходный коэффициент c_s, $\quad s = NB^+(k)$, при той переменной x_s, которая на шаге "+"вошла в набор x^B и которая до этого шага значилась в наборе x^F и была выбрана оттуда в качестве ведущей для включения в x^B взамен переменной x_r, $r = NB(k)$, состоявшей в x^B до этого шага "+". Следовательно,

$$\pi_j^+ = \pi_j - \beta_{kj}^+ c_s'$$

есть последовательное правило обновления симплекс-множителей, $j = 1, 2, \ldots, m$.

5.4 Алгоритм модифицированного симплекс - метода

Суммируем материал пп. 5.1 - 5.3 применительно к обычному (недвойственному) симплекс-методу. При этом исходный вид задачи

$$\left[\begin{array}{ccc} G & | & I \\ -- & | & -- \\ c^T & | & O^T \end{array}\right] x = \boxed{\begin{array}{c} b \\ -- \\ z \end{array}}, \qquad b \geq 0,$$

предполагает, что I - единичная матрица размера $m \times m$ для базисных переменных x^B, не вошедших в целевую функцию $\quad c^T x^F =$ $= z \to \min$, - обычно это добавленные переменные; G - обозначение остальных столбцов расширенной матрицы $A = [\, G \quad | \quad I \,]$ ограничений $Ax = b$, - это столбцы для небазисных переменных x^F в составе вектора $x = (x^F, x^B)$ переменных задачи, b -правая часть ограничений. Из исходного вида задачи для дальнейшего сохраняют следующие исходные данные: A, b, c.

До начала каждого шага t ($t = 1, 2, \ldots, N$) алгоритма известны текущие значения π, B^{-1}, b', z, подлежащие последовательному обновлению. До начала первого шага они таковы: $\pi = 0,\ B^{-1} = I,\ b' = b,\ z = 0$. От исходных данных: G и c используют в расчете текущих коэффициентов $c'^T = \pi^T G + c^T$; A используют в расчете текущего ведущего столбца $a'_s = B^{-1} a_s$, где $a_s - s$ -й столбец из A.

Шаг t.

(1) Находят $c'^T = \pi^T G + c^T$. Смотрят через $NF(i)$ на составную строку (c'^T, π^T) (как на одно целое, соответствующее нижней строке исходного вида задачи), чтобы определить, есть ли в ней отрицательные элементы. Если нет, то решение найдено, конец. Если есть, то фиксируют номер l и, соответственно, номер $s = NB(l)$ той свободной переменной x_s, для которой найден наиболее отрицательный элемент c'_s и которая будет введена в базис.

(2) Находят $a'_s = B^{-1} a_s$. Сравнивают все соответствующие элементы столбцов b' и a'_s, чтобы найти номер k такой, что

$$\frac{b'}{a'_{ks}} = \min_i \left(\frac{b'_i}{a'_{is}} \right).$$

Тем самым найден номер $r = NB(k)$ той переменной x_r, которая будет выведена из базиса. Кроме того, в составе ведущего столбца a'_s найден ведущий элемент a'_{ks}.

(3) Обновляют все величины к следующему шагу:

(a) указатели: $NB(k) \leftrightarrow NF(l)$.

(b) элементы столбца базисных значений: $b_k^+ = b'_k / a'_{ks}$; $b_i^+ = b'_i - a'_{is} b_k^+ (i \neq k)$.

(c) целевую функцию: $z^+ = z - c'_s b_k^+$. (На самом деле здесь вычисляется целевая функция с противоположным знаком, т.е. $-z$.)

(d) обращенный базис: $\beta_{kj}^+ = \beta_{kj} / a'_{ks}$; $\quad \beta_{ij}^+ = \beta_{ij} - a'_{is} \beta_{kj}^+$ $(i \neq k)$.

(e) симплекс-множители: $\pi^{+T} = \pi^T - \beta_k^+ c'_s$.

Примечания:

1. В последнем выражении β_k^+ обозначает k-ю строку обновленного обращенного базиса, составленную из элементов β_{kj}^+, $j = 1, 2, \ldots, m$.

2. Обновленные значения обозначены в пп. (b,c,d,e) индексом "+"только лишь для удобства. В программах им соответствуют операторы присваивания, например, вместо п. (c) имеем $z := z - c'_s b_k$.

Пример 5.4.1. Для $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ решить задачу

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 45 & \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq & 60 & \\
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 27 & \\
-9x_1 & - & 10x_2 & - & 15x_3 & = & z & \to \ \min
\end{array}$$

Шаг 0. (Исходный вид задачи).

$$\begin{array}{|ccc|ccc|c|}
\multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{A} & \multicolumn{2}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{b} \\
\hline
1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 45 \\
2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 60 \\
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 27 \\
\hline
-9 & -10 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|}
\multicolumn{2}{c}{NB} \\
\cline{2-2}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6 \\
\cline{2-2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|}
\multicolumn{2}{c}{NF} \\
\cline{2-2}
1 & 1 \\
2 & 2 \\
3 & 3 \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

$$\text{БР} = (0, 0, 0, 45, 60, 27) = \text{БДР}, \quad 0 = z.$$

Шаг 1.

(1) $c'^T = \pi^T G + c^T$; $\quad c'^T = c^T = (-9, -10, -15)$. Так как в начале алгоритма $\pi^T = (0, 0, 0)$, то на шаге 1 это действие можно опустить, положив $c'^T = c^T$.

$$(c'^T, \pi^T) = (-9, -10, -15, 0, 0, 0) \Rightarrow l = 3, \ s = 3, \ c'_s = -15.$$

(2) $a'_s = B^{-1} a_s$; $\quad a'_s = a_s = a_3 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{5} & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array}$. Так как в начале алгоритма $B^{-1} = I$, то на шаге 1 это действие можно опустить, положив

$a'_s = a_s$.

$$\min\left(\frac{45}{5}, \frac{60}{3}, \frac{27}{2}\right) = \frac{45}{5} = 9 \quad \Rightarrow \quad k = 1, \quad a'_{ks} = 5.$$

(3)

(a) $NB = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{5} & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \hline \end{array}$, $\qquad NF = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array}$.

(b) $b' = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{9} & \multicolumn{1}{c|}{33} & \multicolumn{1}{c|}{9} \\ \hline \end{array}$.

(c) $-z = 135$.

($\mathbf{d}$) $B^{-1} = \boxed{\begin{array}{rcc} 1/5 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -2/5 & 0 & 1 \end{array}}$.

($\mathbf{e}$) $\pi^T = \boxed{3 \mid 0 \mid 0} = \boxed{0 \mid 0 \mid 0} - \boxed{1/5 \mid 0 \mid 0} * \boxed{-15}$.

Шаг 2.

$$(\mathbf{1}) \quad \begin{array}{c} c'^T \\ \boxed{-6 \mid -4 \mid 0} \\ \uparrow 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} = \begin{array}{c} \pi^T \\ \boxed{3 \mid 0 \mid 0} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} * \begin{array}{c} G \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}} \end{array} + \begin{array}{c} c^T \\ \boxed{-9 \mid -10 \mid -15} \end{array}.$$

$$l = 1, \quad s = 1, \quad c'_s = -6.$$

$$(\mathbf{2}) \qquad a'_s = \boxed{\begin{array}{c} 1/5 \\ 7/5 \\ 3/5 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{rcc} 1/5 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -2/5 & 0 & 1 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}};$$

$$\min\left(\frac{9}{1/5}, \frac{33}{7/5}, \frac{9}{3/5}\right) = \frac{9}{3/5} = 15 \quad \Rightarrow \quad k = 3, \quad a'_{ks} = 3/5.$$

(3)

(a) $NB = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{5} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}$, $\qquad NF = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{6} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array}$.

(b) $b' = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{6} & \boxed{12} & \boxed{15} \end{array}$.

(c) $-z = 225.$

(**d**) $B^{-1} = \boxed{\begin{array}{rcr} 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/3 & 1 & -7/3 \\ -2/3 & 0 & 5/3 \end{array}}$.

(**e**) $\pi^T = \boxed{-1 \mid 0 \mid 10} = \boxed{3 \mid 0 \mid 0} - \boxed{-2/3 \mid 0 \mid 5/3} * \boxed{-6}$.

Шаг 3.

$$(\mathbf{1}) \quad \begin{array}{c} c'^T \\ \boxed{0 \mid -2 \mid 0} \\ 1 \quad \uparrow 2 \quad 3 \end{array} = \begin{array}{c} \pi^T \\ \boxed{-1 \mid 0 \mid 10} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} * \begin{array}{c} G \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}} \end{array} + \begin{array}{c} c^T \\ \boxed{-9 \mid -10 \mid -15} \end{array}.$$

$$l = 2, \quad s = 2, \quad c'_s = -2.$$

$$(\mathbf{2}) \qquad a'_s = \boxed{\begin{array}{c} 1/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{rcr} 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/3 & 1 & -7/3 \\ -2/3 & 0 & 5/3 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \end{array}} \quad ;$$

$$\min\left(\frac{6}{1/3}, \frac{12}{4/3}, \frac{15}{1/3}\right) = \frac{12}{4/3} = 9 \quad \Rightarrow \quad k = 2, \quad a'_{ks} = 4/3.$$

(3)

(a) $NB = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{1} \end{array}$, $\qquad NF = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{6} & \boxed{5} & \boxed{4} \end{array}$.

(b) $b' = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{3} & \boxed{9} & \boxed{12} \end{array}$.

(c) $-z = 243.$

(**d**) $B^{-1} = \boxed{\begin{array}{rrr} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 & -7/4 \\ -3/4 & -1/4 & 9/4 \end{array}}\,.$

(**e**) $\pi^T = \boxed{-1/2}\boxed{3/2}\boxed{13/2} = \boxed{-1}\boxed{0}\boxed{10} -$

$- \boxed{1/4}\boxed{3/4}\boxed{-7/4} * \boxed{-2}\,.$

Шаг 4.

$$(\mathbf{1}) \quad \underset{\;1\;\;\;2\;\;\;3}{\overset{c'^T}{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}}} = \underset{\uparrow 4 \qquad 5 \qquad 6}{\overset{\pi^T}{\boxed{-1/2}\boxed{3/2}\boxed{13/2}}} * \overset{G}{\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}}} + \overset{c^T}{\boxed{-9}\boxed{-10}\boxed{-15}}\,.$$

$l = 3, \quad s = 4, \quad c'_s = -1/2.$

$$(\mathbf{2}) \quad a'_s = \boxed{\begin{array}{r} 1/4 \\ 1/4 \\ -3/4 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{rrr} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 & -7/4 \\ -3/4 & -1/4 & 9/4 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}}\;;$$

$$\min\left(\frac{3}{1/4}, \frac{9}{1/4}, \infty\right) = \frac{3}{1/4} = 12 \quad \Rightarrow \quad k = 1, \quad a'_{ks} = 1/4.$$

(По поводу ∞ см. табл. 3.4.1).

(3)

(a) $NB = \overset{1\;\;2\;\;3}{\boxed{4}\boxed{2}\boxed{1}}\,, \qquad NF = \overset{1\;\;2\;\;3}{\boxed{6}\boxed{5}\boxed{3}}\,.$

(b) $b' = \overset{1\;\;\;2\;\;\;3}{\boxed{12}\boxed{6}\boxed{21}}\,.$

(c) $-z = 249.$

(d) $B^{-1} = \boxed{\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}}\,.$

(e) $\pi^T = \boxed{0}\boxed{1}\boxed{7} = \boxed{-1/2}\boxed{3/2}\boxed{13/2} -$

$$-\boxed{1}\boxed{-1}\boxed{1} * \boxed{-1/2}\,.$$

Шаг 5.

$$(\mathbf{1})\quad \underset{1\quad 2\quad 3}{\overset{c'^T}{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}}} = \underset{4\quad 5\quad 6}{\overset{\pi^T}{\boxed{0}\boxed{1}\boxed{7}}} * \overset{G}{\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}}} + \overset{c^T}{\boxed{-9}\boxed{-10}\boxed{-15}}\,.$$

Среди элементов строки (c'^T, π^T), с номерами из NF, нет отрицательных; конец. Базисное, в данном случае, оптимальное решение прочитывают из b' через NB, при этом свободные переменные с номерами из NF равны нулю:

$$\text{БОР} = (21, 6, 0, 12, 0, 0); \quad z_{\min} = -249.$$

По этому же принципу базисные решения могут быть прочитаны по окончании любого шага алгоритма.

5.5 Алгоритм модифицированного двойственного симплекс-метода

В п. 5.2 отмечалось, что процедура исключения Гаусса-Жордана, лежащая в основе любого варианта симплекс-метода, действует после нахождения ведущей строки и ведущего столбца вне зависимости от того, как

эти элементы найдены. В соответствии с этим сформулируем модифицированный алгоритм применительно к двойственному симплекс-методу, опираясь на основные положения из
пп. 5.1 - 5.3. Внешне задача имеет такой же исходный вид, как и в п. 5.4 :

$$\begin{bmatrix} G & | & I \\ -- & | & -- \\ c^T & | & O^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ -- \\ z \end{bmatrix}, \quad c \geq 0.$$

Характерное отличие, разрешающее приступать к использованию двойственного симплекс-метода, заключается в том, что $c \geq 0$ и $b \rightleftharpoons 0$, в то время как для применения обычного симплекс-метода (п. 5.4) требования выглядят "наоборот": $b \geq 0$ и $c \rightleftharpoons 0$.

До начала каждого шага $t \quad (t = 1, 2, \ldots, N)$ известны $b',\ \pi,\ B^{-1}$, $c',\ z$. Требования $\pi \geq 0,\ c' \geq 0$ и $b' \rightleftharpoons 0$ являются разрешающими для дальнейшего применения алгоритма. До начала шага 1 имеем: $b' = b, \quad \pi = 0, \quad B^{-1} = I, \quad c' = c, \quad z = 0$. Из исходного вида задачи на каждом шаге используют: матрицу G для нахождения левой, соответствующей части k-й (ведущей) строки $a_k'^T = \beta_k^T G$, где β_k^T - k-я строка матрицы B^{-1}, и для определения обновленных коэффициентов $c'^T = \pi^T G + c^T$, где используют их исходные значения c^T; всю матрицу $A = [\ G \mid I\ ]$ для нахождения s-го (ведущего) столбца $a_s' = B^{-1} a_s$, где a_s- исходный s-й столбец в этой матрице A.

Шаг t.

(1) Просматривают b', чтобы найти отрицательные элементы. Если таковых нет, то решение найдено; конец. Определяют номер k наиболее отрицательного элемента этого вектора.

(2) Находят $a_k'^T = \beta_k^T G$. Полную k-ю строку $(a_k'^T, \beta_k^T)$ просматривают как одно целое через $NF(i)$, чтобы из неё выбрать коэффициенты k-го ограничения только при свободных переменных. При этом среди них выбирают только отрицательные коэффициенты $a'_{kj} < 0$, чтобы затем зафиксировать номер l и найти номер $s = NF(l)$ ведущего столбца из условия

$$\min_j \left(\frac{(c'^T, \pi^T)_j}{\mid a'_{kj} \mid} \right) = \frac{(c'^T, \pi^T)_s}{\mid a'_{ks} \mid} \ ,$$

а также элемент $c'_s = (c'^T, \pi^T)_s$.

Примечание. $(c'^T, \pi^T)_j$ обозначает j-й элемент составной строки (c'^T, π^T).

(3) Находят ведущий столбец $a'_s = B^{-1} a_s$ и в нем ведущий элемент a'_{ks}.

(4) Обновляют элементы для подготовки к следующему шагу:

(a) указатели $NB(k) \leftrightarrow NF(l)$.

(b) столбец значений базисных переменных: $b_k^+ = b'_k / a'_{ks}$; $b_i^+ = b'_i - a'_{is} b_k^+ (i \neq k)$.

(c) целевую функцию: $z^+ = z - c'_s b_k^+$.

(d) обращенный базис: $\beta_{kj}^+ = \beta_{kj} / a'_{ks}$; $\quad \beta_{ij}^+ = \beta_{ij} - a'_{is} \beta_{kj}^+$ $(i \neq k)$.

(e) симплекс-множители: $\pi^{+T} = \pi^T - \beta_k^T c'_s$; $\quad \pi := \pi^+$.

(f) коэффициенты $c'^T = \pi^T G + c^T$.

Примечания: 1. Верхний индекс "$+$"использован в пп. (b,c,d,e) для упрощения; в программе вместо этого применяют операторы присваивания, например, $b'_k := b'_k / a'_{ks}$, и т.п.

2. В п.(c) на самом деле вычисляется целевая функция с противоположным знаком, т.е. $-z$.

В качестве примеров возьмем те же задачи, что и в п. 4.2.

Пример 5.5.1. Найти $x_1, x_2 \geq 0$ такие, что

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & \geq & 9 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 \\ x_1 & + & 4x_2 & = & z \ \rightarrow \ \min \end{array}$$

Шаг 0. (Исходный вид задачи).

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|c} & & A & & & b \\ \hline -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ -2 & -6 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|} \multicolumn{2}{c}{NB} \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|} \multicolumn{2}{c}{NF} \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0, 0, -6, -9, 7) \neq \text{БДР}, \quad 0 = z.$$

Шаг 1.

(1) $b'^T = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-6} & \boxed{-9} & \boxed{7} \end{array} \quad \Rightarrow \quad k = 2.$

(2)
$$
\underset{1 \qquad 2}{\overset{a_k'^T}{\boxed{-2 \mid -6}}} = \underset{3 \quad 4 \quad 5}{\overset{\beta_k^T}{\boxed{0 \mid 1 \mid 0}}} * \overset{G}{\begin{array}{|cc|} \hline -2 & -3 \\ -2 & -6 \\ 2 & 2 \\ \hline \end{array}} \quad ;
$$

$$\min\left(\frac{1}{|-2|}, \frac{4}{|-6|}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad l = 1, \quad s = 1, \quad c_s' = 1.$$

(3) $a_s' = B^{-1} a_s = a_s = (-2, -2, 2)^T; \quad a_{ks}' = -2.$

Примечание. На шаге 1 можно не умножать a_s на B^{-1}, если до начала этого шага $B^{-1} = I$.

(4) Обновление:

(a) $NB = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{5} \end{array}, \qquad NF = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \boxed{4} & \boxed{2} \end{array}.$

(b) $b'^T = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{3} & \boxed{9/2} & \boxed{-2} \end{array}.$

(c) $-z = -9/2.$

(d) $$B^{-1} = \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & -1 & 0\\ 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ \hline\end{array}\,.$$

(e) $$\pi^T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1/2 & 0\\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -1/2 & 0\\ \hline\end{array} * \begin{array}{|c|}\hline -1\\ \hline\end{array}\,.$$

(f) $$\overset{c'^T}{\underset{1\quad 2}{\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1\\ \hline\end{array}}} = \overset{\pi^T}{\underset{3\quad 4\qquad 5}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1/2 & 0\\ \hline\end{array}}} * \overset{G}{\begin{array}{|cc|}\hline -2 & -3\\ -2 & -6\\ 2 & 2\\ \hline\end{array}} + \overset{c^T}{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4\\ \hline\end{array}}\,.$$

Шаг 2.

(1) см. b' выше, $\quad\Rightarrow\quad k = 3.$

(2) $$\overset{a_k'^T}{\underset{1\qquad 2}{\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & -4\\ \hline\end{array}}} = \overset{\beta_k^T}{\underset{3\quad 4\quad 5}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1\\ \hline\end{array}}} * \overset{G}{\begin{array}{|cc|}\hline -2 & -3\\ -2 & -6\\ 2 & 2\\ \hline\end{array}}\;;$$

$$\min\left(\frac{1}{|-4|}\right) = \frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad l = 2, \quad s = 2, \quad c_s' = 1.$$

(3) $$a_s' = \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & -1 & 0\\ 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ \hline\end{array} * \begin{array}{|c|}\hline -3\\ -6\\ 2\\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 3\\ 3\\ -4\\ \hline\end{array}\;; \qquad a_{ks}' = -4.$$

(4) Обновление:

(a) $$NB = \overset{1\;\;2\;\;3}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 1 & 2\\ \hline\end{array}}\,, \qquad NF = \overset{1\;\;2}{\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 5\\ \hline\end{array}}\,.$$

(b) $$b'^T = \overset{1\qquad 2\qquad 3}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3/2 & 3 & 1/2\\ \hline\end{array}}\,.$$

(c) $-z = -5.$

(d) $B^{-1} = \boxed{\begin{array}{lrr} 1 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \end{array}}.$

(e) $\pi^T = \boxed{0}\boxed{3/4}\boxed{1/4} = \boxed{0}\boxed{1/2}\boxed{0} - \boxed{0}\boxed{-1/4}\boxed{-1/4} * \boxed{1}.$

(f) $\underset{1 \quad 2}{\overset{c'^T}{\boxed{0}\boxed{0}}} = \underset{3 \quad 4 \quad 5}{\overset{\pi^T}{\boxed{0}\boxed{3/4}\boxed{1/4}}} * \overset{G}{\boxed{\begin{array}{rr} -2 & -3 \\ -2 & -6 \\ 2 & 2 \end{array}}} + \overset{c^T}{\boxed{1}\boxed{4}};$

Шаг 3.

(1) См. b' выше, $\Rightarrow$ конец. БОР $= (3,\ 1/2\ ,\ 3/2\ ,\ 0, 0)$; $z_{min} = 5.$

Примечание. Для ускорения выхода на "конец"алгоритма целесообразно после п. 4c поставить проверку вектора b', аналогичную той, которая предусмотрена в начале шага в п. (1).

Пример 5.5.2. Найти $x_1, x_2 \geq 0$ такие, что

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & \geq & 9 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & z \ \rightarrow \ \min. \end{array}$$

Шаг 0. (Исходный вид задачи).

$$\begin{array}{c c c}
\begin{array}{c} A \qquad\qquad b \\ \left|\begin{array}{rrrrrrr|r}
-2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\
-2 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\
-2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right| \end{array}
&
\begin{array}{c} NB \\ \begin{array}{c|c|} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{array} \end{array}
&
\begin{array}{c} NF \\ \begin{array}{c|c|} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \end{array}
\end{array}$$

$$\text{БР} = (0, 0, -6, -9, 4, 7, -7) \neq \text{БДР}, \quad 0 = z.$$

Шаг 1.

(1) $b'^T = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{-6} & \boxed{-9} & \boxed{4} & \boxed{7} & \boxed{-7} \end{array} \quad \Rightarrow \quad k = 2.$

$$(\mathbf{2}) \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{a'^T_k} \\ \boxed{-2} & \boxed{-6} \\ 1 & 2 \end{array} = \begin{array}{ccccc} \multicolumn{5}{c}{\beta^T_k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} * \begin{array}{c} G \\ \left|\begin{array}{rr} -2 & -3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{array}\right| \end{array} \; ;$$

$$\min\left(\frac{1}{|-2|}, \frac{2}{|-6|}\right) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad l = 2, \quad s = 2 \quad c'_s = 2.$$

(3) $a'_s = B^{-1}a_s = a_s = (-3, -6, 1, 2, -2)^T; \quad a'_{ks} = -6.$

(см. примечание в предыдущем примере, шаг 1)

(4) Обновление:

(a) $NB = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{array}, \qquad NF = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{array}.$

(b) $b'^T = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3/2 & 3/2 & 5/2 & 4 & -4 \end{array}.$

(c) $-z = -3.$

(d) $$B^{-1} = \boxed{\begin{matrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}.$$

(e) $$\pi^T = \boxed{0 \;\; 1/3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0} = \boxed{0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0} -$$
$$- \boxed{0 \;\; -1/6 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0} * \boxed{2}\, .$$

(f) $$\underset{1 \qquad 2}{\overset{c'^T}{\boxed{1/3 \;\; 0}}} = \underset{3 \quad 4 \qquad 5 \quad 6 \quad 7}{\overset{\pi^T}{\boxed{0 \;\; 1/3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0}}} * \overset{G}{\boxed{\begin{matrix} -2 & -3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{matrix}}} + \overset{c^T}{\boxed{1 \;\; 2}}\,;$$

Шаг 2.

(1) см. b' выше, $\quad \Rightarrow \quad k = 5.$

(2) $$\underset{1 \qquad 2}{\overset{a_k'^T}{\boxed{-4/3 \;\; 0}}} = \underset{3 \qquad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7}{\overset{\beta_k^T}{\boxed{0 \;\; -1/3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1}}} * \overset{G}{\boxed{\begin{matrix} -2 & -3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{matrix}}} \quad ;$$

$$\min\left(\frac{1/3}{|-4/3|}, \frac{1/3}{|-1/3|}\right) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad l = 1, \quad s = 1 \quad c_s' = 1/3.$$

(3) $a_s' = B^{-1}a_s = (-1, 1/3\ , 2/3\ , 4/3\ , -4/3)^T; \quad a_{ks}' = -4/3.$

(4) Обновление:

(a) $NB = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{3} & 2 & 5 & 6 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}$, $\quad NF = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{7} & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array}$.

(b) $b'^T = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{3/2} & 1/2 & 1/2 & 0 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array}$.

(c) $-z = -4$.

(d), (e), (f) - опущены, см. примечание после предыдущего примера, $\Rightarrow$ конец.

БОР $= (3\ , 1/2\ , 3/2\ , 0, 1/2\ , 0, 0)$; $\quad z_{min} = 4$.

Замечание 5.5.1. Очевидное преимущество модифицированного симплекс-метода заключается в уменьшении объёма необходимых вычислений. Другое преимущество - возможность пошагового контроля вычислений на основе проверки соотношения $B^{-1}B = I$. Из п. 5.2 следует и примерами подтверждается, что вычисляемая матрица обращенного базиса $B^{-1} = [\ \beta_{ij}\ ]$ является обратной по отношению к матрице $B(i,j) = A[\ i,\ NB(j)\ ]$. Например, после шага 3 примера из п. 5.4 имеем проверочное соотношение

$$\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 & -7/4 \\ -3/4 & -1/4 & 9/4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

в котором второй сомножитель, матрица B, получена из исходной матрицы A при извлечении из неё столбцов в порядке, определяемом указателем

$NB = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}$.

5.6 Алгоритм модифицированного симплекс - метода с искусственными переменными

Алгоритм из п. 5.4 предполагает, что исходный вид задачи делает очевидным стартовое БДР. Это то же самое предположение, что было принято в пп. 3.2 и 3.3. Однако часто оно не выполняется, что возникает при ограничениях типа "больше или равно", когда они не заменены (умножением на -1) на "меньше или равно"или при ограничениях типа "равно". Чтобы в этих случаях стартовать все же из БДР, применяют искусственные переменные с искусственной целевой функцией, равной их сумме. В п. 3.6 этот прием изложен для обычного симплекс-метода. Сейчас его покажем для модифицированного симплекс-метода, проводя параллели с п. 5.4. К началу алгоритма исходный вид задачи должен быть подобен следующему:

$$\begin{bmatrix} G & | & I \\ --- & | & ----- \\ c^T & | & 0^T = \pi^T \\ -- & | & ----- \\ d^T & | & 0^T = \sigma^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ -- \\ z \\ -- \\ w \end{bmatrix}, \quad b \geq 0.$$

Это означает, что $x = (x^F, x^B)$ и стартовое БДР $= (b, 0)$. Для основной целевой функции z имеем коэффициенты c^T и симплекс-множители π^T (они сначала равны нулю). Для искусственной целевой функции w имеем коэффициенты d^T и симплекс-множители σ^T (они сначала также нулевые).

Должны быть выполнены два этапа. Этап 1 - минимизация искусственной целевой функции w для порождения БДР к началу этапа 2. Этап 2 - минимизация основной целевой функции z ; здесь из задачи уже удалены: искусственная целевая функция w и искусственные переменные. На этапе 1 все действия выполняют так же, как описано в п. 5.4, но одновременно с двумя парами коэффициентов: (c^T, π^T) и (d^T, σ^T) . При этом для этапа 1 определяющей является пара (d^T, σ^T) , поскольку именно она связана с минимизируемой искусственной целевой функцией w. На этапе же 2 остаются в работе лишь первая пара (c^T, π^T) и минимизируемая основная целевая функция z .

Нет необходимости приводить детальное описание алгоритма, поскольку оно, с учетом отмеченных особенностей этапов 1 и 2, полностью соответствует описанию алгоритма п. 5.4. Достаточно привести пример.

Пример 5.6.1. Для $x_1, x_2 \geq 0$ решить задачу

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & \geq & 9 \\ x_1 & + & 4x_2 & = & z \ \rightarrow \ \min \end{array}$$

Сравним с примерами из п. 4.2 и п. 5.5, где решается эта же задача, но без искусственных переменных. Там это заставило, соответственно, применить не обычный, а двойственный симплекс-метод (п. 4.2) или модифицированный двойственный симплекс-метод (п. 5.5).

Решение. Исходная запись задачи такова:

2	2	0	0	1	0	0	7
2	3	−1	0	0	1	0	6
2	6	0	−1	0	0	1	9
1	4	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0

От неё нужно перейти к корректному исходному виду задачи, чтобы иметь $\sigma^T = 0^T$. Выше на месте σ^T имеем значения $\boxed{0 \ \ 1 \ \ 1}$, что означает $w = x_6 + x_7$. Для получения $\sigma^T = \boxed{0 \ \ 0 \ \ 0}$ выполняют так называемое подготовительное вычитание. Оно, очевидно, означает исключение искусственных переменных x_6 и x_7 из представления искусственной целевой функции w и всегда сводится к вычитанию из первоначальной строки для w (нижняя строка таблицы) суммы тех строк ограничений, в которые искусственные переменные, здесь x_6 и x_7 , входят как базисные переменные с коэффициентами 1 (по диагонали блока единичной матрицы I). Здесь вычтем вторую и третью строку из последней строки таблицы :

Шаг 0.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc|c}
\multicolumn{8}{c}{A} \\
\scriptstyle 1 & \scriptstyle 2 & \scriptstyle 3 & \scriptstyle 4 & \scriptstyle 5 & \scriptstyle 6 & \scriptstyle 7 & \\
\hline
2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\
2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
2 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 9 \\
\hline
1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-4 & -9 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -15 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NB \\
5 \\ 6 \\ 7
\end{array}
\quad
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{NF} \\
1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4
\end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0,0,0,0,7,6,9) = \text{БДР}, \qquad 0 = -z, \quad -15 = -w.$$

Теперь задача приобрела корректный исходный вид, и при этом z и w имеют правильные исходные значения : $z = 0,\ w = 15$.

Этап I (следуем алгоритму из п. 5.4, используя в качестве определяющей пару (d^T, σ^T) и в качестве "попутной"пару (c^T, π^T)).

Шаг 1.

(1) $d'^T = \sigma^T G + d^T$; $\quad c'^T = \pi^T G + c^T$. Так как в начале алгоритма имеем $\sigma^T = 0$ и $c^T = 0$, то $d\,'^T = d^T$, $c'^T = c^T$, здесь $d\,'^T = \boxed{-4 \;\; -9 \;\; 1 \;\; 1}$, $c'^T = \boxed{1 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 0}$, $(d'^T, \sigma^T) = (-4, -9, 1, 1, 0, 0, 0)$
$\Rightarrow \quad l = 2,\ s = 2,\ d_s^{\,'} = -9,\ c'_s = 4.$

(2) $a'_s = B^{-1} a_s = a_s = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, так как сейчас $B = I$. Имеем

$$b' = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} . \quad \min\left(\frac{7}{2}, \frac{6}{3}, \frac{9}{6}\right) = \frac{9}{6} \quad \Rightarrow \quad k = 3, \quad a'_{ks} = 6.$$

(3)

$$\begin{array}{ccc} NB & NF & b^+ \\ \boxed{\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 2 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{r} 4 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{array}} \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} z^+ & = & z - c'_s b^+_k & = & 0 - 4 * 3/2 & = & -6 \\ w^+ & = & w - {d_s}' b^+_k & = & -15 + 9 * 3/2 & = & -3/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} B^{-1} \\ \boxed{\begin{array}{ccr} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{array}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} \pi^{+T} & & \pi^T & & \beta_k^T & & c'_s \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; -2/3} & = & \boxed{0 \;\; 0 \;\; 0} & - & \boxed{0 \;\; 0 \;\; 1/6} & * & \boxed{4} \\ \\ \sigma^{+T} & & \sigma^T & & \beta_k^T & & {d_s}' \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 3/2} & = & \boxed{0 \;\; 0 \;\; 0} & - & \boxed{0 \;\; 0 \;\; 1/6} & * & \boxed{-9} \end{array}$$

$$\text{БР} = (0,\ 3/2,\ 0,\ 0,\ 4,\ 3/2,\ 0) = \text{БДР}\ , \quad z = 6\ , \quad w = 3/2\ .$$

Примечание. Последние два равенства определяют истинные значения z и w . Их надо отличать от z, z^+, w w^+, используемых в действии (3) на каждом шаге в качестве вычисляемых величин, знак которых всегда противоположен знаку истинных величин z и w.

Шаг 2.

(1)

$$\begin{array}{c} d\,'^T \\ \boxed{\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}} \\ \begin{array}{cccc} \underline{1} & 2 & \underline{3} & \underline{4} \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \sigma^T \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3/2 \end{array}} \\ \begin{array}{ccc} 5 & 6 & \underline{7} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} G \\ \boxed{\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \end{array}} \end{array} + \begin{array}{c} d^T \\ \boxed{\begin{array}{cccc} -4 & -9 & 1 & 1 \end{array}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} c'^T \\ \boxed{\begin{array}{cccc} -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \end{array}} \\ \begin{array}{cccc} \underline{1} & 2 & \underline{3} & \underline{4} \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \pi^T \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -2/3 \end{array}} \\ \begin{array}{ccc} 5 & 6 & \underline{7} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} G \\ \boxed{\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \end{array}} \end{array} + \begin{array}{c} c^T \\ \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 0 & 0 \end{array}} \end{array}$$

Просматриваем $(d\,'^T, \sigma^T)$ через $NF = (1, 7, 3, 4)$, подчеркнутые элементы, чтобы найти наиболее отрицательный элемент. Находим $l = 1$, $s = 1$, $d_s\,' = -1$. Смотрим через NF на (c'^T, π^T) и по $s = 1$ находим $c'_s = -1/3$.

(2)

$$a'_s = B^{-1} a_s = \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{array}} \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{r} 4/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{array}} \quad ; \qquad b' = \boxed{\begin{array}{r} 4 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{array}}$$

$$\min\left(\frac{4}{4/3}, \frac{3/2}{1}, \frac{3/2}{1/3}\right) \quad \Rightarrow \quad k = 2, \quad a'_{ks} = 1.$$

(3)

$$\begin{array}{c} NB \\ \boxed{\begin{array}{c} 5 \\ 1 \\ 2 \end{array}} \end{array} \quad \begin{array}{c} NF \\ \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \end{array}} \end{array} \quad \begin{array}{c} b^+ \\ \boxed{\begin{array}{r} 2 \\ 3/2 \\ 1 \end{array}} \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} z^+ & = & z - c'_s b_k^+ & = & -11/2 \\ w^+ & = & w - d_s\,' b_k^+ & = & 0 \end{array}$$

Появление $w := w^+ = 0$ означает предварительный признак успешного окончания этапа I, при этом уже ясно, что

$$\text{БР} = (3/2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0) = \text{БДР}, \quad z = 11/2.$$

Чтобы проверить окончательный признак и перейти далее к этапу II, продолжаем вычисления.

$$\overset{B^{-1}}{\boxed{\begin{array}{lrr} 1 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{array}}} \quad \overset{\pi^T}{\boxed{0\ \ 1/3\ \ -5/6}} := \overset{\pi^T}{\boxed{0\ \ 0\ \ -2/3}} - \overset{\beta_k^T}{\boxed{0\ \ 1\ \ -1/2}} \overset{*\,c_s'}{\boxed{-1/3}}$$

$$\overset{\sigma^T}{\boxed{0\ \ 1\ \ 1}} := \overset{\sigma^T}{\boxed{0\ \ 0\ \ 3/2}} - \overset{\beta_k^T}{\boxed{0\ \ 1\ \ -1/2}} \overset{*\,d_s{}'}{\boxed{-1}}$$

Примечание. Как уже отмечалось, в модифицированных алгоритмах симплекс-метода всегда можно проконтролировать правильность вычислений по соотношению:

$$\overset{B^{-1}}{\boxed{\begin{array}{lrr} 1 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{array}}} * \overset{B}{\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}}} = \overset{I}{\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}}\,.$$

При этом матрицу B находим из исходной (сохраняемой) записи задачи, извлекая неё столбцы по номерам через NB. В данном случае эти номера $NB = (5, 1, 2)$.

Шаг 3.

(1)

$$\underset{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \underline{3} & \underline{4} \end{array}}{\overset{d\,'^T}{\boxed{0\ \ 0\ \ 0\ \ \ \ 0}}} = \underset{\begin{array}{ccc} 5 & \underline{6} & \underline{7} \end{array}}{\overset{\sigma^T}{\boxed{0\ \ 1\ \ \ \ 1}}} \overset{G}{\boxed{\begin{array}{ccrr} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \end{array}}} + \overset{d^T}{\boxed{-4\ \ -9\ \ 1\ \ 1}}$$

$$\underset{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \underline{3} & \underline{4} \end{array}}{\overset{c'^T}{\boxed{0\ \ 0\ \ -1/3\ \ 5/6}}} = \underset{\begin{array}{ccc} 5 & 6 & 7 \end{array}}{\overset{\pi^T}{\boxed{0\ \ 1/3\ \ -5/6}}} \overset{G}{\boxed{\begin{array}{ccrr} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \end{array}}} + \overset{c^T}{\boxed{1\ \ 4\ \ 0\ \ 0}}$$

Смотрим на элементы $(d\,'^T, \sigma^T)$ через $NF = (6, 7, 3, 4)$. Среди них нет отрицательных и, кроме того, $w = 0$. Это окончательный признак успешного завершения этапа I. Далее, на этапе II искусственные переменные x_6, x_7 и искусственная целевая функция w уже не нужны. Также не нужны $(d\,'^T, \sigma^T)$, и мы переходим к просмотру (c'^T, π^T) через $NF = (6, 7, 3, 4)$, где номера 6 и 7 игнорируем.

Этап II (продожаем шаг 3, действие (1)). В результате просмотра имеем $l = 3$, $s = 3$, $c'_s = -1/3$.

(2)

$$a'_s \;=\; B^{-1}a_s \;= \boxed{\begin{array}{lrr} 1 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{array}} \boxed{\begin{array}{r} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{r} 4/3 \\ -1 \\ 1/3 \end{array}} \quad ; \qquad b' = \boxed{\begin{array}{r} 2 \\ 3/2 \\ 1 \end{array}}$$

Замечание 5.6.1. Нужна вся матрица B^{-1}, чтобы найти a'_s, несмотря на только что отмеченную дальнейшую ненужность искусственных переменных. То же самое относится и к π^T, что будет видно ниже на шаге 4, (1).

$$\min\left(\frac{2}{4/3}, \infty, \frac{1}{1/3}\right) \quad \Rightarrow \quad k = 1, \quad a'_{ks} = 4/3.$$

(3)

$$\begin{array}{ccc} NB & NF & b^+ \\ \boxed{\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} 6 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{r} 3/2 \\ 3 \\ 1/2 \end{array}} \end{array} \quad z^+ \;=\; z - c'_s b^+_k \;=\; -11/2 - (-1/3)(3/2) \;=\; -5$$

$$\begin{array}{c} B^{-1} \\ \boxed{\begin{array}{rrr} 3/4 & -1 & 1/4 \\ 3/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{array}} \end{array} ; \qquad \begin{array}{c} \pi^T \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 1/4 & 0 & -3/4 \end{array}} \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} \pi^T \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 1/3 & -5/6 \end{array}} \end{array} \quad -$$

$$
- \quad \overset{\beta_k^T}{\boxed{3/4 \quad -1 \quad 1/4}} * \overset{c'_s}{\boxed{-1/3}}
$$

$$
\text{БР} = (3, 1/2, 3/2, 0, 0) = \text{БОР}, \quad z_{\min} = 5\ .
$$

Однако факт, что решение задачи найдено и имеет этот вид, будет обнаружен лишь на следующем шаге 4.

Шаг 4.

(1)

$$
\begin{array}{c}
c'^T \\
\boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 3/4} \\
{\scriptstyle 1 \quad 2 \quad 3 \qquad \underline{4}}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\pi^T \\
\boxed{1/4 \quad 0 \quad -3/4} \\
{\scriptstyle \underline{5} \qquad 6 \qquad 7}
\end{array}
\begin{array}{c}
G \\
\boxed{\begin{array}{rrrr} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \end{array}}
\end{array}
+
\begin{array}{c}
c^T \\
\boxed{1 \quad 4 \quad 0 \quad 0}
\end{array}
$$

Через $NF = (6, 7, 5, 4)$, в котором номера 6 и 7 уже игнорируют, смотрим на (c'^T, π^T) и обнаруживаем, что среди чисел $(3/4, 1/4)$ нет отрицательных. Это и указывает на конец работы и достижение базисного оптимального решения (БОР).

Замечание 5.6.2. Надо вычислять c'^T полностью, поэтому нужно иметь π^T целиком, то есть вместе с элементами, которые имеют номера 6 и 7, хотя это номера игнорируемых искусственных переменных. Иными словами, эти номера игнорируют только при просмотре строки (c'^T, π^T).

5.7 Модифицированный двойственный симплекс-метод с искусственными переменными

В п. 4.3 изложен двойственный симплекс-метод без корректного вида базиса в том случае, когда среди ограничений есть ограничения типа -"и только ими обусловленно применение искусственных переменных и искусственной целевой функции на этапе I в варианте обычного симплекс-метода; при этом задача такова, что необходимость применения двойственного симплекс-метода обнаруживается на этапе II. Данная ситуация рассмотрена в применении к немодифицированному алгоритму. Сейчас на том же примере, что в п. 4.3, покажем применение модифицированного алгоритма. При этом на этапе I будет работать алгоритм из п. 5.4 (точнее, из п. 5.6), а на этапе II будет работать алгоритм из п. 5.5.

Пример 5.7.1. Для $x_1, x_2 \geq 0$ решить задачу:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & \geq & 9 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 2x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & z \rightarrow \min . \end{array}$$

Во всех модифицированных алгоритмах базис должен быть корректным по виду, то есть должен быть образован в исходном виде столбцами единичной матрицы. Поэтому неравенства типа " $\geq$ " должны быть умножены предварительно на -1 для приведения их к виду " $\leq$ ". С учетом этого исходный вид задачи характеризуется таблицей:

Шаг 0.

$$\begin{array}{|rrrrrr|r|} -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ -2 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Переменная x_6, очевидно, искусственная, и нижняя строка отведена для коэффициентов и значения искусственной целевой функции w. Её исходное значение пока неверное, так как x_6 пока ещё не исключена из нижней строки, чтобы ввести x_6 в базис применительно к w. Сделав это подготовительное исключение, получим верное стартовое состояние:

$$
\begin{array}{|rr|cccc|r|}
\hline
-2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\
-2 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & NF \\
1 & \boxed{1} \\
2 & \boxed{2}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0, 0, -6, -9, 4, 7) \neq \text{БДР}, \quad 0 = z,\ 7 = w.$$

Теперь исходный вид задачи подобен указанному в п. 5.6 с тем отличием, что не выполнено $b \geq 0$, т.е. исходные БР $\neq$ БДР.

Этап 1 (минимизация искусственной целевой функции w). По нижней строке, отведенной для w, распознаем, что должен быть применен обычный модифицированный симплекс-метод (п. 5.4 и п. 5.6).

Шаг 1.

(1) $d'^T = \sigma^T G + d^T$; $\quad c'^T = \pi^T G + c^T$. Так как в начале $\sigma^T = 0$ и $\pi^T = 0$, то $d\,'^T = d^T$, $c'^T = c^T$, $d\,'^T = (-2, -2)$, $c'^T = (1, 2)$; $\quad (d'^T, \sigma^T) = (-2, -2, 0, 0, 0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad l = 1,\ s = 1$, $d_s{}' = -2,\ c'_s = 1$.

(2) $a'_s = B^{-1} a_s = a_s = (-2, -2, 1, 2)^T, \quad b' = (-6, -9, 4, 7)^T$. $\min(\infty, \infty, 4/1, 7/2) = 7/2 \quad \Rightarrow \quad k = 4, \quad a'_{ks} = 2$.

(3)

$$
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
6 \\ 2 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
b^+ \\
\begin{array}{|r|}
\hline
1 \\ -2 \\ 1/2 \\ 7/2 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcr}
z^+ & = & z - c'_s b_k^+ & = & -7/2; \quad b' := b^+ \\
w^+ & = & w - d_s{}' b_k^+ & = & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
B^{-1} & & \pi^T & := & \pi^T & - & \beta_k^T & * \, c'_s \\
\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}} & &
\begin{array}{c} \boxed{0\ \ 0\ \ 0\ \ -1/2} \\[4em] \sigma^T \\ \boxed{0\ \ 0\ \ 0\ \ 1} \end{array} &
\begin{array}{c} \\[4em] := \\ \end{array} &
\begin{array}{c} \boxed{0\ \ 0\ \ 0\ \ 0} \\[4em] \sigma^T \\ \boxed{0\ \ 0\ \ 0\ \ 0} \end{array} &
\begin{array}{c} \\[4em] - \\ \end{array} &
\begin{array}{c} \boxed{0\ \ 0\ \ 0\ \ 1/2} \\[4em] \beta_k^T \\ \boxed{0\ \ 0\ \ 0\ \ 1/2} \end{array} &
\begin{array}{c} \boxed{1} \\[4em] * \, d_s{}' \\ \boxed{-2} \end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (7/2, 0, 1, -2, 1/2, 0) \neq \text{БДР}, \quad z = 7/2, \ w = 0$$

Шаг 2.

(1)

$$
\begin{array}{ccccccc}
d\,'^T & & \sigma^T & & G & & d^T \\
\boxed{0\ \ 0} & = & \boxed{0\ \ 0\ \ 0\ \ 1} & * & \boxed{\begin{array}{cc} -2 & -3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}} & + & \boxed{-2\ \ -2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
c'^T & & \pi^T & & G & & c^T \\
\boxed{0\ \ 1} & = & \boxed{0\ \ 0\ \ 0\ \ -1/2} & * & \boxed{\begin{array}{cc} -2 & -3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}} & + & \boxed{1\ \ 2}
\end{array}
$$

Смотрим на элементы (d'^T, σ^T) через $NF = (6, 2)$. Так как среди них нет отрицательных и $w = 0$, то этап I успешно завершен. Далее при просмотрах строки (c'^T, π^T) шестой элемент, соответствующий искусственной переменной x_6, игнорируем, то есть просмотр производим только через оставшийся второй элемент $NF : l = 2, \ NF(l) = 2$.

Этап II (продолжаем шаг 2, действие (1)).

Просмотр сообщает о переходе к двойственному симплекс-методу (см. замечание 4.2.1), причем здесь применяем модифицированный алгоритм (п. 5.5).

$$(\mathbf{1})\quad b'^T = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{-1} & \multicolumn{1}{c|}{-2} & \multicolumn{1}{c|}{1/2} & \multicolumn{1}{c|}{7/2} \\ \hline \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad k = 2.$$

$$(\mathbf{2})\qquad \overset{a_k'^T}{\boxed{\begin{array}{c|c} 0 & -4 \end{array}}} = \overset{\beta_k^T}{\boxed{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}}} * \overset{G}{\boxed{\begin{array}{rr} -2 & -3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}}} \quad ; \quad a_k'[NF(2)] = -4 < 0.$$

$$\min_{j=NF(2)} \left(\frac{(c'^T, \pi^T)}{\mid a_{kj}' \mid} \right) = \min \left(\frac{1}{\mid -4 \mid} \right) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad l = 2,\ s = 2,\ c_s' = 1.$$

$$(\mathbf{3})\quad a_s' = \boxed{\begin{array}{cccr} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{c} -3 \\ -6 \\ 1 \\ 2 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{array}} \quad ; \quad a_{ks}' = -4.$$

(4) Обновление :

$$(\mathbf{a})\quad NB = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{5} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} \qquad NF = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{6} & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array}$$

$$(\mathbf{b})\quad b'^T = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3/2} & \multicolumn{1}{c|}{1/2} & \multicolumn{1}{c|}{1/2} & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$(\mathbf{c})\quad z^+ = -7/2 - 1 * 1/2 = -4$$

$$(\mathbf{d})\quad B^{-1} = \boxed{\begin{array}{crcr} 1 & -1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}}$$

$$\textbf{(e)}\quad \overset{\pi^T}{\boxed{0\;\;1/4\;\;0\;\;-1/4}} := \overset{\pi^T}{\boxed{0\;\;0\;\;0\;\;-1/2}} -$$

$$-\overset{\beta_k^T}{\boxed{0\;\;-1/4\;\;0\;\;-1/4}} * \overset{c'_s}{\boxed{1}}$$

$$\textbf{(f)}\quad \underset{1\quad 2}{\overset{c'^T}{\boxed{0\;\;0}}} := \underset{3\quad 4\qquad 5\qquad (6)}{\overset{\pi^T}{\boxed{0\;\;1/4\;\;0\;\;-1/4}}} * \overset{G}{\boxed{\begin{array}{cc} -2 & -3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}}} + \overset{c^T}{\boxed{1\;\;2}}$$

Шаг 3. **(1)** См. b' выше, $\Rightarrow$ конец.

БР=(3, 1/2, 3/2, 0, 1/2)=БДР=БОР, $z_{\min} = 4$.

Глава 6

Особые случаи

6.1 Вырожденный базис

Пример 6.1.1. Для $x_1, x_2 \geq 0$ решить задачу

$$\begin{array}{rcrcl} -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & z \;\to\; \min\,. \end{array}$$

Используем обычный симплекс-метод.

Шаг 0.

$$\begin{array}{|rrrrr|r|} \hline -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} NB \\ \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ 4 \\ 5 \\ \hline \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} NF \\ \begin{array}{c|c|} \cline{2-2} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ \cline{2-2} \end{array} \end{array}$$

$$\text{БР} = (0, 0, 2, 4, 8) = \text{БДР}, \quad z = 0.$$

Шаг 1.

(1) $l = 2,\ s = 2.$

$$\textbf{(2)}\min\left(\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{8}{1}\right) = \min(2, 2, 8).$$

Выберем $k = 1$ (хотя есть вариант $k = 2$).

(3) после нормировки (сохраняется тот же вид таблицы).

(4) после вычитаний:

$$
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
-2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \\
\hline
-5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
2 \\
4 \\
5 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{c|c|}
\cline{2-2}
1 & 1 \\
2 & 3 \\
\cline{2-2}
\end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0, 2, 0, \underline{0}, 6) = \text{БДР}, \quad z = -6.$$

Базисная переменная $x_4 = 0$.

Шаг 2.

(1) $l = 1,\ s = 1$.

(2) $\min(\infty, -\infty, 6/3)$. Согласно п. 3.4 и табл. 3.4.1, ситуация "запрет"$(-\infty)$ требует пересмотра значения s. Так как на этом шаге другого выбора значения s нет, вернемся к предыдущему шагу 1. Там есть другой вариант выбора k, а этот шаг 2 пока отложим.

Шаг 1'.

(2) Выберем $k = 2$, вместо $k = 1$.

(3) после нормировки: **(4)** после вычитаний:

$$
\begin{array}{c}
\\
\rightarrow \\
\\
\\
\end{array}
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
-2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
-1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
-3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\
-1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\
3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 6 \\
\hline
-1/2 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 6 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
3 \\
2 \\
5 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{c|c|}
\cline{2-2}
1 & 1 \\
2 & 4 \\
\cline{2-2}
\end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0, 2, \underline{0}, 0, 6) = \text{БДР}, \quad z = -6.$$

Базисная переменная $x_3 = 0$.

Шаг 2'.

(1) $\quad l = 1,\ s = 1.$

$$(\mathbf{2}) \min\left(\infty, \infty, \frac{6}{3/2}\right) \quad \Rightarrow \quad k = 3.$$

(3) после нормировки: **(4)** после вычитаний:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{array}
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
-3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\
-1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 4 \\
\hline
-1/2 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 6 \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \\
0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 4 \\
1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 8 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c} NB \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \hline \\ \end{array}
\quad
\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{NF} \\ \cline{2-2} 1 & \multicolumn{1}{|c|}{5} \\ 2 & \multicolumn{1}{|c|}{4} \\ \cline{2-2} \\ \\ \end{array}$$

$$\uparrow$$

$$\text{БР} = (4, 4, 6, 0, 0) = \text{БОР}, \quad z_{\min} = -8.$$

Как видно, данный ответ на ситуацию "запрет"$(-\infty)$ позволил успешно завершить процесс решения. Попробуем её наличие игнорировать, продолжая отложенный шаг 2 следующим образом.

Шаг 2.

(1) $\quad l = 1,\ s = 1.$

(2) $\min(\infty, -\infty, 6/3)$. Выберем $k = 2$.

(3) после нормировки: **(4)** после вычитаний:

$$
\to
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
-2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\
3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \\
\hline
-5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\to
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 & 2 \\
1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \\
\hline
0 & 0 & -1/3 & 5/3 & 0 & 6 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
2 \\ 1 \\ 5 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
4 \\ 3 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (\underline{0}, 2, 0, 0, 6) = \text{БДР}, \quad z = -6.$$

Базисная переменная $x_1 = 0$.

Шаг 3.

(1) $l = 2,\ s = 3.$

(2) $\min(\infty, \infty, 6/1)$. Выберем, вопреки правилам табл. 3.4.1, $k = 2$.

(3) после нормировки: **(4)** после вычитаний:

$$
\to
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 & 2 \\
-3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \\
\hline
0 & 0 & -1/3 & 5/3 & 0 & 6 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\to
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
-1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\
-3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\
3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 6 \\
\hline
-1/2 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 6 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
2 \\ 3 \\ 5 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|}
\hline
4 \\ 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0, 2, \underline{0}, 0, 6) = \text{БДР}, \quad z = -6.$$

Базисная переменная $x_3 = 0$.

Шаг 4.

(1) $l = 2,\ s = 1.$

$$(\mathbf{2}) \min\left(\infty, \infty, \frac{6}{3/2}\right).$$

Выберем, вопреки правилам табл. 3.4.1, $k = 2$.

(3) после нормировки: **(4)** после вычитаний:

$$
\begin{array}{c}
\\ \rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
-1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\
1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\
3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 6 \\
\hline
-1/2 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 6 \\
\hline
\uparrow & & & & & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 & 2 \\
1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \\
\hline
0 & 0 & -1/3 & 5/3 & 0 & 6 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NB \\
\boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 5 \end{array}}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NF \\
\boxed{\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array}}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (\underline{0}, 2, 0, 0, 6) = \text{БДР}, \quad z = -6.$$

Базисная переменная $x_1 = 0$.

Объяснение происходящему при таком образе действий явлению **зацикливания** имеется простое. Объективная его причина - наложение вершин допустимого многогранника. В данном случае в точке $(x_1, x_2) = (0, 2)$ пересекаются три ограничительных линии: (1) $x_1 = 0$; (2) $x_3 = 0$, то есть $-2x_1 + x_2 = 2$; (3) $x_4 = 0$,то есть $-x_1 + 2x_2 = 4$. Это означает совпадение в этой точке трех вершин: (1) пересечение линий $x_1 = 0$ и $x_3 = 0$; (2) пересечение линий $x_1 = 0$ и $x_4 = 0$; (3) пересечение линий $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$. Естественно, значения целевой функции в этих вершинах одинаковы, $z = -6$. . Мы переходим из одной такой вершины в другую, фактически оставаясь в одной и той же точке, если пройдем шаг 1, шаг 2 и далее действуем так, как выбрано на шагах 3 и 4. Эти переходы соответствуют следующему графу (рис. 6.1.).

Как видно, неудачны действия на шагах 2, 3 и 4. Общее в них то, что выбранная для нормировки (ведущая) строка, ее номер $k = 2$, имеет нулевое значение $b'_k = 0$ для базисной переменной от предыдущего шага:

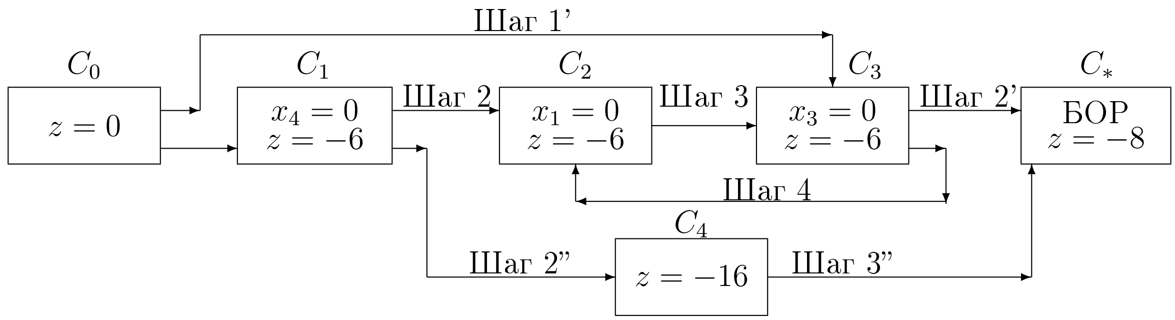


Рис. 6.1: Граф решения с возможным зацикливанием: C_0 - исходное состояние; C_* - оптимальное состояние; C_1, C_2, C_3 - состояния в одной из трех совпадающих вершин, в которых одна из базисных переменных (соответственно, x_4, x_1, x_3) равна нулю; C_4 - за пределами допустимой области.

для шага 2 это $b'_k = 0$ есть значение $x_4 = 0$; для шага 3 это $b'_k = 0$ есть значение $x_1 = 0$; для шага 4 это $b'_k = 0$ есть значение $x_3 = 0$.

Базис, в котором хотя бы одна базисная переменная равна нулю, называют **вырожденным**. Следовательно, он и является потенциальной причиной зацикливания, и эта причина становится актуальной, если действовать подобным образом.

Программа для ЭВМ должна быть настолько мощной, чтобы избежать возможного зацикливания по указанной объективной причине. Данциг предлагает изменять правые части ограничений так, чтобы к ним искусственно добавить малые величины ε^i, где $i = 1, 2, \ldots, m$; i - номер ограничения. Благодаря этому первоначально совпадающие вершины "разводятся", но затем в найденном приближенном решении нужно положить $\varepsilon = 0$.

Другой способ избежания зацикливания уже показан на этом примере: шаг 1', шаг 2'(см. рис. 6.1). Шаг 1, ведущий в состояние C_1, сам по себе не содержит неудачных действий, но шаг 2 уже заводит в цикл $C_2 \leftrightarrow C_3$ (рис. 6.1). Поэтому можно ещё иначе избежать попадания в цикл, если после шага 1 (и состояния C_1) действовать следующим образом.

Шаг 2".

(1) $\quad l = 1,\ s = 1.$

(2) $\min(\infty, -\infty, 6/3)$. Выберем, $k = 3$.

(3) после нормировки: **(4)** после вычитаний:

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \rightarrow \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
-2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 & 2 \\
\hline
-5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\
\hline
\uparrow & & & & &
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
0 & 1 & 1/3 & 0 & 2/3 & 6 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -6 \\
1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 4/3 & 0 & 5/3 & 16 \\
\hline
 & & \uparrow & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NB \\ \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ 4 \\ 1 \\ \hline \end{array}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NF \\ \begin{array}{c|c|} \cline{2-2} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ \cline{2-2} \end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (2, 6, 0, -6, 0) \neq \text{БДР}, \quad z = -16 < z_{\min}.$$

Вышли в точку пересечения линий $-2x_1 + x_2 = 2$ (так как $x_3 = 0$) и $x_1 + x_2 = 8$ (так как $x_5 = 0$), но уже за пределы допустимой области. Вернуться оттуда и тем самым отыскать БОР можно теперь лишь двойственным симплекс-методом (условия его применимости распознаются как выполненные по нижней строке и правому столбцу таблицы).

Шаг 3".

(1) $\quad k = 2.$

$$(\mathbf{2}) \min\left(\frac{4/3}{|-1|}, \frac{5/3}{|-1|}\right) = 4/3 \qquad \Rightarrow \quad l = 2,\ s = 3.$$

(3) после нормировки: **(4)** после вычитаний:

$$
\begin{array}{r}
\\ \rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
0 & 1 & 1/3 & 0 & 2/3 & 6 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \\
1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 4/3 & 0 & 5/3 & 16 \\
\hline
 & & \uparrow & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{|rrrrr|r|}
\hline
0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 4 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \\
1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 8 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NB \\ \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ 3 \\ 1 \\ \hline \end{array}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
NF \\ \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ 4 \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (4, 4, 6, 0, 0) = \text{БОР}, \quad z_{\min} = -8.$$

В заключение отметим, что даже если и попали в цикл (здесь состояния $C_2 \leftrightarrow C_3$), из него можно выйти, если действовать правильно. Например, видно, что состояние C_3 после шага 3 идентично состоянию после шага 1'. Следовательно, если после шага 3 применить шаг 2', то выход из цикла обеспечен. Точно так же можно выйти к финальному (оптимальному) состоянию C_* и после состояния C_2, если действовать удачно, то есть не допускать такого выбора номера k ведущей строки, при котором значение $b'_k = 0$.

Упражнение 6.1.1. И.М.Л. Бил придумал иной пример с возможным зацикливанием:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
1/4x_1 & - & 8x_2 & - & x_3 & + & 9x_4 & \le & 0, \\
1/2x_2 & - & 12x_2 & - & 1/2x_3 & + & 3x_4 & \le & 0, \\
 & & & & x_3 & & & \le & 1, \\
-3/4x_1 & + & 20x_2 & - & 1/2x_3 & + & 6x_4 & = & z \ \to \ \min.
\end{array}$$

Пронумеруйте ограничения в этом же порядке и выбирайте пары (k, s) шаг за шагом так:(1,1), (2,2), (1,3), (2,4), (1,5), (2,6). Убедитесь, что после шага 6 задача вернётся в исходное состояние C_0, бывшее перед шагом 1. При этом состояние C_0 имеет пару базисных переменных x_5 и x_6, равных нулю. Далее, по мере выполнения указанных шагов выбора, пары нулевых базисных переменных появляются в соответствии с рис. 6.2. Если же выбирать пары (k, s) иначе, шаг 1' : $(k, s) = (3, 3)$; шаг 2' : $(k, s) = (2, 1)$, то появляющиеся после них состояния C_6 и C_* не имеют нулевых базисных переменных, причем C_* дает искомое решение: БОР$=(1, 0, 1, 0, 3/4, 0, 0)$, $\quad z_{\min} = -5/4$.

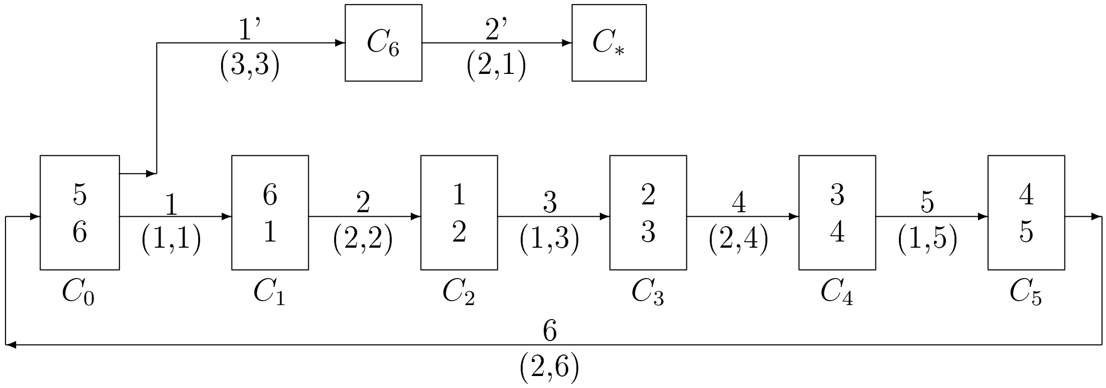


Рис. 6.2: Зацикливание и выход из цикла в задаче И.М.Л. Била

6.2 Допустимая область не ограничена

Пример 6.2.1. Для $x_1, x_2 \geq 0$ решить задачу

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & \geq & 1 \\ & & x_2 & \leq & 2 \\ -x_1 & - & x_2 & = & z \;\rightarrow\; \min . \end{array}$$

Шаг 0.

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{|rrrr|r|} \hline 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\uparrow} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} NB \\ \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ 4 \\ \hline \end{array} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} NF \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ 2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\text{БР} = (0, 0, -1, 2) \neq \text{БДР}, \quad z = 0.$$

Шаг 1.

(1) s=1.

(2) $\min(\infty, \infty),\ k = 1$.

(3) после нормировки (вид таблицы сохраняется).

(4) после вычитаний:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|cccc|c|}
\hline
1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
1 \\
4 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
3 \\
2 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (1, 0, 0, 2) = \text{БДР}, \quad z = -1.$$

Шаг 2.

(1) $s{=}2$.

(2) $\min(\infty, 2/1)$, $k = 2$.

(3) после нормировки (вид таблицы сохраняется).

(4) после вычитаний:

$$
\begin{array}{c}
\rightarrow \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|cccc|c|}
\hline
1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
1 \\
2 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
3 \\
4 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (3, 2, 0, 0) = \text{БДР}, \quad z = -5.$$

Шаг 3.

(1) $s{=}3$.

(2) $\min(\infty, \infty)$, $k = 1$.

(3) после нормировки: **(4)** после вычитаний:

$$
\begin{array}{r}
\rightarrow \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rrrr|r|}
\hline
-1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\
\hline
\multicolumn{1}{r}{} & & \uparrow & & \multicolumn{1}{r}{}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\rightarrow \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rrrr|r|}
\hline
-1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & \multicolumn{1}{r}{}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
3 \\
2 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
1 \\
4 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (0, 2, -3, 0) \neq \text{БДР}, \quad z = -2.$$

Шаг 4.

(1) $s{=}1$.

(2) $\min(\infty, \infty)$, $k = 1$.

(3) после нормировки: **(4)** после вычитаний:

$$
\begin{array}{r}
\rightarrow \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rrrr|r|}
\hline
1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & \multicolumn{1}{r}{}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\rightarrow \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|rrrr|r|}
\hline
1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\
\hline
\multicolumn{5}{c}{}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NB \\
\begin{array}{|c|}
\hline
1 \\
2 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
NF \\
\begin{array}{|c|}
\hline
3 \\
4 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

$$\text{БР} = (3, 2, 0, 0) = \text{БДР}, \quad z = -5.$$

В этой задаче решение и максимальное значение функции z не ограничены. Это можно видеть по появлению всех признаков ∞ при пользовании табл. 3.4.1 или табл. 3.5.1 (см. п. 3.4 и п. 3.5). Однако формальное продолжение алгоритма приводит к явлению зацикливания (рис. 6.3), хотя здесь базис невырожденный.

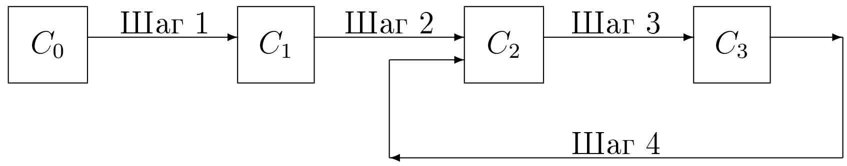


Рис. 6.3: Зацикливание в примере 6.2.1.

6.3 Допустимая область не существует

Пример 6.3.1. Для $x_1, x_2 \geq 0$ решить задачу

$$\begin{array}{rcrcll} x_1 & + & x_2 & \geq & 3 & \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 & \\ -x_1 & - & x_2 & = & z & \to \ \min\,. \end{array}$$

Шаг 0.

$$\begin{array}{c} \\ \\ \to \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{|rrrr|r|} \hline -1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\uparrow} \end{array} \qquad \begin{array}{c} NB \\ \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ 4 \\ \hline \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} NF \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ 2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\text{БР} = (0, 0, -3, 2) \neq \text{БДР}, \quad z = 0.$$

Шаг 1.

(1) $s{=}1$.

(2) $\min(\infty, 2/1) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad k = 2.$

(3) после нормировки (вид таблицы сохраняется).

(4) после вычитаний:

$$\begin{array}{c} \to \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{|rrrr|r|} \hline 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} NB \\ \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} NF \\ \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ 2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\text{БР} = (2, 0, -1, 0) \neq \text{БДР}, \quad z = -2.$$

Выполнены условия применимости двойственного симплекс-метода (п. 4.1).

Шаг 2.

(1) k=1.

(2) В k - й строке нет отрицательных элементов. Не существует базисного допустимого решения.

Глава 7

Учебные задания по линейному программированию

Все предлагаемые варианты заданий базируются на рассмотренных выше алгоритмах симплекс-метода. Таких алгоритмов десять; соответственно этому первая цифра номера варианта имеет возрастающие значения от 0 до 9. Выпишем их по порядку:

0. Обычный симплекс-метод при известном стартовом базисном решении, с корректным видом базиса. Ограничения " $\geq$ " и " $\leq$ ", при этом ограничения типа " $\geq$ " при вводе задачи заменяют на " $\leq$ " умножением их на -1. Изложен в п. 3.4.
1. Обычный симплекс-метод при известном стартовом базисном решении, без корректного вида базиса. Ограничения " $\geq$ " и " $\leq$ ". Изложен в п. 3.5.
2. Обычный симплекс-метод с порождением БДР, с искусственными переменными и искусственной целевой функцией, с корректным видом базиса. Изложен в п. 3.6. Этот алгоритм подразделен на следующие 5 вариантов заданий, отмеченных второй цифрой номера варианта и отличающихся типом ограничений, которые только и должны быть положены в основу построения программы:

2.1. Ограничения типа " $\geq$ ". (Замена ограничений " $\leq$ " на " $\geq$ " должна производиться вручную при подготовке к вводу задачи в ЭВМ).

2.2. Ограничения типа " $\geq$ " и " $\leq$ ".

2.3. Ограничения типа $-$" и " $\leq$ ". (Замена ограничений " $\geq$ " на " $\leq$ " должна производиться вручную при подготовке к вводу задачи в ЭВМ).

2.4. Ограничения типа $-$" и " $\geq$ ". (Замена ограничений " $\leq$ " на " $\geq$ " должна производиться вручную при подготовке к вводу задачи в ЭВМ).

2.5. Ограничения типа $-$", " $\geq$ ", " $\leq$ ".

3. Двойственный симплекс-метод при известном стартовом базисном решениии, с корректным видом базиса. Ограничения такого же типа, как в варианте 0. Изложен в п. 4.1.
4. Двоиственный симплекс-метод при известном стартовом базисном решении, без корректного вида базиса. Ограничения такого же типа, как в варианте 1. Изложен в п. 4.2.
5. Двойственный симплекс-метод с искусственными переменными и с искусственной целевой функцией (только для ограничения типа $-$") для порождения базисного решения (БДР) без корректного вида базиса. Изложен в п. 4.3. Этот алгоритм подразделен на следующие 3 варианта заданий, отмеченных второй цифрой номера варианта и отличающихся типом ограничений, которые только и должны быть положены в основу построения программы:

5.1. Ограничения типа $=$" и " $\leq$ ". (Замена ограничений " $\geq$ " на " $\leq$ " должна производиться вручную при подотовке к вводу задачи в ЭВМ).

5.2. Ограничения типа $=$" и " $\geq$ ". (Замена ограничений " $\leq$ " на " $\geq$ " должна производиться вручную при подготовке к вводу задачи в ЭВМ).

5.3. Ограничения типа $=$", " $\geq$ ", " $\leq$ ".

6. Модифицированный симплекс-метод (обычный) при известном стартовом базисном решении. Ограничения такого же типа, как в варианте 0. Изложен в п. 5.4.

7. Модифицированный симплекс-метод (обычный) с порождением БДР, с искусственными переменными и искусственной целевой функцией. Изложен в п. 5.6. Этот алгоритм подразделен на 5 вариантов заданий в полном соответствии следующим вариантам:

7.1. Соответствует 2.1.

7.2. Соответствует 2.2.

7.3. Соответствует 2.3.

7.4. Соответствует 2.4.

7.5. Соответствует 2.5.

8. Модифицированный симплекс-метод (двойственный) при известном стартовом базисном решении. Ограничения такого же типа, как в варианте 0. Изложен в п. 5.5.

9. Модифицированный симплекс-метод (двойственный) с искусственными переменными и искусственной целевой функцией (только для ограничений типа $=$") для порождения базисного решения ($\neq$). Изложен в п. 5.7. Ограничения соответствуют варианту 5.1.

Замечание 7.1 Варианты 6-9 (модифицированный метод) требуют корректного вида базиса : среди коэффициентов базисных переменных есть только $+1$ и нет -1. Отсюда имеем следующие 20 номеров вариантов базового уровня сложности (уровень 1):

0	1	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3	4	5.1
5.2	5.3	6	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	8	9

Следующие 50 вариантов заданий получим, вводя требование режима "Что если ?.."Это означает, что после решения задачи в рамках любого из вариантов базового уровня сложности программа должна спросить ввод одного добавочного ограничения и с этого места продолжить решение. Тип добавочного ограничения указан дополнительной цифрой, добавляемой к любому из указанных 20 номеров, в соответствии с таблицей:

$\leq$	$\geq$	$=$
1	2	3

Из этих 50 вариантов следующие 30 вариантов отнесены к продвинутому уровню сложности (уровень 2):

0.1	2.1.1	2.3.1	3.1	5.1.1
0.2	2.1.2	2.3.2	3.2	5.1.2
0.3	2.1.3	2.4.1	3.3	5.2.1
1.1	2.2.1	2.4.2	4.1	5.2.2
1.2	2.2.2	2.5.1	4.2	5.3.1
1.3	2.2.3	2.5.2	4.3	5.3.2

Остальные 20 вариантов из 50 отнесены к повышенному уровню сложности (уровень 3):

6.1	7.1.2	7.2.3	7.4.2	8.2
6.2	7.1.3	7.3.1	7.5.1	8.3
6.3	7.2.1	7.3.2	7.5.2	9.1
7.1.1	7.2.2	7.4.1	8.1	9.2

Таким образом, имеем 70 вариантов: 20 вариантов базового уровня сложности, 30 вариантов продвинутого уровня сложности и 20 вариантов повышенного уровня сложности. Выбранный студентом уровень сложности может быть соотнесен с оценкой, на которую он претендует в результате лабораторного практикума: удовлетворительно, хорошо, отлично. Поскольку варианты продвинутого и повышенного уровней сложности являются производными от вариантов базового уровня, студент может в процессе работы продвинуться на более высокий уровень, чтобы улучшить свой рейтинг.

Программа должна иметь удобный интерфейс (меню пользователя), демонстрировать индивидуальную работу студента и наиболее полно использовать возможности ЭВМ и языка программирования в целях экономии машинного времени и оперативной памяти ЭВМ. Она должна предоставлять возможности решения любых стандартных задач линейного программирования, поэтому для экономии памяти целесообразно использовать динамические объекты и переменные ссылочного типа (указатели). Рекомендуется заранее подготовить демонстрационные задачи. В качестве проверочных могут быть использованы примеры из данного практикума.

Глава 8

Программа учебных проектов по методам оптимизации

(номера вариантов)	(литература)
1. Одномерный поиск, дихотомия.	[6, 14]
2. Одномерный поиск (Фибоначчи).	[6, 10, 3, 14]
3. Одномерный поиск, золотое сечение.	[6, 10, 3, 14, 13]
4. Одномерный поиск, квадратичная интерполяция (Пауэлла).	[3]
5. Одномерный поиск, кубическая интерполяция (Давидона).	[3]
6. Многомерный поиск, покоординатный спуск.	[6, 10, 3, 13]
7. Многомерный поиск, метод Хука-Дживса.	[15, 3]
8. Многомерный поиск, метод Нелдера-Мида.	[15, 3]
9. Многомерный поиск, метод вращающихся координат (Розенброка).	[15]

10. Многомерный поиск, метод параллельных касательных (Пауэлла). [15]
11. Классический метод Ньютона. [3, 7, 10, 15]
12. Метод Ньютона-Рафсона с выбором шага дроблением. [7, 10, 15]
13. Метод наискорейшего спуска. [3, 10, 15]
14. Метод положительно определенной формулы секущих (BFGS-формула, Бройден-Флетчер-Голдфарб-Шано), нефакторизованная форма. [3, 7]
15. Метод положительно определенной формулы секущих (BFGS-формула, Бройден-Флетчер-Голдфарб-Шано), факторизованная форма. [3, 7]
16. Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла (DFP-формула). [3, 7]
17. Метод сопряженных градиентов (Флетчера-Ривса). [3, 6, 10]
18. Поиск с ограничениями, модифицированный метод Хука-Дживса. [3]
19. Поиск с ограничениями, комплексный метод Бокса. [3, 15]
20. Спуск с ограничениями, метод Франка-Вулфа. [1, 8, 12]
21. Спуск с ограничениями, метод проекции градиента. [6, 10, 15]
22. Спуск с ограничениями, метод возможных направлений. [6, 8, 10]

23. Внутренние штрафные функции,
    метод Фиакко и Маккормика. [3, 8, 6, 10, 15]
24. Внутренние штрафные функции,
    метод Эрроу-Гурвица. [1, 3, 6, 10, 15]
25. Метод внешних штрафных функций. [6, 10, 15]
26. Методы случайного поиска. [6, 11]
27. Транспортная задача, алгоритм
    последовательного улучшения плана. [4, 9]
28. Задача о назначениях,
    метод Мака. [4, 9]
29. Задача о ранце, метод
    динамического программирования. [2, 5, 9]
30. Задача коммивояжера, методы
    ветвей и границ. [9]

Заключение

В данном учебном пособии решена задача обеспечения студентов полным, тщательно выверенным набором возможных вариантов симплекс-метода для решения задач линейного программирования. Варианты заданий отличаются не по вводимым для решения задачам, а по алгоритмам, подлежащим программированию.

Пособие содержит не только необходимые теоретические сведения, но все обоснования к каждому варианту симплекс-метода, указания к организации вычислений и множество иллюстрирующих примеров. Все это делает пособие замкнутым, то есть не требующим многих обращений к дополнительой литературе для выполнения индивидуальных заданий в части линейного программирования. В этой части студент разрабатывает свой программный продукт по одному из 70 различных вариантов.

Во второй части курса студент выполняет учебный проект, также с разработкой и испытанием своего программного продукта по одному из 30 вариантов, но уже на основе самостоятельной проработки специальной литературы, в основном, по методам нелинейной оптимизации при наличии или отсутствии ограничений.

Список литературы

[1] Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студ. вузов. - М.: Высш.шк., 1986. - 319 с.: ил. (2-е изд., испр. и доп. - М.: Высш.шк.,1993. - 336 с.:ил.)

[2] Арис А. Дискретное динамическое программирование/ Пер. с англ. под ред. Б.Т.Поляка. - М.: Мир, 1969. - 172 с.:ил.

[3] Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс/ Пер. с англ. под ред. В.А.Волынского. - М.: Радио и связь, 1988. - 128 с.:ил.

[4] Банди Б. Основы линейного программирования/ Пер. с англ. под ред. В.А.Волынского. - М.: Радио и связь, 1989. - 176 с.:ил.

[5] Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования/ Пер. с англ. под ред. А.А.Первозванского. - М.: Наука, 1965. - 460.:ил.

[6] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие для студ. вузов спец. Прикладная математика. - М.: Наука, 1980. - 520 с.:ил.

[7] Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений/ Пер. с англ. под ред. Ю.Г.Евтушенко. - М.:Мир, 1988 - 440 с.:ил.

[8] Зайченко Ю.П. Исследование операций. - Киев: Вища школа, 1975. - 320 с.:ил.

[9] Кротов В.Ф. и др. Основы теории оптимального управления. - М.: Высш.шк., 1990. - 432 с.:ил.

[10] Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.Ж. Методы оптимизации: Учеб. пособие для студ. вузов спец. Прикладная математика. - М.: Наука, 1978. - 352 с.:ил.

[11] Растригин Л.А. Статистические методы поиска. - М.: Наука, 1968. - 376 с.:ил.

[12] Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы/ Пер. с фр. Л.Г.Гурина. - М.: Мир, 1973. - 244 с.:ил.

[13] Турчак Л.И. Основы численных методов: Учеб. пособие для студ. вузов. - М.: Наука, 1987. - 320 с.:ил.

[14] Уайлд Д.Дж. Методы поиска экстремума/ Пер. с англ. под ред. А.А.Фельдбаума. - М.: Наука, 1967. - 268 с.:ил.

[15] Фурунжиев Р.И., Бабушкин Ф.М., Варавко В.В. Применение математических методов и ЭВМ. Практикум: Учеб. пособие для студ. вузов спец. Прикладная математика. - Минск: Высш. школа., 1988. - 191 с.:ил.

Учебное издание

Семушин Иннокентий Васильевич

Практикум по методам оптимизации

Редактор Н. А. Евдокимова

Оригинал-макет изготовлен в системе LaTeX.

Изд. лиц. 020640 от 22.10.97. Подписано в печать .

Формат 60×84/16. Бумага писчая. Усл. печ. л. 7,67.

Уч.-изд. л. 6,85. Гарнитура Computer Modern.

Тираж 200 экз. Заказ .

Ульяновский государственный технический университет

432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.

Типография УлГТУ, 432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.