3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 “ДВУХИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. СТАНДАРТНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА”

3.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков построения математических моделей стандартных транспортных задач ЛП и решения их в Microsoft Excel.

3.2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи.
2. Постройте модель задачи, включая транспортную таблицу.
3. Найдите оптимальное решение задачи в Excel и продемонстрируйте его преподавателю.
4. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист (см. рис.2.1);
- транспортную таблицу и модель задачи с указанием всех единиц измерения;
- результаты решения задачи с указанием единиц измерения.

3.3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ [1,2,3,4,6,7]

3.3.1. Стандартная модель транспортной задачи (ТЗ)

Задача о размещении (транспортная задача) – это РЗ, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов. Примером типичной транспортной задачи является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям.

Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции *одного вида* из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку *единицы продукции*.

Исходные параметры модели ТЗ

a) n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.

b) a_i – запас продукции в пункте отправления A_i ($i=\overline{1,n}$) [ед. тов.].

c) b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j ($j=\overline{1,m}$) [ед. тов.].

d) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб./ед. тов.].

Искомые параметры модели ТЗ

1. x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. тов.].

2. $L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Этапы построения модели

I. Определение переменных.
II. Проверка сбалансированности задачи.
III. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
IV. Задание ЦФ.
V. Задание ограничений.

Транспортная модель

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,m}, \\ \forall x_{ij} \ge 0 \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right). \end{cases} \tag{3.1}$$

Целевая функция представляет собой транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица (табл.3.1).

Таблица 3.1

Общий вид транспортной матрицы

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, [ед. прод.]
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потребность [ед. прод.]	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Из модели (3.1) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j. \tag{3.2}$$

Если (3.2) выполняется, то ТЗ называется **сбалансированной**, в противном случае – **несбалансированной**. Поскольку ограничения модели (3.1) могут быть выполнены только при сбалансированной ТЗ, то при построении транспортной модели необходимо проверять условие баланса (3.2). В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть

$$b_ф = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j. \tag{3.3}$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_ф = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{3.4}$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания **фиктивных** тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\, j = \overline{1,m}\right).$$

На практике возможны ситуации, когда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых **запрещающих** тарифов $c_{ij}^{з}$. Запрещающие тарифы должны сделать невозможными, то есть совершенно невыгодными, перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели:

$$c_{ij}^{з} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\, j = \overline{1,m}\right).$$

3.3.2. Пример построения модели ТЗ

Пусть необходимо организовать оптимальные по транспортным расходам перевозки муки с двух складов в три хлебопекарни. Ежемесячные запасы муки на складах равны 79,515 и 101,925 т, а ежемесячные потребности хлебопекарен составляют 68,5, 29,5 и 117,4 т соответственно. Мука на складах хранится и транспортируется в мешках по 45 кг. Транспортные расходы (руб./т) по доставке муки представлены в табл.4.2. Между первым складом и второй хлебопекарней заключен договор о гарантированной поставке 4,5 т муки ежемесячно. В связи с ремонтными работами временно невозможна перевозка из второго склада в третью хлебопекарню.

Таблица 3.2

Транспортные расходы по доставке муки (руб./т)

Склады	Хлебопекарни		
	Х1	Х2	Х3
С1	350	190	420
С2	400	100	530

ТЗ представляет собой задачу ЛП, которую можно решать симплекс-методом, что и происходит при решении таких задач в Excel. В то же время существует более эффективный вычислительный метод – **метод потенциалов**, в случае применения которого используется специфическая структура условий ТЗ (3.1) и, по существу, воспроизводятся шаги симплекс-алгоритма**.** Исходя из этого, в лабораторной работе необходимо построить модель задачи вида (3.1), пригодную для ее решения методом потенциалов.

Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [меш.] количество мешков с мукой, которые будут перевезены с i-го склада в j-ю хлебопекарню.

Проверка сбалансированности задачи

Прежде чем проверять сбалансированность задачи, надо исключить объем гарантированной поставки из дальнейшего рассмотрения. Для этого вычтем 4,5 т из следующих величин:

- из запаса первого склада $a_1 = 79{,}515 - 4{,}5 = 75{,}015$ т/мес.;
- из потребности в муке второй хлебопекарни
$$b_2 = 29{,}5 - 4{,}500 = 25{,}000 \text{ т/мес.}$$

Согласно условию задачи мука хранится и перевозится в мешках по 45 кг, то есть единицами измерения переменных x_{ij} являются мешки муки. Но запасы муки на складах и потребности в ней магазинов заданы в тоннах. Поэтому для проверки баланса и дальнейшего решения задачи приведем эти величины к одной единице измерения – мешкам. Например, запас муки на первом складе равен 75,015 т/мес., или $\dfrac{75{,}015 \text{ т/мес.}}{0{,}045 \text{ т/меш.}} = 1667$ меш./мес., а потребность первой хлебопекарни составляет 68 т/мес., или $\dfrac{68{,}000 \text{ т/мес.}}{0{,}045 \text{ т/меш.}} = 1511{,}1 \approx 1512$ меш./мес. Округление при расчете потребностей надо проводить в большую сторону, иначе потребность в муке не будет удовлетворена полностью.

Для данной ТЗ имеет место соотношение
$$\underbrace{\overbrace{1667 + 2265}^{\text{склады}}}_{3932 \text{ меш./мес.}} < \underbrace{\overbrace{1512 + 556 + 2609}^{\text{хлебопекарни}}}_{4677 \text{ меш./мес.}}.$$

Ежемесячный суммарный запас муки на складах меньше суммарной потребности хлебопекарен на 4677-3932=745 мешков муки, откуда следует вывод: ТЗ не сбалансирована.

Построение сбалансированной транспортной матрицы

Сбалансированная транспортная матрица представлена в таблице 3.3. Стоимость перевозки муки должна быть отнесена к единице продукции, то есть к 1 мешку муки. Так, например, тариф перевозки из первого склада в третий магазин равен $420 \text{ руб./т} \cdot 0{,}045 \text{ т/меш.} = 18{,}90 \text{ руб./меш.}$

Для установления баланса необходим дополнительный *фиктивный* склад, то есть дополнительная строка в транспортной таблице задачи. Фиктивные тарифы перевозки зададим таким образом, чтобы они были дороже реальных тарифов, например, $c_{3j}^{ф} = 50{,}00$ руб./меш.

Невозможность доставки грузов со второго склада в третью хлебопекарню задается в модели с помощью *запрещающего* тарифа, который должен превышать величину *фиктивного* тарифа, например, $c_{23}^{з} = 100{,}00$ руб./меш.

Таблица 3.3

Транспортная матрица задачи

	Хлебопекарни			Запас, мешки
Склады	X_1	X_2	X_3	
C_1	15,75	8,55	18,90	1667
C_2	18,00	4,50	**100,00**	2265
$C_ф$	**50,00**	**50,00**	**50,00**	745
Потребность, мешки	1512	556	2609	$\sum =$ **4677**

Задание ЦФ

Формальная ЦФ, то есть суммарные затраты на все возможные перевозки муки, учитываемые в модели, задается следующим выражением:

$$\begin{aligned} L(X) = {} & 15{,}75x_{11} + 8{,}55x_{12} + 18{,}90x_{13} + \\ & + 18{,}00x_{21} + 4{,}50x_{22} + 100{,}00x_{23} + \\ & + 50{,}00x_{31} + 50{,}00x_{32} + 50{,}00x_{33} \to \min \text{ (руб./мес.).} \end{aligned} \tag{3.5}$$

При этом следует учитывать, что вследствие использования фиктивных тарифов **реальная** ЦФ (то есть средства, которые в действительности придется заплатить за транспортировку муки) будет меньше **формальной** ЦФ (3.5) на стоимость найденных в процессе решения фиктивных перевозок.

Задание ограничений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1667, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2265, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 745, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1512, \quad \text{(меш./мес.)} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 556, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2609, \\ x_{ij} \ge 0 \left(\forall i = \overline{1,3}; \forall j = \overline{1,3}\right). \end{cases}$$

3.4. ВАРИАНТЫ

Постановка задачи

На складах хранится мука, которую необходимо завезти в хлебопекарни. Номера складов и номера хлебопекарен выбираются в соответствии с вариантами табл.4.4. Текущие тарифы перевозки муки [руб./т], ежемесячные запасы муки [т/мес.] на складах и потребности хлебопекарен в муке [т/мес.] указаны в табл.3.5.

При этом необходимо учитывать, что из-за ремонтных работ временно нет возможности перевозить муку с некоторых складов в некоторые хлебопекарни. В табл.3.4 это показано в графе "Запрет перевозки" в формате № склада х № хлебопекарни. Например, «2х3» обозначает, что нельзя перевозить муку со склада №2 в хлебопекарню №3.

Кроме того, необходимо учесть, что некоторые хлебопекарни имеют договоры на гарантированную поставку муки с определенных складов. В табл.3.4 это показано в графе "Гарантированная поставка" в формате № склада х № хлебопекарни = объем поставки. Например, «1х4=40» обозначает, что между складом №1 и магазином №4 заключен договор на обязательную поставку 40 т муки.

Необходимо организовать поставки наилучшим образом, учитывая, что мука хранится и транспортируется в мешках весом по 50 кг.

Таблица 3.4

Номера складов, хлебопекарен, запрещенные и гарантированные поставки

№ Варианта	№ Складов	№ Хлебопекарен	Запрет перевозки	Гарантированная поставка, т/мес.
1	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	2х2, 3х4	3х3=50
2	2, 3, 4, 5	1, 2, 5	2х2, 3х5	3х2=40
3	1, 2, 4	1, 2, 3, 5	1х5, 2х3	4х3=45
4	1, 2, 3, 4	3, 4, 5	3х3, 4х5	3х5=40
5	1, 2, 5	2, 3, 4, 5	1х4, 5х3	1х5=60
6	1, 2, 3, 5	2, 3, 5	5х5, 2х2	3х5=30
7	2, 3, 4	2, 3, 4, 5	3х3, 2х5	4х3=45
8	1, 2, 3, 5	1, 2, 4	1х2, 5х4	3х2=20
9	2, 3, 5	1, 2, 3, 5	5х1, 3х5	5х2=30
10	2, 3, 4, 5	2, 3, 4	5х4, 3х2	4х3=35
11	3, 4, 5	1, 2, 3, 4	3х4, 5х1	4х1=40
12	1, 2, 3, 4	1, 2, 3	3х2, 4х1	2х2=50

Таблица 3.5

Запасы, потребности и тарифы перевозок

Склады	Хлебопекарни					
	1	2	3	4	5	Запас, т/мес.
1	400	600	800	200	200	80
2	300	100	500	600	500	70
3	500	200	100	600	300	60
4	300	700	200	400	900	55
5	200	500	800	200	400	65
Спрос, т/мес.	77,86	56,78	58,88	62,44	73,92	

3.6. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что такое задача о размещении?
2. Какова постановка стандартной ТЗ?
3. Запишите математическую модель ТЗ.
4. Перечислите исходные и искомые параметры модели ТЗ.
5. Какова суть каждого из этапов построения модели ТЗ?
6. Раскройте понятие сбалансированности ТЗ.
7. Что такое фиктивные и запрещающие тарифы?
8. В каком соотношении должны находиться величины фиктивных и запрещающих тарифов при необходимости их одновременного использования в транспортной модели?