Основы теории управления
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

В начале занятий студенты получают Таблицы преобразования Лапласа. Они должны научиться пользоваться ими самостоятельно для решения задач.

Кроме этого, доказательство некоторых из этих соответствий по Лапласу предлагается студентам в виде самостоятельного упражнения.

Ниже приведены эти задания.

Задание 1. Доказать соответствия «оригинал–изображение» по Лапласу, приведенные в следующей Табл. 1, применяя теоремы о свойствах прямого преобразования Лапласа.

Таблица 1. Соответствие «оригинал–изображение» по Лапласу

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$e^{at}\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{\omega\cos\varphi+(s-a)\sin\varphi}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1	$e^{at}\cos(\omega t+\varphi)$	$\frac{(s-a)\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{(s-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	t	$\frac{1}{s^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$t\,\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2-\omega^2)^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$t\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$

Задание 2. Доказать соответствия «изображение–оригинал» по Лапласу, приведенные в следующей Табл. 2, применяя теоремы о свойствах обратного преобразования Лапласа.

Таблица 2. Оригиналы для дробно-рациональных изображений

$F(s)$	$f(t)$
$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
$\dfrac{1}{1+\tau s}$	$\dfrac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\dfrac{1}{s(s-a)}$	$\dfrac{1}{a}\left(e^{at}-1\right)$
$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
$\dfrac{b+cs}{s(s-a)}$	$-\dfrac{b}{a}+\left(c+\dfrac{b}{a}\right)e^{at}$
$\dfrac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)e^{at}$
$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$
$\dfrac{b+cs}{s^2+a^2}$	$c\cos at+\dfrac{b}{a}\sin at$
$\dfrac{1}{s^2+as+b}$ если $\quad \Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}>0\,,\quad$ то если $\quad \Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}<0\,,\quad$ то если $\quad \Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}=0\,,\quad$ то	 $\dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}e^{-\frac{at}{2}}\sin\sqrt{\Delta}t$ $\dfrac{1}{\sqrt{-\Delta}}e^{-\frac{at}{2}}\operatorname{sh}\sqrt{-\Delta}t$ $te^{-\frac{at}{2}}$
$\dfrac{b+cs}{s^2-a^2}$	$c\operatorname{ch}at+\dfrac{b}{a}\operatorname{sh}at$

Задание 3. Доказать соответствия «изображение–оригинал» по Лапласу, приведенные в следующей Табл. 3, применяя теоремы о свойствах обратного преобразования Лапласа.

Таблица 3. Оригиналы для дробно-рациональных изображений

$\boldsymbol{F(s)}$	$\boldsymbol{f(t)}$
$\dfrac{1}{s^2(s-a)}$	$\dfrac{1}{a^2}(e^{at}-1-at)$
$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)^2}$	$\dfrac{e^{at}-[1+(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\dfrac{e^{at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{bt}}{(a-b)(c-b)}+$ $+\dfrac{e^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\dfrac{1}{(s-a)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2e^{at}$
$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)^2}$	$\dfrac{ae^{at}-[a+b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\dfrac{ae^{at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{be^{bt}}{(a-b)(c-b)}+$ $+\dfrac{ce^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\dfrac{s}{(s-a)^3}$	$\left(t+\dfrac{1}{2}at^2\right)e^{at}$
$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$
$\dfrac{1}{s(s^2-a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}(\operatorname{ch} at-1)$
$\dfrac{s}{s^2+as+b}$	
если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}>0\,,$ то	$e^{-\frac{at}{2}}\left(\cos\sqrt{\Delta}t-\dfrac{a}{2\sqrt{\Delta}}\sin\sqrt{\Delta}t\right)$
если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}<0\,,$ то	$e^{-\frac{at}{2}}\left(\operatorname{sh}\sqrt{-\Delta}t-\dfrac{a}{2\sqrt{-\Delta}}\operatorname{sh}\sqrt{-\Delta}t\right)$
если $\Delta=b^2-\dfrac{a^2}{4}=0\,,$ то	$e^{-\frac{at}{2}}\left(1-\dfrac{at}{2}\right)$