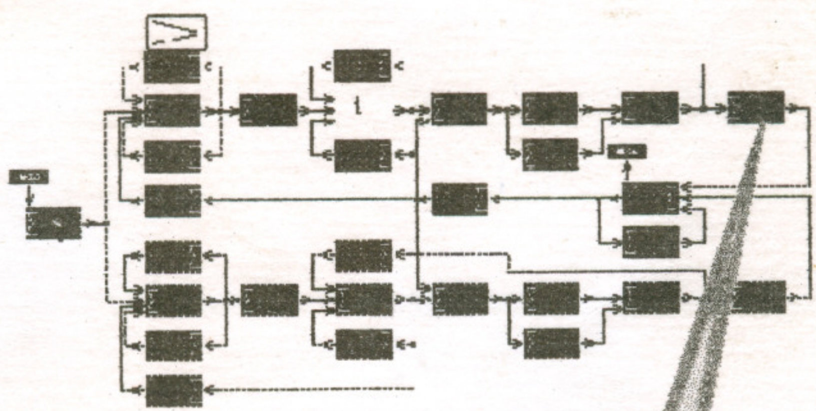
Имаев Д.Х., Ковальски З., Яковлев В.Б.,
Кузьмин Н.Н., Пошехонов Л.Б., Цапко Г.П.

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ



CLASSIC

Санкт-Петербург, Гданьск, Сургут, Томск

1998

УДК 681. 5
ББК 32. 965
И

Д.Х.Имаев, З.Ковальски, Н.Н.Кузьмин, Л.Б.Пошехонов, Г.П.Цапко, В.Б.Яковлев
«АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ» ТЕОРИЯ. МЕТОДЫ. Примеры решения типовых задач с использованием персонального компьютера.
Гданьск, Санкт Петербург, Сургут, Томск, 1997, - 172 с.

ISBN

Рассматриваются модели, задачи исследования, методы анализа и синтеза линейных динамических систем управления. Приводятся примеры решения типовых задач. Основное внимание уделено методам расчета в частотной области.

Желающим получить навыки решения конкретных задач будут полезны предлагаемые практические занятия. При наличии персонального компьютера с установленной программой *CLASSiC* такие занятия дадут возможность получить достаточно глубокие знания в области анализа и синтеза систем управления.

Предназначена для специалистов в области управления техническими объектами и процессами, преподавателей и студентов вузов.

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 550200 - "Автоматизация и управление" и специальности 210100 - "Управление и информатика в технических системах".

Глубокоуважаемому
Иннокентию Васильевичу
от Л.Б. Пошехонова,
04.04.03, конференция УИТ-2003

Предисловие

В последние десятилетия резко возрос объем материала, включаемого в курсы теории управления технических вузов. Компьютеризация обучения является сегодня, по-видимому, единственным средством, позволяющим достичь компромисса между широтой охвата материала и глубиной его освоения.

Наличие программных средств, использующих вычислительные, интерактивные и графические возможности компьютеров, дает возможность создавать привычные образы структур систем и характеристик их поведения. В случае относительно простых систем предельно упрощается построение частотных характеристик и траекторий корней, получение временных характеристик и реакций на заданные воздействия, вычисление показателей качества и т.д. Легко преобразуются друг в друга различные формы представления моделей, что позволяет отказаться от преимущественной ориентации на какую-либо одну форму. Анализ констатирующего типа, например, выявление факта устойчивости, инвариантности или малой чувствительности систем, может дополняться исследованиями, позволяющими объяснять зависимость этих свойств от принципов управления и структур систем, от алгоритмов управления и значений параметров элементов.

Применение персональных компьютеров при изучении и использовании методов теории управления требует наличия адекватного программного и методического обеспечений. Полномасштабные коммерческие программы (*MATLAB/SIMULINK* фирмы *The MathWorks, Inc.* [33], *MATRIX*$_X$ фирмы *Integrated Systems, Inc.* [28] и др.) в силу своей универсальности и ориентации на задачи проектирования сложных систем требуют значительных усилий на их освоение, что не всегда удобно при их непосредственном использовании в учебном процессе по основам теории управления. Применение программы *CC* фирмы *Systems Technology, Inc.* [35] также вызывает определенные трудности.

В последние годы получают распространение малые и средние специализированные программы для изучающих основы теории управления [32]. К классу средних можно отнести программу *CLASSiC*, разработанную сотрудниками Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета и Гданьской Политехники. Алгоритмическая основа программы *CLASSiC* во многом заимствована у комплекса программ АРДИС для СМ ЭВМ [16]. Графические и интерактивные возможности персональных компьютеров позволили создать качественно новое программное средство *CLASSiC* для компьютеров типа IBM-PC [10,27].

Книга предназначена для изучения классических, преимущественно частотных методов расчета систем управления. Применительно к одномерным системам автоматического регулирования эти методы получили широкое признание благодаря целому ряду достоинств. Богатая информативность графических образов частотных характеристик, относительная независимость отрезков характеристик на различных диапазонах частот и другие особенности частотной области позволяют наиболее естественным и наглядным образом выявлять взаимосвязи структур и поведения систем, обеспечивать декомпозицию задач анализа и синтеза, учитывать ограничения на область адекватности моделей. Использование компьютеров позволяет устранить основные недостатки частотных методов и расширить область их применения на многомерные [24,31], сложные и иерархические [13] системы. Частотные методы помогают найти решение задач в ситуациях со значительной исходной неопределенностью, а также в тех практически важных случаях, когда постановки задач синтеза формализуемы не полностью. Методы анализа и синтеза в частотной области в комбинации с другими подходами являются хорошей основой для развития человеко-машинных процедур проектирования систем управления.

Изложение каждой главы книги является относительно независимым и сопровождается множеством примеров типовых задач анализа и синтеза. Это позволит читателю найти способ решения его частной задачи без необходимости изучать книгу целиком.

В приложении предлагаются одиннадцать практических занятий для самостоятельного изучения основ теории управления или для проведения лабораторного практикума. При наличии персонального компьютера с установленным программным средством *CLASSiC* эти занятия обеспечат достаточно хороший уровень освоения материала и позволят получить навыки решения конкретных задач анализа и синтеза.

Программа *CLASSiC* чрезвычайно проста в использовании. Большинство действий, необходимых для работы с программой, являются интуитивно ясными, и на освоение ее возможностей требуется не более часа. Чтобы начать пользоваться этой программой, достаточно ознакомиться с ее описанием в приложении к данной книге.

Если Вы не имеете программы *CLASSiC* или у Вас есть какие-либо замечания или вопросы по книге, просим обращаться по адресу: 197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, 5, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, кафедра Автоматики и процессов управления. Тел. (812) 234-3798.

Авторы благодарят разработчиков программы *CLASSiC* инженеров В.Н. Богданова и А.Л. Герасимова, а также д-ра Р. Арендта и инженеров Т.Р. Белинскую, Д.С. Демидова, Д.А. Озерова за помощь при подготовке рукописи к печати.

Список основных обозначений и сокращений

M - модель
M_S - модель системы
M_F - модель среды
M_{YSF} - модель системы со средой
M_{RS} - модель расширенной системы
$\mathcal{M}$ - множество моделей
$\mathcal{W}$ - множество элементов (звеньев) системы
$\mathcal{X}$ - множество переменных
N - число элементов системы
R - ранг неопределенности модели
L - уровень иерархии модели
n - порядок системы

D, G, B, C - полиномы
D(s) - характеристический полином (ХП)
A, B, C, D - матрицы состояния, входа, выхода и обхода модели в форме пространства состояний
$\mathbb{D}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ - полиномиальные матрицы

y - управляемая переменная, выход объекта или системы
y - вектор переменных выхода
u - управляющее воздействие
f - воздействие среды, возмущение
g - задающее воздействие
e - переменная ошибки системы
x - внутренняя переменная системы
x - вектор внутренних переменных
v - переменная состояния
v - вектор переменных состояния

$p \equiv d/dt$ - оператор дифференцирования по времени
$\mathcal{L}$ - оператор преобразования Лапласа
s - комплексный аргумент
ω - круговая частота

Y(s), F(s), U(s), X(s) - изображения переменных по Лапласу
W(s), Φ(s) - передаточные функции (ПФ)
W(s) - передаточная матрица
A(ω) - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)
φ(ω) - фазовая частотная характеристика (ФЧХ)

$L(\omega)$ - логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)
$w(t)$ - импульсная переходная функция
$h(t)$ - переходная характеристика
$T(s)$, $S(s)$ - абсолютная и относительная функции чувствительности (ФЧ)
$\Delta(s)$ - определитель графа
$P(s)$, $K(s)$ - передаточные функции пути и контура графа

I - показатель качества, интегральная квадратичная оценка (ИКО)
t_p - время регулирования
σ - перерегулирование
ω_{cp} - частота среза
ω_p - резонансная частота
ΔL - запас устойчивости по модулю
$\Delta\varphi$ - запас устойчивости по фазе
η - степень устойчивости
μ - колебательность корней
M - показатель колебательности

1. МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. О моделях систем управления

Динамические модели объектов и систем управления строятся для объяснения и предсказания их поведения - изменений во времени состояния и наблюдаемых выходных переменных, вызванных внутренними процессами и/или воздействиями среды.

Изучение конкретного объекта требует его вычленения из окружающей среды, что, вообще говоря, приводит к искажению явлений, так как в природе все явления в той или иной степени взаимосвязаны и взаимообусловлены. Рассмотрение взаимодействия системы управления со средой связано с обособлением и локализацией **собственно системы S** и выделением ее **связей со средой** через переменные входа f и выхода y (рис.1.1а). Система оказывается звеном в искусственно разорванной цепи причинно-следственных отношений "среда-система-среда". Условием разрыва замкнутого контура взаимодействия является слабое влияние контура на изучаемые процессы. В противном случае необходимо расширять границы системы, включив в нее существенные замкнутые взаимодействия.

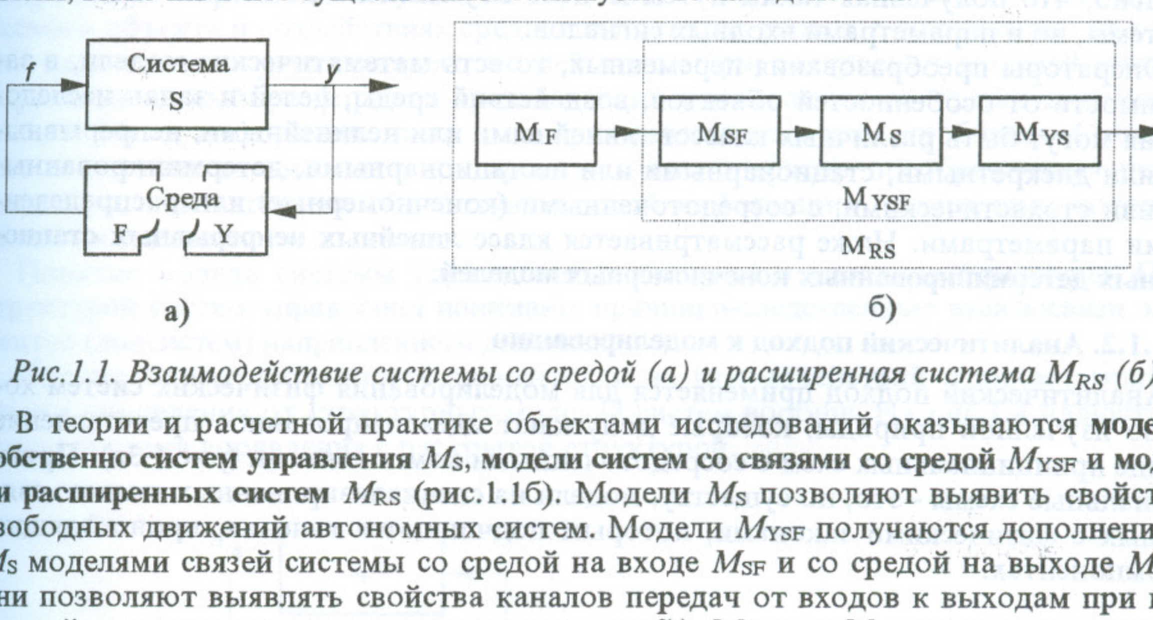


Рис.1.1. Взаимодействие системы со средой (а) и расширенная система M_{RS} (б)

В теории и расчетной практике объектами исследований оказываются **модели собственно систем управления** M_S, **модели систем со связями со средой** M_{YSF} **и модели расширенных систем** M_{RS} (рис.1.1б). Модели M_S позволяют выявить свойства свободных движений автономных систем. Модели M_{YSF} получаются дополнением M_S моделями связей системы со средой на входе M_{SF} и со средой на выходе M_{YS}; они позволяют выявлять свойства каналов передач от входов к выходам при неполной определенности о переменных входа $f(t)$. Модели M_{RS} получаются дополнением M_{YSF} моделями среды M_F и привлекаются для изучения вынужденных движений переменных выхода $y(t)$ при адекватных моделях воздействий.

В зависимости от объема и характера априорной информации о системе M_{RS} используются различные подходы к моделированию: экспериментальный (идентификационный) или аналитический.

1.1.1. Экспериментальный подход к моделированию

В том случае, когда природа объекта изучена недостаточно или слишком сложна для аналитического описания, для построения математических моделей прибегают к так называемому методу "черного ящика" (рис.1.2). Изучая и обрабатывая входные $f(t)$ и выходные $y(t)$ сигналы, можно идентифицировать реально существующие и доступные для экспериментального исследования объекты - построить модели в терминах "вход-выход", представляющие собой операторы преобразования переменных

$$y(t) = \mathrm{w}\,\{f(t)\}\,.$$

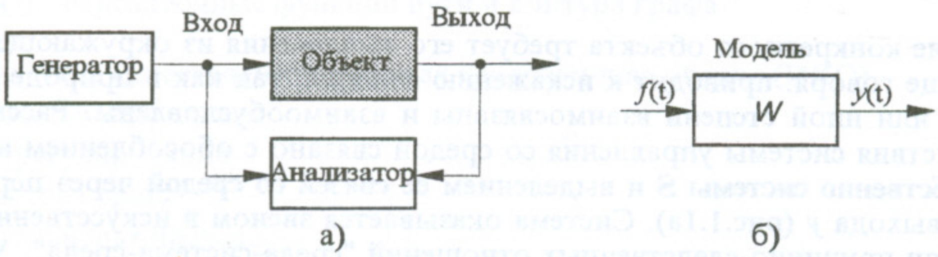


Рис.1.2. Экспериментальное исследование системы (а) и модель "вход-выход" (б)

Ясно, что полученная таким путем модель обусловлена не только свойствами системы, но и параметрами входных сигналов.

Операторы преобразования переменных, то есть математические модели, в зависимости от особенностей объектов, воздействий среды, целей и задач исследования могут быть различных классов: линейными или нелинейными, непрерывными или дискретными, стационарными или нестационарными, детерминированными или стохастическими, с сосредоточенными (конечномерные) или распределенными параметрами. Ниже рассматривается класс **линейных непрерывных стационарных детерминированных конечномерных моделей.**

1.1.2. Аналитический подход к моделированию

Аналитический подход применяется для моделирования физических систем хорошо изученной природы, которые допускают идеализированное представление в виде принципиальных схем с сосредоточенными компонентами (рис.1.3а). Принципиальные схемы - это, по существу, модели на специализированных языках, связанных с физическими законами, которым подчиняются явления, происходящие в компонентах.

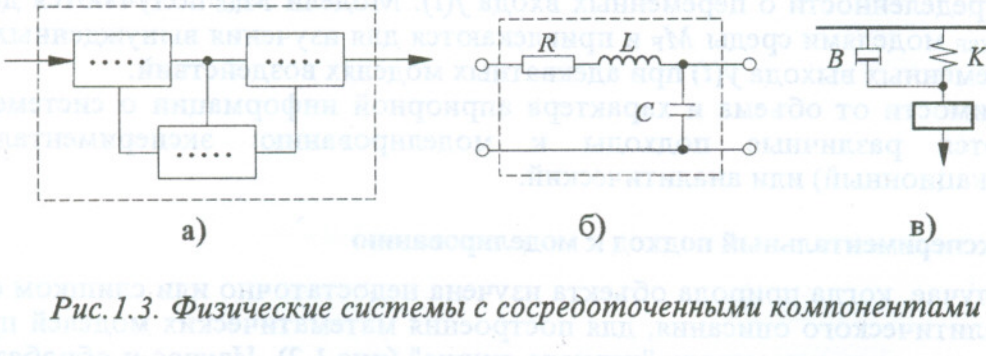


Рис.1.3. Физические системы с сосредоточенными компонентами

Представителями физических систем с сосредоточенными компонентами служат электрические цепи (рис.1.3б). Резисторы (R), конденсаторы (C) и индуктивности

(*L*) являются пассивными компонентами схемы. В механических схемах (рис.1.3в) аналогичную роль играют механическое сопротивление (вязкое трение *B*), масса (*M*) и упругость (*K*). Идентичные компоненты можно выделить в системах и иной физической природы: акустических, гидравлических, тепловых, смешанных. Аналитически обрабатывая информацию, содержащуюся в принципиальных схемах, можно получить математические модели в требуемой форме.

Связи между компонентами и внутренними переменными структурных моделей физических систем не ориентированы, а взаимодействия систем со средой - ориентированы; поэтому выделяются входы и выходы систем (рис.1.3,а).

На практике, когда об объекте имеется частичная априорная информация, комбинируются оба подхода к моделированию - аналитический и экспериментальный.

1.1.3. Особенности структурных моделей систем управления

Особенностью математических моделей систем управления является то, что они не только содержат априорную информацию о динамических свойствах, необходимую для изучения поведения системы в целом, но также отражают процессы получения и обработки текущей информации о цели системы, состоянии управляемого объекта и воздействиях среды для принятия решения по оказанию на объект надлежащего управляющего воздействия. При построении моделей систем управления и выборе форм их представления учитываются не только динамические, а также информационные и алгоритмические аспекты проблемы. Систему или ее элемент можно интерпретировать и как оператор преобразования переменных, и как алгоритм обработки текущей информации, носителями которой являются сигналы.

Понятие модели системы управления неотделимо от понятия структуры. **Под структурой систем управления понимают причинно-следственные взаимосвязи элементов (подсистем) направленного действия.**

Именно ориентированность элементов и их взаимодействий отличает модель систем управления от структурных моделей систем вообще. На рис.1.4 иллюстрируется система управления с раскрытой структурой.

Рис.1.4. Система управления с раскрытой структурой

Построению моделей систем управления с раскрытой структурой предшествует выделение частей, рассматриваемых как преобразователи сигналов. Моделирование "по частям" связано с принятием допущения об однонаправленности элементов. Элементы, как правило, выделяются по функциональному признаку, причем сами эти функции понимаются в контексте операций управления: объект управления; измерительные, преобразовательные и усилительные элементы; управляющее устройство; исполнительный механизм. Например, элемент 2 в системе, изображенной на рис.1.4, может соответствовать объекту управления, элементы 1 и 4 - управляющему устройству, а элемент 3 - датчику обратной связи.

1.1.4. Многоуровневые структуры систем управления

Модели в терминах "вход-выход" (рис.1.2б) и структурные модели физических систем (рис.1.3), с точки зрения специалиста по управлению, имеют нулевой уровень причинно-следственной структуры. Модель, изображенная на рис.1.4, имеет первый уровень. Дальнейшее раскрытие структур подсистем приводит к многоуровневым моделям.

Раскрытие структуры системы или подсистемы означает переход к нижележащему уровню исследования. В зависимости от глубины раскрытия структуры получаются модели различных уровней причинно-следственной интеграции $L = 0,1,2,...$. На рис.1.5 иллюстрируется модель системы второго уровня ($L = 2$), построенная на подсистемах первого уровня ($L = 1$). Иерархический подход к моделированию, анализу и синтезу позволяет разработать методы исследования и проектирования сложных систем управления.

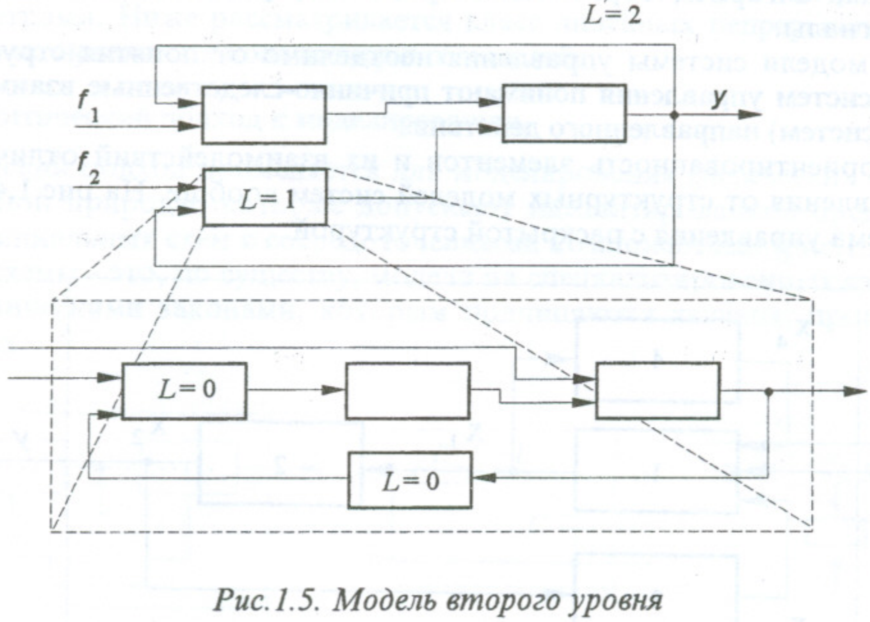


Рис.1.5. Модель второго уровня

В силу одного из основных принципов системологии - принципа рекуррентного объяснения [13] - поведение системы L-го уровня объясняется свойствами подсистем непосредственно нижележащего - (L-1)-го - уровня и особенностями их взаимосвязей. Ниже ограничимся рассмотрением моделей нулевого (L=0) и первого (L=1) уровней.

1.2. Модели систем управления в терминах "вход-выход"

Модели в терминах "вход-выход" (рис.1.2б) - операторы преобразования входных переменных систем в выходные - могут быть представлены в различных формах.

1.2.1. Дифференциальные уравнения

Математические модели рассматриваемого класса представляются в форме обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$d_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + d_1 \frac{dy}{dt} + d_0 y = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f\,. \qquad (1.1)$$

Более компактная запись дифференциального уравнения (1.1) получается при использовании символа $p \equiv d/dt$ оператора дифференцирования по времени:

$$D(p)\, y(t) = B(p)\, f(t)\,, \qquad (1.2)$$

где $D(p)$ и $B(p)$ - операторные полиномы.

Системы с несколькими входами и выходами (многомерные системы) описываются совокупностью уравнений

$$D_{qr}(p)\, y_q(t) = B_{qr}(p)\, f_r(t)\ ;\ q = 1, \dots, k\ ;\ r = 1, \dots, l\ ,$$

попарно связывающих переменные входа f_r и выхода y_q.

Уравнения (1.1), (1.2) являются моделями M_{YSF} системы со связями со средой. Модель M_S собственно системы описывается однородным дифференциальным уравнением

$$D(p)\, y\,(t) = 0. \qquad (1.3)$$

Модели M_{SF} - связи системы со средой на входе - отвечает операторный полином $B(p)$, а модель M_{YS} - связи системы со средой на выходе - в этом случае получается тривиальной ($y \equiv y$).

Дифференциальные уравнения (1.1) - (1.3) дополняются начальными условиями $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$, отражающими предысторию системы.

Модели "вход-выход" появляются в результате моделирования объектов и систем управления в целом при недостаточной априорной информации о внутренней организации или при ее игнорировании. Вместе с тем можно говорить о структуре оператора, представляемого в форме дифференциальных уравнений (1.1) - (1.2). После указания степеней n и m операторных полиномов D и B для полной определенности оператора остается только конкретизировать значения коэффициентов этих полиномов.

1.2.2. Передаточные функции

Преобразование дифференциального уравнения (1.2) по Лапласу при нулевых начальных условиях формально сводится к замене символа p оператора дифференцирования по времени на символ комплексного аргумента *s*. В результате вместо дифференциального уравнения получим алгебраическое

$$D(s)\ Y(s) = B(s)\ F(s),$$

где: F(*s*) и Y(*s*) - изображения переменных входа и выхода; D(*s*) и B(*s*) - полиномы комплексного аргумента с теми же коэффициентами, что и операторные полиномы D(*p*) и B(*p*).

Передаточная функция (ПФ), по определению, равна отношению изображений переменных при нулевых начальных условиях, т.е.

$$W(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{B(s)}{D(s)}. \tag{1.4}$$

Многомерные системы описываются передаточными матрицами

$$\mathbf{W}(s) = \left\{ W_{qr}(s) = B_{qr}(s) / D_{qr}(s) \right\}, \tag{1.5}$$

связывающими векторы изображения переменных входа **F**(s) и выхода **Y**(s)

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{W}(s)\ \mathbf{F}(s).$$

В частном случае одномерная система имеет один вход и один выход, а свернутая форма оператора представляет собой одно дифференциальное уравнение *n*-го порядка или одну передаточную функцию. Это случай обыкновенного **звена** классической теории автоматического регулирования.

В более общем случае линейное звено суммирует переменные входа (если их несколько) и преобразует сумму в соответствии с оператором звена в переменную выхода

$$x_i = w_i \left(\sum_j x_j \right).$$

Таким образом, линейное звено общего вида (рис.1.6а) - это обыкновенное звено, дополненное сумматором - рис.1.6б.

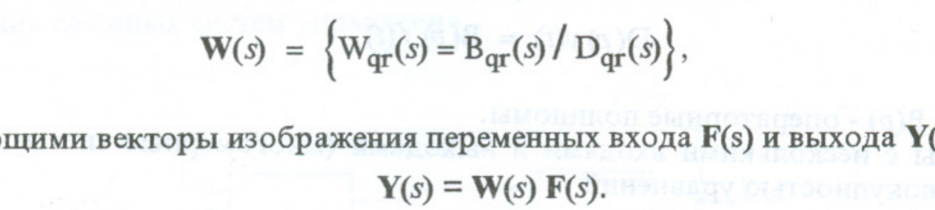


Рис.1.6. Линейное звено общего вида

1.2.3. Частотные характеристики

Частотные методы анализа и синтеза систем управления, в основном, используют модели в форме передаточных функций и частотных характеристик, связывающих изображения переменных по Лапласу и Фурье.

Частотные характеристики элементов и систем представляют собой зависимости между входными и выходными гармоническими сигналами всех частот в установившихся режимах.

Частотные характеристики получаются из передаточной функции (1.4) при рассмотрении только чисто мнимых значений комплексного аргумента, т.е. при подстановке $s = j\omega$, $\omega \geq 0$:

$$W(s)\Big|_{s=j\omega} = W(j\omega) = A(\omega)\exp\big(j\varphi(\omega)\big). \tag{1.6}$$

Здесь $A(\omega)$ - **амплитудная**, а $\varphi(\omega)$ - **фазовая частотные характеристики.** Часто используются **логарифмические амплитудные частотные характеристики** (ЛАЧХ)

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega).$$

1.2.4. Временные характеристики

Оператор преобразования переменной входа системы управления $f(t)$ в переменную выхода $y(t)$ может быть представлен в форме временной характеристики. В качестве **временных характеристик** часто принимают **импульсную переходную функцию** (функцию веса) $w(t)$ - реакцию системы на единичный идеальный импульс $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях. Переменная выхода определяется в виде интеграла свертки

$$y(t) = \int_0^t w(\tau) f(t-\tau)d\tau.$$

Другая временная характеристика - **переходная характеристика** $h(t)$ - реакция системы на единичную ступенчатую функцию $1(t)$ при нулевых начальных условиях.

Отметим, что частотные и временные характеристики относятся к неструктурированной форме представления оператора.

1.3. Системы дифференциальных уравнений

1.3.1. Системы дифференциальных уравнений различных порядков

В результате аналитического подхода к моделированию получаются математические модели в форме систем дифференциальных уравнений различных порядков:

$$\sum_{j=1}^{N} D_{ij}(p)\, x_j(t) = \sum_{r=1}^{l} B_{ir}(p)\, f_r(t); \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1.7}$$

$$y_q(t) = \sum_{i=1}^{N} C_{qi}(p)\, x_i(t)\,; \qquad q = 1,\dots,k\,.$$

В этих уравнениях $x_i(t)$ - внутренние переменные системы, а операторные полиномы $D_{ij}(p)$, $B_{ir}(p)$, $C_{qi}(p)$ могут быть любых, в том числе нулевых степеней.

Каждое из уравнений (1.7) обычно отражает физический закон, которому подчиняются явления, происходящие в выделенных сосредоточенных компонентах системы. При этом связи между компонентами не обязательно имеют односторонний характер. В силу этого отдельные уравнения системы (1.7) не имеют причинно-следственной формы [3], т.е. не уточняется, которая из переменных в каждом уравнении является следствием остальных. Важно подчеркнуть, что уравнения (1.7) хотя и раскрывают внутреннюю организацию объекта, однако эта информация не может считаться структурой в том смысле, как это принято в теории управления.

В векторно-матричной форме уравнения (1.7) записываются так:

$$\mathbb{D}(p)\,\mathbf{x}(t) = \mathbb{B}(p)\,\mathbf{f}(t);$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbb{C}(p)\,\mathbf{x}(t)\,, \tag{1.8}$$

где: **x**, **f**, **y** - векторы переменных: внутренних, входа и выхода;

$\mathbb{D}(p)$, $\mathbb{B}(p)$, $\mathbb{C}(p)$ - матрицы операторных полиномов соответствующих размеров.

Уравнения (1.7), (1.8) описывают модель M_{YSF} системы со связями со средой. Модель M_S собственно системы имеет вид однородных дифференциальных уравнений

$$\mathbb{D}(p)\,\mathbf{x}(t) = 0, \tag{1.9}$$

а модели M_{SF} и M_{YS} связей системы со средой задаются операторными матрицами $\mathbb{B}(p)$ и $\mathbb{C}(p)$ соответственно.

1.3.2. Дифференциальные уравнения в форме пространства состояний

При определенных условиях системы дифференциальных уравнений (1.1) - (1.3) и (1.7) - (1.9) допускают запись в форме Коши - системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно первых производных

$$\frac{dv_1}{dt} = a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}\,v_n + \dots + b_{i1}f_1 + \dots + b_{il}f_l\;;\; i = 1,\dots, n\,, \tag{1.10}$$

дополненной уравнениями выходов:

$$y_q(t) = c_{q1}v_1 + \dots + c_{qn}v_n ; \quad q = 1, \dots, k . \qquad (1.11)$$

Уравнения (1.10), (1.11) в векторно-матричной форме пространства состояний в терминах **"вход-состояние-выход"** записываются так:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{f} ; \qquad (1.12)$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{v},$$

где: **v** - n-мерный вектор переменных состояния;
f - l- мерный вектор переменных воздействия;
y - k-мерный вектор выходных переменных;
A, B, C - числовые матрицы соответствующих размеров.

Модель M_S собственно системы в форме пространства состояний имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v}, \qquad (1.13)$$

матрица **B** представляет модель M_{SF} связи системы со средой на входе, а матрица **C** - модель M_{YS} связи системы со средой на выходе.

Форма пространства состояний (1.12) является частным случаем модели вида (1.8) со следующими матрицами:

$$\mathbb{D}(p)=(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) ; \qquad \mathbb{B} = \mathbf{B} ; \qquad \mathbb{C} = \mathbf{C}, \qquad (1.14)$$

где **I** - единичная матрица .

Между переменными состояния v_i в общем случае нет причинно-следственной связи. Вектор состояния **v** в уравнениях (1.12) может быть выбран с точностью до невырожденного преобразования.

1.4. Структурные схемы и графы систем управления

Графы являются универсальным средством описания структур систем. **Граф** - понятие теоретико-множественное - это **отношение на множестве**. При небольшом числе элементов и связей весьма наглядны диаграммы графов, т.е. их геометрические образы. В силу указанных выше особенностей структурных моделей систем управления в теории управления чаще всего используются ориентированные графы.

В зависимости от элементов множеств рассматриваются различные типы графов.

1.4.1. Структурные схемы (*C*-графы)

Структурная схема является ориентированным графом и состоит из множества вершин $\mathscr{W} = \{w_1, \dots, w_N\}$ и множества дуг $\mathscr{X} = \{(w_i, w_j)\}$ - упорядоченных пар вершин [7]. Дугам графа соответствуют переменные x_i ; i = 1,...,N, а в вершинах происходит суммирование переменных и преобразование сумм в соответствии с передаточными функциями:

$$X_i(s) = W_i(s)\sum_j X_j(s)\,. \qquad (1.15)$$

Для того чтобы отличать рассматриваемый граф от сигнальных графов других типов, назовем его **С-графом.** На языке теории бинарных отношений *С*-граф определяется как пара множеств

$$\mathcal{C} = <\mathcal{W}, \mathcal{X}>,$$

а структурная схема - геометрический образ - называется также диаграммой графа (рис.1.7).

Вершина *С*-графа - звено общего вида, по определению суммирует переменные заходящих дуг. Это позволяет отказаться от специального элемента суммирования, что отличает *С*-графы от классических структурных схем.

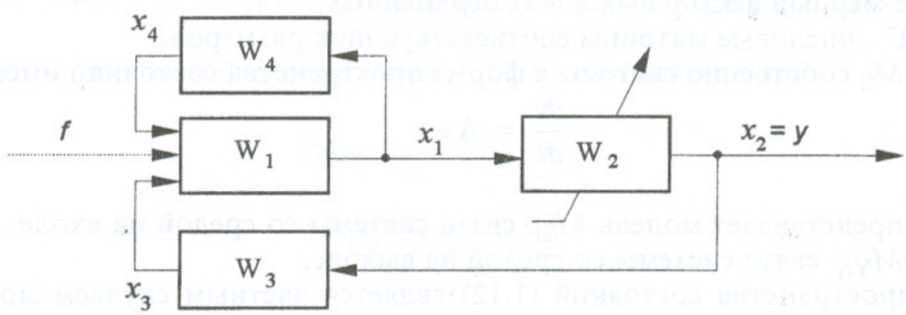


Рис.1.7. Структурная схема (С-граф)

Дуга *С*-графа - элемент (w_i, w_j) отношения $\mathcal{X}$ - задает причинно-следственную связь между двумя звеньями, причем выход j-го звена является входом i-го. Дуге (w_i, w_j) соответствует переменная x_j.

Теоретико-множественное описание систем дает естественный способ ввода и редактирования моделей систем управления как **последовательного раскрытия неопределенности** [7, 13]. Для этого модели упорядочиваются по **рангам неопределенности** $R = 0,1,2,3$.

Множество $\mathcal{W}$ звеньев задает модель нулевого ранга $M_S(0)$. Для примера *С*-графа, диаграмма которого изображена на рис.1.7, множество перечисляется так:

$$\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}\,.$$

В случае однотипных звеньев можно ограничиться заданием числа вершин графа (звеньев), т.е. мощности множества $|\mathcal{W}| = N = 4$.

Дополнение модели $M_S(0)$ множеством $\mathcal{X}$ дает модель первого ранга $M_S(1)$ - это **топология** (топография) системы. Для примера *С*-графа (рис.1.7) множество перечисляется так:

$$\mathcal{X} = \{(1,3), (1,4), (2,1), (3,2)\}\,.$$

В перечислении приведены только индексы (номера) звеньев.

Дальнейшее раскрытие неопределенности достигается при задании структур операторов вершин. Для рассматриваемого класса систем передаточные функции являются отношениями полиномов:

$$W_i(s) = \frac{B_i(s)}{D_i(s)}. \tag{1.16}$$

Задание их структур сводится к указанию степеней m_i и n_i полиномов B_i и D_i. Когда для всех звеньев заданы структуры операторов, образуется модель системы структурного ранга M(2).

Пусть для рассматриваемого примера системы (рис.1.7) передаточные функции звеньев имеют вид:

$$W_1(s) = k_1\,;\ W_2(s) = k_2/(1+T_2 s)^2\,;\ W_3(s) = -1;\ W_4(s) = -\tau_4 s/(1+T_4 s).$$

Информацию о структуре можно закодировать массивами степеней полиномов числителей и знаменателей передаточных функций:

$$\{0,0,0,1\} \text{ и } \{0,2,0,1\}.$$

Результатом конкретизации значений всех коэффициентов полиномов является полностью определенная модель третьего, параметрического ранга M_S (3).

Выше изложено описание собственно системы (автономной системы). Для описания связей системы со средой следует указать звено, ко входу которого подается воздействие, и звено, выход которого является выходом системы. На примере *C*-графа (рис.1.7) номер входного звена r = 1, а выходного - q = 2. В результате оказывается определенной модель системы со связями со средой M_{YSF} (3).

При изучении влияния вариаций звеньев на характеристики системы указывается варьируемое звено. На рис.1.7 им является звено W_2.

1.4.2. Сигнальные графы

Сигнальный граф или граф Мэзона (Mason) является одной из удобных в теории и расчетной практике форм представления моделей систем управления.

Модель системы в форме сигнального графа определяется как бинарное отношение $\mathcal{W}$ на множестве переменных $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_N\}$:

$$\mathcal{G} = <\mathcal{X}, \mathcal{W}>.$$

Элементам отношения $\mathcal{W} = \{(x_i, x_j)\}$ ставятся в соответствие операторы преобразования переменных. На диаграммах сигнальных графов переменным отвечают вершины, где суммируются сигналы заходящих дуг, а элементам отношения - дуги.

Способы задания моделей различных рангов в форме сигнальных графов - те же, что и для *C*-графов.

На рис.1.8 изображена диаграмма сигнального графа - модель топологического ранга, несущая ту же информацию о системе, что и структурная схема (рис.1.7).

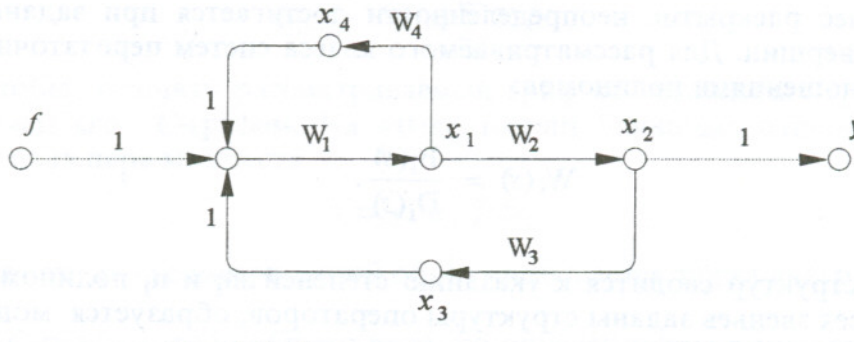


Рис.1.8. Диаграмма сигнального графа

В заключение подчеркнем, что формы представления моделей и способы их отображения могут быть различными - символьными или алгебраическими (уравнения, матрицы), геометрическими или топологическими (диаграммы графов). Однако информация о моделях различных рангов R последовательно раскрывается описанием множеств, задающих: R=0 - состав элементов; R=1 - топологию причинно-следственных связей между ними; R=2 - структуры операторов; R=3 - параметры.

Теоретико-множественное представление структур систем в форме графов обеспечивает формализацию описания моделей, упрощает их кодирование и графическое отображение, а также разработку алгоритмов анализа систем. На базе C-графов построено описание систем управления в программе *CLASSiC* для персональных компьютеров класса IBM PC [6, 10], а на базе графа Мэзона - описание систем в программе *АРДИС* для СМ ЭВМ [16].

1.5. Модели среды и расширенной системы

Модель среды на входе системы управления M_F (рис.1.1б) - это совокупность воздействий f_r ; r = 1,...,l. Совокупность моделей среды на входе системы M_F и модели системы со связями со средой M_{YSF} образует модель расширенной системы M_{RS} (рис.1.9).

Воздействия могут задаваться как функции времени. Наиболее часто принимаются следующие типы воздействий:

$$f_r(t) = \delta(t); \quad F_r(s) = 1$$

- единичная δ-функция;

$$f_r(t) = 1(t); \quad F_r(s) = 1/s$$

- единичное ступенчатое воздействие;

$$f_r(t) = \left(\frac{t^\lambda}{\lambda!}\right) 1(t); \quad F_r(s) = \frac{1}{s^{\lambda+1}}; \quad \lambda = 1, 2, \ldots \tag{1.17}$$

- степенное воздействие (при λ = 0 имеем единичное ступенчатое воздействие);

$$f_r(t) = (\sin \omega t)\, 1(t); \quad F_r(s) = \frac{\omega}{(\omega^2 + s^2)} \tag{1.18}$$

- гармоническое воздействие единичной амплитуды.

Другим способом задания модели среды M_F является подключение ко входу системы так называемых формирующих фильтров. Некоторое "воздействие - первопричина" $f_0(t)$ преобразуется так, чтобы получить требуемое воздействие $f_r(t)$ на входе системы (рис.1.9).

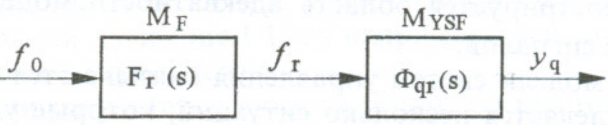


Рис.1.9. Модель расширенной системы M_R

Если в качестве воздействия $f_0(t)$ принять δ-функцию, то ПФ формирующего фильтра равна изображению воздействия:

$$F_r(s) = \mathcal{L}\{f_r(t)\}.$$

Если же принять $f_0(t) = 1(t)$, ПФ формирующего фильтра равна

$$F_r(s) = s\,\mathcal{L}\{f_r(t)\}.$$

Пусть, например, на вход системы подано гармоническое воздействие среды (1.18). Если принять за "воздействие-первопричину" $f_0 = 1(t)$, то ко входу системы подключается формирующий фильтр с ПФ

$$F_r(s) = \frac{\omega\, s}{(\omega^2 + s^2)}. \tag{1.19}$$

1.6. Неопределенность моделей систем управления

Математические модели не отражают исчерпывающим образом динамические свойства систем управления в силу идеализаций и упрощений, неизбежных при моделировании, неточной реализации алгоритмов управления и изменений характеристик объектов и других элементов в процессе эксплуатации. Если изменения характеристик происходят достаточно медленно по сравнению с длительностью процессов управления, то вместо нестационарных моделей (например дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами) можно рассматривать множества стационарных моделей.

Модели систем управления строятся для строго оговоренных условий взаимодействия со средой, и их адекватность оригиналам определяется и характеристиками воздействий. Значения параметров, структура операторов и класс операторов зависят от амплитуд изменения и частотного спектра сигналов.

Линейные модели обычно строят для малых отклонений переменных от выбранных установившихся режимов. Если амплитуды сигналов превышают некоторое определенное значение А, то приходится строить нелинейные модели, как правило, учитывающие всевозможные ограничения в реальных элементах. Иногда область адекватности линейных моделей ограничивается малыми амплитудами α, для которых следует учитывать такие нелинейные явления, как зона нечувствительности, сухое трение и др.

Выбранные структуры операторов (порядки дифференциальных уравнений) обеспечивают адекватность моделей по отношению к сигналам, частоты которы не превышают заданного предела. Границу **области адекватности** Ω обычно удает- ся несколько расширить путем усложнения структуры операторов.

На рис.1.10 иллюстрируется область адекватности моделей на плоскости ам- плитуд a и частот ω сигналов.

Таким образом, модели систем управления оказываются не полностью опреде- ленными. Здесь выделяется несколько ситуаций, которые удобно систематизиро- вать с помощью введенных ранее рангов неопределенности моделей $R = 0,1,2,3$.

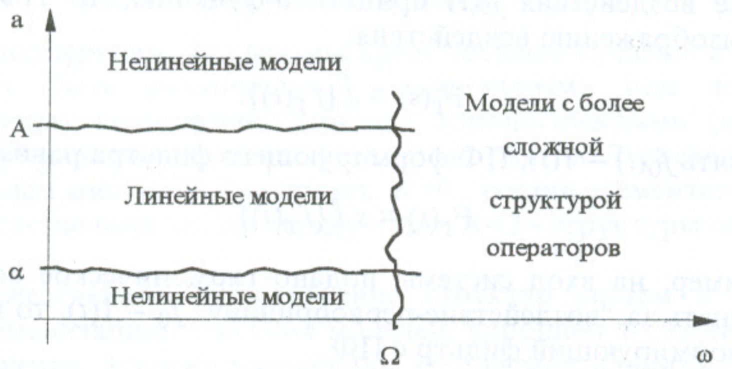


Рис.1.10. Иллюстрация областей адекватности модели

Прежде всего заметим, что менее определенные модели низких рангов R' пред- ставляют собой множества более определенных моделей высших рангов R'' :

$$M(R') \subseteq \{M(R'')\};\ R' < R''.$$

Модель второго ранга $M(2)$ есть множество моделей третьего ранга $\{M(3)\}$ элементы которого различаются значениями параметров. На рис.1.11а условно изображен сигнальный граф G, причем, подграф G' определен полностью. Выде- ленной дуге (a,b) соответствует передаточная функция, параметры которой при- надлежат заданному множеству Q. Следовательно, имеет место множество моде- лей с различными параметрами - это случай структурированной неопределен- ности.

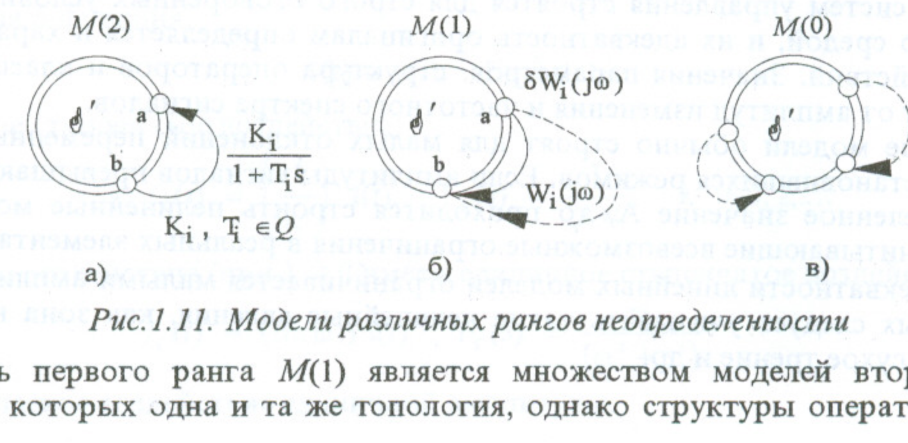


Рис.1.11. Модели различных рангов неопределенности

Модель первого ранга $M(1)$ является множеством моделей второго ранг $\{M(2)\}$, у которых одна и та же топология, однако структуры операторов могу различаться. В общем случае элементы содержат неструктурированную неопределенность, например в виде аддитивных вариаций передаточных функций или частотных характеристик $\delta W_i(j\omega)$ дуг графа (рис.1.11б).

Модель нулевого ранга *M*(0) представляет собой множество моделей первого ранга {*M*(1)} с различной топологией. В простейшем случае графы различаются местом включения одной дуги (рис.1.11в), например дуги, моделирующей регулятор или корректирующее устройство.

При интерпретации результатов анализа и синтеза необходимо всегда иметь в виду неполную определенность моделей и учитывать ограниченность области их адекватности. Анализ наряду с выявлением основных свойств поведения систем управления должен включать и исследование чувствительности характеристик к вариациям параметров, структур операторов и топологии систем. Процедуры синтеза должны обеспечивать **робастность** систем управления, когда вариации характеристик элементов мало сказываются на процессах управления.

1.7. Взаимосвязи между дифференциальными уравнениями и графами

Между дифференциальными уравнениями и графами, как различными формами представления информации о динамических свойствах систем управления, имеется вполне определенная взаимосвязь.

Как указывалось, ориентированные графы несут значительно большую информацию о системе управления по сравнению с системами дифференциальных уравнений в непричинно-следственной форме. Поэтому переход от графов к уравнениям является однозначным, а обратный переход в общем случае не однозначен.

1.7.1. Запись дифференциальных уравнений по графу

Для получения по *C*-графу модели в форме системы дифференциальных уравнений вначале записываются алгебраические уравнения для изображений переменных вида (1.15). Далее, формальной заменой символа комплексного аргумента *s* на оператор дифференцирования по времени $p \equiv d/dt$, получаются дифференциальные уравнения.

Полиномиальные матрицы системы (1.8) непосредственно заполняются по *C*-графу. Диагональными элементами полиномиальной матрицы $\mathbb{D}$ являются полиномы знаменателей передаточных функций звеньев (1.16), а ненулевыми недиагональными элементами - полиномы числителей, взятые с обратными знаками, т.е.:

$$D_{ij}(s) = \begin{cases} D_i(s), & i = j; \\ -B_i(s), & (i, j) \in \mathcal{X}, \quad i \neq j; \\ 0, & (i, j) \notin \mathcal{X}, \quad i \neq j. \end{cases}$$

Матрица $\mathbb{B}(s)$ имеет отличные от нуля элементы $B_r(s)$ в r-х строках, где r - номера входных блоков. Матрица $\mathbb{C}$ состоит из единиц и нулей, причем единицы располагаются в столбцах с номерами q выходных блоков.

Полученная система дифференциальных уравнений имеет причинно-следственную форму.

Получим вид матриц $\mathbb{D}$ и $\mathbb{B}$ для примера C-графа, диаграмма которого изображена на рис.1.7. Система уравнений для изображений переменных запишется так:

$$x_1 = W_1(x_3 + x_4 + f);$$
$$x_2 = W_2 x_1;$$
$$x_3 = W_3 x_2;$$
$$x_4 = W_4 x_1.$$

Учитывая выражения для передаточных функций звеньев (1.16), получим после приведения к общему знаменателю и переноса части членов в левую часть:

$$\begin{aligned} D_1 x_1 - B_1 x_3 - B_1 x_4 &= B_1 f; \\ -B_2 x_1 + D_2 x_2 &= 0; \\ -B_3 x_2 + D_3 x_3 &= 0; \\ -B_4 x_1 + D_4 x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Введем вектор переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ и запишем уравнение в компактной форме (1.8). Соответствующие матрицы имеют вид:

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & -B_1 & -B_1 \\ -B_2 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & -B_3 & D_3 & 0 \\ -B_4 & 0 & 0 & D_4 \end{bmatrix}; \qquad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbb{C} = [\ 0 \quad 0 \quad 0\ ].$$

Обратим внимание на то, что структура матрицы задает топологию системы - модель $M(1)$. Действительно, пары номеров строк и столбцов (i, j) ненулевых элементов вне главной диагонали в точности образуют множество $\mathcal{X}$.

1.7.2. Построение графов по дифференциальным уравнениям

Для построения ориентированного графа система дифференциальных уравнений (1.8) предварительно преобразуется по Лапласу, в результате чего получается система алгебраических уравнений для изображений переменных. При нулевых начальных условиях эта операция сводится к формальной замене символа оператора дифференцирования $p \equiv d/dt$ на символ комплексного аргумента s.

Алгоритм построения графа Мэзона по системе уравнений складывается из следующих операций:

- выбирается такая последовательность уравнений, в которой каждое i-е уравнение содержит переменную $x_i\ (s)$;
- каждое i-е уравнение делится на полином $D_{ii}\ (s) \neq 0$;

- слагаемые с переменными x_j ; $j \neq i$, вида $(D_{ij}/D_{ii})x_j$ переносятся в правые части уравнений.

Полученная причинно-следственная форма записи уравнений, по сути, является графом Мэзона.

Для любой системы уравнений (1.8), (1.9) с невырожденной матрицей существует такая последовательность уравнений, когда все элементы D_{ii} главной диагонали матрицы $\mathbb{D}$ отличны от нуля [3]. Следовательно, для каждой системы уравнений с отличным от нуля определителем det $\mathbb{D}(s)$ можно построить ориентированный граф. Вместе с тем такая последовательность может быть не единственной, т.е. переход от уравнений к графам в общем случае не является однозначным. Выбор одного из вариантов графа по существу означает дополнение динамической модели информацией о направленных взаимодействиях элементов, т.е. переход к моделям, характерным для теории управления.

1.8. Построение моделей "вход-выход" по моделям с развернутой структурой

Системы уравнений в непричинно-следственной форме (1.7) - (1.9), в том числе уравнения в форме пространства состояний (1.10) - (1.13) и модели с раскрытой структурой в форме графов (см.1.4), являются развернутыми моделями объектов и систем управления. Задачи анализа обычно требуют исследования непосредственных связей выходов со входами, т.е. рассмотрения свернутых моделей в терминах "вход-выход": дифференциальных уравнений, передаточных функций, частотных или временных характеристик .

1.8.1. Построение моделей "вход-выход" по системам уравнений

Пусть исходная модель представлена в форме системы дифференциальных уравнений (1.8). После их преобразования по Лапласу задача получения передаточной функции системы управления в целом сводится к решению системы алгебраических уравнений с полиномиальными коэффициентами.

В общем случае передаточная матрица многомерной системы выражается так:

$$\mathbf{W}(s) = \mathbb{C}(s)\,\mathbb{D}^{-1}(s)\,\mathbb{B}(s).$$

Ее вычисление требует обращения полиномиальной матрицы $\mathbb{D}$.

В частном случае представляет интерес только одна из передаточных функций, связывающая воздействие f_r с переменной x_q . Искомая передаточная функция вычисляется по правилу Крамера [14]

$$\Phi_{qr}(s) = \frac{\det \mathbb{D}_{qr}(s)}{\det \mathbb{D}(s)}. \tag{1.20}$$

Здесь матрица $\mathbb{D}_{qr}$ получена заменой q-го столбца матрицы $\mathbb{D}$ r-м столбцом матрицы $\mathbb{B}$.

Знаменателем передаточной функции независимо от номеров r и q входа и выхода является **характеристический полином** (ХП) системы в целом

$$D(s) = \det \mathbb{D}(s)\ . \qquad (1.21)$$

Таким образом, вычисление ХП D(s) или ПФ системы сводится к раскрытию определителей полиномиальных матриц.

Рассмотрим пример системы уравнений, приведенной в п.1.7.1. ХП, т.е. знаменатель передаточных функций равен

$$D(s) = \det \mathbb{D}(s) = \left(1+T_2 s\right)^2 \left(1+T_4 s\right) + k_1 k_2 \left(1+T_4 s\right) + k_1 \tau_4 s \left(1+T_2 s\right)^2 .$$

Числитель B_{yf} передаточной функции Φ_{yf} между переменной выхода $x_2 = y$ и воздействием f равен определителю матрицы, полученной из матрицы $\mathbb{D}$ путем замены второго столбца столбцом $\mathbb{B}$, т.е.

$$B_{yf}(s) = \det \mathbb{D}_{21}(s) = \det \begin{bmatrix} D_1 & B_1 & -B_1 & -B_1 \\ -B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 \\ -B_4 & 0 & 0 & D_4 \end{bmatrix} = k_1 k_2 \left(1+T_4 s\right) .$$

1.8.2. Построение моделей "вход-выход" по уравнениям состояния

Модели "вход-выход" по моделям "вход-состояние-выход", т.е. по форме пространства состояний (1.12), могут вычисляться по формуле (1.20). Однако для частного вида матриц (1.14) имеем:

$$\Phi_{qr}(s) = B_{qr}(s) / D(s)\ ;$$
$$D(s) = \det\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\ ;$$
$$B_{qr}(s) = \mathbf{C}_q (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^* \, \mathbf{B}_r\ ,$$

где: $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^*$ - матрица, присоединенная к характеристической;

$\mathbf{C}_q$ - q-я строка матрицы выхода **C**;

$\mathbf{B}_r$ - r-й столбец матрицы входа **B**.

Можно показать, что полином $B_{qr}(s)$ числителя передаточной функции $\Phi_{qr}(s)$ представляет собой определитель следующей матрицы

$$B_{qr}(s) = \det \left[\begin{array}{c:c} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B}_r \\ \hdashline -\mathbf{C}_q & 0 \end{array}\right] .$$

1.8.3. Построение моделей "вход-выход" по графам

Пусть исходная модель представлена в форме структурной схемы (C-графа) или сигнального графа Мэзона. Для вычисления передаточной функции можно:

- записать систему уравнений (1.7) и воспользоваться формулой (1.20);
- провести последовательную топологическую редукцию графов по правилам эквивалентных преобразований;
- применить топологическую формулу Мэзона [3].

Формула Мэзона для получения передаточных функций сигнальных графов является топологическим аналогом правила Крамера.

Прежде всего, введем несколько понятий из теории сигнальных графов. **Путем** в графе называется последовательность вершин и дуг, в которой каждый элемент встречается только раз. **Контур** - замкнутый путь. Контуры называются **некасающимися**, если они не имеют общих вершин. Передаточные функции путей и контуров равны произведению передаточных функций образующих их дуг.

Передаточная функция графа от вершины r (вход) до вершины q (выход) равна

$$\Phi_{qr}(s) = \frac{\sum\limits_{p} P_{qr}(s)\, \Delta_{qr}(s)}{\Delta(s)}, \tag{1.22}$$

причем:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_{k} K_k(s) + \sum_{k,l} K_k(s)\, K_l(s) - \sum_{k,l,m} K_k(s)\, K_l(s)\, K_m(s) + \ldots, \tag{1.23}$$

где: $\Delta(s)$- определитель графа;

$K_k(s)$ - передаточные функции контуров графа;

$K_k(s)K_l(s)$ - произведения передаточных функций некасающихся пар контуров;

$K_k(s)K_l(s)K_m(s)$ - произведения передаточных функций попарно некасающихся троек контуров;

$P^p_{qr}(s)$ - передаточная функция p-го пути в графе от вершины r до вершины q;

$\Delta^p_{qr}(s)$- минор p-го пути, равный определителю подграфа, полученного удалением из исходного графа p-го пути.

Рассмотрим пример графа, изображенного на рис. 1.8. Граф имеет два касающихся контура с передаточными функциями:

$$K_1(s) = W_1(s) W_2(s) W_3(s);$$
$$K_2(s) = W_1(s)\, W_4(s).$$

Определитель графа равен

$$\Delta(s) = 1 - K_1(s) - K_2(s)\,.$$

Между вершиной входа f и вершиной выхода y имеется один путь с передаточной функцией

$$P^1_{yf}(s) = W_1(s)\, W_2(s)\,.$$

После удаления этого пути не остается ни одного контура, поэтому минор пути равен единице

$$\Delta^1_{yf}(s) = 1.$$

Таким образом, передаточная функция графа между вершинами f и y в соответствии с формулой (1.22) равна:

$$\Phi_{yf}(s) = \frac{W_1(s)\,W_2(s)}{1 - W_1(s)\,W_2(s)\,W_3(s) - W_1(s)\,W_4(s)}.$$

Если сюда подставить дробно-рациональные выражения для передаточных функций (п.1.4.1), то получим:

$$\Phi_{yf}(s) = \frac{B_{yf}(s)}{D(s)} = \frac{k_1 k_2 (1 + T_4 s)}{(1 + T_2 s)^2 (1 + T_4 s) + k_1 k_2 (1 + T_4 s) + k_1 \tau_4 s (1 + T_2 s)^2}.$$

Знаменатель этого выражения D представляет собой ХП системы.

ХП системы, в которой разомкнуты все контуры, равен произведению ХП (знаменателей передаточных функций) всех дуг

$$D_0(s) = \prod_{\gamma=1}^{N} D_\gamma(s).$$

Можно показать [7], что определитель графа равен отношению ХП D и D_0 соответственно исходной системы и системы, в которой все контуры разомкнуты:

$$\Delta(s) = D(s) / D_0(s).$$

Очевидно, в бесконтурном графе $D \equiv D_0$ и $\Delta \equiv 1$.

Обратный переход от моделей "вход-выход" к моделям с раскрытой структурой не является однозначным. Действительно, одной и той же передаточной функции могут соответствовать сколько угодно систем дифференциальных уравнений различных порядков (1.8), уравнений в форме пространств состояний (1.12), а также сигнальных графов.

Для одномерной системы легко записать матрицы канонических форм пространства состояний по передаточной функции. Построение развернутых моделей для многомерных объектов, описанных, например, передаточными матрицами, представляет задачу так называемой минимальной реализации [36].

1.9. Модели систем управления высших уровней

Модели в терминах "вход-выход" (подразд.1.2) или в форме систем дифференциальных уравнений (подразд.1.3) описывают в свернутой или развернутой форме системы нулевого уровня причинно-следственной интеграции (L=0).

Модели систем первого уровня (L=1) образуются как ориентированная взаимосвязь элементов - систем нулевого уровня.

В общем случае моделями систем управления рассматриваемого класса являются причинно-следственные взаимодействия подсистем, описываемых не обязательно причинно-следственными уравнениями. Многие модели объектов и других элементов систем появляются в результате записи физических законов, в которых нет одностороннего характера взаимодействий компонентов. Направленность взаимодействий появляется благодаря деятельности специалистов по управлению, привносящих информационно-алгоритмический подход к проблеме формирования моделей систем.

На рис.1.12 изображена топология модели системы управления первого уровня в виде диаграммы графа, в блоках которого вписаны обозначения векторов внутренних переменных $\mathbf{x}^m$ и полиномиальных матриц $\mathbb{D}^m$, $\mathbb{B}^m$, $\mathbb{C}^m$; m = 1,2,3 систем дифференциальных уравнений. В частном случае блоки описываются уравнениями в форме пространства состояний.

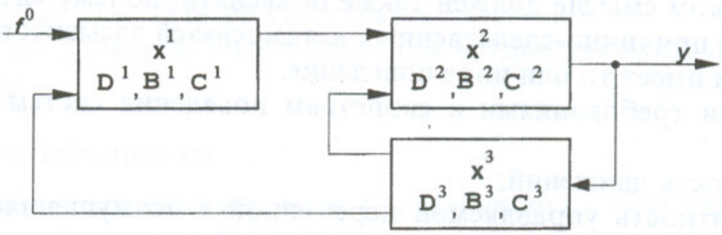


Рис.1.12. Модель первого уровня в форме блок-графа

Описание моделей высших уровней осуществляется рекурсивно - модель *L*-го уровня строится как ориентированная взаимосвязь подсистем (*L*-1)-го уровня (п.1.1.4).

Методы расчета многомерных систем управления обычно рассматривают частный случай моделей в форме векторно-матричных графов, вершинам которых соответствуют блоки с одним и тем же числом входов и выходов. Блоки таких графов описываются матрицами ($\mathbf{A}^m$, $\mathbf{B}^m$, $\mathbf{C}^m$) уравнений в форме пространства состояний при применении временных методов расчета или передаточными матрицами $\mathbf{W}^m(s)$ и комплексными матрицами частотных характеристик $\mathbf{W}^m(j\omega)$ - при применении частотных методов (рис.1.13).

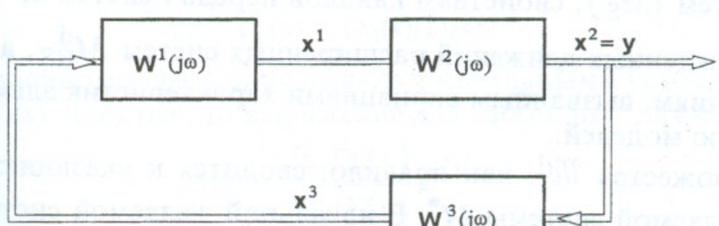


Рис.1.13. Многомерная система

Классические структурные схемы, *C*-графы и сигнальные графы (подразд.1.4) являются частными случаями моделей первого уровня, построенных на свернутых моделях одномерных звеньев. Для большинства практически важных задач проектирования систем управления эти модели являются наиболее удобными. Для них разработаны правила эквивалентных преобразований (алгебра блок-диаграмм), топологические формулы составления выражений для передаточных функций систем по передаточным функциям звеньев, частотные методы анализа устойчивости и чувствительности, а также методы синтеза.