

В.В. Учайкин

МЕХАНИКА

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Рекомендовано Министерством образования
Российской Федерации в качестве
учебного пособия для физических специальностей университетов

Институт Компьютерных исследований
Москва ♦ Ижевск
2002

УДК531.01

ББК22.21

У90

ISBN 5-93972-210-5

У90 **Учайкин В.В.** Механика. Основы механики сплошных сред. Задачи и упражнения.

Сборник содержит задачи и упражнения для использования на практических занятиях, в самостоятельной работе, на контрольных работах, зачетах и экзаменах по физическим специальностям университетов, методические указания для решения задач, полные или частичные ответы к ним, список литературы. Отбор задач произведен в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования 2000 года по специальности 010400 Физика (ОПД.Ф.01 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. Механика. Основы механики сплошных сред).

Анатолию Михайловичу
Кольчужкину,
учителю и другу

Содержание

Предисловие	5
Обозначения	7
1 ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ	13
1. Силовые поля	13
2. Одномерное движение точки	18
3. Двумерное движение точки	20
4. Кеплеровы орбиты	24
5. Системы материальных точек	29
6. Инерция, реакция и реактивное движение	35
7. Лагранжевы системы	40
8. Гамильтоновы системы и канонические преобразования	47
9. Метод Гамильтона-Якоби	52
10. Релятивистские частицы	57
11. Абсолютно твердое тело	62
12. Изотропное упругое тело	69
13. Кинематика жидкой среды	75
14. Идеальные жидкости и газы	80
15. Вязкие жидкости и газы	85
16. Механические модели вязкоупругости	89
17. Плазма	92
2 УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ	96
3 ОТВЕТЫ	138
Приложение	176
Литература	178

Предисловие

Это – задачник по двум первым разделам курса теоретической физики классической университетской программы по физическим специальностям. Ранее они были объединены под общим названием "Теоретическая механика", в новом Государственном образовательном стандарте 2000 года они разделены и обозначены названиями "Механика" и "Основы механики сплошных сред". Настоящий задачник подготовлен в соответствии с новым стандартом – в этом его первая особенность.

Почти сорокалетний опыт преподавания не оставил у автора никаких сомнений в том, что даже в век компьютерных технологий наиболее эффективным способом передачи знаний остаётся непосредственное сотрудничество преподавателя и студента, их личный контакт в процессе обдумывания задачи, выбора метода, решения, анализа полученных результатов. Используемый в таком процессе задачник не должен содержать решений, или, по крайней мере, подробных решений задач. Именно эта особенность отличает настоящий задачник от других: он предназначен для работы в аудитории вместе с преподавателем и может быть использован на контрольных работах, зачётах, экзаменах.

Третья особенность задачника обусловлена наличием в нём ответов и методических указаний ко многим, но далеко не всем задачам. Для наиболее подготовленных студентов этого может оказаться достаточным для активной и успешной самостоятельной работы, что оживит атмосферу в аудитории и позволит преподавателю сконцентрировать своё внимание на тех студентах, которые наиболее в этом нуждаются.

Наиболее притягательным (но абсолютно недостижимым) идеалом физика-педагога представляется автору фигура Ричарда Фейнмана. В отличие от других (и, в частности, от наших) теоретиков, он глубоко понимал *трудности первичного восприятия абстрактных идей* и искренне сочувствовал своим студентам. Этим сочувствием пронизаны все девять томов его лекций. В предисловии к ним, приведя заносчивую цитату из Гиббонса ("обучение редко приносит плоды кому-либо, кроме тех, кто предрасположен к нему, но им оно почти не нужно"), он тут же отмежевывается от неё фразой "Тем не менее, я не хотел бы бросать ни одного студента на произвол судьбы..."

Надеюсь, что предлагаемая книга хотя бы в некоторой степени стимулирует усилия моих коллег-преподавателей в этом направлении.

Наконец, четвертая особенность задачника – Интернет-сопровождение. Это просто означает, что любой преподаватель и студент, пользующийся этим задачником и имеющий доступ к сети Интернет, сможет бесплатно получить полные тексты решений задач по адресу <http://edu.ulsu.ru/uchaikin>

В работе над задачником мне помогали мои студенты – Н. Дуванова, Ю. Свистунова, К. Андрианов, И. Фомин. Подготовка рукописи к печати осуществлялась Е.В. Кожемякиной, В.В. Саенко, Г.Г. Гусаровым. Всем им я выражаю благодарность.

Я глубоко благодарен моим близким и далёким коллегам, нашедшим время посмотреть рукопись и высказать (письменно или устно) свои замечания и предложения: профессорам Э.А. Аринштейну (Тюмень), А.А. Бирюкову и В.А. Салееву (Самара), С.И. Мартынову (Саранск), А.А. Лагутину (Барнаул), В.В. Прудникову и К.Н. Югаю (Омск), Э.Р. Шрагеру, С.Л. Минькову и А.Е. Мудрову

(Томск).

Особую благодарность я выражаю профессору РУДН Ю.П. Рыбакову (Москва) и доценту УлГУ В.Л. Леонтьеву (Ульяновск), чьи многочисленные замечания и рекомендации существенно улучшили книгу.

Наконец, самую сердечную признательность я приношу профессору Б.С. Ишханову (МГУ), без моральной поддержки и дружеского участия которого я никогда не решился бы написать эту книгу.

Я буду благодарен всем читателям, кто пожелает высказать свои замечания (это можно сделать по адресу: uchaikin@sv.uven.ru).

Автор

Обозначения

A – работа.

$\vec{A}$ – ускорение центра масс системы, ускорение начала подвижной системы координат относительно неподвижной, 3-мерный векторный потенциал.

a – большая полуось эллипса, радиус круга, сферы, шара, абсолютная величина ускорения точки, масштабный фактор.

a_{ij} – элементы матрицы 3-мерного ортогонального преобразования.

$\vec{a}$ – ускорение материальной точки.

a_n – нормальная составляющая ускорения.

a_τ – тангенциальная (касательная) составляющая ускорения.

$\vec{B}$ – магнитная индукция.

b – малая полуось эллипса, прицельный параметр.

$C_{\text{кр}}$ – крутильная жёсткость.

$C_{\text{из}}$ – жёсткость балки на изгиб.

$\vec{C}$ – один из интегралов движения по кеплеровой орбите.

c – скорость звука, света.

c_p – удельная теплоёмкость при постоянном давлении.

c_V – удельная теплоёмкость при постоянном объёме.

$\vec{c}$ – вектор плотности потока тепла.

$\vec{D}$ – электрическая индукция.

E – модуль Юнга.

$\mathcal{E}_{\text{кин}}$ – кинетическая энергия.

$\mathcal{E}$ – полная энергия.

$\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

e – заряд частицы.

$\vec{e}_i$, $i = x, y, z$ или $1, 2, 3$ – орты декартовой (вообще, – ортогональной) системы координат.

$\mathcal{F}$ – производящая функция канонических преобразований.

$\vec{F}$ – активная сила.

$\vec{F}'$ – сила реакции связи.

$\vec{F}^*$ – сила инерции.

F_y – сила упругости.

$\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения.

$\vec{F}_c$ – сила сопротивления.

$\vec{F}_{\text{гр}}$ – сила тяжести (гравитационная сила).

$\vec{F}_{\text{цб}}^*$ – центробежная сила.

$\vec{F}_{ij}$ – сила, с которой j -я точка действует на i -ю.

$\vec{f}_i(q_1, \dots, q_n) = 0$, $i = 1, \dots, s$ – уравнения голономных связей.

$\vec{f}$ – объёмная плотность силы.
 f_m – массовая плотность силы.

g – ускорение силы тяжести.
 $\vec{g}$ – напряженность гравитационного поля.

$\mathcal{H}$ – функция Гамильтона.
 $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля.
 h – высота цилиндра, конуса, постоянная Планка.

I – момент инерции.
 $I_i, i = 1, 2, 3$ – главные моменты инерции.
 I_{ij} – тензор инерции.
 $I' = I_1 + ml^2$ – приведённый момент инерции тяжёлого волчка.
 $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

J – якобиан преобразования, адиабатический инвариант, каноническая переменная действия.
 $\vec{j}$ – вектор плотности тока массы.
 $\vec{j}_e$ – вектор плотности электрического тока.

$\mathcal{K}$ – канонически преобразованная функция Гамильтона.
– система отсчёта.
 $K = \gamma m$ – коэффициент в выражении для гравитационного потенциала точечной массы: $\phi(r) = -K/r$, модуль всестороннего сжатия.
 k – коэффициент жесткости, коэффициент сжимаемости.
 k_B – постоянная Больцмана.
 $\vec{k}$ – волновой вектор.
 k_{ij} – коэффициенты в разложении потенциальной энергии в окрестности точки устойчивого равновесия: $U = 1/2 k_{ij} q_i q_j$.

$\mathcal{L}$ – функция Лагранжа.
 $\vec{L}$ – момент импульса (кинетический момент).
 l – кривая, длина кривой, длина замкнутой орбиты.
 $\vec{l}$ – вектор, проведенный от неподвижной точки до центра масс симметричного волчка.
 $d\vec{l}$ – векторный элемент кривой интегрирования.

$\vec{M}$ – момент силы (вращающий момент).
 m – масса (инертная и гравитационная) точки, системы, твёрдого тела.
 m_i – масса i -й точки системы.

m_{ij} – коэффициенты в выражении для кинетической энергии, коэффициенты в разложении кинетической энергии в окрестности точки устойчивого равновесия:

$$T = 1/2 m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

m_3 – масса Земли.

N – число частиц в системе, нормальная компонента силы реакции.

N_A – число Авогадро.

N_C – поток вектора скорости через плоскую кривую C (двумерное течение).

n – число степеней свободы.

$\vec{n}$ – единичный вектор, нормаль.

$\mathcal{P}$ – тепловая функция единицы массы, функция состояния баротропной жидкости.

P_i – обобщённые импульсы.

$\vec{P}$ – импульс системы.

p – давление.

$\vec{p}, \vec{p}_i$ – импульс частицы, i -й частицы.

p_i – обобщённые (канонические) импульсы.

Q – потери энергии при столкновении.

Q_i – обобщённые силы, канонически преобразованные координаты.

q_i – обобщённые координаты.

$\vec{q}$ – вектор завихренности.

R – функция Рауса, радиус кривизны, радиус шара, цилиндра, универсальная газовая постоянная.

R_3 – радиус Земли.

R_m – магнитное число Рейнольдса.

R – число Рейнольдса.

$\vec{R}$ – радиус-вектор центра масс.

r – радиальная координата в сферической, плоской полярной (иногда – цилиндрической) системе координат.

$\vec{r}, \vec{r}_i$ – радиус-вектор точки, частицы, i -й частицы.

r_a – апогейное расстояние. r_n – перигейное расстояние.

S, s – энтропия, массовая плотность энтропии.

S, dS – поверхность, площадь элемента поверхности

$d\vec{S} = \vec{n}dS$ – вектор элемента поверхности.

T – абсолютная температура.

T – кинетическая энергия системы, частицы.

t – время.

U – потенциальная энергия системы, частицы.

$U_{\text{эф}}$ – эффективная потенциальная энергия.

U_{ij} – потенциальная энергия парного взаимодействия i и j частиц.

$\vec{u}$ – скорость истечения газов, скорость молекулы.

V, dV – область, объём, объём элемента области.

$\vec{v}$ – скорость.

$v_{\text{кр}}$ – круговая скорость.

$v_{\text{пар}}$ – параболическая скорость.

$v_{1\text{к}}$ – первая космическая скорость.

$v_{2\text{к}}$ – вторая космическая скорость.

W – вириал сил.

w – каноническая угловая переменная, комплексное поле скоростей.

w_{ij} – тензор завихрённости.

X, Y, Z или X_1, X_2, X_3 – декартовы координаты центра масс.

x, y, z или x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты точки.

Z – число Циолковского, атомный номер.

α – коэффициент в выражении для потенциальной энергии частицы в кулоновом (ньютоновом) поле $U = -\alpha/r$.

α_i – постоянный импульс, соответствующий циклической координате.

$\vec{\beta} = \vec{v}/c$ – безразмерная скорость в релятивистских задачах.

β_i – циклическая координата.

Γ_C – циркуляция вектора скорости по контуру C .

γ – гравитационная постоянная, отношение теплоёмкостей c_p/c_v , релятивистский множитель $(1 - \beta^2)^{-1/2}$.

δ – символ вариации при постоянном времени.

δ_{ik} – дельта-символ Кронекера.

$\delta(\vec{r})$ – дельта-функция Дирака.

ε – эксцентриситет орбиты, внутренняя энергия единицы массы, диэлектрическая проницаемость.

ε_{ij} – тензор деформаций.

ε_{ijk} – тензор Леви-Чивита.

Θ – угол рассеяния в системе центра масс, широтный угол (отсчитываемый от экватора).

ϑ – полярный угол в сферической системе координат, угол рассеяния в лабораторной системе координат, один из углов Эйлера.

κ – теплопроводность.

$\vec{L}$ – один из интегралов движения по кеплеровой орбите (вектор Лапласа).
 λ – неопределённый множитель Лагранжа, коэффициент Ламэ, линейная плотность, длина волны.

μ – приведённая масса, коэффициент Ламэ, магнитный момент, молярная масса.
 $\vec{\mu}$ – магнитный момент.

ν – кинематическая вязкость.

η – динамическая вязкость.

ρ – объёмная плотность массы, радиальная координата в цилиндрической системе координат.

ρ_e – объёмная плотность электрического заряда.

σ – коэффициент Пуассона, поверхностная плотность.

$\sigma, d\sigma, d\sigma/d\Omega$ – сечение рассеяния, дифференциальное сечение рассеяния.

$\vec{\sigma}$ – секторная скорость.

τ – период колебаний, период обращения планеты.

φ – электромагнитный скалярный потенциал, угол в цилиндрической и сферической системе координат, истинная аномалия, один из углов Эйлера.

ϕ – гравитационный потенциал, потенциал скоростей.

χ – температуропроводность.

ψ – один из углов Эйлера.

$\vec{\Omega}$ – угловая скорость.

$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ – элемент телесного угла.

ω – частота колебаний.

ω_H – ларморовская (циклотронная) частота.

ω_{ij} – тензор поворота.

Сокращения

ИСО – инерциальная система отсчёта.

НСО – неинерциальная система отсчёта.

СЦМ – система центра масс.

ЛСК – лабораторная система координат.

СГО – система правых осей.

1 ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Силовые поля

- Принцип суперпозиции $\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij}$.
- Условие потенциальности силового поля $\text{rot} \vec{F} = 0$.
- Гравитационная сила, действующая на точечную массу m в точке $\vec{r}$ со стороны точечных масс $m_1, m_2, \dots, m_N$, находящихся в точках $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -m\gamma \sum_i^N \frac{m_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.$$

- Напряженность гравитационного поля системы точечных масс

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\gamma \sum_i^N \frac{m_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.$$

- Напряженность гравитационного поля непрерывно распределенной (по линии, поверхности, объему) массы

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\gamma \int_l \frac{\lambda(\vec{r}_1)(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} dl_1 = -\gamma \int_S \frac{\sigma(\vec{r}_1)(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} dS_1 = -\gamma \int_V \frac{\rho(\vec{r}_1)(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} dV_1$$

- Теорема Гаусса $\oint_S \vec{g} d\vec{S} = -4\pi\gamma \int_V \rho dV$.
- Гравитационный потенциал $\phi(\vec{r}) = -\gamma \int \frac{\rho(\vec{r}_1) dV_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$.
- $\Delta\phi = 4\pi\gamma\rho$ – уравнение Пуассона.
- Напряженность электрического поля $\vec{E} = \int \frac{\rho_e(\vec{r}_1)(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} dV_1$.
- Электростатический потенциал $\varphi = \int \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV_1$.
- Потенциалы ограниченных систем нормированы условием $\varphi(\vec{r}) \rightarrow 0, \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty$.

1.1. Доказать, что силовое поле $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ потенциально при любой функции $F(x)$.

1.2. Доказать, что $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ потенциально при любой функции $F(r)$.

1.3. Доказать, что $\vec{F} = F(\rho)\vec{e}_\rho$ потенциально при любой функции $F(\rho)$.

1.4. Потенциально ли поле $\vec{F} = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y$.

1.5. Потенциально ли поле $\vec{F} = \frac{y}{x^2 + y^2}\vec{e}_x - \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{e}_y$?

1.6. Доказать, что гравитационное поле, создаваемое массой с произвольным распределением $\rho(\vec{r})$, является потенциальным.

1.7. Доказать, что функция $\phi(\vec{r}) = -\gamma \int \frac{\rho(\vec{r}_1) dV_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$ удовлетворяет уравнению Пуассона.

- 1.8. Бесконечное пространство равномерно заполнено массой с постоянной плотностью ρ . Найти зависимость напряженности и потенциала гравитационного поля от расстояния до начала координат, полагая $\phi(0) = 0$.
- 1.9. Доказать, что найденный в предыдущей задаче потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона.
- 1.10. Найти поле, создаваемое сферически симметричным распределением массы $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, а) используя теорему Гаусса, б) решая уравнение Пуассона.
- 1.11. Используя результат предыдущей задачи, получить частные решения для однородного шара и однородной тонкостенной сферы.
- 1.12. Используя решение для сферы, получить поле, создаваемое шаром.
- 1.13. Используя решение для шара, получить поле, создаваемое сферой.
- 1.14. Записать плотность распределения массы, создающей потенциал
- $$\phi(\vec{r}) = -\gamma \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$
- 1.15. Найти такое сферически симметричное распределение массы, при котором напряженность гравитационного поля везде одинакова по абсолютной величине.
- 1.16. Какое из тел, Земля или Солнце, и во сколько раз притягивает Луну сильнее? Отношение масс Луны и Земли $1/81$, среднее расстояние от Луны до Земли $38 \cdot 10^4$ км и от Луны до Солнца – $15 \cdot 10^7$ км (тела эти считать материальными точками).
- 1.17. Методом суперпозиции найти потенциал гравитационного поля внутри и вне однородной бесконечно тонкой сферы заданной массы радиусом a .
- 1.18. В условиях предыдущей задачи найти напряженность гравитационного поля.
- 1.19. Методом суперпозиции найти потенциал гравитационного поля внутри и вне однородного шара заданной массы радиусом R .
- 1.20. В условиях предыдущей задачи найти напряженность гравитационного поля.
- 1.21. Найти приближенное (с точностью до членов порядка r^{-2}) выражение для потенциала гравитационного поля на большом расстоянии от неоднородного шара радиусом R ($r \gg R$) с центром в начале координат.
- 1.22. В условиях предыдущей задачи найти силу, с которой материальная точка массой m_1 , находящаяся в начале координат, притягивает этот неоднородный шар (расстояние от неё до центра шара r много больше радиуса R).
- 1.23. Доказать, что напряженности гравитационных полей, создаваемых однородными с одинаковой плотностью шарами на своих поверхностях, пропорциональны радиусам шаров.

- 1.24. Найти потенциал гравитационного поля, создаваемого однородным тонким материальным кольцом радиуса a с линейной плотностью λ в плоскости его расположения.
- 1.25. Найти асимптотическое (с точностью до членов второго порядка по a/r) разложение решения предыдущей задачи при $r \rightarrow \infty$.
- 1.26. Найти потенциал гравитационного поля, создаваемый тонким однородным круговым диском массы m и радиуса a в точках, лежащих на его оси (OZ).
- 1.27. Найти напряженность гравитационного поля в условиях предыдущей задачи.
- 1.28. Найти гравитационный потенциал, создаваемый в произвольной точке оси OX отрезком плоской материальной кривой $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, с линейной плотностью $\lambda = \lambda(x)$.
- 1.29. Найти гравитационный потенциал, создаваемый на оси OX параллельным ей однородным отрезком длиной $[-a, a]$ с линейной плотностью λ , находящимся на расстоянии d от этой оси.
- 1.30. Показать, что на больших расстояниях потенциал, полученный в предыдущей задаче, приближается к потенциалу точечной массы.
- 1.31. Найти напряженность гравитационного поля на оси бесконечно тонкого кольца радиуса a с постоянной линейной плотностью λ .
- 1.32. Найти напряженность гравитационного поля на оси круговой цилиндрической поверхности (тонкостенной трубы) длиной h с поверхностной плотностью массы $\sigma = \text{const}$.
- 1.33. Найти потенциал гравитационного поля, создаваемого однородным телом вращения с плотностью ρ и уравнением граничной поверхности $z = z_1$, $z = z_2 > z_1$, $x^2 + y^2 = f^2(z)$, $z_1 \leq z \leq z_2$, в произвольной точке его оси.
- 1.34. Найти напряженность гравитационного поля в условиях предыдущей задачи.
- 1.35. Используя результат задачи 1.33, найти потенциальное поле, создаваемое однородным шаром радиуса R и массы m .
- 1.36. Пользуясь результатом задачи 1.33, найти потенциал гравитационного поля на оси сплошного однородного цилиндра ($z_1 = -h/2$, $z_2 = h/2$) радиусом a .
- 1.37. Найти потенциал и напряженность гравитационного поля, создаваемого бесконечной однородной цилиндрической поверхностью с поверхностной плотностью σ , радиусом a и осью, совпадающей с осью OZ .
- 1.38. Найти гравитационный потенциал, создаваемый верхней и нижней половинами шара в верхней его точке P ("полюс") и в точке Q ("на экваторе").
- 1.39. От однородного шара радиуса R и плотности ρ отпилен круговой сегмент высотой h , остальная часть шара удалена. Найти потенциал гравитационного поля сегмента в центре его основания.

- 1.40. Используя результат предыдущей задачи, найти гравитационный потенциал в геометрическом центре однородного полушара.
- 1.41. Найти гравитационный потенциал в геометрическом центре бесконечно тонкой однородной полусферы радиуса R и массой m .
- 1.42. Показать, что в условиях предыдущей задачи потенциал остается тем же самым при любом распределении массы m по полусфере (или всей сфере) указанного радиуса.
- 1.43. В условиях задачи 1.39. найти потенциал, создаваемый сегментом на его вершине.
- 1.44. Проверить результат предыдущей задачи на соответствие потенциалу на поверхности однородного шара.
- 1.45. Однородный шар радиуса R с центром в начале координат распилили в плоскости XOY и раздвинули оба полушария вдоль оси OZ симметричным образом так, что величина образовавшегося зазора равна $2a$. Найти напряженность и потенциал гравитационного поля в начале координат.
- 1.46. В условиях предыдущей задачи найти потенциал при $a = 0$ и определить главный асимптотический член при $a \rightarrow \infty$.
- 1.47. Отрезок длиной a с постоянной линейной плотностью λ расположен под острым углом φ к оси OX , его левый конец находится в начале координат. Найти создаваемый им на оси OX гравитационный потенциал.
- 1.48. В условиях предыдущей задачи совершить предельные переходы $\varphi \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \pi/2$.
- 1.49. Найти потенциал, создаваемый на оси OX тонким неоднородным кольцом радиуса R , лежащим в плоскости XOY с центром в начале координат. Линейная плотность зависит от x -координаты точки кривой по формуле $\lambda(x) = \lambda_0 \sqrt{1 - (x/R)^2}$, $|x| \leq R$. Исследовать полученную зависимость, нарисовать график. Как изменится график в случае однородного кольца?
- 1.50. Разложить в ряд по полиномам Лежандра гравитационный потенциал однородного отрезка массой m и длиной $2l$, расположенного на оси OZ с центром в начале координат.
- 1.51. Для создания стационарной модели Вселенной Эйнштейну пришлось ввести гипотетические силы отталкивания, компенсирующие силы притяжения в однородной Вселенной с плотностью ρ . Сравнить ускорения, сообщаемые Земле силами притяжения и отталкивания Солнцем ($\rho = 10^{-29} \text{ г/см}^3$, расстояние между Солнцем и Землёй $R = 1.5 \cdot 10^{13} \text{ см}$).
- 1.52. Гантелеобразный спутник с двумя одинаковыми шариками массами $m/2$, соединенными невесомым жестким стержнем длиной $2l$, движется по орбите, оставаясь перпендикулярным к её плоскости. Расстояние от силового центра до центра спутника (середины стержня) r . Найти абсолютную величину силы, действующей на спутник.

- 1.53. Водородоподобный атом состоит из ядра с зарядом $Ze > 0$ и электронной оболочки ("облака") с зарядом $-e$. В невозбужденном состоянии распределение заряда в ней симметрично и описывается плотностью

$$\rho_e(r) = -(e/\pi)r_0^{-3}e^{-2r/r_0}, \quad r_0 = a_0/Z,$$

где $a_0 = \hbar^2/(m_e e^2)$ - первый боровский радиус, m_e - масса электрона, $\hbar$ - постоянная Планка. Найти электростатический потенциал такого атома.

- 1.54. Найти распределение заряда, порождающее потенциал Юкавы $\varphi(r) = (A/r) \exp(-\alpha r)$; $\alpha > 0$.
- 1.55. Используя векторный характер сложения сил, объяснить движение парусной яхты против ветра (бейдевинд). Под каким углом к ветру должна двигаться яхта и как должен быть установлен парус, чтобы составляющая скорости яхты в наветренном направлении была максимальной?

2. Одномерное движение точки

- В этом разделе: $v \equiv \dot{x}$ – проекция скорости на ось движения OX , $a = \dot{v}$ – проекция ускорения, $F = ma$ – проекция силы.
- Уравнение движения $m\ddot{x} = F$.
- В случае силы, зависящей только от координаты, закон движения $x(t)$ определяется уравнением

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{v(x)} = t,$$

где $v(x) = \pm \sqrt{(2/m)[\mathcal{E} - U(x)]}$, $U(x)$ – потенциальная, $\mathcal{E}$ – полная энергия точки.

- 2.1. Точка совершает одномерное движение по закону $x = \sqrt{(\mu t)^2 + a^2}$. Найти действующую на неё силу.
- 2.2. Найти $v(t)$ и $x(t)$ точки, совершающей одномерное движение под действием гармонической силы $F = F_0 \sin \Omega t$ с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.
- 2.3. Найти $v(t)$ и $x(t)$ точки, совершающей одномерное движение под действием силы трения $F_{\text{тр}} = -bv$ с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.
- 2.4. Найти закон движения тела, падающего в среде с сопротивлением $F = -b|v|v$ с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ (ось OX направлена вниз).
- 2.5. Точка движется со скоростью $v(x) = b\sqrt{x}/(c + \sqrt{x})$. Найти закон движения и проанализировать предельные случаи больших и малых времен при начальном условии $x(0) = 0$.
- 2.6. Точка движется вдоль оси OX под действием силы $F = at/v$ с начальной скоростью $v_0 = \sqrt{a/m}$ при $x_0 = 0$. Найти $x(t)$.
- 2.7. Точка совершает одномерное движение вдоль положительной полуоси OX под действием силы $F = m\alpha^2 x$. Найти $x(t)$ при начальных условиях а) $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = -\alpha x_0$; б) $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.
- 2.8. Точка движется в положительном направлении оси OX , проходя в момент $t = 0$ координату x_0 и приближаясь на бесконечности к состоянию покоя. На неё действует сила притяжения к центру координат $F = -\alpha t x^{-n}$, где $n > 1$ – целое число. Найти закон движения.
- 2.9. Точка начинает движение вдоль оси OX с начальными условиями $x(0) = x_0 > 0$ и $v(0) = 0$ и движется в поле $F = m\{-\alpha^2 x + 3\alpha^2 x^2/(2x_0)\}$. Найти закон её движения.
- 2.10. Рассматривая одномерное движение точки, показать, что нелинейная зависимость силы от ускорения противоречит постулату сложения сил.
- 2.11. Точка движется вдоль оси OX так, что усредненная по времени скорость, пропорциональна её кинетической энергии, $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найти $v(t)$.
- 2.12. Найти скорость точки, на которую действует сила $F = at - bv$ ($a, b > 0$, $v(0) = 0$).

- 2.13. Найти скорость точки, на которую действует сила $F = at^3 - bvt$ ($a, b > 0$, $v(0) = 0$).
- 2.14. Пользуясь общей формулой для периода одномерных колебаний, найти частоту одномерного гармонического осциллятора – точки массой m в поле квазиупругой силы $F = -kx$, $k > 0$.
- 2.15. Найти закон движения одномерного гармонического осциллятора, используя общую формулу для точки в потенциальном поле. Выразить энергию осциллятора через частоту и амплитуду колебаний.
- 2.16. Определить зависимость от полной энергии $\mathcal{E}$ периода колебаний τ точки массой m в потенциальном поле $U(x) = (Ax)^{2\nu}$, $\nu > 0$.
- 2.17. Определить зависимость периода колебаний плоского математического маятника от амплитуды, не полагая последнюю малой.
- 2.18. Материальная точка совершает одномерные колебания в симметричном потенциальном поле $U(x)$ ($U(0) = 0$ и $U(x)$ монотонно возрастает по мере удаления от начала координат). Известна зависимость периода колебаний от полной энергии частицы $\tau(\mathcal{E})$. Определить $U(x)$, если а) $\tau_1 = \text{const}$ и б) $\tau_2 = \sqrt{\mathcal{E}}$.
- 2.19. Найти закон движения одномерного гармонического осциллятора ($F_y = -kx$) путем прямого решения дифференциального уравнения с начальными условиями $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.
- 2.20. Исследовать движение одномерного гармонического осциллятора с трением, $F_{\text{тр}} = -b\dot{x}$, $b > 0$.
- 2.21. Известно, что в установившемся режиме одномерный гармонический осциллятор с трением $F_{\text{тр}} = -b\dot{x}$ под действием вынуждающей силы $F_0 \cos \Omega t$ движется по закону $x(t) = A \cos(\Omega t - \varphi)$. Найти амплитуду колебаний A и сдвиг фазы φ . При каком значении Ω амплитуда достигнет максимума и каков при этом сдвиг фаз?
- 2.22. Из однородного шара массой m и радиуса R с центром в начале координат удалена часть, ограниченная цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = a^2$ и условием $z > 0$. Из точки с координатами $x = y = 0$, $z = R$ начинает (с нулевой начальной скоростью) падать тело. Какую скорость оно будет иметь в центре шара?

3. Двумерное и трехмерное движение точки

- Касательное (тангенциальное) ускорение a_τ .
- Нормальное (центростремительное) ускорение a_n .
- Момент импульса точки $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$.
- Момент силы, действующей на точку $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$.
- Эффективная потенциальная энергия в центрально-симметричном поле $U_{\text{эф}}(r) = U(r) + L^2/(2mr^2)$.
- Траектории точки в центрально-симметричном поле в полярной системе координат:

$$\varphi(r) = \varphi(r_0) + (L/m) \int_{r_0}^r \frac{d\xi}{\xi^2 v_r(\xi)}, \quad v_r(r) = \pm \sqrt{(2/m)[\mathcal{E} - U_{\text{эф}}(r)]}, \quad v_r(r_0) = 0, \quad r \geq r_0.$$

- Уравнение движения заряда e в электромагнитном поле

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + (e/c) [\vec{v}, \vec{H}].$$

- Дифференциальное сечение рассеяния частиц центрально-симметричным полем в телесный угол $d\Omega$

$$d\sigma = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\Omega.$$

Здесь b – прицельный параметр, связанный с углом рассеяния θ соотношением

$$\theta = \pi - 2b \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - (b/r)^2 - U(r)/\mathcal{E}}},$$

где r_0 – решение уравнения $1 - (b/r)^2 - U(r)/\mathcal{E} = 0$.

- В ньютоновском поле $U(r) = -\alpha/r$, $\alpha = \gamma m_1 m_2$, m_1 – масса легкой точки, m_2 – масса тяжелой (неподвижной) точки, γ – гравитационная постоянная.
- В кулоновском поле $U(r) = -\alpha/r$, $\alpha = -e_1 e_2$, e_1 – заряд падающей частицы, e_2 – заряд рассеивающего центра (тяжелой частицы-мишени),

$$b = \left| \frac{\alpha}{2\mathcal{E}} \right| \text{ctg}(\theta/2).$$

Для малых углов рассеяния теория возмущений даёт приближенное соотношение

$$\theta \approx (b/\mathcal{E}) \int_b^{\infty} \frac{dU(r)}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}.$$

3.1. Выразить орты цилиндрической системы координат $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ через орты декартовой $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ и вывести соотношения $\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$ и $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho$.

3.2. Выразить проекции скорости точки v_ρ , v_φ и v_z через цилиндрические координаты.

- 3.3 Выразить проекции ускорения точки a_ρ , a_φ и a_z через цилиндрические координаты.
- 3.4. Выразить орты сферической системы координат через орты декартовой и доказать, что $\vec{e}_r = \theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$.
- 3.5. Выразить проекции скорости точки v_r, v_θ, v_φ через сферические координаты.
- 3.6. Выразить проекции ускорения точки a_r, a_θ и a_φ через сферические координаты.
- 3.7. Выразить кинетическую энергию и момент импульса точки в цилиндрической системе координат.
- 3.8. Выразить кинетическую энергию и квадрат момента импульса точки в сферической системе координат. Показать переход в плоскую полярную систему координат.
- 3.9. Вывести формулы для кинетической энергии и момента импульса точки в полярной системе координат путем непосредственного перехода от декартовых координат.
- 3.10. Точка движется в плоскости так, что касательная и нормальная составляющие ускорения её постоянны. Выразить радиус кривизны траектории R через её длину s от начала движения, соответствующего моменту времени $t = 0$.
- 3.11. Точка начинает движение в плоскости XOZ из начала координат в момент $t = 0$ со скоростью $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z$ (v_{0x} и $v_{0z} > 0$) под действием гравитационной силы $\vec{F}_{\text{гр}} = -mg\vec{e}_z$ при наличии трения $\vec{F}_{\text{тр}} = -b\vec{v}$. Найти и проанализировать $\vec{v}(t)$.
- 3.12. В условиях предыдущей задачи найти и проанализировать $\vec{r}(t)$.
- 3.13. Исследовать движение заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле $\vec{H}$, направленном вдоль оси OZ .
- 3.14. Покоившийся в начальный момент времени электрон проходит путь x в однородном линейно возрастающем со временем электрическом поле $\vec{E} = \vec{E}t$, $\vec{E} = \text{const}$. Найти его кинетическую энергию.
- 3.15. Электрон с начальной скоростью $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ проходит через поперечное однородное электрическое поле $\vec{E} = E\vec{e}_y$. Найти угол отклонения θ и величину поперечного смещения y в точке с координатой x .
- 3.16. Написать уравнения для декартовых проекций скорости заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитных полях ($\vec{E} = E\vec{e}_y$, $\vec{H} = H\vec{e}_z$).
- 3.17. Решить систему дифференциальных уравнений, полученных в предыдущей задаче, при начальном условии $\vec{v}(0) = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0y}\vec{e}_y + v_{0z}\vec{e}_z$.
- 3.18. Используя результаты предыдущей задачи, найти закон движения заряда в скрещенных электрическом и магнитном полях $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$ при начальном условии $\vec{r}(0) = 0$. Исследовать форму траектории.

- 3.19. Вывести уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле в цилиндрической системе координат.
- 3.20. Заряженный пространственный осциллятор с собственной частотой ω_0 помещён в постоянное однородное магнитное поле, направленное вдоль оси OZ . Найти частоты колебаний в направлениях, параллельном и перпендикулярном полю.
- 3.21. Точка массой m движется в плоскости XOY по эллипсу с полуосями a и b так, что секторная скорость относительно центра эллипса постоянна. Найти действующую на точку силу.
- 3.22. Точка массой m движется в плоскости по эллипсу с параметром p и постоянной относительно фокуса секторной скоростью σ . Найти действующую на нее силу.
- 3.23. Точка массой m движется в центрально-симметричном поле с потенциальной энергией $U(r) = kr^3$ ($k > 0$). Найти кинетическую энергию и момент импульса точки при движении её по круговой орбите радиуса a .
- 3.24. В условиях предыдущей задачи найти частоту малых радиальных колебаний точки, если её движение слегка отклонилось от кругового под действием возмущения.
- 3.25. Точка, находящаяся в центрально-симметричном поле $U(r)$, движется по окружности радиусом a . Какому условию должно удовлетворять поле $U(r)$, чтобы движение это было устойчивым, и какова частота радиальных колебаний, возникающих при слабом возмущении устойчивого вращения?
- 3.26. Точка массой m движется по спирали Архимеда, в полярной системе координат имеющей вид $r = At$, $\varphi = Bt$. Найти действующую на неё силу – её проекции F_r , F_φ и абсолютную величину.
- 3.27. Найти центрально-симметричную силу, в поле которой материальная точка движется по гиперболической спирали $r = c/\varphi$.
- 3.28. Точка движется в потенциальном поле $U(r) = -\alpha/r^\gamma$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. При каких значениях γ возможно устойчивое движение по окружности? Найти её радиус a и соответствующее значение $U_{\text{эф}}(a)$.
- 3.29. Найти радиусы окружностей, между которыми заключена траектория точки, движущейся в поле притяжения $U(r) = -\alpha/r^\gamma$, $\gamma = 1, 2, 4$, с энергией $\mathcal{E} < 0$ и моментом импульса L .
- 3.30. Определить дифференциальные сечения $d\sigma/d\Omega$ и $d\sigma/d\theta$ упругого рассеяния материальных точек неподвижным твердым шариком радиуса R .
- 3.31. Определить дифференциальное сечение рассеяния полем $U = \alpha/r^2$ ($\alpha > 0$).
- 3.32. Доказать, что в случае притягивающего кулоновского поля соотношение угол рассеяния – эксцентриситет имеет тот же вид, что и в случае отталкивающего.
- 3.33. Найти дифференциальные сечения рассеяния $d\sigma/d\Omega$ и $d\sigma/d\theta$ кулоновским полем $U = -\alpha/r$ (рассеяние Резерфорда).

- 3.34. Вычислить сечение резерфордского рассеяния в заднюю полусферу.
- 3.35. Вычислить дифференциальные сечения резерфордского рассеяния в малоугловом приближении методом возмущений и сравнить с точными сечениями.
- 3.36. Вычислить дифференциальное сечение рассеяния на малые углы полем $U = -\alpha/r^n$.
- 3.37. Приближённый учёт эффекта экранирования поля ядра атома его электронной оболочкой можно осуществить введением малого "угла экранирования" η в соотношение прицельный параметр – угол рассеяния:
- $$b = \left| \frac{\alpha}{2\mathcal{E}} \right| \operatorname{ctg}[(\theta + \eta)/2], \quad \eta = \text{const.}$$
- Найти в этом приближении $d\sigma/d\theta$, объяснить отличие от результата задачи 3.33., нарисовать графики в области малых углов.
- 3.38. Точечные частицы с энергией $\mathcal{E}$ рассеиваются на ядре конечного размера R . При каких углах θ рассеяние останется чисто резерфордским? Найти сечение падения частиц на ядро.

4. Кеплеровы орбиты

- Потенциал гравитационного поля, создаваемого точечным или сферически симметричным распределением массы m_0 конечного радиуса r_0 с центром в начале координат,

$$\phi(r) = -K/r, \quad r > r_0,$$

где $K = \gamma m_0$.

- Потенциальная энергия точки массой m в этом (ньютоновском) поле

$$U(r) = m\phi(r) = -\alpha/r, \quad \alpha = mK = \gamma m m_0.$$

- Уравнение кеплеровой орбиты в полярной системе координат с центром в фокусе

$$r = p/[1 + \varepsilon \cos \varphi].$$

Угол φ (*истинная аномалия*) отсчитывается от направления на перицентр (ближайшую к фокусу точку) орбиты.

- Параметры орбиты: $p = \frac{L^2}{m\alpha^2}$ – фокальный параметр орбиты;

$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}L^2}{m\alpha^2}}$ – эксцентриситет орбиты;

$a = \frac{\alpha}{2|\mathcal{E}|}$ – большая полуось эллипса;

$b = \frac{L}{\sqrt{2m|\mathcal{E}|}}$ – малая полуось эллипса;

r_a – наибольшее удаление от фокуса (апогей, апоцентр);

r_n – наименьшее удаление от фокуса (перигей, перицентр).

- Время движения по эллиптической орбите, отсчитываемое от момента прохождения через перицентр,

$$t = \sqrt{p^3/K} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}.$$

- Для замкнутой орбиты длиной λ с периодом τ :

$\langle f \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(r(t)) dt$ – *средневременное (среднее по периоду τ)* значение функции $f(r)$;

$\langle f \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r(\varphi)) d\varphi$ – *среднеугловое* значение функции $f(r)$;

$\langle f \rangle_\lambda = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(r(l)) dl$ – *среднедуговое* значение функции $f(r)$.

- Характерные скорости:

$v_{кр}(r) = \sqrt{K/r}$ – круговая скорость, тот есть скорость движения по круговой орбите радиуса r ;

$v_{пар}(r) = \sqrt{2K/r}$ – параболическая скорость, то есть скорость, с которой точка движется по параболической траектории;

$$v_{1к} = \sqrt{K/R} - \text{первая космическая скорость};$$

$$v_{2к} = \sqrt{2K/R} - \text{вторая космическая скорость}.$$

- 4.1. Выразить фокальный параметр, эксцентриситет и большую полуось кеплеровой орбиты через апогейное и перигейное расстояния.
- 4.2. Доказать соотношения $r_a = p/(1 - \varepsilon)$, $r_n = p(1 + \varepsilon)$, $p = a(1 - \varepsilon^2)$.
- 4.3. Выразить полуоси эллиптической орбиты через энергию и момент импульса движущегося по ней тела.
- 4.4. Найти период обращения тела с энергией $\mathcal{E}$ по эллиптической орбите.
- 4.5. Для точки, движущейся в центрально-симметричном поле, вывести *формулы Бине*: $v^2 = (2\sigma)^2\{(du/d\varphi)^2 + u^2\}$ и $a_r = -(2\sigma u)^2 u^2 (d^2u/d\varphi^2 + u)$, где $u = 1/r$, σ – секторная скорость.
- 4.6. Пользуясь формулами Бине, найти ускорение точки, движущейся по эллиптической орбите.
- 4.7. Показать, что вторая производная функции $I(r) = mr^2/2$ по времени отличается от кинетической энергии точки, движущейся в поле $U(r) = -\alpha/r$, на постоянную величину.
- 4.8. Показать, что переменная $J = dI/dt$ удовлетворяет уравнению $d^2J/dt^2 = -kJ/r^3$, где k – постоянная.
- 4.9. На какой высоте h летит "стационарный" (то есть, движущийся в плоскости экватора и находящийся над одной и той же точкой вращающейся Земли) искусственный спутник Земли?
- 4.10. Период обращения искусственного спутника Земли 106 мин., наибольшая высота над её поверхностью – 1880 км. Вычислить наименьшую высоту.
- 4.11. Эксцентриситет орбиты малой планеты $\varepsilon = 0.826$ а.е. (астрономических единиц), а большая полуось $a = 1.08$ а.е. Найти малую полуось.
- 4.12. Планета, обращающаяся вокруг Солнца с периодом τ и большой полуосью орбиты a , имеет спутник, обращающийся вокруг неё с периодом τ_1 и большой полуосью орбиты a_1 . Найти массу планеты m , если известна масса Солнца m_0 .
- 4.13. Показать, что для материальной точки, движущейся в центрально-симметричном поле $U = -\alpha/r$, сохраняется вектор Лапласа $\vec{L} = [\vec{v}, \vec{L}] - \alpha \vec{r}/r$. Определить положение $\vec{L}$ относительно орбиты точки и связь его величины с эксцентриситетом орбиты ε .
- 4.14. Материальная точка движется в ньютоновском поле $\phi(r) = -K/r$ с секторной скоростью σ . Доказать, что вектор $\vec{N} = \vec{v} - [K/(2\sigma)]\vec{e}_\varphi$ является интегралом причем движения, $N = [K/2\sigma]\varepsilon$.

- 4.15. Доказать, что векторы $\vec{\sigma}$ (секторная скорость), $\vec{L}$ (Лапласа) и $\vec{N}$ образуют правую тройку ортогональных векторов.
- 4.16. Доказать, что уравнения движения точки в поле $\phi(r) = -K/r$ можно преобразовать к виду
- $$\ddot{x} = -\frac{K}{\sigma} \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{r} \right), \quad \ddot{y} = -\frac{K}{\sigma} \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{r} \right).$$
- 4.17. Показать, что приведённым в предыдущей задаче уравнениям удовлетворяет траектория вида $r = Ax + By + \sigma^2/K$, где A и B – постоянные.
- 4.18. Найти полуоси эллипса в задаче о трехмерном гармоническом осцилляторе с начальными условиями $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ и $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$.
- 4.19. Найти полуоси эллипса, по которому движется планета вокруг Солнца с энергией E и моментом импульса L .
- 4.20. Найти период обращения планеты в условиях предыдущей задачи.
- 4.21. Материальная точка движется в поле тяготения по эллиптической орбите. Представить время движения $t(\varphi)$ в виде степенного ряда относительно эксцентриситета.
- 4.22. Найти траекторию движения и период обращения звезды в однородном шаровом звёздном скоплении с плотностью ρ .
- 4.23. Показать, что если бы всё вещество, под действием гравитации которого Солнце движется по круговой орбите радиуса r со скоростью v , было сосредоточено в центре Галактики, то его массу можно было бы найти из соотношения $m = rv^2/\gamma$.
- 4.24. Точка движется так, что перпендикулярная радиусу-вектору $\vec{r}$ компонента скорости обратно пропорциональна $|\vec{r}|$. Доказать, что ускорение точки направлено вдоль $\vec{r}$.
- 4.25. Найти абсолютную величину скорости точки, движущейся по кеплеровой орбите, как функцию угла φ , параметра p и эксцентриситета орбиты ε .
- 4.26. В условиях предыдущей задачи найти радиальную v_r и *трансверсальную* $v_\perp$ (перпендикулярную к радиусу-вектору) компоненты скорости.
- 4.27. Используя результаты предыдущей задачи, найти круговую скорость $v_{кр}$, с которой точка в поле $\phi(r) = -K/r$ вращается по круговой орбите радиуса r , и параболическую скорость $v_{пар}(r)$ – минимальное значение скорости в этой точке для того, чтобы материальная точка могла уйти на бесконечность.
- 4.28. В условиях задачи 4.25. найти угол θ между радиусом-вектором и скоростью точки.
- 4.29. Космический корабль в потенциальном поле $\phi = -K/r$ стартует с круговой орбиты радиуса r_0 с постоянным по модулю радиальным ускорением $a = K/(2r_0)^2$. На каком расстоянии r_1 от притягивающего центра корабль выйдет на инфинитную (параболическую) траекторию?

- 4.30. Найти среднеугловое расстояние спутника от центра притяжения.
- 4.31. Найти средневременное расстояние спутника от центра притяжения.
- 4.32. Найти среднедуговое расстояние спутника от центра притяжения.
- 4.33. Доказать, что среднедуговое значение потенциальной энергии спутника выражается через параметр орбиты p соотношением $\langle U \rangle_\lambda = -\alpha/p$.
- 4.34. Найти средневременное значение потенциальной энергии спутника.
- 4.35. Доказать, что средневременное значение кинетической энергии спутника выражается соотношением $\langle T \rangle_\tau = \alpha/(2a)$.
- 4.36. Тело брошено с большой скоростью с поверхности Земли под углом β к горизонту. Какова должна быть его начальная скорость, чтобы оно упало на Землю в диаметрально противоположной точке? Сопротивлением воздуха и несферичностью Земли пренебречь.
- 4.37. С Северного полюса Земли запущена ракета с первой космической скоростью под углом β к горизонту. Ракета приземлилась на экваторе: чему равен угол β ?
- 4.38. Космический корабль с солнечным парусом движется в поле притяжения Солнца. Пусть θ – угол между радиус-вектором корабля и нормалью к теневой поверхности паруса. При $\theta = 0$ за счёт светового давления корабль получает ускорение a_0 . Какому уравнению должен удовлетворять угол $\theta = \theta(t)$, чтобы обеспечить движение корабля круговой орбите радиуса r_0 ?

- 4.39. Показать, что уравнение орбиты в центрально-симметричном поле

$$\vec{F} = \left(-\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^3} \right) \vec{e}_r \text{ может быть представлено в виде } r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos(k\varphi)},$$

где a, ε и k – постоянные.

- 4.40. Показать, что в случае произвольной центрально-симметричной силы имеет место соотношение

$$v^2 = \frac{2r_{\Pi}^2}{r_a^2 - r_{\Pi}^2} \int_{r_{\Pi}}^r F_r(r) dr + \frac{2r_a^2}{r_a^2 - r_{\Pi}^2} \int_r^{r_a} F_r(r) dr.$$

Проверить справедливость этой формулы в случае кеплеровой орбиты.

- 4.41. Показать, что в случае произвольной центрально-симметричной силы имеет место уравнение

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = C - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left[r^2 \int F_r(r) dr \right],$$

где C – постоянная, определяемая начальными условиями. Проверить справедливость этого уравнения в случае движения по кеплеровой орбите.

- 4.42. Астероид представляет собой однородный шар радиусом 80 км с той же плотностью, что и Земля. С его поверхности вертикально вверх произведен выстрел, скорость пули равна 150 м/с. Вернется ли пуля обратно на астероид?

- 4.43. С поверхности Солнца ($g_{\text{С}} = 28g_{\text{З}}$) поднялся протуберанец высотой 100 000 км. Какова начальная скорость частиц, образовавших вершину протуберанца?

5. Системы материальных точек

- Уравнения движения системы N материальных точек в декартовых координатах имеют вид

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\vec{F}_i$ – внешняя сила, $\vec{F}_{ij}$ – сила, действующая на i -ю точку со стороны j -й.

- Импульс системы $\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$, момент импульса $\vec{L} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$, энергия $\mathcal{E} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \equiv \vec{F},$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i] \equiv \vec{M}$$

в случае центральных внутренних сил и

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \vec{v}_i \equiv N$$

в случае потенциальных внутренних сил соответственно. Здесь $\vec{F}$ – главный вектор внешних сил, $\vec{M}$ – главный момент внешних сил, N – мощность внешних сил.

- Теорема о вириале сил (Клаузиуса):** если движение системы происходит в ограниченной области пространства и с ограниченными скоростями, то средняя (по времени) кинетическая энергия системы равна среднему по времени вириалу сил

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} \right\rangle = \left\langle - \sum_{i=1}^N \frac{\vec{r}_i \vec{F}_i}{2} \right\rangle.$$

- Теоремы о переносе начала координат в центр масс системы.**

Наряду с исходной, лабораторной системой координат (ЛСК) введём систему центра масс (СЦМ), начало которой находится в центре масс, а её оси параллельны соответствующим осям лабораторной системы. Отмечая относящиеся к СЦМ величины звёздочкой, запишем теоремы о переносе начала координат:

$$\vec{P} = m \vec{V}, \quad \vec{P}^* = 0,$$

$$\vec{L} = \vec{L}^* + [\vec{R}, \vec{P}],$$

$$T = T^* + \frac{m V^2}{2},$$

где $m = \sum_i^N m_i$ – масса системы,

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i / \sum_{i=1}^N m_i$$

– радиус-вектор центра масс в ЛСК,

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ – скорость центра масс.

В отсутствие внешних сил энергии потенциальной системы в ЛСК и СЦМ связаны соотношением

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^* + \frac{mV^2}{2},$$

где $\mathcal{E}^* = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^{*2}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N U_{ij}(\vec{r}_{ij})$ – внутренняя энергия системы,

$U_{ij}(\vec{r}_{ij})$ – потенциальная энергия взаимодействия пары частиц.

5.1. Система четырёх попарно взаимодействующих друг с другом частиц (1, 2, 3, 4), распадается на две подсистемы $A = (1, 2)$ и $B = (3, 4)$. Записать энергию взаимодействия подсистем и внутренние энергии каждой из них.

5.2. Доказать тождество

$$\sum_{\substack{i=j \\ i \neq j}}^N \sum_{j=1}^N U_{ij} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N U_{ij}.$$

5.3. Доказать, что кинетическая энергия системы N точек удовлетворяет уравнениям

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i} = \vec{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

(выражение $\partial T / \partial \vec{v}$ означает градиент в пространстве скоростей, то есть вектор с проекциями $\partial T / \partial v_x$, $\partial T / \partial v_y$ и $\partial T / \partial v_z$).

5.4. Доказать соотношение $\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \vec{v}_i$.

5.5. Доказать, что разность кинетической и потенциальной энергий системы как функция декартовых координат и скоростей удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \vec{v}_i} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \vec{r}_i}.$$

5.6. Доказать, что сумма кинетической и потенциальной энергии системы как функция координат и импульсов удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial (T + U)}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad \frac{\partial (T + U)}{\partial \vec{p}_i} = \frac{d\vec{r}_i}{dt}.$$

5.7. Доказать, что собственный момент импульса $\vec{L}^*$ системы не зависит от выбора точки, относительно которой он определяется, если эта точка неподвижна относительно СЦМ.

5.8. Доказать, что главный момент приложенных к системе сил не зависит от выбора точки, относительно которой он вычисляется, если главный вектор внешних сил равен нулю.

- 5.9. Показать, что собственный момент импульса замкнутой системы двух тел можно записать в виде $\vec{L}^* = [\vec{r}, \mu \vec{v}]$, где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведенная масса, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ – относительная скорость.
- 5.10. Показать, что собственная кинетическая энергия замкнутой системы двух тел может быть записана в виде $T^* = \mu v^2 / 2$.
- 5.11. Доказать, что полярный момент инерции системы гравитирующих точек $I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ относительно центра масс удовлетворяет уравнению Лагранжа-Якоби $\dot{I} = 2(2T + U)$.
- 5.12. В условиях предыдущей задачи доказать справедливость следующих уравнений $\dot{I} = 2(T + \mathcal{E})$, $\ddot{I} = 2(2\mathcal{E} - U)$.
- 5.13. Доказать, что выражение

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i / m_i \right)^2$$

для истинных ускорений $\ddot{\vec{r}}_j$ минимально (*принцип наименьшего принуждения Гаусса*).

- 5.14. Показать, что центр масс замкнутой системы движется равномерно и прямолинейно.
- 5.15. Показать, что момент импульса замкнутой системы точек с центральным взаимодействием постоянен.
- 5.16. Показать, что полная энергия замкнутой системы точек с центрально-симметричным взаимодействием постоянна.
- 5.17. Выразить величину $N = \sum_{i,j=1}^N m_i m_j r_{ij}$ гравитирующей системы через её полярный момент инерции относительно центра масс.
- 5.18. Составить дифференциальное уравнение для N (см. 5.17), включающее в себя массу системы, её кинетическую и потенциальную энергии.
- 5.19. Пусть $\rho(t)$ – наименьшее из расстояний между гравитирующими точками системы. Доказать, что в процессе движения этой системы выполняется неравенство $U(t) \geq -(\gamma/2)m^2/\rho(t)$.
- 5.20. Доказать, что минимальное расстояние ρ между гравитирующими точками системы с отрицательной энергией ($\mathcal{E} < 0$) всё время остаётся ограниченным сверху: $\rho(t) \leq m^2/|2\mathcal{E}|$.
- 5.21. При каком соотношении между плотностью, радиусом и температурой однородное сферическое симметричное газообразное облако начнёт сжиматься, чтобы образовать (по гипотезе Канта-Лапласа) звезду? Оценить время сжатия.

- 5.22. Доказать, что хотя бы одна из гравитирующих точек системы с положительной энергией при $t \rightarrow \infty$ удаляется от её центра масс на неограниченно большое расстояние.
- 5.23. Найти собственную гравитационную энергию однородного шара.
- 5.24. В условиях задачи 1.53 найти энергию взаимодействия W электронного облака с ядром.
- 5.25. Показать, что найденный в предыдущей задаче результат в точности совпадает с потенциальной энергией точечного заряда $-e$, движущегося вокруг неподвижного заряда Ze по круговой орбите радиуса a_0/Z .

- 5.26. В квантовой теории атома гелия ($Z = 2$ и два электрона) возникает интеграл

$$K = \int \int A^2 e^{-2r_1/r_0 - 2r_2/r_0} \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dV_1 dV_2,$$

$A = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^3$. Дать ему классическую интерпретацию и вычислить его значение.

- 5.27. Вычислить энергию взаимодействия электронного облака (a) одного атома с ядром (B) другого в молекуле водорода. Расстояние между ядрами R , распределение заряда в облаке считать невозмущенным, то есть, таким же, как и в изолированном атоме водорода.
- 5.28. Найти потенциальную часть внутренней энергии молекулы водорода.
- 5.29. Сформулировать теорему о вириале потенциальных сил в случае, когда потенциальная энергия является однородной функцией координат

$$U(\alpha \vec{r}_1, \alpha \vec{r}_2, \dots, \alpha \vec{r}_N) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N).$$

Здесь $\alpha > 0$ – постоянная, k – степень однородности функции.

- 5.30. Обобщить теорему о вириале сил на систему одинаковых заряженных частиц, совершающих движение с ограниченными скоростями в ограниченной области пространства с однородным постоянным в магнитным полем $\vec{H}$.
- 5.31. Сформулировать теорему о вириале сил в случае, когда $\vec{F}_i = -\nabla_i U - b\vec{v}_i$ (движение считается установившимся и не прекращается в результате действия сил трения).
- 5.32. Используя теорему о вириале сил, оценить среднюю температуру внутри Солнца
- 5.33. Доказать, что галактика, кинетическая энергия которой превосходит абсолютную величину потенциальной, должна неограниченно расширяться.
- 5.34. Найти закон движения системы материальных точек, взаимодействие которых друг с другом определяется силой $\vec{F}_{ij} = -km_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$.

- 5.35. Система двух звёзд характеризуется периодом обращения τ , максимальным расстоянием $2a$ и большими полуосьями a_1 и a_2 эллиптической орбиты каждой из звёзд относительно общего центра масс: $a_1 + a_2 = a$. Найти массу каждой из звёзд.
- 5.36. Показать, что если бы всё вещество, под действием гравитации которого Солнце движется по круговой орбите радиуса R со скоростью V , было сосредоточено в центре галактики, то массу этого вещества можно было бы найти из соотношения $m = RV^2/\gamma$.
- 5.37. Две притягивающиеся друг к другу точки – одна на оси OX , другая – на оси OY – начинают движение из состояния покоя. Показать, что независимо от закона притяжения они одновременно окажутся в начале координат.
- 5.38. Однородная абсолютно твердая пластинка массой M укреплена на горизонтальной плоскости четырьмя пружинами с одинаковой жесткостью k . Точка массы m , падая с высоты h в центр пластинки, приводит её в состояние колебаний. Найти амплитуду и частоту колебаний пластины в случаях а) упругого соударения и б) абсолютно неупругого соударения (когда шарик прилипает к пластинке).
- 5.39. Клин массы M скользит по гладкой горизонтальной поверхности стола. По верхней наклонной поверхности клина движется без трения точка массой m . Движение происходит в вертикальной плоскости XOZ , проходящей через линию наибольшего наклона. Найти ускорение клина относительно стола A и ускорение частицы относительно клина a .
- 5.40. Клин массы M с прямоугольным основанием $a \times b$ находится на гладкой горизонтальной поверхности. Угол между наклонной плоскостью и основанием α . Сверху падает однородный поток частиц с плотностью j ($\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$). Массы частиц m и их скорости v одинаковы. Найти ускорение клина A в начальный момент, если падающие частицы упруго отскакивают от наклонной поверхности. Что будет наблюдаться с увеличением его скорости? Как предельная скорость клина будет зависеть от свойств его вертикальной стенки?
- 5.41. Частица массой m с начальной скоростью $\vec{v}_{10}$ налетает на покоившуюся в лабораторной системе частицу массой ξm и упруго рассеивается на угол ϑ . Найти угол рассеяния θ в системе центра масс, переданную энергию и отношение масс ξ , при котором возможна максимальная передача энергии.
- 5.42. Найти дифференциальное сечение рассеяния точечных частиц массой m_1 , на первоначально покоящихся в лабораторной системе координат твердых шариках массой m_2 .
- 5.43. В условиях предыдущей задачи вычислить дифференциальное сечение для вторичных частиц (шариков). Проверить нормировку.
- 5.44. Найти дифференциальное сечение $d\sigma/dQ$, среднее значение и средний квадрат потерянной энергии Q при рассеянии нейтральных частиц на шариках конечной массы.

- 5.45. Найти дифференциальное сечение потерь энергии $d\sigma/dQ$ для заряженных частиц, рассеиваемых точечными зарядами конечной массы.
- 5.46. Твёрдое тело движется в воздухе со скоростью, очень большой по сравнению со скоростями молекул. Доказать, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, если столкновения молекул с телом упругие.
- 5.47. Записать систему уравнений движения трех тел в декартовых координатах. Насколько можно уменьшить ее порядок с помощью интегралов движения? Приведите их.
- 5.48. Понизить порядок системы уравнений для трех тел выбором начала координат в одном из них.
- 5.49. Понижение порядка системы уравнений для трех тел методом Якоби предполагает рассмотрение движения точки 2 относительно точки 1 (как в приведенной выше задаче), а затем – движения точки 3 относительно центра масс системы 1 + 2. Вывести уравнение движения точки 3.
- 5.50. Выразить кинетическую энергию системы трех тел через разности их скоростей.
- 5.51. Три гравитирующих материальных точки движутся в неподвижной плоскости, оставаясь в покое относительно вращающейся системы координат (такое движение называется *равновесным*). Показать, что при равновесном движении центр масс неподвижен и находится в начале координат.
- 5.52. Показать, что равновесное движение трёх точек возможно лишь в двух случаях: все точки находятся на прямой или в вершинах равностороннего треугольника.
- 5.53. Три одинаковые точки, образующие равносторонний треугольник, находятся в состоянии равновесного движения. Введя в плоскости движения комплексные переменные $Z_j = x_j + iy_j = c_j w(t)$, $c_j = \text{const}$, вывести уравнение для комплексной функции времени $w(t)$, характеризующей размеры вращающегося треугольника.

6. Инерция, реакция и реактивное движение

- Связь между скоростью $\vec{v}_{\text{абс}}$ точки относительно инерциальной системы отсчета (ИСО) и скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ относительно *неинерциальной системы отсчёта* (НСО), имеющей скорость $\vec{V}$ поступательного движения и угловую скорость $\vec{\Omega}$ вращения относительно ИСО, даётся соотношением

$$\vec{v}_{\text{abc}} = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{OTH}}] + \vec{v}_{\text{OTH}}.$$

Соответствующая связь для ускорений имеет вид

$$\vec{a}_{\text{a6c}} = \vec{A} + [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{OTH}}] + [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{OTH}}]] + 2[\vec{\Omega}, \vec{v}_{\text{OTH}}] + \vec{a}_{\text{OTH}},$$

где $\vec{A} = \dot{\vec{V}}$ – ускорение начала координат НСО относительно ИСО. Сила инерции, возникающая в НСО, $\vec{F}^* = -m\vec{a}_{\text{abc}}$ включает в себя *переносную* и *Кориолисову* компоненты

$$\vec{F}_{\text{пер}}^* = -m \left\{ \vec{A} + [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{OTH}}] + [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{OTH}}]] \right\}$$

И

$$\vec{F}_{\text{Kon}}^* = 2m[\vec{v}_{\text{OTH}}, \vec{\Omega}].$$

Центробежная часть переносной компоненты $\vec{F}_{цб}^* = -m [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, r_{отн}]]$ приводится к виду $\vec{F}_{цб}^* = m\Omega^2 \vec{\rho}$, где $\vec{\rho}$ – радиус-вектор точки, перпендикулярный угловой скорости $\vec{\Omega}$ и проведенный от оси вращения.

- При наличии s голономных связей вида

$$\begin{aligned} f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_s(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) &= 0 \end{aligned}$$

уравнения движения системы N точек могут быть представлены в форме *уравнений Лагранжа 1-го рода*:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}'_i,$$

$$\vec{F}'_i = \sum_{j=1}^s \lambda_j \nabla_i f_j, \quad i = 1, \dots, N.$$

Постоянные λ_j называются *неопределёнными множителями Лагранжа*, векторы $\vec{F}_i^*$ — *силами реакции*.

- Реактивное движение тела переменной массы описывается *уравнением Мещерского*

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} + m\vec{u},$$

где $m = m(t)$ – масса тела (ракеты с топливом), $\vec{F}$ – действующая на тело внешняя сила, $\vec{u}$ – относительная скорость истечения газов.

- В отсутствие внешних сил скорость v_K ракеты к моменту выгорания топлива даётся *формулой Циолковского* $v_K = u \ln(m_0/m_K)$, отношение $m_0/m_K = Z$ называют *числом Циолковского*.

6.1. Преобразовать центробежную силу к виду $\vec{F}_{\text{цб}}^* = m\Omega^2 \vec{\rho}$.

6.2. Найти относительное движение материальной точки в горизонтальной плоскости XOY , вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$.

- 6.3. Найти относительное движение материальной точки в вертикальной плоскости XOZ , вращающейся вокруг оси OZ с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. Сила тяжести $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, начальная скорость точки (относительно вращающейся плоскости) равна нулю. Найти реакцию плоскости.
- 6.4. Точка связана с началом координат упругой силой $F = -kx$ и может двигаться вдоль оси OX без трения. Этой системе сообщается постоянное горизонтальное ускорение, направленное в сторону отрицательных значений x . Найти закон движения точки относительно движущейся оси OX .
- 6.5. Точка движется по сфере с постоянной по модулю скоростью, направление которой образует постоянный угол α с меридианами сферы. Найти время, за которое точка дойдёт от экватора до полюса сферы.
- 6.6. Точка движется с постоянной угловой скоростью Ω по окружности радиуса R , вращающейся с такой же скоростью относительно своего диаметра, совпадающего с осью OZ . Найти абсолютную скорость точки как функцию угла θ между осью OZ и радиусом-вектором точки (центр окружности совмещен с началом координат).
- 6.7. В условиях предыдущей задачи найти ускорение как функцию угла θ .
- 6.8. Материальная точка M скользит без трения по окружности радиусом R , лежащей в горизонтальной плоскости XOY и вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ относительно одной из своих точек, закреплённой неподвижно в начале координат. Исследовать движение точки в системе координат, связанной с окружностью.
- 6.9. В условиях предыдущей задачи найти нормальную компоненту реакции N .
- 6.10. В условия задачи 6.8. добавить силу отталкивания от начала координат $\vec{F} = \alpha m \vec{OM}$.
- 6.11. Начало координат лабораторной системы находится на поверхности Земли на широте Θ , ось OX направлена к югу, OY – к востоку, OZ перпендикулярна поверхности. Вблизи начала координат движется материальная точка. Записать уравнение её движения в проекциях на оси данной системы координат (с учётом вращения Земли).
- 6.12. Найти траекторию маятника Фуко. Рассмотреть два частных случая: маятник на экваторе и маятник на полюсе.
- 6.13. Камень падает в шахту глубиной h на широте Θ . Насколько он отклонится от вертикали в восточном направлении?
- 6.14. Точка подвеса маятника с периодом колебаний τ_0 приведена в состояние движения с постоянным горизонтальным ускорением a . Найти период колебаний в системе покоя точки подвеса.
- 6.15. Применив уравнения Лагранжа первого рода к описанию движения машины Атвуда (две массы, соединённые невесомой нитью, переброшенной через невесомый блок, вращающийся без трения), найти ускорения масс.

- 6.16. Найти ускорения грузов в машине Атвуда с неоднородным блоком массы m и радиусом R центр масс которого отстоит от оси вращения на расстоянии d , момент инерции относительно этой оси равен I_0 . Нить нерастяжима, невесома и не проскальзывает по блоку.
- 6.17. В машине Атвуда обе массы заменены двумя одинаковыми по массе обезьянами: ленивой и резвой. Ленивая висит, вцепившись в верёвку, резвая лезет вверх по ней. Какая из них достигнет блока раньше, если они в начальный момент времени находились на одинаковой высоте в состоянии покоя.
- 6.18. Материальная точка движется в однородном поле тяжести по гладкой неподвижной плоскости $z = x \operatorname{tg} \alpha$. Найти закон движения точки и силу реакции плоскости.
- 6.19. Точка может свободно скользить по кривой, заданной уравнениями $x^2 + 4y + 36(z^2 - 1) = 0$ и $x + 2y + 6(z - 1) = 0$ в однородном поле тяжести, направленном в сторону отрицательных значений z . Найти положение равновесия.
- 6.20. Материальная точка движется по гладкой неподвижной параболе $z = \sqrt{ax}$, $a = \sqrt{8}/3$ в однородном поле тяжести. Начальная скорость равна нулю, начальная высота $z_0 = 15/4$. Найти высоту, на которой точка оторвется от параболы.
- 6.21. Тяжёлая точка движется по гладкой поверхности вращения $z = f(\rho)$, $f'(\rho) > 0$ (ось OZ направлена вертикально вверх). Найти выражение для траектории проекции точки на плоскость XOY в полярных координатах r, φ при заданных $\mathcal{E}$ и $\vec{L}$.
- 6.22. В условиях предыдущей задачи найти величину начальной скорости, при которой точка будет двигаться по параллели.
- 6.23. Материальная точка движется по цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$. Найти траекторию точки и реакцию поверхности, если $\vec{r}(0) = r_0 \vec{e}_x$, $\dot{\vec{v}}(0) = v_{0y} \vec{e}_y + v_{0z} \vec{e}_z$.
- 6.24. По круговой конической поверхности с осью OZ движется без трения точка массой m . В момент времени $t = 0$ она имеет горизонтально направленную скорость v_0 и находится на высоте z_0 от вершины конуса $z = 0$. Какой должна быть эта скорость, чтобы максимальная высота траектории точки на противоположной образующей была равна z_m ?
- 6.25. В однородном поле тяжести на поверхности гладкого конуса $z^2 = x^2 + y^2/4$ с вертикальной осью находится точка, отталкивающаяся от вершины с силой, пропорциональной расстоянию до неё (коэффициент пропорциональности k). Найти положения равновесия.
- 6.26. Сферическая оболочка толщиной δ и внутренним радиусом R помещена в однородное поле тяжести. Сверху на неё поставлен однородный шар массой m и радиуса a , а по внутренней поверхности оболочки может скользить без отрыва материальная точка. Найти условие, при котором возникает третье положение равновесия и найти его расстояние от центра шара.

- 6.27. Тяжелая точка движется по горизонтальной шероховатой окружности радиуса a , сила трения $\vec{F}_{\text{тр}} = -kF'\vec{e}_\varphi$, где F' – нормальная составляющая силы реакции. Найти $\vec{F}'$ как функцию проходимого пути s , если полный путь до остановки равен l .
- 6.28. Математический маятник совершает колебания в вертикальной плоскости XOY (ось OX направлена вниз). Начальные условия: $\varphi(0) = 0$ и $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$. Найти реакцию нити как функцию угла отклонения от вертикали φ . При каких ω_0 связь в виде нити будет удерживающей?
- 6.29. Доказать *теорему Клеро*: материальная точка единичной массы движется по поверхности вращения (вокруг оси OZ) в отсутствие активных сил таким образом, что $r \sin \alpha = \text{const}$, где α – угол орбиты с меридианом.
- 6.30. Вывести уравнение движения ракеты во внешнем поле со скоростью истечения газов u (уравнение Мещерского).
- 6.31. Интегрируя уравнение Мещерского для ракеты с постоянной скоростью течения газов в отсутствие внешних сил, получить формулу Циолковского.
- 6.32. Найти закон вертикального движения ракеты в однородном поле тяжести, если $u = \text{const}$, а масса ракеты убывает: а) по линейному закону $m = m_0(1 - \alpha t)$; б) по показательному закону $m = m_0 \exp(-\alpha t)$.
- 6.33. Ракета совершает прямолинейное движение в свободном от силовых полей пространстве. Начальная скорость ракеты равна нулю, скорость истечения газов постоянна, масса ракеты монотонно убывает. Найти максимальное значение её кинетической энергии.
- 6.34. В условиях предыдущей задачи найти максимальное значение импульса ракеты.
- 6.35. Определить максимальную высоту подъёма ракеты в однородном поле тяжести. Масса ракеты меняется по закону $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, вплоть до значения m_k – конечной массы ракеты после выгорания топлива. Сопротивлением воздуха пренебречь, скорость истечения газов считать постоянной.
- 6.36. Ракета движется прямолинейно в свободном от силовых полей пространстве. Скорость истечения газов 2400 м/с, скорость ракеты к моменту полного выгорания топлива 3800 м/с. Определить число Циолковского для этой ракеты.
- 6.37. Какую массу газов должна ежесекундно выбрасывать ракета с начальной массой m_0 , чтобы оставаться неподвижной в поле тяжести?
- 6.38. Ракета, направляющаяся к Марсу, стартует вертикально с поверхности Земли. Найти закон изменения массы ракеты на активном начальном участке траектории, где ускорение ее поддерживается постоянным ($\dot{v} = a$) при постоянной скорости истечения газов.

- 6.39. Ракета взлетает в однородном поле тяжести, испытывая аэродинамическое сопротивление F_c , зависящее от скорости ракеты v . Скорость истечения газов постоянна. Найти оптимальную зависимость массы ракеты от её скорости, обеспечивающую достижение ракетой максимальной высоты.
- 6.40. В условиях предыдущей задачи $F_c(v) = kv^2$. Найти зависимость ускорения a от скорости v для траектории с максимальной высотой.

7. Лагранжевы системы

- Независимыми *обобщенными координатами* системы с s голономными связями называются любые $n = 3N - s$ величины $q_1, \dots, q_n$, однозначно определяющие положение системы:

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n, t) \equiv x_i(q_j, t), \quad i = 1, \dots, 3N.$$

Здесь x_1, x_2, x_3 обозначают декартовы координаты x, y, z первой точки системы, x_4, x_5, x_6 – декартовы координаты x, y, z второй точки и т.д. Число n называется *числом степеней свободы системы*.

- Кинетическая энергия системы выражается через q_i соотношением

$$T = \sum_{ij} \frac{m_{ij}}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i a_i \dot{q}_i + b,$$

где

$$m_{ij} = \sum_k m_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad a_i = \sum_k m_k \frac{\partial x_k}{\partial t} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}, \quad b = \frac{1}{2} \sum_k m_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \right)^2.$$

- Уравнения Лагранжа 2-го рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $Q_i = \sum_j F_j \partial x_j / \partial q_i$ – обобщенные силы. Если F_i – потенциальные силы, $F_i = -\partial U(x_j) / \partial x_i$, то

$$Q_i = -\partial U(x_j(q_k)) / \partial q_i \equiv -\frac{dU}{dq_i}.$$

- Уравнения Лагранжа 2-го рода для потенциальной системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j; t) = T - U$$

– функция Лагранжа.

- Производная $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$ называется *обобщенным импульсом*, сопряженным с обобщенной координатой q_i . Если функция Лагранжа не зависит от какой-либо координаты q_j , последняя называется *циклической координатой*, сопряженный с ней импульс сохраняется $p_j = \text{const}$.
- Обобщенно-потенциальными силами называются силы, удовлетворяющие условию

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

где $V = V(q_j; \dot{q}_j; t)$ – обобщенный потенциал, линейно зависящий от скоростей. Уравнения Лагранжа при этом сохраняют тот же вид относительно функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = T - V.$$

- В НСО функция Лагранжа точки имеет вид

$$\mathcal{L} = (m/2) \left(v^2 + 2\vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + [\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 - 2\vec{r}\vec{A} \right) - U,$$

где $\vec{\Omega}$ – угловая скорость вращения, $\vec{A}$ – ускорение начала координат НСО относительно ИСО.

- Полная энергия потенциальной системы выражается через функцию Лагранжа соотношением

$$\mathcal{E} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}.$$

- Интеграл

$$S = \int_{t_0}^t \mathcal{L} dt \equiv \int_{t_0}^t \mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt$$

называется *действием*.

- В случае линейных колебаний системы около положения устойчивого равновесия, выбранного за начало обобщённых координат, функция Лагранжа принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{ij} [m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - k_{ij} q_i q_j],$$

где коэффициенты m_{ij} и $k_{ij} = \partial^2 U / \partial q_i \partial q_j$ вычислены в точке равновесия ($q_i = 0$).

- Задача о малых нелинейных колебаниях может быть решена асимптотически методом Крылова-Боголюбова. В первом его приближении решение уравнения нелинейных колебаний

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \varepsilon Q(q)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ представляется в виде $q(t) = a \cos \psi(t)$, где $a = \text{const}$, а фаза $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{\psi} = \omega_0 - \varepsilon \beta_1 / (2\omega_0 a)$, $\varepsilon \beta_1 = (\varepsilon / \pi) \int_0^{2\pi} Q(a \cos \psi) \cos \psi d\psi$

- 7.1. Пусть $q_i = q_i(q'_i, t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ – взаимно однозначное преобразование обобщённых координат. Доказать соотношения

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}'_j} = \frac{\partial q_i}{\partial q'_j}, \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q'_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \right).$$

- 7.2. Доказать инвариантность уравнений Лагранжа относительно выбора системы координат.

- 7.3. Показать, что в случае, когда

$$T = f_1(q_1) \dot{q}_1^2 + \dots + f_n(q_n) \dot{q}_n^2$$

и

$$U = U_1(q_1) + \dots + U_n(q_n),$$

система уравнений Лагранжа распадается на независимые уравнения.

- 7.4. Квадрат элемента длины в ортогональной криволинейной системе координат q_i , $i = 1, 2, 3$, имеет вид $dl^2 = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2(q_i) dq_i^2$. Выразить обобщённые силы через координаты q_i и их производные.

- 7.5. Выразить обобщённые силы через скорости и ускорения в цилиндрической системе координат.

- 7.6. Выразить обобщённые силы через скорости и ускорения в сферической системе координат.

- 7.7. Найти выражения обобщенных импульсов в цилиндрической и сферической системах координат.
- 7.8. Выразить обобщенные силы Q_i через проекции этих сил $\vec{F}$ на орты обобщенных координат в цилиндрической и сферической системах.
- 7.9. Найти силу, описываемую обобщенным потенциалом $V = -\vec{v}\vec{A}(\vec{r})$.
- 7.10. Написать функцию Лагранжа и уравнения движения сферического маятника (точки массой m , движущейся по неподвижной сфере радиуса R в однородном поле тяжести) в сферических координатах.
- 7.11. Записать функцию Лагранжа и уравнения движения в поле $U = mgr\vec{e}_z$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.
- 7.12. Записать функцию Лагранжа и уравнения движения в поле $U = kr^2/2$ (трехмерный изотропный гармонический осцилятор) в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.
- 7.13. Записать функцию Лагранжа и уравнения движения в поле $U = -\alpha/r$ в полярных координатах.
- 7.14. Точка массой m движется по поверхности $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ в однородном поле тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Найти функцию Лагранжа.
- 7.15. Найти явное выражение для энергии точки в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат, исходя из общей формулы

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^3 (\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i) \dot{q}_i - \mathcal{L}.$$

- 7.16. Составить функцию Лагранжа и вывести уравнения движения замкнутой системы двух точек с энергией взаимодействия $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ в переменных $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и $\vec{R} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) / (m_1 + m_2)$.
- 7.17. Найти явное выражение для энергии замкнутой системы двух точек в переменных $\vec{r}$ и $\vec{R}$ предыдущей задачи.
- 7.18. Составить функцию Лагранжа для точки, подверженной действию потенциального поля, в НСО.
- 7.19. Найти явное выражение для $\mathcal{E}$ в равномерно вращающейся НСО.
- 7.20. Вывести закон преобразования энергии частицы при переходе из ИСО, где она имеет энергию $\mathcal{E}_0$ и момент импульса L_0 , в равномерно вращающуюся НСО.
- 7.21. Вывести методом Лагранжа уравнения движения свободной точки в равномерно вращающейся вокруг оси OZ системе координат ξ, η, ζ .

- 7.22. Звезда движется в сфероидальной галактике, вращающейся вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$. С галактикой связана декартова система координат: начало её находится в центре галактики, ось OZ направлена вдоль $\vec{\Omega}$. Потенциал гравитационного поля внутри такой галактики даётся выражением $\phi = A(x^2 + y^2)/2 + Bz^2/2$. Вывести уравнения движения звезды.
- 7.23. Тяжелая точка движется в плоскости XOY , вращающейся вокруг горизонтальной оси OX с постоянной угловой скоростью Ω . Записать функцию Лагранжа в переменных x, y , вывести уравнения движения и решить их.
- 7.24. Бусинка массой m может без трения скользить по стержню, наклоненному под углом θ к вертикальной оси OZ и вращающемуся вокруг неё с угловой скоростью Ω в однородном поле тяжести $\vec{F}_{\text{гр}} = -mg\vec{e}_z$. Записать функцию Лагранжа $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, где q – расстояние от бусинки до неподвижной точки стержня.
- 7.25. Написать функцию Лагранжа и уравнения движения точки по вращающейся вокруг оси OZ с угловой скоростью Ω сфере в связанной с этой сферой системе координат θ, φ .
- 7.26. Найти функцию Лагранжа и первые интегралы для заряда, движущегося в однородном магнитном поле, в цилиндрической системе координат ($\vec{H} = H\vec{e}_z$).
- 7.27. Согласно гипотезе Хаббла, однородная и изотропная Вселенная расширяется так, что вектор $\vec{r}$, соединяющий любые две её точки, изменяется по закону $\vec{r}(t) = a(t)\vec{x}$, где $\vec{x}$ постоянный (для выбранной пары точек) вектор, $a(t)$ – масштабный фактор. Вывести дифференциальное уравнение для $a(t)$ (космологическое уравнение).
- 7.28. Радиус-вектор движущейся относительно рассмотренного в предыдущей задаче фона частицы имеет вид $\vec{r} = \vec{a}(t)\vec{x}$, где $\vec{x}$ теперь изменяется со временем, так что абсолютная скорость частицы $\vec{u} = \dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{x} + \vec{v}$, а $\vec{v} = a\dot{\vec{x}}$ – её скорость относительно фона (пекулярная скорость). Составить функцию Лагранжа этой частицы в переменных $\vec{x}$ и $\dot{\vec{x}}$.
- 7.29. Составить уравнение для пекулярной скорости движения материальной точки в описанной выше среде.
- 7.30. Два одинаковых маятника связаны пружиной с жесткостью k на расстоянии a от точек подвеса, находящихся на одном уровне. В состоянии равновесия маятники висят вертикально, пружина не напряжена. Определить собственные частоты и моды малых колебаний в вертикальной плоскости, проходящей через точки подвеса.
- 7.31. Исследовать характер движения системы, описанной в предыдущей задаче, при условии, что в начальный момент времени один из маятников покоится, а другому сообщена угловая скорость $\dot{\varphi} = \Omega_0$.
- 7.32. Найти собственные частоты малых колебаний системы: шарик массой m подвешен на пружинке с жесткостью k к такому же шарiku, подвешенному на такой же пружинке к неподвижной точке.

- 7.33. Шарик массой m зажат между двумя одинаковыми пружинами, прикрепленными к неподвижным стенкам. Жесткость каждой пружины k , длина свободной пружины l , длина пружины в положении равновесия системы $a > l$ (пружины растянуты). Пренебрегая действием силы тяжести и массами пружин, найти частоты продольных и поперечных колебаний в линейном приближении.
- 7.34. В условиях предыдущей задачи пружины не растянуты, а сжаты. Очевидно, полученное в ней выражения для частоты поперечных колебаний неприменимо. Найти правильное выражение.
- 7.35. Найти собственные частоты и моды одномерных колебаний линейной трехатомной симметричной молекулы (M – масса центрального атома, m – массы крайних атомов).
- 7.36. Найти собственные частоты и моды малых колебаний двойного плоского маятника: нижняя точка массой m_2 подвешена на невесомой нити длиной l к верхней точке массой m_1 , подвешенной на невесомой нити длиной l к неподвижной точке.
- 7.37. Имеется одномерная цепочка из $(N + 2)$ -х атомов с одинаковыми массами, соединенных последовательно одинаковыми упругими связями. Координаты крайних атомов $x_0 = 0$, и $x_{N+1} = (N + 1)a$ фиксированы. Найти спектр собственных частот системы.
- 7.38. Решить аналогичную предыдущей задаче для цепочки чередующихся атомов с разными массами ($m_1 = m$, $m_2 = M$, $m_3 = m$, ..., $m_{2N} = M$).
- 7.39. В условиях задачи 7.37 найти спектр собственных частот в случае, когда правая стенка (x_{N+1}) отсутствует: на последний N -й атом действует лишь $(N - 1)$ -й.
- 7.40. Невесомая струна длиной $4a$ натянута силой P между двумя фиксированными точками A и B на горизонтальной поверхности. На струне закреплены точечные массы m , $(4/3)m$ и m на равных расстояниях друг от друга и от концов струны. Пусть x , y и z – поперечные смещения первой, второй и третьей масс от положения равновесия (прямой AB). Найти собственные частоты и главные моды колебаний системы.
- 7.41. Невесомая струна длиной $4a$ натянута силой P между точками AB . Посредине струны в точке C укреплен точечная масса m , другая точечная масса $2m$ укреплен в точке D , делящей отрезок CB пополам. Система совершает малые поперечные колебания в горизонтальной плоскости, проходящей через неподвижные точки A и B . Найти собственные частоты и моды колебаний.
- 7.42. Точка движется по окружности радиуса a со скоростью v под действием центральной силы $\vec{F} = -(\alpha m/r^n)\vec{e}_r$, $n < 3$. Найти движение, вызванное малой радиальной скоростью $v_r = \lambda v$, $0 < \lambda \ll 1$, сообщенной в момент $t = 0$, когда $\varphi(0) = 0$.
- 7.43. Подвешенная на невесомом упругом стержне длиной l точка единичной массы совершает малые колебания в плоскости XOZ . Найти собственные частоты.

- 7.44. Найти функцию Лагранжа и интегралы движения для сферического маятника в цилиндрической системе координат.
- 7.45. Прямолинейная трубка с шариком, соединенным пружиной с точкой O внутри трубки, вращается с угловой скоростью Ω в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через точку O . Вывести уравнение Лагранжа и найти частоту колебаний шарика.
- 7.46. Тяжелая точка массой m совершает малые колебания в окрестности положения устойчивого равновесия $x = 0, y = 0$ по поверхности $z = f(x, y)$. Найти закон её движения.
- 7.47. Найти малые колебания математического маятника в первом (по нелинейному члену) приближении метода Крылова-Боголюбова.
- 7.48. Найти колебания ангармонического осциллятора с потенциальной энергией $U(x) = m\omega_0^2 x^2/2 + m\beta x^4/4$, рассматривая второй член как малую добавку к первому.
- 7.49. Найти колебания ангармонического осциллятора с потенциальной энергией $U(x) = m\omega_0^2 x^2/2 + m\alpha x^3/3$, рассматривая второй член как малую добавку к первому.
- 7.50. Траектории свободной частицы – прямые. Прямая является кратчайшей линией, соединяющей заданные точки. В вариационной терминологии это означает, что функционал длины $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$ на реальных траекториях принимает наименьшее значение. Показать, что функционал действия $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$ в этом случае также минимален.
- 7.51. Потенциальная энергия натянутой вдоль оси OX струны длиной l имеет вид
- $$U = \int_0^l \left[\frac{ky'^2}{2} - f(x)y \right] dx,$$
- где $y' = dy/dx$, а $f(x)$ – плотность распределённой по струне силы, действующей в перпендикулярном (вдоль оси OY) направлении. Вывести уравнение, описывающее положение равновесия струны в переменных x, y .
- 7.52. В условиях предыдущей задачи найти положение равновесия струны в случае равномерно распределённой силы $f(x) = f_0$.
- 7.53. Траектория частицы пролегает в плоскости XOY через точки $(-a, -a)$ и $(-a, +a)$ в поле
- $$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0, & x > 0. \end{cases}$$
- Исходя из принципа наименьшего действия, найти траекторию частицы с энергией $\mathcal{E} < U_0$ ($v_{ox} > 0$).

- 7.54. Решить предыдущую задачу при условии, что $\mathcal{E} > U_0$ и траектория частицы проходит через точки $(-a, -a)$ и (a, a) .
- 7.55. В потенциальном поле $U(x) = -kx$ за время τ частица перемещается из точки $x = 0$ в точку $x = a$ по закону $x(t) = At^2 + Bt + C$. Найти постоянные A , B и C из принципа наименьшего действия.
- 7.56. Точка массой m под действием силы тяжести скатывается по кривой $z = z(x)$, лежащей в вертикальной плоскости XOZ (ось OZ направлена вверх) и проходящей через фиксированные точки A ($x = a$, $z = z_A$) и B ($x = b$, $z = z_B$). В начальный момент $t = 0$ она покоилась в точке A . Найти (в квадратурах) момент времени t_B прохождения её через точку B .
- 7.57. В условиях предыдущей задачи составить уравнение Эйлера-Лагранжа для такой траектории $z(x)$ точки, для которой время t_B минимально (*задача о брахистохроне*). Найти первый интеграл этого уравнения.
- 7.58. Найти общее решение предыдущей задачи.
- 7.59. Точка единичной массы движется в плоскости XOZ в однородном поле тяжести $\vec{F}_{\text{гп}} = -mg\vec{e}_z$. Вычислить действие в промежутке времени $(0, t)$ на траектории, начинающейся в начале координат и в момент времени t проходящей через точку $\vec{r} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z$.
- 7.60. Записать закон движения одномерного гармонического осциллятора в виде
- $$x(t) = x_1 \cos[\omega(t - t_1)] + (v_0/\omega) \sin[\omega(t - t_1)],$$
- найти действие в промежутке $(0, t)$.
- 7.61. Точка совершает движение по прямой в потенциальном поле $U = -Atx$, $A = \text{const}$. Найти действие S_{12} в промежутке (t_1, t_2) .

8. Гамильтоновы системы и канонические преобразования

- *Функция Гамильтона* системы с n степенями свободы

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t),$$

где обобщённые скорости $\dot{q}_i$ выражены через обобщённые импульсы $p_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$.

- *Канонические уравнения (уравнения Гамильтона)*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.$$

- *Скобки Пуассона* для $f(q_i, p_i, t)$ и $g(q_i, p_i, t)$

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

- *Свойства скобок Пуассона*

- 1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- 2) $\{f, f\} = 0$
- 3) $\{f, \text{const}\} = 0$
- 4) $\{af, bg\} = ab\{f, g\}$
- 5) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$
- 6) $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\}$
- 7) $\{f \{gh\}\} = \{g \{fh\}\} - \{h \{fg\}\}.$

- При решении некоторых задач на скобки Пуассона удобно пользоваться тензором Леви-Чивита

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } \{ijk\} = \{123\} \text{ или образуется в результате} \\ & \text{четного числа перестановок этих индексов,} \\ -1, & \text{если } \{ijk\} \text{ образуется в результате} \\ & \text{нечетного числа перестановок этих индексов,} \\ 0, & \text{если хотя бы пара индексов } \{ijk\} \text{ совпадает.} \end{cases}$$

Компоненты векторного произведения выражаются через тензор Леви-Чивита легко проверяемым соотношением

$$[\vec{a}, \vec{b}]_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k,$$

а произведение двух тензоров выражается через определитель, составленный из δ -символов Кронекера:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

- *Каноническими* называются преобразования $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$, сохраняющие форму канонических уравнений

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i}.$$

где $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q_j, P_j, t)$ – новая функция Гамильтона.

- Для того, чтобы преобразование $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$ было каноническим, необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = c \delta_{ij}, \quad c = \text{const.}$$

- Производящая функция $\mathcal{F}$ канонического преобразования определяется соотношением

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

- Существует четыре вида производящих функций:

$$\mathcal{F}_1(q_j, Q_j, t), \mathcal{F}_2(q_j, P_j, t), \mathcal{F}_3(Q_j, P_j, t), \mathcal{F}_4(p_j, P_j, t),$$

различающихся между собой выбором независимых переменных в качестве аргументов.

- 8.1. Вывести функцию Гамильтона и канонические уравнения для одномерного гармонического осциллятора.
- 8.2. Вывести функцию Гамильтона и канонические уравнения движения сферического маятника (см. 7.10).
- 8.3. Вывести функцию Гамильтона и канонические уравнения движения в однородном поле тяжести в различных системах координат (см. 7.11).
- 8.4. Вывести функцию Гамильтона и канонические уравнения движения трёхмерного изотропного гармонического осциллятора в различных системах координат (см. 7.12).
- 8.5. Вывести функцию Гамильтона и канонические уравнения движения в поле $U = -\alpha/r$ в полярных координатах (см. 7.13).
- 8.6. Найти функцию Гамильтона и составить уравнения Гамильтона для математического маятника длиной l , точка подвеса которого движется по вертикальной окружности радиуса R в плоскости колебаний с постоянной угловой скоростью Ω (в качестве обобщенной координаты взять угол отклонения маятника от вертикали).
- 8.7. Материальная точка движется в поле двух силовых центров, расположенных на оси OY по обе стороны от начала координат на одинаковых от него расстояниях a . Они притягивают точку силами упругости с коэффициентами k_1 и k_2 соответственно. Пользуясь уравнениями Гамильтона, найти траекторию этой точки при условии, что в начальный момент времени она находилась в точке $y_0 > a$ оси OY и имела скорость $\vec{v}_0$, параллельную оси OX .
- 8.8. Вывести функцию Гамильтона для заряда в однородном стационарном магнитном поле $\vec{H} = H\vec{e}_z$.
- 8.9. Вывести функцию Гамильтона для заряда в электромагнитном поле с потенциалами φ и $\vec{A}$.
- 8.10. Вывести функцию Гамильтона для точки в поле тяжести $\vec{F}_{\text{гп}} = -mg\vec{e}_z$ в НСО, движущейся относительно ИСО поступательно и ускорением $\vec{A} = A_z\vec{e}_z$.
- 8.11. Найти функцию Гамильтона частицы в равномерно вращающейся НСО.

- 8.12. Найти фазовую траекторию одномерного гармонического осциллятора.
- 8.13. Доказать, что через каждую точку фазового пространства замкнутой системы проходит только одна фазовая траектория системы. Может ли фазовая траектория состоять из одной точки?
- 8.14. Частица совершает одномерное движение в потенциальном поле
- $$U(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi; \\ U_0 \sin x, & -\pi < x < 3\pi; \\ U_0, & x > 3\pi. \end{cases}$$
- Нарисовать фазовые траектории для энергетических уровней $\mathcal{E} = -U_0, -U_0 + \varepsilon, -U_0/2, 0, U_0/2, U_0 - \varepsilon, U_0, U_0 + \varepsilon, 2U_0$ (малая постоянная ε положительна).
- 8.15. Частица единичной массы совершает одномерное движение в потенциальном поле $U(x) = \sin^2 x$. Найти время движения по участкам сепаратрисы (в одном направлении), лежащим в полосах $(-\pi/4, \pi/4)$ и $(-\pi/2, \pi/2)$ фазового пространства.
- 8.16. Пусть $\sigma(\mathcal{E})$ – площадь фигуры, образованной замкнутой фазовой траекторией частицы с энергией $\mathcal{E}$, совершающей одномерное движение. Доказать, что период движения по этой траектории $\tau(\mathcal{E})$ связан с площадью $\sigma(\mathcal{E})$ соотношением $\tau(\mathcal{E}) = d\sigma(\mathcal{E})/d\mathcal{E}$.
- 8.17. Что представляет собой фазовая поверхность уровня $\mathcal{E}$ двумерного изотропного гармонического осциллятора?
- 8.18. В условиях предыдущей задачи нарисовать проекции фазовых траекторий на конфигурационное пространство.
- 8.19. Задан двумерный анизотропный гармонический осциллятор единичной массы, $U(x, y) = (x^2 + \omega^2 y^2)/2$. Найти область конфигурационного пространства, в которой заключена орбита осциллятора с энергией $\mathcal{E}$.
- 8.20. В условиях предыдущей задачи $\omega = 2$, и при некотором сдвиге фаз пространственная траектория (фигура Лиссажу) превращается в дважды пройденную кривую. Доказать, что эта кривая представляет собой отрезок параболы.
- 8.21. Записать скобки Пуассона для материальной точки в 3-мерном евклидовом пространстве в векторной форме.
- 8.22. В условиях предыдущей задачи записать уравнение движения точки с использованием скобок Пуассона.
- 8.23. Доказать, что скобки Пуассона обладают свойствами $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$, $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$.
- 8.24. Доказать, что $\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$.

- 8.25. Проверить тождество Якоби $\{f, \{g, h\}\} = \{g, \{f, h\}\} - \{h, \{f, g\}\}$ для случая одной степени свободы.
- 8.26. Найти скобки Пуассона $\{x_i, x_j\}, \{p_i, p_j\}, \{x_i, p_j\}$.
- 8.27. Найти скобки Пуассона $\{x_i, g(x_j)\}, \{p_i, g(x_j)\}$.
- 8.28. Найти скобки Пуассона $\{x_i, L_j\}, \{p_i, L_j\}$.
- 8.29. Найти скобки Пуассона $\{L_i, L_j\}, \{L_i, L^2\}$.
- 8.30. Найти скобки Пуассона $\{x_i, \mathcal{H}\}, \{p_i, \mathcal{H}\}$.
- 8.31. Найти скобки Пуассона $\{L_i, \mathcal{H}\}, \{L^2, \mathcal{H}\}$.
- 8.32. Выбрав в качестве переменных q_i сферические координаты θ и φ , вычислить скобки Пуассона $\{L_x, L_y\}, \{L_y, L_z\}$ и $\{L_z, L_x\}$ для сферического маятника.
- 8.33. Для одномерного гармонического осциллятора введем переменные $a = (2m\omega)^{-1/2}(m\omega x + ip)e^{i\omega t}$ и $a^* = (2m\omega)^{-1/2}(m\omega x - ip)e^{i\omega x}$. Найти скобки Пуассона этих величин, выразить через эти переменные функцию Гамильтона.
- 8.34. Доказать, что если $f(q_i, p_i, t)$ и $g(q_i, p_i, t)$ – два интеграла движения, то составленные из них скобки Пуассона дают тоже интеграл движения (*теорема Пуассона*).
- 8.35. Используя теорему Пуассона показать, что момент импульса частицы в центрально-симметричном поле сохраняется.
- 8.36. Вывести каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией $\mathcal{F}_1(q_i, Q_i, t)$.
- 8.37. Вывести каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$.
- 8.38. Вывести каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией $\mathcal{F}_3(Q_i, p_i, t)$.
- 8.39. Вывести каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией $\mathcal{F}_4(p_i, P_i, t)$.
- 8.40. Показать, что производящая функция $\sum_{i=1}^n q_i P_i$ определяет тождественное преобразование.
- 8.41. Показать, что производящая функция $\sum_{i=1}^n q_i Q_i$ определяет преобразование $(q_i, p_i) \rightarrow (p_i, -q_i)$.
- 8.42. Доказать, что производящая функция $\mathcal{F} = (m\omega q^2)\text{ctg}Q$ преобразует гамильтониан гармонического осциллятора $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$ в циклический $\mathcal{K} = \omega P$.

- 8.43. Показать, что производящая функция $\mathcal{F} = xP_x + yP_y + \varepsilon(xy + P_xP_y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ определяет поворот в фазовом пространстве.
- 8.44. Показать, что преобразование $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \rightarrow \mathcal{L}'(q_i, \dot{q}_i, t) = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) + df(q_i, t)/dt$, не изменяющее уравнений Лагранжа, является каноническим. Найти его производящую функцию.
- 8.45. Пусть $Q(t) = q(t + \tau)$ и $P(t) = p(t + \tau)$, $\tau = \text{const}$, а $S(q(t), Q(t))$ – действие, взятое вдоль истинной траектории, проходящей через точки $q(t)$ и $Q(t)$ в заданные моменты времени t и $t + \tau$ соответственно. Доказать, что $\mathcal{F} = -S(q, Q)$ есть производящая функция преобразования $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, описывающего движение системы.
- 8.46. В условиях предыдущей задачи найти производящую функцию свободно движущейся частицы.
- 8.47. В условиях задачи 8.45. найти производящую функцию свободно падающей в однородном поле тяжести точки.
- 8.48. В условиях задачи 8.45. найти производящую функцию одномерного гармонического осциллятора массы m с частотой ω .
- 8.49. Пусть $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ – цилиндрические координаты точки в однородном поле тяжести. Показать, что производящая функция $\mathcal{F} = q_1P_1 \cos q_2 + q_1P_2 \sin q_2 + q_3P_3$ осуществляет преобразование к декартовой системе координат.
- 8.50. Частица свободно движется вдоль оси OX . Изобразить часть фазового пространства, соответствующую интервалу энергий $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0 + \Delta\mathcal{E}_0$. Выделить элемент фазовой жидкости, принадлежащий в начальный момент времени промежутку $(x_0, x_0 + \Delta x_0)$, и проследить за его движением.
- 8.51. Решить приведённую выше задачу для случая частицы, запертой в ящике с абсолютно упругими стенками.
- 8.52. Рассмотреть движение элемента фазовой жидкости в случае одномерного гармонического осциллятора.

9. Метод Гамильтона-Якоби

- Уравнение Гамильтона-Якоби (Г.-Я.)

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right).$$

- Полный интеграл уравнения Г.-Я.

$$S = S(q_1, \dots, q_n, t; \alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

где α_i – произвольные постоянные.

- Если функция Гамильтона не зависит явно от времени (система консервативна), то

$$S(q_1, \dots, q_n, t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = S_0(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \mathcal{E}) - \mathcal{E}t,$$

где *укороченное действие* S_0 удовлетворяет *укороченному уравнению* Г.-Я.

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n; \partial S_0 / \partial q_1, \dots, \partial S_0 / \partial q_n) = \mathcal{E}.$$

- Если, далее, функция Гамильтона не зависит от одной из координат, например, от q_n , то

$$S_0(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \mathcal{E}) = S_1(q_1, \dots, q_{n-1}; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \mathcal{E}) - \alpha_n q_n$$

и так далее.

- Метод Г.-Я. решения задачи о движении консервативной системы.

1. Записать уравнение энергии

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) = \mathcal{E}.$$

2. Заменить в нем обобщенные импульсы p_i частными производными некоторой функции S по обобщенным координатам $\partial S / \partial q_i$, получив тем самым укороченные уравнения Г.-Я.

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n; \partial S / \partial q_1, \dots, \partial S / \partial q_n) = \mathcal{E}.$$

3. Найти какой-нибудь полный интеграл

$$S = S_0(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \mathcal{E})$$

с $n - 1$ произвольными постоянными α_i .

4. Найти общие выражения для импульсов

$$p_i = \partial S_0 / \partial q_i.$$

5. Записать уравнения для координат

$$\partial S_0 / \partial \alpha_i = \beta_i, \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad \partial S_0 / \partial \mathcal{E} = t + \beta_n,$$

где β_i – произвольные постоянные.

6. Разрешить полученные уравнения относительно координат

$$q_i = q_i(t; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \mathcal{E}, \beta_1, \dots, \beta_n).$$

7. Определить постоянные α_i , $\mathcal{E}$, β_i из начальных условий $q_i(t_0) = q_{0i}$, $p_i(t_0) = p_{0i}$.

- Во многих случаях полный интеграл уравнения Г.-Я. может быть найден путем разделения переменных. К их числу относятся случаи, когда

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}_i(q_i, p_i),$$

или более общий случай, когда

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) = h(f_1(q_1, p_1), \dots, f_n(q_n, p_n)).$$

В случае разделяемых переменных консервативной системы

$$S_0(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n S_i(q_i, \alpha_i).$$

- Пусть некоторый параметр λ , характеризующий одномерную систему, совершающую финитное движение с периодом τ , медленно ($d\lambda/\lambda \ll dt/\tau$) меняется. Тогда интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq,$$

взятый по полному изменению координаты q за период τ , является *адиабатическим инвариантом* (так называются величины, не изменяющиеся при адиабатическом, то есть, медленном изменении параметра λ).

- Для замкнутой системы I зависит только от её энергии, так что вместо $S_0(q, \mathcal{E})$ можно рассматривать $S_0(q, I)$. Если произвести каноническое преобразование, выбрав в качестве нового импульса *переменную действия* I , то новая координата определяется соотношением

$$w = \partial S_0(q, I) / \partial I.$$

Она названа *угловой переменной*. При этом уравнения Гамильтона принимают вид

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{w} = d\mathcal{E}(I) / dI,$$

откуда

$$w = \omega t + \text{const},$$

где $\omega = d\mathcal{E} / dI$ – соответствующая рассматриваемой переменной частота.

- 9.1. Интегрированием функции Лагранжа вдоль истинной траектории найти действие $S(\vec{r}, t)$ для свободной материальной точки, находившейся в момент времени $t = 0$ в начале координат. Показать, что она удовлетворяет уравнению Г.-Я.
- 9.2. В условиях предыдущей задачи найти скорость $\vec{u}(\vec{r}, t)$ распространения поверхности постоянного действия.
- 9.3. Найти скорость распространения поверхности постоянного действия в потенциальном поле $U(\vec{r})$.
- 9.4. Интегрированием функции Лагранжа найти действие $S(\vec{r}, t)$ материальной точки в однородном поле тяжести при условии, что в начальный момент $t = 0$ точка находилась в начале координат.

- 9.5. В условиях предыдущей задачи показать, что $\nabla S(\vec{r}, t) = \vec{p}$.
- 9.6. Показать, что найденное в задаче 9.4 действие удовлетворяет уравнению Г.-Я.
- 9.7. Интегрированием функции Лагранжа найти действие $S(\vec{r}, t)$ для изотропного гармонического осциллятора, совершающего колебания по закону $\vec{r}(t) = (\vec{v}_0/\omega) \sin \omega t$.
- 9.8. Показать, что найденное в предыдущей задаче действие удовлетворяет уравнению Г.-Я.
- 9.9. Интегрированием функции Лагранжа найти действие заряда, движущегося в однородном постоянном магнитном поле и в момент времени $t = 0$ находившегося в начале координат.
- 9.10. Показать, что найденное в предыдущей задаче действие удовлетворяет уравнению Г.-Я.
- 9.11. Записать укороченное уравнение Гамильтона-Якоби для сферического маятника единичной массы и единичного радиуса.
- 9.12. Показать, что функция $S_0(\theta, \varphi) = \alpha\varphi + \int_0^\theta \sqrt{2\mathcal{E} - 2g \cos \theta - \alpha^2/\sin^2 \theta} d\theta$ удовлетворяет записанному в предыдущей задаче уравнению Г.-Я.
- 9.13. Из уравнения Г.-Я. вывести уравнения движения точки в потенциальном поле в декартовой системе координат.
- 9.14. Вывести уравнение Г.-Я. методом канонических преобразований.
- 9.15. Пусть $\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = h(f_1(q_1, p_1), \dots, f_n(q_n, p_n))$ и $\partial f_i/\partial p_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, так что уравнения $f_i(q_i, p_i) = \alpha_i$ можно разрешить относительно p_i : $p_i = g_i(q_i, \alpha_i)$. Показать, что при этих условиях переменные в уравнении Г.-Я. разделяются. Найти $S_0(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
- 9.16. Показать, что если кинетическая и потенциальная энергия системы с двумя степенями свободы (q_1 и q_2) имеют вид
- $$T = \frac{1}{2(X_1 + X_2)} (Q_1 p_1^2 + Q_2 p_2^2), \quad V = \frac{P_1 + P_2}{X_1 + X_2},$$
- где переменные X_1, Q_1 и P_1 зависят только от q_1 , а переменные X_2, Q_2 и P_2 — только от q_2 , то система допускает разделение переменных.
- 9.17. Точка движется в плоскости XOZ под действием двух полей — силы притяжения к началу координат $\vec{F}_1 = -m(K/r^2)\vec{e}_r$ и однородной силы тяжести $\vec{F}_2 = -mg\vec{e}_z$. Показать, что в параболических координатах $u = (r + z)/2$ и $v = (r - z)/2$ система допускает разделение переменных.
- 9.18. Методом Г.-Я. найти траекторию и закон движения точки в однородном поле тяжести.
- 9.19. Найти полный интеграл уравнения Г.-Я. и закон движения для заряда в поле волны с векторным потенциалом $\vec{A} = \vec{A}_0 \cos \omega t$.

- 9.20. Найти полный интеграл уравнения Г.-Я. для математического маятника.
- 9.21. Найти полный интеграл уравнения Г.-Я. для трехмерного изотропного гармонического осциллятора единичной массы в декартовых координатах x_1, x_2, x_3 .
- 9.22. В условиях предыдущей задачи найти закон движения каждой из координат осциллятора.
- 9.23. Найти полный интеграл уравнения Г.-Я. для точки, совершающей движение в центрально-симметричном поле $U(r)$.
- 9.24. В условиях предыдущей задачи найти обобщенные импульсы p_r и p_η .
- 9.25. Выразить переменные действия I_φ и I_r и соответствующие им частоты эллиптического движения в поле $U = -\alpha/r$ в полярных координатах.
- 9.26. Вычислить переменные действия I_x, I_y и I_z и соответствующие им частоты трехмерного изотропного гармонического осциллятора.
- 9.27. Показать, что при малой амплитуде колебаний энергия простого маятника $E = I\nu$.
- 9.28. Нить маятника медленно уменьшается. Найти изменение его энергии и показать, что E/ν при этом остается постоянным.
- 9.29. Между двумя абсолютно упругими стенками, находящимися на расстоянии l друг от друга движется шарик единичной массы. Как изменится его скорость, если расстояние между стенками увеличится в k раз ($l \rightarrow l' = kl$)?
- 9.30. Потери энергии Солнцем на излучение уменьшают его массу. Как это сказывается на орбитах планет (эксцентриситетах, больших полуосях, периодах обращения)?
- 9.31. Показать, что для гармонического осциллятора с медленно меняющейся жесткостью k сохраняется адиабатический инвариант $I = \int_{x_1}^{x_2} v dx$ (v – скорость осциллятора в точке, координата которой отсчитывается от положения равновесия, x_1 и x_2 – крайние значения этой координаты).
- 9.32. Частица движется между двумя абсолютно упругими стенками, одна из которых медленно отодвигается от другой. Показать, что сохраняется усредненное по "периоду" произведение модуля скорости частицы на расстоянии между стенками.
- 9.33. На положительной полуоси OX с абсолютно упругой стенкой в начале координат скользят без трения два упругих шарика с массами m_1 (ближайший к началу координат) и $m_2 \gg m_1$. В начальный момент скорость легкого шарика много больше скорости тяжелого. Найти закон движения тяжелого шарика, усредненный по "периоду" движения легкого.

- 9.34. Невзаимодействующие между собой "молекулы" движутся внутри куба параллельно его ребрам. Найти изменение давления при медленном увеличении его объема.
- 9.35. Вывести уравнение для функции $\psi(\vec{r}, t) = \ln S(\vec{r}, t)$, удовлетворяющей условию $\text{div}(\psi \nabla \psi) = 0$. Что нужно изменить в условии задачи, чтобы полученное уравнение полностью совпало с уравнением Шредингера?¹).

¹Впервые о выводе уравнения Шредингера из уравнения Г.-Я. без предельного перехода автор узнал от своего преподавателя Николая Васильевича Кислицына (Томск, конец 60-х)

10. Релятивистские частицы

- Четырёхмерный интервал $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2}$.
- Собственное время $d\tau = \sqrt{1 - (v/c)^2} dt$.
- Инерциальные системы координат: лабораторная (“неподвижная”) K и система K' , поступательно движущаяся относительно K с постоянной скоростью $\vec{V} = V\vec{e}_x$. При $t = 0$ координатные оси обеих систем совпадают.
- Преобразование Лоренца связывает четырёхмерные координаты x, y, z, t события в системе K с его координатами x', t', z', t системе K' :

$$x = x' \cosh \psi + ct' \sinh \psi,$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$ct = x' \sinh \psi - ct' \cosh \psi,$$

$$\psi = \operatorname{arth}(v/c).$$

- Функция Лагранжа релятивистской частицы в потенциальном поле $U(\vec{r})$

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} - U(\vec{r}).$$

- Функция Лагранжа релятивистского заряда в электромагнитном поле с потенциалами $\varphi(\vec{r}, t)$ и $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} - e\varphi(\vec{r}, t) + (e/c)\vec{v}\vec{A}(\vec{r}, t).$$

- Функция Гамильтона релятивистского заряда в электромагнитном поле

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2} + e\varphi,$$

где $\vec{P}$ – обобщённый импульс, связанный с обычным импульсом $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ соотношением $\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$.

- Действие для релятивистского заряда в электромагнитном поле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} - e\varphi(\vec{r}, t) + (e/c)\vec{v}\vec{A} \right) dt.$$

- Уравнения движения заряда в электромагнитном поле

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = e\vec{E} + (e/c)[\vec{v}, \vec{H}].$$

- Уравнение для энергии $\mathcal{E} = mc^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{v}\vec{E}.$$

- Кинетическая энергия $T = \mathcal{E} - mc^2$.

- Часто для краткости используются обозначения

$$\vec{\beta} = \vec{v}/c, \quad \gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

- Четырёхмерные векторы:

координат $x^\mu = (ct, \vec{r})$,

скорости $u^\mu = \gamma(1, \vec{\beta})$,

импульса $p^\mu = (\mathcal{E}/c, \vec{p})$,

электромагнитных потенциалов $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$.

Скалярное произведение 4-векторов a^μ и b^μ $a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu$ (по повторяющимся индексам предполагается суммирование), скалярные координаты

$$x^\mu x_\mu = s^2,$$

$$u^\mu u_\mu = 1,$$

$$p^\mu p_\mu = \mathcal{E}^2/c^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2,$$

m – масса покоя частицы.

- 10.1. Доказать, что преобразования Лоренца могут быть представлены в виде

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma(t' + Vx'/c^2).$$

- 10.2. Показать, что интервал ds инвариантен относительно преобразований Лоренца.

- 10.3. Введём вместо t мнимую координату $x_4 = ict$. Показать, что преобразование Лоренца в новых переменных x, x_4 описывает поворот в этой плоскости. Найти связь между углом поворота θ и скоростью системы V .

- 10.4. Вывести релятивистский закон сложения скоростей и проанализировать его при $V \rightarrow c$ и $V \ll c$ (частица движется вдоль оси OX).

- 10.5. В системе K' скорость частицы $\vec{v}'$ лежит в плоскости XOY и составляет угол θ' с осью OX , общей для обеих систем. Найти соответствующий угол θ в системе K .

- 10.6. Движущаяся вдоль оси OX со скоростью v релятивистская частица распадается на две частицы. Энергия одной из распадных частиц $\mathcal{E}_0$ в СЦМ и $\mathcal{E}$ в ЛСК. Найти угол её вылета относительно оси в ЛСК.

- 10.7. Покоящаяся частица с массой m распадается на две частицы массами m_1 и m_2 . Найти их энергии.

- 10.8. Покоящаяся частица с массой m распадается на три частицы с одинаковыми массами покоя m_1 . Найти верхний предел кинетической энергии вторичной частицы.

- 10.9. Рассмотреть упругое столкновение частицы нулевой массы покоя (фотона) с покоящейся частицей массы m . Выразить энергию рассеянной частицы через начальную энергию и угол рассеяния.

- 10.10. Быстрый протон с энергией $\mathcal{E}$ налетает на покоящийся протон. Какая часть этой энергии может быть израсходована на неупругий процесс (например, образование протон-антипротонной пары)?
- 10.11. Система отсчёта K_1 движется относительно K со скоростью $\vec{v}_1$, а система K_2 — относительно той же системы K со скоростью $\vec{v}_2$. Найти квадрат относительной скорости (т.е. скорости $\vec{v}_{21}$ системы K_2 относительно K_1).
- 10.12. Показать, что результат предыдущей задачи можно записать в виде
- $$v_{21}^2 = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - [\vec{v}_1, \vec{v}_2]^2}{(1 - \vec{v}_1 \vec{v}_2 / c^2)^2}.$$
- 10.13. В ядерной физике высоких энергий часто используется параметр быстроты $y = \text{Arth}\beta = \ln \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$. Выразить β через y .
- 10.14. Доказать, что параметр быстроты y аддитивен относительно последовательных преобразований Лоренца в одном направлении.
- 10.15. Вдоль оси OX свободно движутся n частиц: первая — со скоростью v относительно неподвижной системы координат, вторая — с той же скоростью v относительно первой, третья — с той же скоростью v относительно второй и т.д. Найти скорость v_n n -й частицы относительно неподвижной системы координат.
- 10.16. Вывести уравнение движения релятивистской частицы в потенциальном поле $U(\vec{r})$.
- 10.17. Доказать, что $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt}$.
- 10.18. Найти массу покоя M движущегося как целое идеального релятивистского газа.
- 10.19. Найти связь между силой и ускорением релятивистской частицы. Найти отношение силы к ускорению в случаях, когда ускорение параллельно и перпендикулярно скорости ("продольная масса" и "поперечная масса").
- 10.20. Частица с массой покоя m движется вдоль оси OX со скоростью $v = c^2 t / \sqrt{b^2 + c^2 t^2}$. Найти действующую на неё силу.
- 10.21. На частицу, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ действует (в ЛСК) сила $\vec{F}$. Какая сила действует на неё в сопутствующей системе?
- 10.22. Вывести векторное уравнение движения релятивистского заряда в электромагнитном поле.
- 10.23. Доказать, что в электромагнитном поле $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\vec{v}\vec{E}$.
- 10.24. Вывести уравнение движения релятивистского заряда в электромагнитном поле в цилиндрических координатах.
- 10.25. Вывести обобщенный импульс и функцию Гамильтона релятивистского заряда в электромагнитном поле.

- 10.26. Вывести функцию Гамильтона для релятивистского заряда в кулоновском поле $e\varphi = -\alpha/r$ в полярных координатах.
- 10.27. Найти нерелятивистские пределы релятивистских функций Лагранжа и Гамильтона.
- 10.28. Найти скорость движения поверхности постоянного действия S свободной релятивистской частицы, находившейся в момент $t = 0$ в начале координат.
- 10.29. Для согласования релятивистского результата с нерелятивистским нужно перейти к действию $S' = S + mc^2t$. Найти соответствующие выражения для скорости u' в условиях предыдущей задачи, рассмотреть нерелятивистский предел и найти поправку к нему.
- 10.30. Найти закон движения $x(t)$ релятивистской частицы, движущейся с постоянным (относительно сопутствующей ИСО) ускорением a вдоль оси OX ($x(0) = 0, v(0) = 0$). Исследовать поведение решения при малых и больших временах. Найти зависимость собственного времени τ от лабораторного t .
- 10.31. Выразить ускорение заряда в электромагнитном поле через его скорость и напряженности поля.
- 10.32. Вывести уравнение Гамильтона-Якоби для релятивистского заряда в электромагнитном поле.
- 10.33. Найти кинетическую энергию и закон движения заряженной частицы в однородном постоянном электрическом поле $\vec{E} = E\vec{e}_x$ с нулевыми начальными условиями.
- 10.34. В условиях предыдущей задачи частица движется в плоскости XOY с начальным импульсом p_0 , параллельным OY . Найти уравнение траектории. Рассмотреть нерелятивистский предел.
- 10.35. Заряженная частица массой m движется в однородном постоянном магнитном поле $\vec{H}$ по окружности радиусом R . Найти её кинетическую энергию.
- 10.36. Найти закон движения релятивистского заряда с энергией $\mathcal{E}$ в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H} = H\vec{e}_z$.
- 10.37. При каком условии период обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле не зависит от её энергии?
- 10.38. Найти закон движения релятивистского заряда во взаимно перпендикулярных и равных по величине однородных электрическом и магнитном полях.
- 10.39. В условиях предыдущей задачи перейти к нерелятивистскому пределу.
- 10.40. Найти закон движения релятивистского заряда в параллельных однородных электрическом и магнитном полях, направленных вдоль OZ .
- 10.41. В условиях предыдущей задачи перейти к нерелятивистскому пределу.

- 10.42. Вывести релятивистское уравнение движения ракеты.
- 10.43. Найти зависимость массы релятивистской ракеты от её скорости, если известна её начальная масса m_0 и скорость истечения газов $u = \text{const}$.
- 10.44. Определить движение релятивистской ракеты с массой покоя, изменяющейся по закону $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. Рассмотреть нерелятивистский и ультрарелятивистский (фотонная ракета) пределы.
- 10.45. Найти общую формулу для периода колебаний одномерного релятивистского гармонического осциллятора.
- 10.46. В условиях предыдущей задачи найти поправку первого порядка к нерелятивистскому периоду.
- 10.47. Найти финитные траектории релятивистской частицы в потенциальном поле $U(r) = -\alpha/r$ при $\alpha > 0$ и $\rho \equiv \alpha/(cL) < 1$.
- 10.48. В условиях предыдущей задачи ($\alpha > 0$, $\rho < 1$) исследовать инфинитные траектории. Найти угол между двумя асимптотами.
- 10.49. Проанализировать траектории движения точки в кулоновском поле при $\alpha > 0$, $\rho > 1$.
- 10.50. Проанализировать траектории релятивистской частицы в кулоновском поле отталкивания при $\alpha < 0$ и $\rho \equiv |\alpha|/(cL) < 1$.
- 10.51. В условиях предыдущей задачи выразить угол рассеяния через момент импульса L и его начальную скорость v_0 .
- 10.52. Показать, что найденный в предыдущей задаче результат согласуется с его нерелятивистским аналогом $b = \left| \frac{\alpha}{mv_0^2} \right| \text{ctg}(\theta/2)$.

11. Абсолютно твердое тело

- Скорость центра масс твердого тела $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$.
- Ускорение центра масс $\vec{A} = \dot{\vec{V}}$.
- Угловая скорость вращения $\vec{\Omega}$, её проекции на неподвижные (в ЛСК) оси – $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$, на связанные с твердым телом (главные) оси – $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.
- Радиус-вектор точки твердого тела в связанной с телом системой координат $\vec{r}'$.
- Скорость точки $\vec{r}'$ твёрдого тела $\vec{v}(\vec{r}') = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}']$ (формула Эйлера).
- Ускорение точки $\vec{r}'$ твёрдого тела $\vec{a}(\vec{r}') = \vec{A} + [\dot{\vec{\Omega}}, \vec{r}'] + [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}']]$ (формула Ривальдса).
- Тензор инерции $I_{ij} = \int_V (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \rho(\vec{x}) dV$.
- Теорема Штейнера: $I_{ij} = I'_{ij} + m(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j)$.
- Момент импульса вращающегося тела $L_i = I_{ij} \Omega_j$ (по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование).
- Кинетическая энергия вращения $T = \frac{1}{2} I_{ij} \dot{\Omega}_i \dot{\Omega}_j$
- Уравнение движения вращающегося тела в СЦИ

$$\frac{d}{dt} I_{ij} \Omega_j = M_i.$$

- Уравнения движения тела в проекциях на оси СГО (динамические уравнения Эйлера)

$$I_1 \dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 + M_1,$$

$$I_2 \dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1 + M_2,$$

$$I_3 \dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 + M_3.$$

- Кинематические уравнения Эйлера

$$\Omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad \Omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi,$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad \Omega_y = -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi,$$

$$\Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}, \quad \Omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.$$

Здесь φ, ψ и θ – углы прецессии, собственного вращения и нутации соответственно.

- Функция Лагранжа для уравновешенного волчка

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2.$$

- Основная формула гироскопии: момент сил относительно неподвижной точки гироскопа

$$\vec{M} = \left\{ I_3 + (I_3 - I_1)(\dot{\varphi}/\dot{\psi}) \cos \theta \right\} \left[\vec{\Omega}_{\text{св}}, \vec{\Omega}_{\text{пр}} \right].$$

Здесь $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ и θ – постоянные, $\vec{\Omega}_{\text{св}}$ – угловая скорость собственного вращения, $\vec{\Omega}_{\text{пр}}$ – угловая скорость прецессии, $\vec{\Omega}_{\text{св}} + \vec{\Omega}_{\text{пр}} = \vec{\Omega}$

- Уравнения движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OX_3 :

$$-mX_2\ddot{\varphi} - mX_1\dot{\varphi}^2 = F_1 + F'_{01} + F'_{h1},$$

$$mX_1\ddot{\varphi} - mX_2\dot{\varphi}^2 = F_2 + F'_{02} + F'_{h2},$$

$$0 = F_3 + F'_{03} + F'_{h3};$$

$$I_{13}\ddot{\varphi} - I_{23}\dot{\varphi}^2 = M_1 - hF'_{h2},$$

$$I_{23}\ddot{\varphi} + I_{13}\dot{\varphi}^2 = M_2 + hF'_{h1},$$

$$I_{33}\ddot{\varphi} = M_3.$$

Здесь X_1 и X_2 – координаты центра масс тела относительно связанной с ним системы координат, нижняя опора находится в начале координат, верхняя – на расстоянии h от неё, $F'_{01}, F'_{02}, F'_{03}$ – проекции реакции со стороны нижней опоры, $F'_{h1}, F'_{h2}, F'_{h3}$ – со стороны верхней.

- Уравнения плоского движения тела

$$m\ddot{X} = F_x, \quad m\ddot{Y} = F_y, \quad I_z\ddot{\varphi} = M_z.$$

- 11.1. Показать, что тензор инерции твердого тела является аддитивной величиной.
- 11.2. Масса распределена равномерно по верхней ($z > 0$) половине сферической поверхности радиуса a . Найти координаты центра масс.
- 11.3. Найти главный момент инерции тонкостенной сферы.
- 11.4. Найти главные моменты инерции тонкого твёрдого стержня.
- 11.5. Найти момент инерции однородного шара относительно оси, касательной к его поверхности.
- 11.6. Найти момент инерции кольцевого цилиндра относительно его оси.
- 11.7. Найти главные моменты инерции тонкого кольца.
- 11.8. Найти главные моменты инерции “гантели” – двух соединённых жёстким невесомым стержнем шариков массами $m/2$ и радиусами R , центры которых находятся на расстоянии $2l$ друг от друга.
- 11.9. Доказать, что отличный от нуля главный момент инерции молекулы, состоящей из двух точечных атомов массами m_1 и m_2 , равен произведению квадрата расстояния между ними на приведенную массу.
- 11.10. Четыре точки массами $m, 2m, m, 2m$ расположены в вершинах квадрата со стороной $2a$. Заданы две системы координат с общим началом в центре квадрата и осями OX, OY в плоскости квадрата. Оси одной системы параллельны сторонам квадрата, а оси другой направлены по диагоналям. Найти тензор инерции в каждой из этих систем.

- 11.11. Пользуясь правилом преобразования тензоров, получить I' из I в условиях предыдущей задачи.
- 11.12. Пользуясь стандартной процедурой приведения тензора к главным осям, найти по известному I направления главных осей и компоненты тензора в них в условиях задачи 11.10.
- 11.13. Найти связь между тензором инерции в системе координат с началом в центре инерции и в системе с другим началом $\vec{a}$, но той же ориентацией осей.
- 11.14. Определить главные моменты инерции однородного кругового цилиндра, предельным переходом получить моменты инерции тонкого стержня и тонкого диска.
- 11.15. Определить главные моменты инерции однородного шара и эллипсоида.
- 11.16. Пользуясь свойством аддитивности, определить главные моменты инерции тонкостенной сферы массой m по известным моментам однородного шара.
- 11.17. Пользуясь свойством аддитивности, определить главные моменты инерции тонкостенного кругового цилиндра (без оснований) по известным моментам однородного сплошного цилиндра.
- 11.18. Найти центр масс и главные моменты инерции однородного полушара.
- 11.19. Найти главные моменты инерции однородной тонкой пластинки массой m ($|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $z = 0$).
- 11.20. Две (противоположные) четверти прямоугольной однородной пластины удалены. Показать на примере вычисления момента инерции относительно перпендикулярной пластине главной оси, что метод, основанный на использовании свойства аддитивности тензора инерции, вкупе с теоремой Штейнера приводит к тому же результату, что и непосредственные вычисления.
- 11.21. На примере вычисления момента инерции тонкой пластины относительно перпендикулярной пластине оси показать, что он (момент) минимален, когда эта ось проходит через центр симметрии.
- 11.22. Вычислить главные моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда со сторонами a_1 , a_2 и a_3 .
- 11.23. Вычислить главные моменты инерции однородного конуса высотой h с углом раствора 2α .
- 11.24. В тонком однородном диске массой m_0 и радиуса R проделано круглое отверстие радиусом $a < R/2$, центр которого находится на расстоянии $R/2$ от оси диска. Найти моменты инерции полученной фигуры относительно главных осей исходной.
- 11.25. В однородном круговом цилиндре массой m , радиусом R и высотой H просверлено отверстие радиусом $a < R$, ось которого параллельна оси цилиндра и находится на расстоянии r от нее ($r < R - a$). Найти моменты инерции этого тела относительно главных осей исходного.

- 11.26. В однородном круговом цилиндре массой m , радиусом R и высотой H сделаны два цилиндрических отверстия, параллельные его оси. Оси отверстий находятся на расстоянии $R/2$ от оси цилиндра по обе стороны от неё, радиусы отверстий равны $R/4$. Найти главные моменты инерции полученного тела.
- 11.27. В однородном шаре с главным моментом инерции I_0 проделали 7 одинаковых сферических полостей радиусами $R/3$. Центр одной из них совпадает с центром шара, центры остальных шести находятся на трёх ортогональных диаметрах на расстоянии $2/3R$ от центра шара по обе стороны от него. Найти главные моменты инерции тела.
- 11.28. Доказать, что главные моменты инерции любого тела удовлетворяют неравенству треугольника $I_i \leq I_j + I_k$, $i \neq j \neq k$.
- 11.29. Выразить через компоненты тензора инерции потенциальную энергию неоднородного твердого тела в слабо неоднородном гравитационном поле.
- 11.30. Твёрдое тело равномерно вращается в космосе относительно неподвижной оси. Используя уравнения движения доказать, что эта ось – главная.
- 11.31. Записать функцию Лагранжа системы двух точек, соединённых невесомым стержнем и находящихся в однородном поле тяжести, в независимых переменных.
- 11.32. Два точечных заряда e_1 и e_2 с массами m_1 и m_2 , соединённые невесомым жестким стержнем, движутся в постоянном однородном электрическом поле в плоскости, параллельной полю. Найти уравнение движения системы и силу реакции стержня.
- 11.33. Три заряда $e, -e$ и e с одинаковыми массами m , соединённые невесомым жестким стержнем, образуют линейную симметричную систему, движущуюся в плоскости, параллельной однородному постоянному электрическому полю. Найти уравнение движения и реакции стержня.
- 11.34. Однородный тяжелый стержень длиной L равномерно вращается вокруг шарнирно закреплённого верхнего конца, сохраняя постоянный угол α с вертикалью. Найти угловую скорость и силу реакции в точке опоры.
- 11.35. Однородный сплошной цилиндр скатывается без скольжения по наклонной плоскости. Найти ускорение центра масс и отношение кинетических энергий вращательного и поступательного движений.
- 11.36. Определить ускорение, с которым тонкостенная цилиндрическая бочка, целиком заполненная жидкостью, скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образуя угол α с горизонтом (вязкостью жидкости пренебречь).
- 11.37. Однородный шарик массой m скатывается с треугольной подставки высотой H и массой $M = (5/3)m$, скользящей без трения по горизонтальной плоскости. Найти скорость скатившегося шарика.

- 11.38. Показать, что движение центра масс однородного цилиндра радиусом a , катающегося по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса R , такое же, как колебания математического маятника длиной $l = (3/2)(R - a)$.
- 11.39. Неоднородный диск (центр масс его смещён на расстояние b от геометрического центра) катится без скольжения по горизонтальной поверхности, оставаясь в фиксированной вертикальной плоскости XOZ . Вывести уравнение движения для угла поворота φ .
- 11.40. Через однородный диск массой m радиуса a переброшена невесомая нить, с одной стороны связанная через пружину с неподвижной опорой, с другой стороны – со свободно висащем на ней грузом массой m . Диск может свободно вращаться вокруг своей оси. Найти функцию Лагранжа системы в переменных θ (угол поворота диска) и $\dot{\theta}$.
- 11.41. Точечная масса m_0 находится в верхней точке однородного диска массой m и радиусом R , могущим вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси. В начальный момент система находится в равновесии, затем оно слегка нарушается. Найти угловую скорость вращения диска после отрыва от него массы m_0 .
- 11.42. В условиях предыдущей задачи вместо точечной массы на диск помещен шарик радиуса a и массой m_0 , жестко связанный с диском до момента отрыва. Найти угловую скорость вращения диска после отрыва от него шарика.
- 11.43. Цилиндрическая гайка массой m с внутренним радиусом a и внешним R , свободно (без трения) вращаясь по вертикальному винту, поднимается на некоторую высоту H , если ей сообщить начальную угловую скорость Ω в нужном направлении. Найти H , если шаг винта равен h .
- 11.44. Однородный шарик радиуса a скатывается по сферической поверхности радиуса R под действием силы тяжести из начального положения на вершине сферы без начальной скорости. Найти точку, в которой он оторвется от сферы.
- 11.45. В условиях предыдущей задачи скатывается полый тонкостенный шарик. Найти точку отрыва.
- 11.46. Однородная тонкая пластина в форме равнобедренного треугольника подвешена катетом длины a к вертикальной оси (острым углом вниз). При какой угловой скорости вращения боковое давление на нижнюю опору равно нулю?
- 11.47. Определить частоту малых колебаний физического маятника с заданными главными моментами инерции.
- 11.48. Неподвижный в начальный момент однородный шар, одна из точек которого заряжена, приводится в движение включением однородного электрического поля $\vec{E} = E\vec{e}_x$. Исследовать его движение (ни гравитации, ни опоры нет).

- 11.49. Найти частоту малых колебаний невесомого стержня, к концу которого жестко прикреплен своим центром однородный диск, находящийся в плоскости колебаний.
- 11.50. Найти частоту малых колебаний описанной выше системы при условии, что диск шарнирно прикреплен к стержню (может свободно вращаться вокруг своей оси).
- 11.51. Найти частоту малых колебаний однородного полушара на шероховатой поверхности в поле тяжести.
- 11.52. Найти частоту малых колебаний однородного полушара на гладкой поверхности в поле тяжести.
- 11.53. По горизонтальной шероховатой плоскости катается неоднородный цилиндр с главной осью, параллельной геометрической и находящейся на расстоянии a от нее. Найти частоту малых колебаний цилиндра и реакцию плоскости, если движение цилиндра плоскопараллельно.
- 11.54. В однородном цилиндре радиусом R сделана цилиндрическая полость радиуса $R/2$, имеющая общую образующую с его поверхностью. Определить период малых колебаний этого цилиндра на горизонтальной плоскости без скольжения.
- 11.55. Найти кинетическую энергию однородного конуса, катящегося по плоскости.
- 11.56. Найти частоту малых колебаний однородного цилиндра массой m и радиусом a , катящегося по неподвижной цилиндрической поверхности радиуса R .
- 11.57. Составить уравнения движения для проекций момента импульса свободного симметричного волчка на его главные оси инерции и проинтегрировать их. Определить пределы изменения кинетической энергии при фиксированной абсолютной величине момента импульса тела.
- 11.58. Найти угловую скорость прецессии вращающегося заряженного тела в однородном магнитном поле (отношение плотности заряда к плотности массы по объему тела постоянно).
- 11.59. Вывести кинематическое уравнение Эйлера $\Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$.
- 11.60. Вывести кинематическое уравнение Эйлера $\Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}$.
- 11.61. Вывести кинематическое уравнение Эйлера $\Omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi$.
- 11.62. Показать, что $\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2 = \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta$.
- 11.63. Показать, что $\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 = \Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2$.
- 11.64. Вращение тела вокруг неподвижного центра задано углами Эйлера $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/2 + at$, $\psi = bt$. Найти проекции угловой скорости на подвижные и неподвижные оси.
- 11.65. Выразить кинетическую энергию вращающегося вокруг неподвижной точки твердого тела через углы Эйлера φ и ψ при $\theta = 0$.

- 11.66. Из динамических уравнений Эйлера свободного вращения вывести уравнение для отдельной проекции угловой скорости Ω_2 .
- 11.67. Записать уравнения Эйлера для уравновешенного свободного симметричного волчка и найти углы Эйлера как функции времени.
- 11.68. Найти функцию Гамильтона для неуравновешенного волчка в однородном поле тяжести в переменных Эйлера.
- 11.69. Найти уравнения Гамильтона для предыдущей задачи.
- 11.70. Найти общее решение задачи о движении неуравновешенного волчка в квадратурах.
- 11.71. Записать функцию Гамильтона для неоднородного цилиндрического катка радиусом R , центр масс которого смещен на расстояние a относительно оси.
- 11.72. Какому условию должен удовлетворять угол θ , чтобы нутации волчка в однородном поле тяжести отсутствовали?
- 11.73. Найти условие, при котором вращение неуравновешенного волчка вокруг вертикальной оси будет устойчивым.
- 11.74. Показать, что силы, обеспечивающие регулярную прецессию гироскопа, являются гироскопическими.
- 11.75. Ось гироскопа, вращающегося в вертикальной плоскости, совершает медленные колебания малой амплитуды около направления на север. Найти их частоту (угловая скорость вращения Земли – Ω_0 , географическая широта – Θ).

12. Изотропное упругое тело

- Перемещение точки x_i в поле смещений $u_i(x_k)$

$$x_i \rightarrow x'_i = x_i + u_i(x_k).$$

- Изменение элементарного вектора a_i в поле малых смещений $u_i(x_k)$

$$a_i \rightarrow a'_i = a_i - \delta a_i = a_i + \varepsilon_{ij} a_j + \omega_{ij} a_j,$$

где $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ – тензор малых деформаций, $\omega_{ij} = (u_{i,j} - u_{j,i})/2$ – тензор поворота, связанный с вектором поворота φ_i соотношением

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$ и т.д.

- Условия совместности малых деформаций (*уравнения Сен-Венана*)

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0.$$

- Вектор напряжений (сила, действующая на единичную площадку с нормалью n_j) $t_i = \sigma_{ij} n_j$, где n_j – внешняя нормаль к поверхности в данной точке,
- Тензор напряжений $\sigma_{ij} = t_i(\vec{e}_j)$.
- *Обобщенный закон Гука*

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

Для изотропной среды

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

где $\mu = E/[2(1+\nu)]$ и $\lambda = E\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ – коэффициенты Ламэ, E – модуль упругости (Юнга), ν – модуль поперечного сжатия (Пуассона).

- Уравнение равновесия изотропного упругого тела в поле объемной силы с плотностью $\vec{f}$ (*уравнение Ламэ*)

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \vec{f} = 0.$$

Другая форма, удобная в отсутствие объемных сил,

$$2(1-\nu) \text{grad div } \vec{u} - (1-2\nu) \text{rot rot } \vec{u} = 0.$$

- Объёмная плотность энергии упругой деформации в произвольных ортогональных осях

$$u = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} / 2 = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 - 2(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11}) + 2(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2) \right\}.$$

- Поперечный изгиб балки длиной l с нагрузкой $\vec{F} = F\vec{e}_x$ на свободном конце описывается уравнением для смещения $u_x(z)$ оси балки на расстоянии z от закреплённого конца

$$\frac{d^2 u_x}{dz^2} = \frac{F}{EI} (l - z),$$

с краевыми условиями $u_x(0) = 0, u'_x(0) = 0$. Здесь $I = \int_S x^2 dS$ – “момент инерции” геометрического поперечного сечения балки S относительно горизонтальной оси, проходящей через “центр масс”.

- Поперечный изгиб балки при продольной нагрузке $\vec{F} = -F\vec{e}_z$ описывается уравнением

$$\frac{d^2 u_x}{dz^2} = -\frac{F}{EI} u_x.$$

- Жесткость балки на изгиб $C_{из} = EI$.
- Упругая энергия единицы объема изогнутой балки

$$U = \frac{Ex^2}{2R^2(z)},$$

где R – радиус кривизны “нейтральной поверхности” балки. от которой отсчитывается поперечная координата x ; z – продольная координата рассматриваемого сечения балки.

- Крутильная жёсткость стержня

$$C_{кр} = 4\mu \int \int \chi(x, y) dx dy,$$

где μ – модуль сдвига, а χ – функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \chi}{dx^2} + \frac{\partial^2 \chi}{dy^2} = -1$$

и условию $\chi = 0$ на границе односвязного контура сечения.

- Упругая энергия закрученного стержня длиной l

$$U_{кр} = (1/2) \int_0^l C_{кр} (\varphi'(z))^2 dz,$$

где $\varphi'(z) = d\varphi/dz$, а $\varphi(z)$ – угол, на который закручено поперечное сечение балки в точке z относительно ее основания в точке $z = 0$.

- Уравнение для продольных волн

$$\partial^2 u_z / \partial t^2 = c_{\parallel}^2 \partial^2 u_z / \partial z^2, \quad c_{\parallel} = \sqrt{E(1-\nu)/[\rho(1+\nu)(1-2\nu)]}.$$

- Уравнение для поперечных волн

$$\partial^2 u_x / \partial t^2 = c_{\perp}^2 \partial^2 u_x / \partial z^2, \quad c_{\perp} = \sqrt{E/[2\rho(1+\nu)]}.$$

- Уравнения для крутильных волн

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_{\varphi}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad c_{\varphi} = \sqrt{C/(\rho I)}.$$

12.1. Даны три вектора малой длины a , направленные вдоль координатных осей. Найти изменения их длин, углов между ними и объема построенного на них кубика в результате малых деформаций, характеризуемых тензором ε_{ij} .

12.2. Для поля смещений $^2 \vec{u} = (x_1 - x_3)^2 \vec{e}_1 + (x_2 + x_3)^2 \vec{e}_2 - x_1 x_2 \vec{e}_3$ определить тензор деформации, тензор поворота и вектор поворота в точке $\vec{x} = 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

²Здесь и далее для удобства вычислений используются условные единицы.

12.3. Для поля смещений $\vec{u} = (4x_1 - x_2 + 3x_3)\vec{e}_1 + (x_1 + 7x_2)\vec{e}_2 + (-3x_1 + 4x_2 + 4x_3)\vec{e}_3$ найти главные деформации (удлинения).

12.4. Показать, что поле смещений $\vec{u} = 0,02x_3\vec{e}_1 - 0,03x_3\vec{e}_2 - (0,02x_1 - 0,03x_2)\vec{e}_3$ описывает поворот абсолютно твёрдого тела. Найти изменение вектора $\vec{a}$, проведенного из точки $3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$, в точку $3\vec{e}_1 + 0,1\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$.

12.5. Выразить компоненты тензора деформации в цилиндрических координатах r, φ, z .

12.6. Выразить компоненты тензора деформации в сферических координатах r, θ, φ .

12.7. Удовлетворяет ли тензор

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1x_3 \\ x_2^2 & x_3 & x_3^2 \\ x_1x_3 & x_3^2 & 5 \end{pmatrix}$$

условию совместности деформаций?

12.8. Дано поле перемещений $u_1 = 3x_1x_2^2$, $u_2 = 2x_3x_1$, $u_3 = x_3^2 - x_1x_2$. Определить тензор деформации и проверить, удовлетворяются ли условия совместности деформаций.

12.9. Модуль всестороннего сжатия K является величиной, обратной коэффициенту сжимаемости $k = -\frac{1}{p} \frac{\delta V}{V}$. Используя это определение, выразить K через E и ν .

12.10. Выразить модуль Юнга и коэффициент Пуассона через коэффициенты Ламэ.

12.11. Выразить модули E и ν через K и μ .

12.12. Тензор напряжений в некоторой точке задан так:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в этой точке на площадке с нормалью $\vec{n} = 2/3\vec{e}_1 - 2/3\vec{e}_2 + 1/3\vec{e}_3$.

12.13. Напряженное состояние упругого тела задано тензором

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & 0 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Показать, что если объёмные силы равны нулю, то условия равновесия выполняются. Вычислить вектор напряжения в точке $P(4; -4; 7)$ на плоскости $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7\vec{t}$ и на сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 81\vec{t}$. Определить главные напряжения.

12.14. Напряженное состояние среды задано тензором

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в точке $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \sqrt{3}\vec{e}_3$ на площадке, касательной в этой точке к цилиндрической поверхности $x_2^2 + x_3^2 = 4$.

- 12.15. Напряженное состояние в некоторой точке задано тензором σ_{ij} . Определить тензор напряжений в системе, полученной поворотом осей тензором преобразований a_{ij} .

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 12.16. Определить главные напряжения и главные оси тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 12.17. Доказать, что любой симметричный тензор, например, тензор напряжений σ_{ij} , при переходе к любой другой системе координат преобразуется в тензор σ'_{ij} , также являющийся симметричным.

- 12.18. Используя метод неопределённых множителей Лагранжа показать, что экстремальные (максимальное и минимальное) значения нормального напряжения $\sigma_N \equiv \vec{t}\vec{n} = \sigma_{ij}n_in_j$ совпадают с главными напряжениями.

- 12.19. Какой вид должны иметь компоненты объёмной силы, если при распределении напряжений, указанном в задаче 12.14, всюду выполнены условия равновесия?

- 12.20. Однородный упругий шар погружён в однородную жидкость с давлением p . Найти тензор деформации шара и поле смещений (тяготением пренебречь).

- 12.21. К основаниям цилиндра приложена постоянная растягивающая сила с поверхностной плотностью σ . Найти тензор деформаций.

- 12.22. Разрешить уравнения $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$ относительно тензора деформаций.

- 12.23. Имеется состояние всестороннего равновесного сжатия с тензором напряжений $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. Выразить модуль объёмного сжатия K через коэффициент Ламэ.

- 12.24. Упругое тело, подчиняющееся закону Гука, находится в равновесии под действием объёмных сил $f_i(x_j)$ и поверхностных сил $t_i(\vec{n}, x_j)$. Доказать, что полная энергия деформации равна половине работы внешних сил на перемещениях u_i .

- 12.25. Показать, что в отсутствие объёмных сил уравнения статических деформаций могут быть представлены в следующих формах:

$$2(1 - \nu) \nabla^2 \vec{u} + \text{rot rot } \vec{u} = 0,$$

$$2(1 - \nu) \text{grad div } \vec{u} - (1 - 2\nu) \text{rot rot } \vec{u} = 0.$$

- 12.26. Записать уравнение Ламэ для статических деформаций изотропного упругого тела в проекциях на оси декартовой системы координат.

- 12.27. Используя функции $\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$, вывести формулы в переменных E, ν и λ, μ для модуля объёмного сжатия K .
- 12.28. Вывести уравнения равновесия для двумерной (плоской) статической задачи теории упругости в полярных координатах.
- 12.29. Показать, что в случае плоского напряженного состояния шесть уравнений совместности деформаций для тонких пластин приближённо сводятся к одному уравнению
- $$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}.$$
- 12.30. Доказать, что для однородной изотропной упругой среды главные оси тензоров напряжений и деформаций совпадают.
- 12.31. Найти вид функции для плотности энергии деформации для плоского напряжённого состояния.
- 12.32. Найти вид функции для плотности энергии деформации для состояния плоской деформации.
- 12.33. Определить деформацию (поле смещений) длинного стержня, стоящего вертикально в однородном поле тяжести.
- 12.34. Определить деформацию цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси в отсутствие сил тяготения.
- 12.35. Определить деформацию однородного шара радиуса R под влиянием собственного гравитационного поля. Найти давление в центре.
- 12.36. Найти тензор напряжений в стенках длинной цилиндрической трубы, внутри которой создано давление p (давление снаружи отсутствует).
- 12.37. Используя выражение для объёмной плотности энергии упругих деформаций $U = U(\varepsilon_{ij})$, найти элементы тензора напряжений σ_{11} и σ_{12} .
- 12.38. Сравнить жёсткости двух балок одинаковой массы и длины, изготовленных из одного материала, но имеющих разные формы поперечного сечения: круг (C_0) и прямоугольник (C_1).
- 12.39. Найти относительное изменение $\delta C/C$ жесткости однородного цилиндра эллиптического сечения при переходе от изгиба в направлении большой полуоси a к изгибу в направлении малой полуоси b .
- 12.40. Один конец упругого стержня квадратного сечения a^2 заделан в стенку, к другому прикрепленна масса m , величина которой много больше массы стержня, а размеры её очень малы. Найти собственную частоту колебаний системы.
- 12.41. Упругий стержень массой m , длиной l и площадью поперечного сечения S движется в продольном направлении с одинаковым для всех его точек ускорением a . Найти энергию упругой деформации.

- 12.42 Упругий цилиндр высотой h и весом P поставлен основанием на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации.
- 12.43. Определить крутильную жёсткость однородного стержня кругового сечения радиусом R .
- 12.44. Определить крутильную жёсткость однородного стержня эллиптического сечения с полуосями a и b .
- 12.45. Определить крутильную жёсткость однородной цилиндрической трубы с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 .
- 12.46. Найти полную энергию упругой деформации однородного цилиндрического вала, закрученного вокруг оси на угол α .
- 12.47. Найти полную энергию упругой деформации цилиндрической трубы, закрученной вокруг оси на угол α .
- 12.48 Шар, подвешенный на проволоке, совершает крутильные колебания с периодом τ . Найти период колебаний τ' в случае, если проволоку заменить цилиндрической трубкой той же длины и массы, сделанной из того же материала. Внешний радиус трубки R , внутренний – a .
- 12.49 Из принципа наименьшего действия вывести дифференциальное уравнение свободных колебаний струны длиной l с линейной скоростью λ и жесткостью единицы длины α .
- 12.50 Из принципа наименьшего действия вывести дифференциальное уравнение поперечных колебаний нерастяжимого стержня.
- 12.51. Найти фазовую скорость распространения волны $\vec{u} = \vec{e}_1 A \sin[k(x_1 - ct)]$ в отсутствие объёмных сил.
- 12.52. Тело с моментом инерции I относительно вертикальной оси висит на тонком упругом стержне радиусом a и плотностью ρ , верхний конец которого закреплён. Найти период τ крутильных колебаний системы.

13. Кинематика жидкой среды

- Координаты жидкой частицы в момент времени t , находившейся в начальный момент $t = 0$ в точке $\vec{\xi}$:

$$\vec{x} = \vec{X}(t|\vec{\xi}), \quad \vec{X}(0|\vec{\xi}) = \vec{\xi}.$$

- Обратная функция $\vec{\xi} = \vec{\Xi}(\vec{x}, t)$.

- Скорость $\vec{\xi}$ – частицы в момент t

$$\vec{V}(t|\vec{\xi}) = \left(\frac{\partial \vec{X}(t|\vec{\xi})}{\partial t} \right)_{\vec{\xi}=\text{const}}.$$

- Поле скоростей $\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{V}(t|\vec{\Xi}(\vec{x}, t))$.

- Уравнения линий тока

$$\frac{\delta x_1}{v_1} = \frac{\delta x_2}{v_2} = \frac{\delta x_3}{v_3}.$$

- Скорость $\vec{\xi}$ -частицы в заданном поле скоростей

$$\vec{V}(t|\vec{\xi}) = \vec{v}(\vec{X}(t|\vec{\xi}), t).$$

- Уравнение траектории жидкой частицы

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}.$$

- Ускорение $\vec{\xi}$ -частицы

$$\vec{A}(t|\vec{\xi}) = \left(\frac{\partial \vec{V}(t|\vec{\xi})}{\partial t} \right)_{\vec{\xi}=\text{const}}$$

- Поле ускорений в заданном поле скоростей

$$\vec{a}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v}.$$

- Условие непрерывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$, $\vec{j} = \rho \vec{v}$.

- Условие несжимаемости $\text{div} \vec{v} = 0$.

- В плоском (двумерном) потенциальном течении несжимаемой жидкости $v_x = \partial \phi / \partial x$, $v_y = \partial \phi / \partial y$, где $\phi(x, y)$ – потенциал скоростей двумерного течения, являющийся гармонической функцией

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

- Комплексный потенциал

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y),$$

где $\psi(x, y)$ – функция тока.

- Комплексное поле скоростей

$$w = v_x + iv_y = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} = [f'(z)]^*.$$

- Интеграл от производной комплексного потенциала вдоль плоской кривой C

$$\int_C f'(z)dz = \Gamma_C + iN_C,$$

где $\Gamma_C \equiv \int_C \vec{v} d\vec{l}$ – циркуляция вектора скорости вдоль C .

- 13.1. Пусть $\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{b}t$. Найти $\vec{X}(t|\vec{\xi})$.
- 13.2. Пусть $\vec{v}(\vec{x}, t) = c\vec{x}$. Найти $\vec{X}(t|\vec{\xi})$.
- 13.3. Пусть $\vec{v}(\vec{x}, t) = c\vec{x}t$. Найти $\vec{V}(t|\vec{\xi})$.
- 13.4. Пусть $\vec{V}(t|\vec{\xi}) = \vec{b} + c\vec{\xi}$. Найти $\vec{v}(\vec{x}, t)$.
- 13.5. Дано³ поле скоростей $\vec{v}(\vec{x}, t) = (x_1\vec{e}_1 + 2x_2\vec{e}_2 + 3x_3\vec{e}_3)/(1+t)$. Найти поле ускорений $\vec{a}(\vec{x}, t)$ и ускорение частицы $\vec{A}(t|\vec{\xi})$.
- 13.6. В условиях предыдущей задачи найти линии тока и траектории.
- 13.7. Дано поле скоростей $\vec{v}(\vec{x}, t) = x_1^2 t \vec{e}_1 + x_2 t^2 \vec{e}_2 + x_1 x_3 t \vec{e}_3$. Определить ускорение частицы в момент $t = 1$ в точке $(1, 3, 2)$.
- 13.8. Доказать, что для поля скоростей $v_1 = x_1^2 x_2 + x_2^3$, $v_2 = -x_1^3 - x_1 x_2^2$, $v_3 = 0$ линии тока будут окружностями.
- 13.9. Показать, что поле скоростей $v_i = Ax_i / (x_j x_j)^{3/2}$ удовлетворяет уравнению непрерывности несжимаемой жидкости $v_{i,i} = 0$.
- 13.10. Рассматривается одномерное (вдоль оси OX) течение идеальной жидкости, заданное полем скоростей $v_x(x, t) = v(t)$, зависящим только от времени. Начальная плотность $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$. Найти плотность в момент времени $t > 0$.
- 13.11. Пусть поле скоростей совершающей одномерное движение идеальной жидкости стационарно $v(x, t) = v(x)$. Найти плотность $\rho(x)$.
- 13.12. Найти $\rho(x, t)$ в поле скоростей одномерного движения $v(x, t) = v_0 \cos \omega t$ при начальном условии $\rho(x, 0) = \frac{A}{1 - x^2}$.
- 13.13. На примере одномерного течения показать, что в однородном поле скоростей первоначально однородная среда продолжает оставаться однородной.
- 13.14. Дано поле скоростей несжимаемой жидкости $v_1 = A(x_1^2 - x_2^2)/r^4$, $v_2 = A(2x_1 x_2)/r^4$, $v_3 = 0$, где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Доказать, что оно удовлетворяет уравнению непрерывности.
- 13.15. Доказать, что поле скоростей, заданное в предыдущей задаче, является безвихревым.

³Здесь и ниже используются условные (или безразмерные) единицы.

- 13.16. Дано поле скоростей $v_1 = 4x_3 - 3x_2$, $v_2 = 3x_1$, $v_3 = -4x_1$. Доказать, что оно соответствует вращению абсолютно твердого тела. Найти вектор угловой скорости.
- 13.17. Доказать, что поле скоростей $\vec{v} = A\vec{x}/|\vec{x}|^3$ удовлетворяет уравнению непрерывности несжимаемой жидкости.
- 13.18. Двумерное (в плоскости XOY) нестационарное течение жидкости характеризуется полем скоростей $\vec{v} = (Bt/r)\vec{e}_r$. Определить ускорение частиц жидкости, движущихся по оси OX .
- 13.19. Задано поле скоростей $\vec{v}(\rho, \varphi, z)$ компонентами v_ρ , v_φ и v_z в цилиндрической системе координат. Записать поле ускорений в этой системе.
- 13.20. Задано поле скоростей $\vec{v}(r, \theta, \varphi)$ компонентами v_r , v_θ и v_φ в сферической системе координат. Записать поле ускорений в этой системе.
- 13.21. Ось OZ является равномерным и постоянным источником идеальной несжимаемой жидкости, совершающей стационарное движение в отсутствие внешних сил. Найти поле скоростей и поле ускорений.
- 13.22. В условиях предыдущей задачи источник изменяет количество подаваемой жидкости так, что поле скоростей принимает вид $v_r = At/r$, $v_\varphi = v_z = 0$. Найти поле ускорений.
- 13.23. Доказать соотношение $\frac{d}{dt}(\delta\vec{l}) = \delta\vec{V}$, где $\delta\vec{l} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ – вектор расстояния между двумя близкими точками в потоке, а $\delta\vec{V}$ – разность скоростей между ними.
- 13.24. Доказать, что лагранжева форма $d(\rho J)/dt = 0$ уравнения непрерывности и эйлера его форма $d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$ эквивалентны.
- 13.25. Доказать, что в стационарном режиме ($\partial v_i / \partial t = 0$) линии тока и траектории движения частиц совпадают.
- 13.26. Найти $\rho(\vec{r}, t)$ среды с однородным полем скоростей $\vec{v} = \vec{v}(t)$ и начальным условием $\rho(\vec{r}, 0) = f(\vec{r})$.
- 13.27. Масса m в начальный момент времени равномерно распределена по объёму, ограниченному сферой радиуса R . Задано поле скоростей в виде $\vec{v}(\vec{r}, t) = H(t)\vec{r}$, где $H(t)$ – некоторая известная функция. Найти зависимость плотности от координат и времени.
- 13.28. В условиях предыдущей задачи найти соотношение между t , ρ и $H(\rho)$.
- 13.29. Самогравитирующая однородная среда в начальный момент времени заполняет шар радиуса $R(0)$. Показать, что если в начальный момент времени распределение массы по шару было однородным, а поле скоростей удовлетворяло соотношению $\vec{v}(\vec{r}, 0) = H_0\vec{r}$, то и во все последующие моменты времени оба эти свойства будут иметь место.

- 13.30. В условиях предыдущей задачи определить $\rho(t)$ и $H(t)$, пренебрегая гравитацией.
- 13.31. В условиях задачи 13.29 доказать соотношение $H^2 = (8/3)\pi\gamma\rho + C\rho^{2/3}$, где C – постоянная, определяемая начальными условиями.
- 13.32. Доказать теорему Кельвина $\frac{d}{dt} \oint_C \vec{v} \delta \vec{l} = \oint_C \dot{\vec{v}} \delta \vec{l}$.
- 13.33. Найти циркуляцию скорости по контуру квадрата $x_1 = \pm 1, x_2 = \pm 1, x_3 = 0$ в двумерном течении с полем скоростей $\vec{v} = (x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (x_1^2 - x_2)\vec{e}_2$.
- 13.34. Если все линии тока, образующие трубку тока, нормальны к поверхности некоторого сечения, то такое сечение называют *нормальным сечением трубки*. Доказать, что условие существования нормальных сечений у трубок жидкости имеет вид $\vec{v} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$.
- 13.35. Доказать, что ускорение жидкости в поле скоростей $\vec{v}(\vec{r}, t)$ можно записать в виде $\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\operatorname{rot} \vec{v}, \vec{v}] + \frac{1}{2} \nabla v^2$.
- 13.36. Доказать, что уравнение непрерывности для вектора завихренности $\vec{q} = \operatorname{rot} \vec{v}$ (см. задачу 13.30.) можно представить в виде
$$\frac{d}{dt} \int_V q_i dV = \int_S [\varepsilon_{ijk} a_k + q_j v_i] dS_j.$$
- 13.37. Течение задано полем скоростей $v_1 = 0, v_2 = A(x_1 x_2 - x_3^2), v_3 = A(x_2^2 - x_1 x_3)$. Найти тензор завихренности в точке $P(1, 0, 3)$.
- 13.38. Показать, что в поле скоростей
$$v_1 = A[-\sin(x_1/a) + \cos(x_1/a)],$$
$$v_2 = A[x_2/a + x_3/a] \sin(x_1/a),$$
$$v_3 = A[x_2/a + x_3/a] \cos(x_1/a)$$
вихревые линии совпадают с линиями тока.
- 13.39. Найти потенциал скоростей стационарного однородного плоскопараллельного потока.
- 13.40. Определить поле скоростей жидкости с потенциалом скоростей а) $\phi(x, y, z) = ax$, б) $\phi(r, \theta, \varphi) = b \ln r$, и в) $\phi(r, \theta, \varphi) = c\varphi$.
- 13.41. Комплексный потенциал двумерного течения имеет вид $f(z) = cz$, где c – комплексная постоянная. Доказать, что ему соответствует плоскопараллельное течение с постоянной скоростью.
- 13.42. Комплексный потенциал двумерного течения имеет вид $f(z) = a \ln z$, где a – действительное число. Найти линии тока.
- 13.43. В условиях предыдущей задачи найти Γ_C и N_C .

- 13.44. Комплексный потенциал двумерного течения имеет вид $f(z) = v_{\infty}z + m/z$, где v_{∞} и m – положительные действительные числа. Найти абсолютную величину скорости на окружности $z = ae^{i\alpha}$.
- 13.45. Круговой цилиндр радиусом R с центром в начале координат обтекается потоком с комплексным потенциалом $f(z) = v_{\infty}(z + R^2/z)$. Найти критические точки (точки, где скорость обращается в нуль).
- 13.46. Решить предыдущую задачу при условии, что $f(z) = v_{\infty}(z + R^2/z) + (\Gamma/2\pi i) \ln z$.
- 13.47. Найти линии тока в окрестности критической точки аксиально симметричного тела, обтекаемого потоком с потенциалом скоростей $\phi = ar^2 + bz + cz^2$.
- 13.48. Несжимаемая идеальная жидкость обтекает шар радиусом a . Потенциал скоростей жидкости $\phi(\vec{r}) = -Ax/r^3 - Bx$. Показать, что вне шара он удовлетворяет уравнению Лапласа. Постоянные A и B найти из граничного условия на бесконечности.
- 13.49. В условиях предыдущей задачи найти распределения скоростей по поверхности шара. Найти критические точки и максимальную скорость.

14. Идеальные жидкости и газы

- Уравнения движения (*уравнения Эйлера*)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p,$$

где $\vec{f}_m = \vec{f}/\rho$ – массовая плотность сил.

- Уравнение движения баротропной жидкости в потенциальном поле $\vec{f}_m = -\nabla U_m$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla (U_m + \mathcal{P}),$$

где

$$\mathcal{P}(\vec{r}, t) = \int_{p^*}^{p(\vec{r}, t)} \frac{dp}{\rho(p)}.$$

- Вторая форма уравнения движения

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}, \text{rot } \vec{v}] + \nabla (v^2/2 + U_m + \mathcal{P}) = 0.$$

- Теорема Бернулли для стационарного течения идеальной баротропной жидкости:

$$\frac{\rho v^2}{2} + U_m + \mathcal{P} = \text{const}$$

вдоль линии тока (слабая форма) или во всём объёме (сильная форма).

- Изменение внутренней энергии с учётом теплопереноса, характеризуемого источником с объёмной плотностью s и вектором плотности потока тепла $\vec{c}$,

$$\frac{d}{dt} \int_V U dV = \int_V (v_{ij} \sigma_{ij} - c_{i,i} + s) dV.$$

14.1. Найти гравитационное давление внутри земного шара в модели однородной несжимаемой жидкости.

14.2. Жидкость, уравнение состояния которой имеет вид $p = \lambda \rho^k$, находится в однородном поле тяжести. Найти глубину, на которой давление будет в N раз превышать атмосферное.

14.3. Широкий сосуд с несжимаемой жидкостью движется с постоянным ускорением $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_z \vec{e}_z$ в однородном поле тяжести $\vec{g} = -g \vec{e}_z$. Найти наклон свободной поверхности жидкости.

14.4. Определить форму свободной поверхности несжимаемой жидкости, вращавшейся вместе с содержащим её вертикальным цилиндрическим сосудом вокруг его оси.

14.5. В условиях предыдущей задачи найти угловую скорость, при которой поверхность жидкости коснется дна вращающегося сосуда (объём жидкости и радиус цилиндрического сосуда заданы).

- 14.6. Несжимаемая жидкость массой m вращается в невесомости с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси. Найти форму свободной поверхности, если частицы жидкости притягиваются к центру оси вращения с силой, пропорциональной расстоянию до него.
- 14.7. Оценить сплюснутость Земли, обусловленную её осевым вращением, рассматривая Землю как однородный несжимаемый жидкий шар.
- 14.8. Определить скорость на свободной поверхности жидкости, перетекающей через вертикальную стенку в однородном поле тяжести.
- 14.9. Найти функцию давления $\mathcal{P}(p)$ вдоль линии тока совершенного газа с уравнением состояния $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$. Что можно сказать о поведении давления, плотности и температуры с ростом скорости жидкости вдоль линии тока?
- 14.10. Жидкость, уравнение состояния которой имеет вид $p = \lambda \rho^k$, вытекает из большого закрытого резервуара под давлением в N атмосфер через гладкую тонкую трубку. Определить скорость истечения жидкости.
- 14.11. Доказать, что уравнение движения идеальной жидкости можно записать в форме Громеки-Лемба $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + [\vec{\omega}, \vec{v}] = \vec{f}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$, где $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$ - поле вихрей.
- 14.12. Предполагая, что движение жидкости потенциально ($\vec{\omega} = 0$ и $\vec{v} = \text{grad } \phi$) и сама жидкость баротропна ($(1/\rho) \text{grad } p = \text{grad } \mathcal{P}$), из уравнения Громеки-Лемба вывести интеграл Коши-Римана $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} - U = f(t)$, где $f(t)$ - произвольная функция времени.
- 14.13. Из уравнения Громеки-Лемба для идеальной баротропной жидкости в поле внешних потенциальных сил вывести уравнение для векторного поля вихрей $\vec{\omega} = (1/2) \text{rot } \vec{v}$.
- 14.14. Преобразовать результат предыдущей задачи в уравнение Гельмгольца $d\vec{\omega}/dt = (\vec{\omega} \nabla) \vec{v}$.
- 14.15. Вывести одномерное уравнение для плотности идеальной баротропной жидкости.
- 14.16. В условиях предыдущей задачи вывести уравнение для скорости.
- 14.17. Пусть $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. Найти мощность напряжений $\dot{\epsilon}_{ij}\sigma_{ij}$.
- 14.18. Найти силу сопротивления идеальной жидкости движению в ней шара с ускорением $\vec{a} = \vec{u}$, если распределение давления по его поверхности имеет вид $p = p_0 + (9 \cos^2 \theta - 5)\rho U^2/8 + a_r R\rho/2$, где a_r - проекция ускорения на радиальное направление, ρ - плотность жидкости, R - радиус шара.
- 14.19. Найти соотношение между скоростями и давлениями несжимаемой идеальной жидкости, стационарно текущей в горизонтальной трубе переменного сечения, в поперечных сечениях с площадями S_1 и S_2 .

14.20. Стационарный поток несжимаемой идеальной жидкости характеризуется полем скоростей (в цилиндрической системе) $\vec{r} = (1/r)\vec{e}_\varphi$. Найти давление в данном потоке.

14.21. В условиях задачи 13.7. найти градиент давления в точке $P(1, 3, 2)$ в момент времени $t = 1$.

14.22. Жидкость равномерно вращается вокруг оси OZ с угловой скоростью Ω как твердое тело. Используя уравнения Эйлера, найти поле градиентов давлений.

14.23. Доказать, что для поля скоростей $v_i = \varepsilon_{ijk}\Omega_j x_k$ интегральное уравнение для момента импульса сплошной среды

$$\frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho f_k dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k(\vec{n}) dS$$

сводится к соответствующему уравнению для момента абсолютного твёрдого тела $\frac{d}{dt} I_{ij} \Omega_j = M_i$.

14.24. Выразить силу, действующую со стороны двумерного потока на обтекаемое им тело, ограниченное замкнутым контуром C .

14.25. В условиях предыдущей задачи положить

$$f'^2(z) = \frac{w_\infty^*}{\pi i} \frac{\Gamma}{z} + w_\infty^{*2} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n / z^n$$

и найти абсолютную величину силы.

14.26. В несжимаемую жидкость помещен шар переменного радиуса $R = R_0 e^{-\alpha t}$. Определить закон, по которому изменяется давление жидкости на поверхности шара.

14.27. В начале координат находится сферический источник идеальной несжимаемой жидкости, совершающей стационарное безвихревое течение в отсутствие внешних сил. Найти распределение давления при заданной мощности источника Q , полагая давление на поверхности источника $p(r_0) = 0$.

14.28. Рассматривая ускоренное движение шара в неподвижной (на бесконечности) жидкости, т.е. полагая его скорость $\vec{v}$ равной $-\vec{v}_\infty$, вывести силу сопротивления идеальной жидкости. Найти присоединённую массу μ .

14.29. Бесконечной длины цилиндр радиусом R с осью z обтекается потоком жидкости с начальной скоростью $\vec{v}_\infty$, направленной вдоль оси x , и потенциалом скоростей

$$\phi = v_\infty \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + b\theta,$$

где θ — угол между осью x и перпендикуляром, опущенным из точки наблюдения на ось цилиндра. Найти поле скоростей и силу, действующую на цилиндр.

14.30. Вывести уравнение колебаний сферического пузырька газа в идеальной несжимаемой жидкости (уравнение Релея).

14.31. В условиях предыдущей задачи вычислить давление на границе пузырька.

14.32. Показать, что полученное в задаче 14.39. уравнение Релея соответствует функции Лагранжа

$$L = \frac{R^3 \dot{R}^2}{2} - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{R_0^3}{3\gamma - 1} \left(p(\infty) + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma-1} - 1 \right] + \right. \\ \left. + \sigma(R^2 - R_0^2) + p(\infty) \frac{R^3 - R_0^3}{3} \right\}.$$

14.33. В условиях двух предыдущих задач вычислить частоту малых ($|R - R_0| \ll R_0$) колебаний пузырька газа в идеальной жидкости.

14.34. Вывести формулу для силы, действующей на тело, погруженное в несжимаемую жидкость с заданным полем скоростей $\vec{v}(\vec{r})$ ($\vec{v}_\infty = 0$).

14.35. Шар радиуса a , движущийся в идеальной несжимаемой жидкости со скоростью $\vec{v}_0$, создает поле скоростей

$$\vec{v}(\vec{r}) = (a^3/2r^5) [3(\vec{v}_0\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{v}_0].$$

Построить линии тока.

14.36. В условиях предыдущей задачи найти суммарный импульс системы шар + увлекаемая им в движение жидкость.

14.37. В условиях задачи 14.35 найти кинетическую энергию системы шар + увлекаемая им в движение жидкость.

14.38. Вывести общее уравнение для потенциала скорости при произвольном стационарном потенциальном течении сжимаемого газа.

14.39. В условиях предыдущей задачи положить $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$, где $\vec{v}_0 = \text{const}$ и $\vec{v}_1 \ll \vec{v}_0$, $\phi = \phi_0 + \phi_1$ и найти уравнение для ϕ_1 в линейном приближении.

14.40. В приближении предыдущей задачи найти давление.

14.41. Тело вращения с гладкой выпуклой поверхностью длиной l , обтекается однородным потоком молекул газа, текущим вдоль оси симметрии. Найти уравнение поверхности, обеспечивающей минимальное сопротивление, при заданных l и $R = r(l)$.

14.42. Преобразовать уравнение Кортевега-де Вриза $\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$, описывающее волны на "мелкой" воде, заменой переменных $v(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$.

14.43. Показать, что к решениям найденного выше уравнения принадлежит функция

$$u(\xi) = A \text{ch}^{-2} \left(\sqrt{\frac{A}{3\beta}} \frac{\xi}{2} \right), \quad A = 3C,$$

описывающая солитон - уединенную волну с бесконечным периодом.

- 14.44. Пусть $m(r)$ – масса части сферически симметричной звезды, заключённая в пределах сферы радиуса r , описанной вокруг центра звезды. Показать, что уравнение гидростатического равновесия может быть записано в виде $dp/dm = -\gamma m/(4\pi r^4)$.
- 14.45. Вывести уравнение Гамильтона-Якоби для точки в потенциальном поле U из уравнения Эйлера для идеальной жидкости.
- 14.46. Тем же способом вывести уравнение Гамильтона-Якоби для нерелятивистского заряда в электромагнитном поле.
- 14.47. Тем же способом вывести уравнение Гамильтона-Якоби для релятивистского заряда в электромагнитном поле.

15. Вязкие жидкости и газы

- В вязкой среде $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, где τ_{ij} – тензор вязких напряжений. В несжимаемой жидкости $\tau_{ij} = \eta(v_{i,j} + v_{j,i})$, $\eta \equiv \nu\rho$ – динамическая вязкость, ν – кинетическая вязкость.
- Вектор напряжений (сила с которой жидкость действует на единицу поверхности с нормалью $\vec{n}$, направленной из жидкости в твёрдую стенку)

$$t_i = pn_i - \tau_{ij}n_j.$$

- Уравнения движения для вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье-Стокса)

$$\rho(\partial\vec{v}/\partial t + (\vec{v}\nabla)\vec{v}) = \vec{f} - \nabla p + \eta\nabla^2\vec{v},$$

где $\vec{f} \equiv \rho\vec{f}_m$ – объемная плотность силы, $\vec{f}_m$ – её массовая плотность.

- Граничные условия: на неподвижной непроницаемой поверхности $\vec{v} = 0$.
- Уравнение диффузии $\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\Delta\rho + s(\vec{r}, t)$, где $s(\vec{r}, t)$ – плотность источников диффундирующих частиц, D – коэффициент диффузии.
- Диссипация кинетической энергии ⁴

$$\dot{\mathcal{E}}_{\text{кин}} = -(\eta/2) \int (v_{i,k} + v_{k,i})^2 dV.$$

- Уравнение переноса тепла в несжимаемой вязкой жидкости:

$$\partial T/\partial t + \vec{v}\nabla T = \chi\Delta T + (\nu/2c_p)(v_{i,k} + v_{k,i})^2,$$

где T – температура, c_p – удельная теплоёмкость, χ – коэффициент температуропроводности, связанной с коэффициентом теплопроводности κ соотношением $\chi = \kappa/\rho c_p$.

- 15.1. Вязкая жидкость заключена между двумя параллельными плоскостями расстояние между которыми h . Верхняя плоскость движется относительно нижней со скоростью u вдоль оси x , давление в жидкости постоянно. Найти профиль скорости, среднюю скорость и силу $t_{||}$, действующую на каждую из плоскостей.
- 15.2. Вязкая жидкость движется между двумя неподвижными параллельными плоскостями при наличии постоянного градиента давления. Найти профиль скорости, среднюю скорость и силу, действующую на единицу площади плоскости.
- 15.3. Вязкая жидкость движется между двумя параллельными плоскостями при наличии постоянного градиента давления. Верхняя плоскость движется относительно нижней с постоянной скоростью. Найти и проанализировать профиль скорости.

⁴Кинетическую энергию жидкости обозначаем в этой главе через $\mathcal{E}_{\text{кин}}$, чтобы не путать её с температурой T .

- 15.4. Слой жидкости толщиной h (по перпендикуляру OZ к свободной поверхности) стекает по наклоненной под углом α к горизонту неподвижной плоскости параллельно лежащей в ней оси OX . Найти поле скоростей, давлений и расход жидкости Q (отнесённое к единице длины поперечной оси OY количество жидкости, протекающее через поперечное сечение слоя в единицу времени).
- 15.5. Две параллельные плоские круглые пластинки радиуса R сближаются с постоянной скоростью u , вытесняя находящуюся между ними жидкость. Найти зависимость давления от расстояния до центра.
- 15.6. Используя уравнения Навье-Стокса, оценить толщину пограничного слоя в плоской задаче.
- 15.7. Проанализировать стационарное течение вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Найти профиль скоростей и расход жидкости.
- 15.8. Найти профиль скоростей и расход вязкой жидкости в трубе с кольцевым сечением (внутренний радиус R_1 , внешний – R_2).
- 15.9. Найти профиль скоростей и расход вязкой жидкости в трубе эллиптического сечения (a и b – полуоси эллипса).
- 15.10. Цилиндр радиуса R_1 поступательно движется со скоростью u внутри коаксиального с ним цилиндра радиуса R_2 параллельно общей оси. Определить поле скоростей вязкой жидкости, заполняющей пространство между цилиндрами.
- 15.11. Вязкая жидкость стационарно вращается вокруг оси z так, что $v_r = v_z = 0$, $v_\varphi = v(r)$. Записать уравнение Навье-Стокса в цилиндрических координатах.
- 15.12. Бесконечный цилиндр радиуса R , погружённый в вязкую жидкость, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Найти поле скоростей.
- 15.13. Вязкая жидкость находится между двумя, бесконечными коаксиальными цилиндрами, внутренний цилиндр неподвижен, внешний вращается с постоянной угловой скоростью. Определить поле скоростей.
- 15.14. Шар радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью Ω в вязкой жидкости. Найти поле скоростей.
- 15.15. В условиях предыдущей задачи вычислить момент сил трения, действующих на шар.
- 15.16. Вычислить силу с которой вязкая жидкость действует на обтекаемый ею неподвижный шар радиуса R , если на поверхности шара $p = p_0 - (3\eta v_\infty / 2R) \cos \theta$, $\tau_{rr} = 0$, $\tau_{r\theta} = -(3\eta v_\infty / 2R) \sin \theta$.
- 15.17. На неподвижный шар радиусом R с центром в начале координат набегают стационарный поток вязкой жидкости. Возмущенная часть потока характеризуется полем скоростей

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{F}{8\pi\eta} \left\{ \frac{xz}{r^3} \vec{e}_x + \frac{yz}{r^3} \vec{e}_y + \left(\frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right) \vec{e}_z \right\},$$

где F – действующая на шар сила. Выразить силу через усреднённую по поверхности шара скорость.

- 15.18. Бесконечная пластина, ограничивающая вязкую жидкость, совершает в своей плоскости YOZ простое гармоническое колебание с частотой ω . Найти возбуждаемое ей движение жидкости ($x > 0$) и глубину проникновения волны δ – расстояние, на котором её амплитуда падает в e раз.
- 15.19. Используя метод размерностей, вывести общую формулу для силы сопротивления движению в жидкости с плотностью ρ , вязкостью η и скоростью звука c шара радиуса R , движущегося с постоянной скоростью v .
- 15.20. В опыте Милликена по определению элементарного заряда капельки масла распылены в воздухе между двумя горизонтальными пластинами конденсатора. Заряд отдельной капли равен ne , $n = 0, 1, 2$, e – абсолютная величина заряда электрона. Потенциал пластин подобран так, что при $n = 1$ капля неподвижна. Найти скорость $v(t)$ движения капли а) при $n = 0$ и б) при $n = 2$. Поле включается в момент $t = 0$.
- 15.21. В жидкость с заданным постоянным градиентом температуры $\nabla T = \vec{B}$ погружён шар радиусом R . Коэффициенты теплопроводности жидкости и шара равны соответственно κ_0 и κ_1 . Найти поле температур в системе жидкость + шар.
- 15.22. Определить поле температуры в жидкости, текущей по круглой трубе радиусом R , температура стенки которой постоянна и равна T_0 .
- 15.23. Рассмотрим такое движение несжимаемой жидкости, что на бесконечности её скорость равна нулю и кинетическая энергия её $\mathcal{E}_{\text{кин}} = \int \frac{\rho v^2}{2} dV$ конечна. Показать, что скорость убывания кинетической энергии (диссипация) пропорциональна вязкости.
- 15.24. Преобразовать результат предыдущей задачи в условиях потенциального течения в интеграл по поверхности, ограничивающей жидкость.
- 15.25. В условиях предыдущей задачи найти диссипативную силу сопротивления, действующую на движущийся в жидкости пузырёк газа радиусом R , если поле скоростей вокруг него задаётся потенциалом $\phi = -(R^3/2r^2)\vec{u}\vec{n}$, где $\vec{u}$ – скорость натекающей на пузырёк жидкости, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности пузырька.
- 15.26. По трубе кругового сечения с осью OZ течёт жидкость, удовлетворяющая условиям: она подчиняется уравнению состояния идеального газа $\rho = mp/T$ (m – масса молекулы), её температура $T = \text{const}$, и вязкость η не зависит от давления. Найти $p(z)$, при условии, что $p(0) = p_0$ и расход газа равен Q .
- 15.27. Решить одномерное уравнение диффузии в бесконечной однородной среде от точечного мгновенного источника единичной мощности $s(x, t) = \delta(x)\delta(t)$.

- 15.28. Частицы совершают броуновское движение в жидкости, заполняющей пространство $x > 0$. Частицы, достигшие поверхности стенки $x = 0$, прилипают к ней. Найти вероятность того, что частица, находившаяся в момент времени $t = 0$ в точке $x_0 > 0$, в момент времени t окажется на стенке.
- 15.29. Найти закон эволюции плотности вещества совершающего одномерную диффузию. Начальное распределение $\rho(x, 0) = \alpha \exp(-\beta x^2)$ $\alpha, \beta > 0$, коэффициент диффузии – D .
- 15.30. Показать, что наличие силы F , "подгоняющей" диффундирующую вдоль оси OX частицу в каком-то (например, положительном) направлении, приводит диффузионное уравнение к виду $\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - 2\gamma D \frac{\partial(F\rho)}{\partial x}$.
- 15.31. В условиях предыдущей задачи для случая потенциальной силы $F = -\partial U / \partial x$ найти равновесное (не зависящее от времени) распределение $\rho(x)$.
- 15.32. При теоретическом исследовании волновых процессов в вязких жидкостях в качестве простейшей модели используется уравнение Бюргерса: $\partial v / \partial t + v \partial v / \partial x = \nu \partial^2 v / \partial x^2$. Показать, что замена $v = -2\nu \partial \ln u(x, t) / \partial x$ позволяет свести уравнение Бюргерса к уравнению диффузии.
- 15.33. Показать, что стационарное уравнение Навье-Стокса допускает решения диффузионного типа. Получить это решение.
- 15.34. В вязкой среде вихри испытывают диффузию. Найти закон расплывания z -проекции вектора $\vec{q}$ вихря, первоначально находящегося на оси OZ .
- 15.35. В условиях предыдущей задачи найти поле скоростей.

16. Механические модели вязкоупругости

- Определяющие уравнения *модели Кельвина*

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \equiv (E + \eta d/dt)\varepsilon.$$

- Определяющие уравнения *модели Максвелла* –

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E} \equiv (\eta^{-1} + E^{-1}d/dt)\sigma.$$

- Обобщенная модель Кельвина

$$\varepsilon = (E_1 + \eta_1 d/dt)^{-1}\sigma + \dots + E_N + \eta_N d/dt)^{-1}\sigma.$$

Здесь и ниже d/dt – оператор дифференцирования по времени, $(a + bd/dt)^{-1}$ – оператор, обратный оператору $a + bd/dt$.

- Обобщенная модель Максвелла

$$\sigma = (\eta_1^{-1} + E_1^{-1}d/dt)^{-1}\dot{\varepsilon} + \dots + (\eta_N^{-1} + E_N^{-1}d/dt)^{-1}\dot{\varepsilon}.$$

- Уравнение деформации ползучести в модели Кельвина

$$\dot{\varepsilon} + \varepsilon/\tau = \sigma_0 H(t)/\eta,$$

где $\tau = \eta/E$ – время запаздывания,

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

- Уравнение релаксации напряжения в модели Максвелла

$$\dot{\sigma} + \sigma/\tau = E\varepsilon_0\delta(t).$$

- *Функция ползучести* $\psi(t)$ определяется через деформацию ползучести $\varepsilon(t)$, вызванную нагрузкой ступенчатого вида $\sigma = \sigma_0 H(t)$, соотношением $\varepsilon(t) = \psi(t)\varepsilon_0$, $t > 0$.

- *Функция релаксации* $\varphi(t)$ определяется через релаксацию напряжения $\sigma(t)$, вызванную деформацией ступенчатого вида $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$, соотношением $\sigma(t) = \varphi(t)\varepsilon_0$, $t > 0$.

- *Интегралы наследственности*

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \psi(t-t')d\sigma(t')$$

и

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(t-t')d\varepsilon(t').$$

- Условные обозначения элементов напряжения, деформации, вязкости и упругости соответственно:

Рис. 1. Простой элемент Кельвина

Рис. 2. Простой элемент Максвелла

Рис. 3. К задаче 16.5.

Рис. 4. К задаче 16.6.

- 16.1. Показать, что изображённая на рис. 1 система является механическим аналогом вязкоупругости Кельвина.
- 16.2. Построить механический аналог обобщенной вязкоупругости Кельвина.
- 16.3. Показать, что изображённая на рис. 2 система является механическим аналогом вязкоупругости Максвелла.
- 16.4. Построить механический аналог обобщённой вязкоупругости Максвелла.
- 16.5. Вывести определяющее уравнение для *стандартного линейного твердого тела*, изображаемого последовательным соединением упругого элемента и элемента Кельвина (рис. 3). Проверить предельные случаи.
- 16.6. Вывести определяющее уравнение для *трехпараметрической модели вязкой жидкости*, изображаемой последовательным соединением элемента Кельвина и вязкого элемента (рис. 4). Проверить предельные случаи.
- 16.7. Вывести определяющее уравнение для *четырёхпараметрической модели вязкоупругой среды*, изображаемой последовательным соединением элемента Кельвина с параметрами (E_1, η_1) и элемента Максвелла с параметрами (E_2, η_2) .
- 16.8. Вывести определяющее уравнение для *четырёхпараметрической модели вязкоупругой среды*, изображаемой параллельным соединением элемента Кельвина (E_1, η_1) и элемента Максвелла (E_2, η_2) .
- 16.9. Найти решение уравнения деформации ползучести в модели Кельвина.
- 16.10. Найти решение уравнения релаксации напряжения в модели Максвелла.
- 16.11. Найти функцию ползучести для обобщенной модели Кельвина.
- 16.12. Найти функцию релаксации для обобщенной модели Максвелла.
- 16.13. Записать интеграл наследственности для деформации при условии, что приложено напряжение

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sigma_0 e^{-t/\theta}, & t > 0. \end{cases}$$

Рис. 5. К задаче 16.16.

16.14. Найти функцию ползучести для стандартного линейного твёрдого тела.

16.15. Найти деформацию стандартного твёрдого тела при законе нагружения

$$\sigma = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sigma_0, & 0 < t < 2\tau_1, \\ 0, & t > 2\tau_1. \end{cases}$$

16.16. Представленное рис. 5. тело в интервале времени $(0, t_1)$ растягивается с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_1/t_1$. Найти закон изменения напряжения.

17. Плазма

- Движение в магнитном поле электрически нейтральной проводящей среды (плазмы) описывается магнитной гидродинамикой, математическую основу которой составляют следующие уравнения.
- Уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ 2) \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ 3) \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \rho_e = 0, \\ 4) \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

- Материальные уравнения

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j}_e = \sigma \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}] \right\}.$$

- Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

- Уравнение движения, для несжимаемой идеальной плазмы в магнитном поле имеющее вид

$$\rho (\partial \vec{v} / \partial t + (\vec{v} \nabla) \vec{v}) = \vec{f}_m - \nabla p,$$

где $\vec{f}_m = c^{-1} [\vec{j}_e, \vec{B}]$ – объемная плотность магнитной силы.

- Уравнение состояния, в баротропной модели имеющее вид

$$p = \text{const} \rho \gamma,$$

где $\gamma = c_p / c_v$ – отношение удельных теплоемкостей.

- 17.1. Доказать теорему Лармора, согласно которой движение заряда в слабом однородном постоянном магнитном поле оказывается таким же, как движение относительно вращающихся осей в отсутствие этого поля.
- 17.2. Частица с зарядом e и массой m движется в однородном постоянном магнитном поле $\vec{H} = H \vec{e}_z$, испытывая действие дополнительной силы $\vec{F} = F(t) \vec{e}_y$. Найти $\vec{v}(t)$ в квадратурах.
- 17.3. В условиях предыдущей задачи сила $F(t)$ является медленно меняющейся функцией времени, удовлетворяющей условию $\dot{F} / (E \omega_H) \ll 1$. Найти приближенный закон движения частицы при условиях $\vec{r}(0) = 0$, $\dot{\vec{r}}(0) = v_{\perp 0} \vec{e}_y + v_{\parallel 0} \vec{e}_z$, $F(t) = 0$ при $t < 0$.
- 17.4. На основе результатов предыдущей задачи показать, что движение рассматриваемой частицы можно представить, как суперпозицию следующих трёх движений: движения по окружности со скоростью $v_{\perp} \sim \sqrt{H}$, движения центра окружности вдоль силовой линии со скоростью $v_{\parallel}$ (при этом $v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2$) и дрейфового движения центра окружности в направлении вектора $[\vec{F}, \vec{H}]$ со скоростью $F(t) / m \omega$.

- 17.5. Показать, что сохранение магнитного момента заряда $\mu = mv_{\perp}^2/2H$, вращающегося вокруг силовой линии магнитного поля, есть следствие общего принципа адиабатической инвариантности.
- 17.6. В условиях задачи 17.3. вычислить изменение магнитного момента в случае, когда $F(t) = (\alpha F_0/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^t e^{-\alpha^2 \tau^2} d\tau$.
- 17.7. Преобразовать входящую в уравнение движения объёмную плотность магнитной силы к виду
- $$\vec{f}_m = -\nabla \left(\frac{B^2}{8\pi\mu} \right) + \frac{1}{4\pi\mu} (\vec{B}\nabla)\vec{B}.$$
- Какие при этом следует сделать предположения?
- 17.8. В условиях предыдущей задачи вывести волновое уравнение для магнитного поля в несжимаемой плазме с проводимостью σ . Начальное магнитное поле $\vec{B}_0$ однородно и направлено вдоль оси OZ . В этом же направлении распространяется и плоская волна $\vec{b}(z)$, созданная током $\vec{j}_e$, так что $\vec{B}(z) = \vec{B}_0 + \vec{b}(z)$.
- 17.9. Представив решение полученного в предыдущей задаче уравнения в виде $b_y = A \sin(\omega t - kz)$, найти фазовую скорость волны и дисперсионное соотношение (связь между ω и $|k|$) для плазмы с бесконечной проводимостью.
- 17.10. В условиях предыдущих задач выразить давление через A , ω и k .
- 17.11. Сравнить скорость плазмы со скоростью движения магнитных силовых линий в условиях предыдущих задач.
- 17.12. Простой способ получить альвеновскую скорость заключается в рассмотрении магнитных силовых линий как упругих струн с натяжением на единицу площади поперечного сечения $\theta = \frac{B^2}{4\pi\mu}$. Провести необходимые вычисления.
- 17.13. Пусть теперь проводимость σ конечна, а векторы $\vec{b}$ и $\vec{v}$, как и прежде, параллельны оси OY и являются функциями только координаты z и времени t . Найти дисперсионное соотношение и расстояние z_0 , на котором амплитуда $A(z)$ магнитной волны b спадает в e раз.
- 17.14. Показать, что при малых значениях магнитного числа Рейнольдса $R_m = 4\pi\mu\sigma l^*v^*/c^2$, где l^*, v^* – характерные размеры и скорости возмущений несжимаемой плазмы с проводимостью σ , распространение магнитного поля описывается диффузионным уравнением. Найти коэффициент диффузии D_m .
- 17.15. В условиях предыдущей задачи доказать, что если $R_m \gg 1$, то магнитный поток через любой контур, связанный с движущимся веществом, остаётся постоянным.
- 17.16. Все предыдущие результаты получены без учёта вязкости проводящей жидкости. Установить условие, при котором это приближение справедливо.

17.17. Доказать, что соотношение $[\vec{B}, \text{rot}\vec{B}] = 0$ выполняется если $\text{rot}\vec{B}(\vec{r}) = g(\vec{r})B(\vec{r})$, где $g(\vec{r})$ – произвольная скалярная функция координат, удовлетворяющая определённому условию. Что это за условие?

17.18. В условиях предыдущей задачи $g = \text{const}$ и имеет место цилиндрическая симметрия. Найти $\vec{B}(\vec{r})$.

17.19. Вывести кинетическое уравнение для распределения частиц идеальной плазмы низкой плотности в координатно-скоростном пространстве $f_\alpha(\vec{r}, \vec{u})$.

17.20. В стационарной плазме покоится в начале координат точечный заряд e . Записать систему кинетических уравнений в приближении самосогласованного поля с использованием скалярного потенциала φ .

17.21. Показать, что полученной в предыдущей задаче системе уравнений удовлетворяет выражение

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{u}) = \Phi_\alpha \left(\frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2} - e_\alpha \varphi(\vec{r}) \right),$$

где Φ_α – произвольная функция, для определения вида которой необходимы граничные условия (по повторяющимся индексам α в аргументе суммирования нет).

17.22. Записать явное выражение для решения предыдущей задачи, считая, что на больших расстояниях потенциал φ стремится к нулю, а распределение f_α – к максвеллову:

$$f_\alpha(\infty, \vec{u}) = \frac{n_\alpha}{(2\pi k_B T_\alpha)^{3/2}} \exp(-m_\alpha u^2 / 2k_B T_\alpha).$$

17.23. Вывести уравнение для потенциала φ в случае электрически нейтральной (до внесения в неё заряда) плазмы.

17.24. Решить, полученное в предыдущей задаче уравнение с нулевыми условиями на бесконечности, $\varphi(r) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$.

17.25. Записать кинетическое уравнение для стационарного движения неоднородной плазмы в постоянном неоднородном магнитном поле $\vec{B}$, направленном вдоль оси OZ . Ось OX направим вдоль изменения распределения частиц и магнитного поля (силовые линии последнего остаются прямыми).

17.26. Найти функцию распределения частиц плазмы низкого давления, находящейся в скрещенных магнитном (вдоль оси OZ) и гравитационном (вдоль оси OX) полях в пренебрежении зависимостью магнитного поля от координат.

17.27. Пусть $n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{u}, t) d\vec{u}$ – концентрация молекул, $\vec{v}(\vec{r}, t) = \int \vec{u} f(\vec{r}, \vec{u}, t) d\vec{u} / n(\vec{r}, t)$ – их средняя скорость, а $\langle A \rangle = \int A(\vec{r}, \vec{u}, t) f(\vec{r}, \vec{u}, t) d\vec{u} / n(\vec{r}, t)$ – среднее значение произвольной функции $A(\vec{r}, \vec{u}, t)$ индивидуальных переменных.

Доказать кинетическую теорему сохранению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle nA \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle nu_i A \rangle - n \left\langle u_i \frac{\partial A}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{n}{m} \left\langle F_i \frac{\partial A}{\partial u_i} \right\rangle - \frac{n}{m} \left\langle \frac{\partial F_i}{\partial u_i} A \right\rangle = 0$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

- 17.28. Вывести из кинетической теоремы сохранения уравнение непрерывности.
- 17.29. Вывести из кинетической теоремы сохранения уравнение движения плазмы.
- 17.30. Вывести из кинетической теоремы сохранения уравнение температуропроводности плазмы.

2 УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Силовые поля

1.8. Воспользоваться теоремой Гаусса.

1.12. В этой и следующей задаче используется принцип суперпозиции.

1.14. Применить к обеим частям равенства оператор Лапласа.

1.17. Вклад элемента сферы, массой dm в потенциал $\phi(r)$ на расстоянии r от её центра равен $d\phi = -\gamma \frac{dm}{R}$, где R – расстояние от элемента до точки наблюдения. Выберем последнюю на оси OZ , тогда $R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}$. Масса $dm = \frac{m}{4\pi a^2} a^2 d\Omega$, где m – полная масса сферической поверхности, а $d\Omega = d \cos \theta d\varphi$ – элемент телесного угла. Осталось выполнить интегрирование.

1.18. Градиент функции $\phi(r)$, зависящей только от расстояния до начала координат, равен $\phi'(r)\vec{e}_r$.

1.19. Разбить шар на тонкие сферические слои и воспользоваться результатом задачи 1.17.

1.21. Представить $\phi(\vec{r})$ в виде интеграла по занятому массой объёму и воспользоваться разложением

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_1)^2}} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}_1}{r^3} + \dots$$

1.24. Результат выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$.

1.25. Воспользоваться разложением эллиптического интеграла $K(k)$ в ряд Тейлора по k^2 :

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right\}.$$

1.28. Учесть, что длина dl элемента кривой связана с его проекцией $d\xi$ на ось OX соотношением $dl = \sqrt{1 + [f'(\xi)]^2} d\xi$.

1.32. Использовать принцип суперпозиции и результат предыдущей задачи.

1.33. Воспользоваться результатом задачи 1.26 и принципом суперпозиции.

1.45. Удобно вычислить сначала потенциал, создаваемый одним полушарием, сместив начало координат в центр его основания, так что точка наблюдения $z = -a$, а затем удвоить результат.

1.50. Воспользоваться разложением

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi\mu + \xi^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n P_n(\mu).$$

1.53. Искомый потенциал $\varphi(r)$ складывается из потенциала $\varphi_{\text{я}}(r)$, создаваемого ядром, которое можно считать точечным, и потенциала $\varphi_{\text{е}}(r)$, создаваемого электронной оболочкой. Записать для последнего уравнение Пуассона, дважды проинтегрировать и определить постоянные так, чтобы в начале координат этот потенциал был конечен, а на бесконечности обращался в нуль.

1.55. Обозначим через α угол между направлением движения яхты и направлением на ветер, а через β - угол между плоскостью паруса и центральной осью судна. Из геометрических построений следует, что $\beta < \alpha$. Очевидно, оба эти угла должны быть острыми. Введём угол $\theta = \alpha - \beta$. Рассматривая давление на парус как сумму передаваемых молекулами нормальных компонент импульсов (скорость ветра, разумеется, много больше скорости яхты, так что движением последней в этих вычислениях можно пренебречь) и проецируя полученную силу $\vec{P}$ на ось яхты, мы получим движущую силу. Нас интересует её проекция на наветренное направление: она оказывается пропорциональной величине

$$f(\alpha, \theta) = \sin^2 \theta \sin(\alpha - \theta) \cos \alpha.$$

Максимум этой функции достигается в точке (α_0, β_0) , координаты которой удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{tg} \theta_0 = 2 \operatorname{tg} (\alpha_0 - \theta_0),$$

$$\operatorname{tg} (\alpha_0 - \theta_0) \operatorname{tg} \alpha_0 = 1.$$

Решение этой системы (с использованием тригонометрического тождества $\operatorname{tg} (\alpha_0 - \theta_0) = (\operatorname{tg} \alpha_0 - \operatorname{tg} \theta_0) / (1 + \operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{tg} \theta_0)$) и приводит к ответу.

2. Одномерное движение точки

2.1. Возвести обе части равенства в квадрат, дважды продифференцировать по времени и выразить $\dot{x}^2$ через x .

2.10. Пусть a_1 – ускорение точки под действием тела 1, а a_2 – её ускорение под действием тела 2. Опыт показывает, что под влиянием обоих тел точка приобретает ускорение $a_{1+2} = a_1 + a_2$. Пусть сила, действующая на движущуюся с ускорением a точку, определяется функцией $F = f(a)$, так что $F_1 = f(a_1)$, $F_2 = f(a_2)$ и $F_{1+2} = f(a_{1+2})$. Используя в аргументе последней функции формулу сложения ускорений, приходим к требуемому выводу.

2.11. Дифференцируя $\int_0^t v(\tau) d\tau$ по t и решая полученное уравнение, приходим к соотношению $\left(\frac{1}{mc} - \frac{v}{2}\right)^2 = \frac{c_1}{t}$, где c – коэффициент указанный в условии пропорциональности, а c_1 – произвольная постоянная, которая в силу начальных условий, может быть только нулём.

2.17. Из закона сохранения энергии

$$ml^2 \dot{\varphi}^2 / 2 - mgl \cos \varphi = -mgl \cos \varphi_0$$

найти $\dot{\varphi}$, затем проинтегрировать уравнение в разделённых переменных

$$dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}$$

и период

$$\tau = 4 \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}$$

с помощью подстановки

$$\sin \xi = (\sin \varphi / 2) / \sin (\varphi_0 / 2)$$

выразить через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$.

Учитывая разложение

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{k^2}{4} + \dots \right],$$

найти поправку к элементарной формуле $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$ в случае малых колебаний.

2.18. Формула для периода имеет вид

$$\tau(\mathcal{E}) = \sqrt{2m} \int_{-x(\mathcal{E})}^{x(\mathcal{E})} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{E} - U(x)}} = 2\sqrt{2m} \int_0^{x(\mathcal{E})} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{E} - U(x)}}.$$

Чтобы выразить $U(x)$ через $\tau(\mathcal{E})$, применяется искусственный приём: вычисляется интеграл

$$\int_0^z \frac{\tau(\mathcal{E}) d\mathcal{E}}{\sqrt{z - \mathcal{E}}} = 2\sqrt{2m} \int_0^z d\mathcal{E} \int_0^{\mathcal{E}} \frac{1}{\sqrt{(z - \mathcal{E})(\mathcal{E} - U)}} \frac{dx}{dU} dU.$$

Далее используется правило Дирихле и формула

$$\int_0^y \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{y-x}} = \pi y/2.$$

2.20. Привести уравнение движения к виду $\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Использовать метод характеристических уравнений. Рассмотреть три случая: $\beta > 2\omega_0$, $\beta = 2\omega_0$, $\beta < 2\omega_0$. Из соотношения $A(t + \tau) = A(t) e^{-\delta}$ найти логарифмический декремент затухания при $\beta < 2\omega_0$. При $\beta \ll 2\omega_0$ на одном периоде колебание можно считать гармоническим. Найти в этом приближении $E(t)$.

2.21. Подставив $x(t)$ в уравнение движения $\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)$, воспользоваться тригонометрическим тождеством

$$\cos \Omega t = \cos \varphi \cos(\Omega t - \varphi) - \sin \varphi \sin(\Omega t - \varphi).$$

Приравнять коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях времени. Построить графики $A(\Omega)$ и $\varphi(\Omega)$. Найти приближенные выражения для $\Omega \approx \omega_0$ и $\beta \ll 2\omega_0$.

2.22. Потенциал однородного сплошного шара φ_0 можно представить в виде суммы потенциала шара с полостью φ , потенциала φ_1 создаваемого цилиндром с плоскими основаниями, и потенциала φ_2 , создаваемого сегментом, образующим сферическое основание удаляемого цилиндра. Очевидно, разность потенциалов между точками $z = R$ и $z = 0$ линии падения $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 - \Delta\varphi_2$ (почему?). Для определения $\Delta\varphi_2$ воспользоваться решением задач 1.19., 1.39. и 1.43.

3. Двумерное и трехмерное движение точки

- 3.1. Разложить $\vec{r}$ по декартовым ортам, выразить декартовы проекции через цилиндрические координаты и воспользоваться формулами $\vec{e}_\rho = (\delta\vec{r}/|\delta\vec{r}|)_{\varphi=\text{const}, z=\text{const}}$ и $\vec{e}_\varphi = (\delta\vec{r}/|\delta\vec{r}|)_{\rho=\text{const}, z=\text{const}}$, пояснив их смысл.
- 3.4. См. указания к задаче 3.1.
- 3.5. Воспользоваться результатами предыдущей задачи.
- 3.11. В качестве зависимой переменной использовать скорость: две её проекции разделяются. Найти момент максимального подъёма. Проанализировать поведение решения при $\beta \equiv b/2m \rightarrow 0$ (при "выключенном" трении).
- 3.12. Найти $x(t)$, $z(t)$, уравнения траектории $z(x)$, момент наивысшего подъёма, координаты этой точки, предельные (при $t \rightarrow \infty$) значения проекции скорости и координат, рассмотреть предельные случаи $\beta \rightarrow 0$ и $g \rightarrow 0$.
- 3.13. Систему дифференциальных уравнений для v_x и v_y можно расцепить дополнительным дифференцированием по времени.
- 3.21. Перейти к безразмерным переменным $\xi = x/a$ и $\eta = y/b$, записать в них уравнение траектории, продифференцировать по времени и дополнить выражением секторной скорости в этих переменных.
- 3.22. Воспользоваться уравнением эллипса в полярных координатах $r = p/(1 + \varepsilon \cos \varphi)$ и вытекающими из решения задачи 3.6 формулами для компонент силы в полярных координатах: $F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$, $F_\varphi = mr^{-1}d(r^2\dot{\varphi})/dt$. При вычислениях $\dot{r}$ и $\ddot{r}$ пользоваться уравнением эллипса и постоянством секторной скорости.
- 3.24. Разложить $U_{\text{эф}}$ в ряд Тейлора около точки $r = a$ до квадратичного члена включительно. Радиальное движение в этой области колебания гармонического осциллятора.
- 3.27. Воспользоваться формулой

$$d\varphi = \pm \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2m(\mathcal{E} - U_{\text{эф}}(r))}},$$

пояснив её происхождение.

- 3.29. Радиусы окружностей (соответствующие в одномерном случае точкам поворота) определяется уравнением

$$|\mathcal{E}| - \frac{\alpha}{r^\gamma} + \frac{L^2}{2mr^2} = 0.$$

Поясните его происхождение и решите для указанных в условии значений γ .

3.30. Главное – найти связь между прицельным параметром b и углом рассеяния θ . Это можно сделать двумя способами: рассмотреть отражение точки от шара (“угол падения равен углу отражения”) или выполнить интегрирование

$$\varphi_{\infty} = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\mathcal{E} - U_{\text{эф}}}}, \quad \varphi_{\infty} = (\pi - \theta)/2, \quad L = mv_0 b.$$

3.31. Интеграл для φ_{∞} в этой задаче приводится к виду

$$\varphi_{\infty} = \int_0^{x_m} \frac{dx}{\sqrt{1 - (1 + 2m\alpha/L^2) x^2}}.$$

Учитывая, что

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\pi}{2},$$

получаем

$$b^2 = \frac{\alpha}{E} \frac{1}{\pi^2 / (\pi - \theta)^2 - 1},$$

откуда и следует ответ. Сравните полученное сечение с Резерфордским при малых углах.

3.36. С использованием формулы

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^{\mu} + z^{\mu})^{\rho}} = \mu^{-1} a^{1-\mu\rho} B(1/\mu, \rho - 1/\mu)$$

результат выражается через бета-функцию

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

4. Кеплеровы орбиты

4.5. Уравнение траектории в этих переменных $u = u(\varphi)$, откуда $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$.

Сравнивая это выражение с соотношением $\dot{r} = \frac{2\sigma}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$ и используя формулу $v^2 = \dot{r}^2 + (2\sigma)^2/r^2$, приходим к первой формуле Бинэ. Аналогичные преобразования выражения $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ приводят ко второй формуле.

4.9. Земля делает полный оборот за время $\tau = 86\,164$ с, скорость стационарного спутника на высоте h

$$v = 2\pi(R + h)/\tau$$

должна удовлетворять соотношению

$$v = \sqrt{K_3/(R + h)}, \quad K_3 \approx 0.4 \cdot 10^{15} \text{ м}^3/\text{с}^2.$$

4.13. Продифференцировать $\vec{L}(t)$ по времени и учесть, что $\dot{r} = v_r = (\vec{v}\vec{r})/r$ и $\dot{\vec{v}} = -\alpha\vec{r}/mr^3$. Так доказывается, что $d\vec{L}/dt = 0$. Доказав, что $\vec{L}\vec{L} = 0$, приходим к выводу, что $\vec{L} \perp \vec{L}$, то есть $\vec{L}$ лежит в плоскости орбиты. Вычисляя далее скалярное произведение $\vec{L}\vec{r} \equiv cr \cos \varphi$, получим $Lr \cos \varphi = \frac{L^2}{m} - \alpha r$. Находя отсюда r и сравнивая это выражение с формулой траектории, приходим к ответу.

4.18. Есть два способа: разделить переменные или решать непосредственно в векторном виде.

4.19. Вывести из уравнения эллипса в полярных координатах формулы для декартовых полуосей a и b и выразить затем p и ε через E и L .

4.29. Дополнительное (по сравнению с центростремительным) радиальное ускорение можно рассматривать, как результат дополнительной потенциальной энергии $-mar$, так что полная энергия

$$\mathcal{E} = m(v_0^2/2 - K/r - ar).$$

В начальный момент

$$\mathcal{E}_0 = m(v_0^2/2 - K/r_0 - ar_0) = -m(K/(2r_0) + ar_0).$$

В момент, когда корабль находится на расстоянии $r_1 = 2K/v_1^2$, $\mathcal{E}_1 = m(v_1^2/2 - K/r_1 - ar_1)$. Приравняв $\mathcal{E}_0$ к $\mathcal{E}_1$ и исключая v_1 , приходим к ответу.

4.36. Уравнение траектории (при $r > R$) имеет вид $r = p/(1 + \varepsilon \cos \varphi)$. Пусть точка, где тело покидает поверхность, характеризуется углом $\varphi = \pi/2$. Найти L , β , а затем и v_0 .

4.38. Касательное ускорение $a_\tau = \dot{v} = a_0 \cos^3 \theta$, нормальное $a_n = v^2/r_0 = (a_0/r_0^2) \sin \theta - K/r_0^2$. Дифференцируя последнее выражение по времени, исключая $\dot{v}$ с помощью предыдущего, находим $\dot{\theta} = 2v/(3r_0)$. Дифференцируя найденное соотношение по времени и опять исключая $\dot{v}$, приходим к искомому уравнению.

5. Системы материальных точек

5.13. Заменить $\ddot{\vec{r}}_j$ на $\ddot{\vec{r}}_j + \delta\ddot{\vec{r}}_j$ и вычислить δC .

5.17. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^N m_i r_{ij}^2 = I + m r_j^2.$$

Умножая обе части этого равенства на m_j и суммируя по всем точкам системы, приходим к искомому соотношению.

5.18. К результату предыдущей задачи применить уравнение Лагранжа-Якоби.

5.19. Сначала доказать, что

$$\sum_{i \neq j}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \leq \frac{1}{\rho} \sum_{i \neq j}^N m_i m_j \leq \frac{m^2}{\rho}.$$

5.20. Воспользоваться законом сохранения энергии, из которого следует, что $U = \mathcal{E} - T \leq \mathcal{E} = -|\mathcal{E}|$.

5.21. Гравитационная энергия облака $U_g \approx -\gamma \frac{m^2}{R}$, тепловая $W \approx mAT$, где A – зависящая от состава облака постоянная, T – абсолютная температура.

5.22. Допустим противное: существует число A такое, что все r_i (в СЦМ) не превосходят A при любом t . Отсюда $I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \leq mA^2$, $m = \sum_{i=1}^N m_i$. Осталось дважды проинтегрировать второе из уравнений задачи 5.12 в пределах от 0 до t :

$$I(t) > I(0) + \dot{I}(0)t + 2\mathcal{E}t^2.$$

5.26. При интегрировании по $\vec{r}_2$ направить ось OZ вдоль вектора $\vec{r}_1$ и воспользоваться соотношением

$$\int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \mu}} = \begin{cases} 2/r_2 & \text{при } r_1 < r_2, \\ 2/r_1 & \text{при } r_1 > r_2. \end{cases}$$

Вычисляя получающийся при этом повторный интеграл

$$K = \frac{32e^2}{r_0^6} \int_0^\infty dr_1 r_1^2 e^{-2r_1/r_0} \int_{r_1}^\infty r_2 e^{-2r_2/r_0} dr_2,$$

приходим к ответу. Другой способ решения сводится к использованию результата задачи 1.53.

5.27. Вычисление интеграла

$$K_{aB} = -\frac{e^2}{\pi a_0^3} \int \frac{\exp\{-2r_{aA}/a_0\}}{r_{aB}} dV_a$$

легко выполнить путем перехода к эллиптическим координатам

$$\mu = (r_{aA} + r_{aB})/R, \quad \nu = (r_{aA} - r_{aB})/R, \quad \varphi,$$

где φ – угол поворота вокруг прямой, соединяющей оба ядра. Элемент объема в этих координатах

$$dV = \frac{R^3}{8}(\mu^2 - \nu^2)d\mu d\nu d\varphi,$$

а интегрирование производится в пределах

$$1 \leq \mu \leq \infty, \quad -1 \leq \nu \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Искомый интеграл приводится к виду

$$K_{aB} = \frac{e^2 R^2}{2a_0^2} \left\{ \int_1^\infty d\mu \mu e^{-\rho\mu} \int_{-1}^1 e^{-\rho\nu} d\nu + \int_1^\infty d\mu e^{-\rho\mu} \int_{-1}^1 \nu e^{-\rho\nu} d\nu \right\},$$

где $\rho = R/a_0$.

5.30. Потенциальная энергия рассматриваемой системы является однородной функцией координат со степенью однородности $k = 1$.

5.32. Масса Солнца $m_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг, его радиус - $R_C = 7 \cdot 10^8$ м, средняя масса атома $m_a = 3 \cdot 10^{-27}$ кг, $\gamma = 6,7 \cdot 10^{-11}$ м/(кг с²), постоянная Больцмана $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Использовать теорему о равнораспределении кинетической энергии по степеням свободы.

5.33. Использовать доказательство от противного. Предположить, что галактика остаётся в ограниченной области пространства и применить теорему о вириале с учётом того, что для изолированной галактики $\langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{E}$.

5.34. Перейти в СЦМ, решить там уравнения и вернуться в ЛСК.

5.35. Вывести два уравнения

$$\frac{a^3}{\tau^2(m_1 + m_2)} = \frac{\gamma}{4\pi}, \quad a_1 m_1 = a_2 m_2,$$

из которых и следует ответ.

5.37. Главный вектор внешних сил, в роли которых здесь выступают силы реакции, направлен на начало координат.

5.43. Угол рассеяния в ЛСК связан с углом в СЦМ соотношением

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \xi}, \quad \xi = m_1/m_2, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Воспользовавшись решением задачи 3.30, рассмотреть три случая.

а) $\xi < 1$. При изменении θ от 0 до π угол ϑ_1 меняется в тех же пределах (показать). Возводя обе части приведённого выше равенства в квадрат и разрешая его относительно $\cos \theta$, получим

$$\cos \theta = -\xi \left(1 - \cos^2 \vartheta_1 \right) \pm \cos \vartheta_1 \sqrt{1 - \xi^2 + \xi^2 \cos^2 \vartheta_1}.$$

Выбирая перед корнем знак $+$ (почему?), вычисляем

$$d\sigma = \frac{\pi R^2}{2} \left| \frac{d \cos \theta}{d \cos \vartheta_1} \right| d \cos \vartheta_1 = \frac{R^2}{4} \left| \frac{d \cos \theta}{d \cos \vartheta_1} \right| d\Omega_1,$$

откуда и следует ответ.

б) $\xi > 1$. Взяв производную $d \operatorname{tg} \vartheta_1 / d\theta$ находим, что максимальное значение ϑ_1 достигается при $\cos \theta^* = -1/\xi$, причём $\sin \vartheta_{1 \max} = 1/\xi$. Таким образом, здесь две ветви: когда θ увеличивается от 0 до θ^* , угол ϑ_1 меняется от 0 до $\vartheta_{1 \max}$ (берём знак $+$ перед корнем, как и выше), когда θ продолжает увеличиваться от θ^* до π , угол ϑ_1 уменьшается от $\vartheta_{1 \max}$ до 0 (берём знак $-$). Обозначая первую ветвь $\theta^{(1)}$, а вторую $-\theta^{(2)}$, получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{R^2}{4} \left\{ \left| \frac{d \cos \theta^{(1)}}{d \cos \vartheta_1} \right| + \left| \frac{d \cos \theta^{(2)}}{d \cos \vartheta_1} \right| \right\}.$$

Первое слагаемое вычислено в п. а), во втором

$$\left| \frac{d \cos \theta^{(2)}}{d \cos \vartheta_1} \right| = \frac{1 + \xi^2 \cos 2\vartheta_1}{\sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \vartheta_1}} - 2\xi \cos \vartheta_1.$$

в) $\xi = 1$ (сделайте самостоятельно).

5.44. Эта задача гораздо проще: $\vartheta_2 = (\pi - \theta)/2$ (почему?).

5.45. Эта задача тоже несложная. Потерянная в столкновении энергия Q – это кинетическая энергия, приобретённая первоначально покоившейся частицей 2:

$$Q = \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Покажите, что $Q = Q_{\max} \sin^2(\theta/2)$, найдите $Q_{\max}$ и вычислите $d\sigma/dQ$, используя $d\sigma/d\Omega$ и связь между θ и Q .

5.46. Рассмотреть столкновение молекулы со "стенкой" в системе покоя последней.

5.47. Порядком системы дифференциальных уравнений называется сумма порядков старших производных в этих уравнениях, так что порядок исходной системы $3 \times 3 \times 2 = 18$. Использование каждого из интегралов движения соответствующим образом уменьшает порядок системы.

5.50. Перейти в СЦМ.

5.51. Во вращающейся системе координат

$$m_1 \Omega^2 x_1 = \gamma \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} x_{12} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} x_{13} \right)$$

и т.д. (всего 6 уравнений). Складывая три из них и три оставшихся, приходим к ответу.

5.52. Провести ось OX через точку 3, тогда $y_3 = 0$, $x_3 > 0$ и $\frac{m_1 y_1}{r_{31}^3} + \frac{m_2 y_2}{r_{32}^3} = 0$. Так

как $m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$, то $m_1 y_1 \left(\frac{1}{r_{31}^3} - \frac{1}{r_{12}^3} \right) = 0$, откуда и следует ответ.

6. Инерция, реакция и реактивное движение

6.2. Систему дифференциальных уравнений для координат x и y удобно привести к одному уравнению для комплексной переменной $u = x + iy$, решить которое можно методом характеристических уравнений.

6.3. Реакция плоскости находится из условия $\ddot{y} = 0$.

6.5. Работаем в сферической системе координат. Угол α связан с проекциями скорости $v_\varphi = R \sin \theta \dot{\varphi}$ и $v_\theta = R \dot{\theta}$ соотношением $\operatorname{ctg} \alpha = -v_\theta/v_\varphi$, откуда находим дифференциальное уравнение для $\theta(\varphi)$. Решая его, получим

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = \exp(-\varphi \operatorname{ctg} \alpha).$$

Элемент длины дуги

$$ds = R \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2} = -\frac{d\theta}{\cos \alpha}.$$

6.6. Проанализировать составляющие этой скорости – переносную и относительную.

6.8. Обозначим через C – центр окружности, через A – точку, диаметрально противоположную O . Положение точки M на окружности будем характеризовать углом $ACM(\theta)$. выражая x, y через $\theta, \Omega t$ и R , составим функцию Лагранжа.

6.12. Система уравнений (в обозначениях предыдущей задачи) имеет вид $\ddot{x} - a\dot{y} + kx = 0$, $\ddot{y} + a\dot{x} + ky = 0$. Появившиеся здесь слагаемые с $k = g/l$ отражают совокупное влияние силы тяжести и натяжения нити (показать это). Вновь воспользоваться комплексной переменной $u = x + iy$. При вычислении характеристического корня пренебречь $a^2/4$ по сравнению с k . Показать, что при подходящем выборе начальных условий мы получаем эллипс: неподвижный на экваторе и медленно (по сравнению с периодом колебаний) вращающийся на других широтах.

6.13. Опуская члены с Ω^2 , получим уравнение $\ddot{y} = bgt$, которое решается элементарными средствами. Время падения можно вычислить без учета влияния неинерциальности системы.

6.17. Пусть $\zeta(t)$ – перемещение резвой обезьяны относительно веревки, тогда кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m}{2} [\dot{z}^2 + (\dot{\zeta} - \dot{z})^2],$$

а потенциальная

$$U = mgz + mg(\zeta - z).$$

6.20. В момент отрыва силы реакции исчезают и остаются уравнения $\ddot{x} = 0$, $\ddot{z} = -g$. Учитывая уравнение связи (справедливое вплоть до момента отрыва), можно получить:

$$\dot{x} = \frac{2}{a} z \dot{z}, \quad \ddot{x} = \frac{2}{a} (\dot{z}^2 + z \ddot{z}).$$

Таким образом, $\dot{z}^2 = zg$. Подставляя полученные скорости в закон сохранения энергии, приходим к кубическому уравнению

$$z^3 + (2/3)z - 5/3 = 0,$$

единственным вещественным решением которого является $z = 1$.

6.21. Воспользоваться законом сохранения энергии и момента импульса.

6.22. Рассматривая поверхность как связь, запишем уравнения Лагранжа 1-го рода в декартовой системе координат:

$$m\ddot{x} = -\lambda(x/r)f'(r),$$

$$m\ddot{y} = -\lambda(y/r)f'(r),$$

$$m\ddot{z} = mg + \lambda.$$

Чтобы траектория была параллелью $z = z_0$, необходимо, чтобы эти уравнения выполнялись при условии $z = z_0$, $x = r_0 \cos \varphi$, $y = r_0 \sin \varphi$. Учитывая, что при таком движении $\varphi = \varphi_0 + v_0 t / r_0$, из первых двух уравнений находим ответ. Простейший способ решения: приравнять равнодействующую веса и нормальной реакции центростремительной силе.

6.25. Обратит внимание на то, что $2kx = -mgx/\sqrt{x^2 + y^2/4}$ имеет два решения: $x_1 = 0$ и x_2 , удовлетворяющие уравнению $2k = -mg/\sqrt{x^2 + y^2/4}$.

6.27. Построим цилиндрическую систему координат так, чтобы окружность лежала в плоскости XOY , а её центр совпадал с началом координат. Записывая в этой системе уравнения движения вместе с уравнениями связей, приведем уравнение Лагранжа к виду

$$\ddot{\varphi} = -k\sqrt{\dot{\varphi}^4 + (g/a)^2}.$$

Представляя $\ddot{\varphi}$ в виде $d\dot{\varphi}/dt$, переходя здесь от дифференцирования $\dot{\varphi}$ по времени к дифференцированию по пути s и интегрируя, получим

$$\ln \frac{\dot{\varphi}^2 + \sqrt{\dot{\varphi}^4 + (g/a)^2}}{\dot{\varphi}_0^2 + \sqrt{\dot{\varphi}_0^4 + (g/a)^2}} = -\frac{2k}{a}s.$$

Используя конечное условие $\dot{\varphi} = 0$ при $s = l$, находим реакцию связи.

6.28. Из закона сохранения энергии

$$\dot{\varphi}^2 = \omega_0^2 - 2(g/l)(1 - \cos \varphi).$$

Сила реакции нити (точнее, её проекция на направление нити) $F_l' = -ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi$. Связь будет удерживающей до тех пор, пока $F_l' \leq 0$ в наивысшей точке ($\varphi = \pi$).

6.29. Ввиду отсутствия активных сил энергия $\mathcal{E} = \mathcal{L}$ сохраняется, $|v| = \text{const}$ и теорема Клеро следует из закона сохранения момента импульса.

6.30. Импульс ракеты в момент времени t равен $m\vec{v}$. Импульс системы ракета + выброшенный за время dt газ равен $(m - |dm|)(\vec{v} + d\vec{v}) + |dm|(\vec{v} + \vec{u})$. Суммарное приращение импульса может быть обусловлено только импульсом внешней силы.

6.33. Продифференцировать T по v с учётом формулы Циолковского.

6.35. Полная высота подъёма складывается из активного участка h_1 , проходимого ракетой с работающим двигателем, и пассивного участка h_2 , когда ракета с неработающим уже двигателем движется по инерции.

6.38. Уравнение движения в проекции на направление к Марсу имеет вид $m\dot{v} = -\dot{m}u - \frac{mgR^2}{(R+z)^2}$. При вычислении интеграла $\int \frac{d\tau}{(1+\tau^2)^2}$ воспользоваться тригонометрической заменой $\tau = \operatorname{tg} \theta$.

6.39. Воспользоваться уравнением Эйлера-Лагранжа, обеспечивающим максимальную высоту

$$h = \int_0^\tau v dt = \int_{v_0}^0 v \frac{dv}{\dot{v}},$$

и исключить $\dot{v}$ с помощью уравнения Мещерского.

6.40. Пользуясь уравнением Мещерского, в котором $\dot{m}$ заменим на adm/dv , получим $a = -(mg + F_c)/(1 + udm/dv)$. Как следует из предыдущей задачи, при $F_c = kv^2$

$$m = \frac{kv^2}{gu}(v + u).$$

Подставляя это выражение в уравнение Мещерского, приходим к ответу.

7. Лагранжевы системы

7.2. Пусть старые координаты q_i связаны с новыми q'_j взаимно однозначным преобразованием и $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \mathcal{L}'(q'_j, \dot{q}'_j, t)$. Вычисляя комбинацию $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_j}$ с учетом доказанных выше соотношений приведём её к виду $\sum_{i=1}^M \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}'_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_i} \right\} \frac{\partial q_i}{\partial q'_j}$. Определитель $\|\partial q_i / \partial q'_j\|$ не обращается в нуль, отсюда и следует инвариантность уравнений.

7.4. Воспользоваться выражением $Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$, подставив сюда $T = (m/2) (dl/dt)^2$.

7.19. Из исходной (инерциональной) системы координат K_0 , где $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 = \frac{mv_0^2}{2} - U_0$, перейти в движущуюся поступательно относительно нее с переменной скоростью $\vec{V}(t)$ систему K' , где $\vec{v}' = \vec{v}_0 - \vec{V}$, а затем – в систему K , имеющую общее начало с K' и вращающейся относительно нее со скоростью $\vec{\Omega}$ ($\vec{v} = \vec{v}' - [\vec{\Omega} \vec{r}]$).

7.20. Воспользоваться результатом предыдущей задачи и формулой $\mathcal{E} = \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L}$.

7.21. Решить задачу можно двумя способами. Первый – записать функцию Лагранжа в ЛСК, заменой $x_1 = \xi_1 \cos \varphi - \xi_2 \sin \varphi$, $x_2 = \xi_1 \sin \varphi + \xi_2 \cos \varphi$ выразить её через координаты ξ_i и скорости $\dot{\xi}_i$ точки во вращающейся системы,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left\{ \dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2 + 2\Omega (\xi_1 \dot{\xi}_2 - \xi_2 \dot{\xi}_1) + \Omega^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right\}$$

и вывести уравнения. Второй способ - исходить из готового общего выражения для функции Лагранжа в НСО.

7.22. Кинетическая энергия движущейся звезды в, связанной с галактикой НСО, имеет вид

$$T = \frac{m}{2} \left[(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 + \dot{z}^2 \right].$$

Воспользоваться уравнением Лагранжа.

7.23. Функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = (m/2)[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega^2 y^2] + mgy \sin \Omega t.$$

7.25. В рассматриваемом случае (вывести)

$$\mathcal{L} = \left(mR^2/2 \right) \left[\dot{\theta}^2 + (\dot{\varphi} + \Omega)^2 \sin^2 \theta \right] - U(\theta, \varphi)$$

Отсюда и ответ.

7.27. Положение одной из двух точек, указанных в предыдущей задаче, выбрать в качестве начала координат и записать уравнение движения $m\ddot{\vec{r}} = -m\nabla\phi$, определив ϕ из уравнения $\nabla^2\phi = 4\pi\gamma\rho_0$.

7.28. Воспользоваться преобразованием $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - d\psi/dt$, $\psi = ma\dot{x}^2/2$.

7.30. Кинетическая энергия каждого маятника $ml^2\dot{\varphi}^2/2$, потенциальная энергия пружины (при малых φ) $k(a\varphi_2 - a\varphi_1)^2/2$ (вывести!), к ней следует добавить вклад тяготения. Найденную таким образом функцию Лагранжа сравнить с

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \{m_{ij}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j - k_{ij}\varphi_i\varphi_j\},$$

найти m_{ij} , k_{ij} , записать систему уравнений для амплитуд

$$\begin{cases} (k_{11} - m_{11}\omega^2) A_1 + (k_{12} - m_{12}\omega^2) A_2 = 0 \\ (k_{21} - m_{21}\omega^2) A_1 + (k_{22} - m_{22}\omega^2) A_2 = 0, \end{cases}$$

найти собственные частоты ω_1 , ω_2 и, подставив каждое из них в уравнения для амплитуд, найти моды собственных колебаний.

7.31. Положим для простоты $m_1 = m_2$, $g = 1$, $l_1 = l_2 = 1$, $a = 1/2$. Тогда $\varphi_1 = \frac{\Omega_0}{2} \left(\sin t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right)$, $\varphi_2 = \frac{\Omega_0}{2} \left(\sin t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right)$, $\omega = \sqrt{1+2k} \approx 1+k$ ($k \ll 1$). Пренебрегая слагаемым $\Omega_0(1 - \frac{1}{\omega}) \sin \omega t$, малым вследствие предполагаемой малости k , получим

$$\varphi_1 \approx \frac{\Omega_0}{2} (\sin t + \sin \omega t) = \Omega_0 \cos(\varepsilon t) \sin(\omega' t),$$

$$\varphi_2 \approx \frac{\Omega_0}{2} (\sin t - \sin \omega t) = -\Omega_0 \cos(\omega' t) \sin(\varepsilon t),$$

где $\varepsilon = \frac{\omega - 1}{2} = \frac{k}{2}$, $\omega' = \frac{\omega + 1}{2} \approx 1$. Величина $\varepsilon \approx k/2$ мала, поэтому φ_1 испытывает колебания с частотой $\omega' \approx 1$ с медленно меняющейся амплитудой $\Omega_0 \cos \varepsilon t$. Через промежуток времени π/k будет колебаться лишь φ_2 , через $2\pi/k$ — опять только φ_1 и т.д. Такие колебания называются *биениями*.

7.32. Потенциальная энергия

$$U = -mgx_1 - mgx_2 + (k/2)(x_1 - l)^2 + (k/2)(x_2 - x_1 - l)^2$$

(ось OX направлена вниз). Обратите внимание на то, что в состоянии равновесия пружины напряжены.

7.37. Решение полученных уравнений Лагранжа

$$m\ddot{q}_j + k(2q_j - q_{j+1} - q_{j-1}) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad q_0 = q_{N+1} = 0$$

искать в виде суперпозиции бегущих волн

$$q_j(t) = Ae^{i(\omega t - j\varphi)}.$$

7.38. Решение искать в виде суперпозиции бегущих волн с разными амплитудами:

$$q_{2j} = Ae^{i[\omega t \pm 2j\varphi]}, \quad q_{2j-1} = ae^{i[\omega t \pm (2j-1)\varphi]},$$

для нечетных атомов (с массой m), для четных атомов (с массой M). Система уравнений для a и A имеет вид

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + 2k)a - k(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})A &= 0, \\ -k(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})a + (-M\omega^2 + 2k)A &= 0. \end{aligned}$$

Гармоническим условиям удовлетворяют лишь комбинации бегущих волн вида

$$\begin{aligned} q_{2j-1} &= a_n \sin((2j-1)\varphi_n) \cos(\omega_n t + \alpha_n), \\ q_{2j} &= A_n \sin(2j\varphi_n) \cos(\omega_n t + \alpha_n), \end{aligned}$$

у которых $\varphi_n = \pi n/(2N+1)$. Так как $\varphi_{2N+1-n} = \pi - \varphi_n$, то для каждого n ($n = 1, 2, \dots, N$) мы получаем два значения частоты

$$\omega_n^2 = \frac{k}{\mu} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM} \sin^2 \varphi_n} \right),$$

соответствующее *оптической* (верхний знак) и *акустической* (нижний знак) ветвям спектра.

7.40. Удлинение первого участка струны с точностью до величин второго порядка малости $\sqrt{a^2 + x^2} - a \approx x^2/2a$. Учитывая аналогичным образом удлинение остальных участков струны, получим квадратичную форму для потенциальной энергии

$$U = 2m\alpha^2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz), \quad \alpha^2 = P/(2ma).$$

Уравнения малых колебаний

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\alpha^2(2x - y) &= 0, \\ (4/3)\ddot{y} + 2\alpha^2(2y - x - z) &= 0, \\ \ddot{z} + 2\alpha^2(2z - y) &= 0. \end{aligned}$$

7.41. Потенциальная энергия в указанном приближении имеет вид

$$U = m\alpha^2(3x^2/2 - 2xy + 2y^2).$$

7.42. Из уравнений

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\alpha/r^n \quad \text{и} \quad r^2\dot{\varphi} = \sqrt{a^{3-n}\alpha}$$

исключить $\dot{\varphi}$, представить радиальную координату в виде $r = a + q$ и сохранить в разложении лишь члены первого порядка q . Отсюда находится $r(t)$, при нахождении $\varphi(t)$ тоже пренебречь членами порядка λ^2 .

7.47. Уравнение $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0$ представим в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2(\varphi - \sin \varphi) \approx \omega_0^2 \varphi^3 / 3!.$$

Правая часть есть $\varepsilon Q(\varphi)$. Подставляя в неё $\varphi = a \cos \psi$ и вычисляя интеграл

$$\varepsilon \beta_1 = (\varepsilon/\pi) \int_0^{2\pi} Q(a \cos \psi) \cos \psi d\psi$$

при малых отклонениях ($a \ll 1$), приходим к ответу.

7.51. Воспользоваться уравнением Эйлера-Лагранжа.

7.53. В областях с постоянной U частица движется равномерно и прямолинейно, так что единственным параметром, характеризующим виртуальную траекторию, является её координата y в плоскости разрыва потенциальной энергии ($x = 0$).

7.56. Из закона сохранения энергии находится абсолютная величина скорости точки на высоте z

$$v(z) = \sqrt{2g(z_A - z)}.$$

Горизонтальная составляющая

$$v_x = v \frac{dx}{dl} = \frac{v}{\sqrt{1 + (dz/dx)^2}},$$

Находя отсюда dt и интегрируя, приходим к ответу.

7.58. Введя параметр θ по формуле

$$z_A - z = c_1(1 - \cos \theta), \quad c_1 = (4gc^2)^{-1},$$

и выполняя дальнейшие преобразования, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (dz/dx)^2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}},$$

$$(dz/dx)^2 = \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2},$$

$$dx = \pm c_1(1 - \cos \theta)d\theta$$

и т.д.

8. Гамильтоновы системы и канонические преобразования

8.7. Начальные условия:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0 > a, \quad z(0) = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

Функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{k_1}{2} [x^2 + (y + a)^2 + z^2] + \frac{k_2}{2} [x^2 + (y - a)^2 + z^2].$$

Общее решение системы канонических уравнений

$$x = A_x \cos \omega t + B_x \sin \omega t$$

$$y = A_y \cos \omega t + B_y \sin \omega t + N/\omega^2$$

$$z = A_z \cos \omega t + B_z \sin \omega t,$$

где $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$, $N = (k_2 - k_1)a/m$, а коэффициенты A_i и B_i определяются из начальных условий.

8.13. Обратиться к теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

8.26. Эта и следующая задачи решаются прямым применением определения скобок Пуассона.

8.28. Эта и следующие задачи решаются с использованием свойств скобок Пуассона.

8.29. Это – наиболее сложная из приведённых на скобки Пуассона задач. Рекомендуется следующий порядок:

- 1) Выразить L_i через x_k, p_l .
- 2) Воспользоваться свойством 6) скобок Пуассона.
- 3) Во втором слагаемом сделать замену переменных индексов так, чтобы произведение тензоров Леви-Чивита можно было вынести за скобки.
- 4) Выразить произведение этих тензоров через δ -символы Кронекера и учесть их свойства при суммировании.

8.36. Из определения производящей функции

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} + d\mathcal{F}_1(q_i, Q_i, t)/dt,$$

а её полная производная по времени

$$d\mathcal{F}_1/dt = \sum_i (\partial\mathcal{F}_1/\partial q_i) \dot{q}_i + \sum_i (\partial\mathcal{F}_1/\partial Q_i) \dot{Q}_i + \partial\mathcal{F}_1/\partial t.$$

Так как q_i и Q_i здесь независимы, то равенство

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} + \sum_i (\partial\mathcal{F}_1/\partial q_i) \dot{q}_i + \sum_i (\partial\mathcal{F}_1/\partial Q_i) \dot{Q}_i + \partial\mathcal{F}_1/\partial t$$

будет иметь место только тогда, когда коэффициенты при $\dot{q}_i$ и $\dot{Q}_i$ в левой части будут такие же, как и в правой. Отсюда и ответ.

9. Метод Гамильтона-Якоби

9.1. Используя известный закон движения $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t$, вычислить интеграл $\int_0^t \mathcal{L} dt$ и выразить $\vec{v}_0$ через $\vec{r}$ и t .

9.2. Скорость $\vec{u}(\vec{r}, t)$ определяется из соотношения

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \nabla S = 0.$$

См. также указание к следующей задаче.

9.3. Искомая скорость определяется формулой $u = ds/dt$, где ds – расстояние, которое проходит за время dt точка движущейся поверхности $S = \text{const}$ в направлении $\vec{n}$, перпендикулярном к этой поверхности. Поскольку поле не зависит от времени, $S(\vec{r}, t) = S_0(\vec{r}) - \mathcal{E}t$, откуда $dS_0 = \mathcal{E}dt$. С другой стороны, $dS_0 = |\nabla S_0| ds$. Сопоставляя эти выражения и обращаясь к уравнению Г.-Я. для вычисления градиента укороченного действия, приходим к ответу.

9.13. Подставить $\nabla S = m\vec{v}$ в уравнение Г.-Я. и, взяв градиент от обеих частей, воспользоваться определением субстанциональной производной.

9.14. Функцию $S(q_i, \alpha_i, t)$ взять в качестве производящей функции (типа $\mathcal{F}_1$) канонического преобразования $(q_i, p_i) \rightarrow (\alpha_i, \beta_i)$. При этом $\partial \mathcal{K} / \partial \alpha_i = \partial \mathcal{K} / \partial \beta_i = 0$, так что новая функция Гамильтона $\mathcal{K}$ постоянная и без ограничения общности может быть принята равной нулю.

9.15. Положить $f_i \left(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i} \right) = \alpha_i$.

9.16. Записать уравнение Г.-Я. и выполнить необходимые преобразования.

9.17. В параболических координатах функция Гамильтона принимает вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2(u+v)}(up_u^2 + vp_v^2) + \frac{1}{u+v}[gu^2 - gv^2 - K],$$

позволяющий воспользоваться результатом предыдущей задачи.

9.18. Все переменные здесь разделяются:

$$S = -\mathcal{E}t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + S_2(z; \alpha_1, \alpha_2, \mathcal{E})$$

а S_2 удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_2}{dz} \right)^2 + mgz = \mathcal{E} - \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{2m},$$

решение которого имеет вид

$$S_2 = -\frac{1}{3m^2 g} \left[2m(\mathcal{E} - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \right]^{3/2},$$

Дифференцируем по параметрам:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \beta_3.$$

Первые два уравнения показывают, что траекторией точки является парабола, третье дает закон движения.

9.19. Решение уравнения Г.-Я.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\nabla S - \frac{e}{c} \vec{A}_0 \cos \omega t \right)^2 = 0$$

ищем в виде $S = \vec{\alpha} \vec{r} + S_1(t)$. Решение уравнения для $S_1(t)$ с последующим вычислением $\partial S / \partial \vec{\alpha} = \vec{r}_0$ приводит к ответу.

9.20. Уравнение Г.-Я. здесь имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2ml^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - mgl \cos \varphi = 0.$$

9.25. Выполнить интегрирование

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = p_\varphi, \quad I_r = \frac{2}{2\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(\mathcal{E} + \alpha/r) - L^2/r^2} dr,$$

выразить энергию $\mathcal{E}$ через I_φ и I_r и продифференцировать её по этим переменным.

9.33. Из решения предыдущей задачи следует, что $|\dot{x}_1| x_2 = c$. Исключая $\dot{x}_1$ из закона сохранения энергии, находим, что влияние лёгкого шарика на тяжелый равносильно появлению потенциальной энергии $U(x_2) = \frac{m_1 c^2}{2x_2^2}$.

9.35. Выразить S через ψ в уравнении Гамильтона-Якоби и воспользоваться приведённым в задаче условием.

10. Релятивистские частицы

10.1. Рассмотреть движение начала координат системы K' относительно K .

10.5. Компоненты скорости в системе K $v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$, в системе K' $v'_x = v' \cos \theta$, $v'_y = v' \sin \theta$. Остаётся применить формулу сложения скоростей.

10.11. В системе K_1 4-мерные скорости u_1^μ и u_2^μ систем K_1 и K_2 равны $(1, 0)$ и $\gamma_{21}(1, \vec{v}_{21}/c)$, в системе K — $\gamma_1(1, \vec{v}_1/c)$ и $\gamma_2(1, \vec{v}_2/c)$ соответственно. Вычисляя скалярные произведения $u_1^\mu u_{2\mu}$ в каждой из этих систем и приравнявая полученные величины, приходим к ответу.

10.14. Воспользоваться результатом предыдущей задачи и правилом сложения скоростей.

10.15. Воспользоваться аддитивностью параметра быстроты (см. задачу 10.14).

10.18. Пусть K' — система отсчёта, относительно которой газ как целое покоится ($\vec{P}' = \sum_i m_i \vec{v}'_i / \sqrt{1 - (v'_i/c)^2} = 0$). Скорость этой системы $\vec{V}$ относительно исходной системы K и есть скорость движения газа как целого. Перейдя по формулам преобразования энергии-импульса из K' в K и составив результат с соответствующими формулами для одной "большой" частицы, переходим к ответу.

10.22. Тензор 4-силы $F^{\mu\nu} = \partial A^\nu / \partial x_\mu - \partial A^\mu / \partial x_\nu$.

10.28. См. указания к задачам 9.2 — 9.3.

10.31. Воспользоваться результатами задачи ??????.

10.34. Кинетическая энергия $T = \frac{\sqrt{(ceEt)^2}}{T_0^2}$.

10.36. В уравнение движения подставить $\vec{p} = \mathcal{E}\vec{v}/c^2$, спроецировать на оси и решить уравнения для проекций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

10.38. Выбрать оси OZ вдоль $\vec{B}$. OY — вдоль $\vec{E}$. Исходными уравнениями тогда будут

$$\dot{p}_x = (e/c)Ev_y, \quad \dot{p}_y = eE(1 - v_x/c) \quad \dot{p}_z = 0.$$

Из них следует $\dot{T} = eEv_y$. Используя равенство

$$T^2 - c^2 p_x^2 = (T + cp_x)(T - cp_x) = c^2 p_y^2 + \tau^2,$$

где $\tau^2 = m^2 c^4 + c^2 p_z^2 = \text{const}$, после некоторых преобразований приходим к равенству

$$2eEt = \left(1 + \frac{\tau^2}{\alpha^2}\right) p_y + \frac{c^2}{3\alpha^2} p_y^3,$$

где $\alpha = T - cp_x = \text{const}$. Это равенство позволяет использовать p_y как параметр.

Подставляя в уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 p_x}{T}$$

$dt = T dp_y / e\alpha E$, приходим к ответу.

10.40. Движение вдоль оси OZ происходит под действием одного электрического поля, поэтому можно воспользоваться результатами задачи .

Ответ удобно представить в параметрическом виде, введя параметр φ соотношением $d\varphi = ecBdt/T$.

10.42. Использовать законы сохранения импульса и энергии, из которых следует

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{(m + dm)(v + dv)}{\sqrt{1 - [(v + dv)/c]^2}} + \frac{dm_{\text{r}}v'}{\sqrt{1 - (v'/c)^2}},$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{(m + dm)c^2}{\sqrt{1 - [(v + dv)/c]^2}} + \frac{dm_{\text{r}}c^2}{\sqrt{1 - (v'/c)^2}},$$

где $v' = (v - u) / \sqrt{1 - uv/c^2}$, а $dm_{\text{r}} > 0$ – масса выброшенного за время dt газа (не смешивать с $dm < 0$ – изменением массы ракеты за время dt).

Используя разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1 - [(v + dv)/c]^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2} \sqrt{1 - 2v dv / (c^2 - v^2) + \dots}} \approx$$

$$\approx \frac{1 + v dv / (c^2 - v^2)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

и исключая из уравнений dm_{r} , приходим к выражению

$$mv - (m + dm)(v + dv) \left(1 + \frac{v dv}{c^2 - v^2} \right) = v' \left[m - (m + dm) \left(1 + \frac{v dv}{c^2 - v^2} \right) \right].$$

После несложных преобразований, подстановки v' и приведения слагаемых получаем ответ.

10.45. Исходить из релятивистского уравнения движения

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\dot{x}/c)^2}} + \frac{kx^2}{2} = E.$$

Пусть $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$ и $\dot{x}(a) = 0$. Постоянные a и v_0 связаны соотношениями

$$E = mc^2 + \frac{ka^2}{2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}$$

$$\frac{ka^2}{2} = mc^2(\gamma_0 - 1), \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}.$$

Из этих формул находим

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E - kx^2/2}}$$

и далее, через соотношение

$$\tau = 4 \int_0^a \frac{dx}{v}$$

приходим к ответу.

10.47. Задачу эту можно решать разными способами. 1-й способ. Воспользоваться результатом задачи 10.24 для случая $e\vec{E} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$, $\vec{H} = 0$. Интегралы движения

$$m\gamma r^2 \dot{\varphi} = L = \text{const}$$

и

$$m\gamma c^2 - \alpha/r = \mathcal{E} = \text{const}.$$

Из последнего видно, что финитное движение имеет место при $\mathcal{E} < mc^2$. Из первого интеграла следует, что

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{m\gamma r^2} \frac{d}{d\varphi}.$$

Использование двух последних уравнений в радиальном уравнении движения

$$\frac{d}{dt}(m\gamma \dot{r}) = m\gamma r \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r^2}$$

приводит к дифференциальному уравнению траектории

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + (1 - \rho^2) \frac{1}{r} = \frac{\alpha \mathcal{E}}{(cL)^2}, \quad \rho = \alpha/(cL),$$

интегрируя которое, приходим к ответу.

2-й способ. Воспользоваться результатом задачи 10.26 и продифференцировать уравнение $\mathcal{H}(r, \varphi, P_r, P_\varphi) = \mathcal{E}$ с учетом соотношения $P_r = (P_\varphi/r^2)dr/d\varphi$. Получим уравнение $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{cP_\varphi} \sqrt{(\mathcal{E} + \alpha/r)^2 - m^2c^4 - c^2P_\varphi^2/r^2}$, решая которое, приходим к ответу.

3-й способ. Воспользоваться результатом задачи 10.32 в виде

$$-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + m^2c^2 = 0.$$

Уравнение траектории находится дифференцированием решения приведенного выше уравнения

$$S = -\mathcal{E}t + L\varphi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} + \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} - m^2c^2} dr$$

по моменту импульса L :

$$\partial S / \partial L = \text{const}.$$

10.48. Как и в нерелятивистском случае, при $\varepsilon > 1$ траектория имеет две ветви, уходящие на бесконечность при $\varphi \rightarrow \varphi_\infty$. В отличие от нерелятивистского случая, частица может совершить вокруг кулоновского центра несколько оборотов прежде, чем уйти на бесконечность.

11. Абсолютно твердое тело

11.11. Преобразование тензора при повороте системы координат дается выражением:

$$I'_{ij} = a_{ip}a_{jq}I_{pq} = a_{ip}I_{pq}a_{qj}^T$$

$$a_{ip} = \vec{e}'_i, \vec{e}_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Проверить инвариантность следа тензора.

11.12. Направляющие косинусы n_i ($n_i n_i = 1$) главных осей тензора I_{ij} удовлетворяют уравнениям

$$I_{ij}n_j = \lambda n_i.$$

С помощью тождества

$$n_i = \delta_{ij}n_j$$

этим уравнениям можно придать форму

$$(I_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0.$$

Нетривиальное решение полученной системы существует лишь при условии, что

$$\det(I_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0.$$

Отсюда находятся допустимые значения λ , а затем – и набор $\{n_i\}$, свой для каждого λ . В рассматриваемом случае z -координаты не меняются, так что достаточно рассмотреть систему двух уравнений. Допустимые значения $\lambda' = 4ma^2$, $\lambda'' = 4Ma^2$, так что имеем

$$\vec{n}' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

и

$$\vec{n}'' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 - \vec{e}_2).$$

11.14. Для кругового цилиндра

$$2I_1 = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV + \int_V (x^2 + z^2) \rho dV = \int_V r_{\perp}^2 \rho dV + 2 \int_V z^2 \rho dV.$$

Здесь $r_{\perp}$ – расстояние до оси цилиндра,

$$\int_V r_{\perp}^2 \rho dV = I_{zz} \equiv I_3.$$

11.15. Учесть, что для шара

$$3I = \int_V (y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2) \rho dV = \frac{2}{3} \int_V r^2 \rho dV.$$

От эллипсоида легко вернуться к шару заменой переменных

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad \zeta = z/c.$$

11.16. Взять вариацию моментов сплошного шара по m и R при постоянной плотности ρ , учесть связь между δm и δR и заменить δm на массу сферы.

11.21. Вычислить момент инерции относительно оси, проходящей через точку с координатами x_0, y_0 , а затем найти положение минимума этой функции.

11.23. Сначала вычислить моменты инерции относительно вершины конуса, затем воспользоваться теоремой Штейнера.

11.24. Воспользоваться аддитивностью тензора момента инерции, результатом задачи 11.15 и теоремой Штейнера.

11.26. Удобно воспользоваться результатом предыдущей задачи.

11.29. В выражении

$$U = \int \varphi (\vec{R} + \vec{r}) \rho (\vec{r}) dV$$

разложить потенциал в ряд по $\vec{r}$ до членов второго порядка и учесть, что $\varphi (\vec{R})$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_i \partial X_j} \delta_{ij} = 0.$$

11.31. В качестве независимых переменных выбрать координаты центра масс X, Y, Z и углы θ, φ вектора $\vec{r}_{12}$ в сферических координатах.

11.34. Во вращающейся со стержнем системе координат применить условия равновесия: равенство нулю главного вектора и главного момента внешних сил (тяжести, центробежной силы и реакции опоры).

11.35. Два способа рассуждений возможны: рассматривать качение цилиндра 1) как суперпозицию поступательного движения и вращения вокруг собственной оси и 2) как мгновенное вращение вокруг точки касания с неподвижной плотностью. Решите задачу каждым из них.

11.36. Жидкость движется поступательно, как целое, со скоростью центра масс. Момент импульса относительно мгновенной оси вращения A равен $L = I_A \Omega + mvR$ (m – масса жидкости), $v = \Omega R$, $dL/dt = (M + m)Rg \sin \alpha$ (M – масса бочки).

11.39. Разложить силу реакции на две составляющие: вертикальную F'_z и горизонтальную F'_x . Тогда из общих уравнений плоского движения твердого тела имеем

$$m\ddot{X} = F'_x,$$

$$m\ddot{Z} = F'_z - mg,$$

$$I\ddot{\varphi} = F'_x(R - b \cos \varphi) - F'_z b \sin \varphi.$$

Скольжение отсутствует, поэтому

$$\dot{X} = -(R - b \cos \varphi)\dot{\varphi}, \quad \dot{Z} = b \sin \varphi \dot{\varphi}.$$

Дифференцируя эти скорости по времени, находим, что первые два из трёх приведённых выше уравнений движения дают компоненты реакций

$$F'_z = m[g + b(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2)]$$

$$F'_x = -m[(R - b \cos \varphi) \ddot{\varphi} + b \sin \varphi \dot{\varphi}^2].$$

Подставляя эти выражения в третье уравнение, приходим к ответу.

- 11.41. Воспользоваться законом сохранения энергии, определив момент отрыва, как момент, когда исчезает сила реакции, то есть, когда сумма разных составляющих центробежной силы и силы тяжести, действующих на точку, становится равной нулю.
- 11.51. Записать функцию Лагранжа в приближении малых углов (до второго порядка включительно).
- 11.52. На гладкой поверхности полушар скользит и горизонтальная координата центра масс остаётся постоянной.
- 11.54. Рассматривать цилиндр с полостью, как “разность” двух цилиндров (1 и 2). Потенциальная энергия $U = U_1 - U_2 = \text{const} - m_2 g R (1 + (1/2) \cos \varphi) = \text{const}' + m_2 g R \sin^2(\varphi/2)$, кинетическая $T = T_1 - T_2 = (1/2)(I_1 - I_2) \dot{\varphi}^2$. Использовать теорему Штейнера.
- 11.55. Пусть θ – угол между линией соприкосновения конуса с плоскостью и её начальным положением, a – расстояние от центра масс до вершины а 2α – угол раствора конуса. Тогда скорость центра масс $V = a \dot{\theta} \cos \alpha$, а угловая скорость вращения конуса $\Omega = \frac{V}{a \sin \alpha} = \dot{\theta} \text{ctg} \alpha$.
- 11.57. В системе динамических уравнений Эйлера положить $I_1 = I_2$, $M_i = 0$, найти её решение $\Omega_i(t)$ и использовать его для определения пределов изменения кинетической энергии.
- 11.58. Движение заряженных элементов вращающегося твердого тела порождает замкнутый электрический ток с магнитным моментом

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r}, \vec{j}_e] dV, \quad \vec{j}_e = \rho_e \vec{v},$$

на который в магнитном поле действует момент сил

$$\vec{M} = [\vec{\mu}, \vec{H}].$$

Выразить $\vec{M}$ через $\vec{L}$ и подставить в уравнение движения вращающегося тела.

- 11.66. Воспользоваться законами сохранения, выразить Ω_1 и Ω_3 через Ω_2 и подставить в уравнение Эйлера, содержащее $\dot{\Omega}_2$.

11.68. Полная энергия волчка

$$\mathcal{E} = T + U = \frac{1}{2}I'(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_3(\dot{\varphi}^2 \cos \theta + \dot{\psi})^2 + mgl \cos \theta.$$

Записать функцию Лагранжа, найти с её помощью p_θ , p_φ , p_ψ , выразить обобщенные скорости через обобщенные импульсы:

$$\dot{\theta} = p_\theta/I', \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I' \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = p_\psi/I_3 - \dot{\varphi} \cos \theta.$$

Подставляя эти выражения в формулу для энергии волчка, приходим к ответу.

11.70. Как видно из решения предыдущей задачи $p_\varphi \equiv L_z = \text{const}$ и $p_\psi \equiv L_3 = \text{const}$. Представить полную энергию волчка в виде

$$E = \frac{I' \dot{\theta}^2}{2} + U_{\text{эф}},$$

$$\text{где } U_{\text{эф}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I' \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mgl \cos \theta.$$

Тем самым, задача сводится к одномерному движению материальной точки.

11.72. Продифференцировать эффективную потенциальную энергию по $\cos \theta$, приравнять к нулю и решить полученное уравнение совместно с уравнением полной энергии.

11.73. При $\theta = 0$ оси OX и OZ совпадают, $L_3 = I_3 \omega_3 = L_z$, ответ следует непосредственно из выражения для $U_{\text{эф}}(\theta)$. С течением времени трение уменьшает скорость вращения и "спящий" волчок "просыпается": ось OX_3 приходит в движение.

11.74. Найти элементарную работу приложенных к гироскопу сил

$$\delta A = \vec{M} \vec{\Omega} dt,$$

выразив сомножители через $\vec{\Omega}_{\text{св}}$ и $\vec{\Omega}_{\text{пр}}$.

11.75. Пусть $\vec{\Omega}_0, \vec{\omega}_0$ и $\vec{\theta}$ – векторы угловой скорости Земли, угловой скорости вращения гироскопа и угла отклонения θ относительно направления на север соответственно. Вектор угловой скорости вращения гироскопа относительно инерциальной системы отсчёта $\vec{\Omega}$ равен сумме

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}_0 + \dot{\vec{\theta}}.$$

Найдя проекции $\vec{\Omega}$ на оси 1 (вертикаль), 2 (горизонтальная ось, перпендикулярная оси вращения) и 3 (ось вращения гироскопа), выразим через них функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[I_1(\dot{\theta}^2 + \Omega_0^2 \sin^2 \theta) + I_1 \Omega_0^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + I_3(\omega_0 + \Omega_0 \cos \theta \cos \theta)^2 \right].$$

Записать это выражение для малых θ и $\dot{\theta}$ (опустив постоянные и полные производные по времени) и сравнить с функцией Лагранжа одномерного гармонического осциллятора.

12. Изотропное упругое тело

12.5. Общее выражение для компонент тензора деформаций в криволинейных координатах имеет вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{H_1 \partial q_1} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{u_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3},$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial q_2} - \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2},$$

и т.д. (остальные компоненты ε_{ij} можно получить соответствующей заменой индексов). Для цилиндрической системы r, φ, z

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1,$$

для сферической r, θ, φ

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r \sin \theta.$$

12.20. На поверхности шара $\vec{t} = -\vec{n}p$ и, следовательно, $\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p$. Из соображений симметрии $\vec{u}(\vec{r}) = u(r)\vec{e}_r$, $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\partial u_1/\partial x_1 = (1/3)\delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u}$, $\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) = \operatorname{const}$ ($\operatorname{rot} \vec{u} = 0$). Используя связь между ε_{ij} и σ_{ij} на границе, приходим к ответу.

12.21. $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$, $\sigma_{33} = \sigma$, $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

12.23. Тензор деформаций рассматриваемой среды $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ принимает вид $\varepsilon_{ij} = [(1+\nu)(-p\delta_{ij}) + \nu\delta_{ij}(3p)]/E$. Модуль объёмного сжатия (отношение давления к изменению объёма) $K = -p/\varepsilon_{ii}$. Отсюда следует первая формула. Вторая получается с использованием закона Гука для изотропного тела.

12.24. Требуется доказать, что

$$\int_V f_i u_i dV + \oint_S t_i(\vec{n}) u_i dS = 2 \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} / 2) dV.$$

Чтобы это сделать, нужно в интеграле по поверхности произвести замену $t_i(\vec{n}) = \sigma_{ij} n_j$ и преобразовать его по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_S \sigma_{ij} u_i u_j dS = \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV = \int_V (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j}) dV.$$

Используя уравнение равновесия $\sigma_{ij,j} = -f_i$ и учитывая, что $\sigma_{ij} u_{i,j} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$, завершаем доказательство.

12.18. Нормальное к элементу поверхности $d\vec{S} = \vec{n}dS$ напряжение σ_N определяется формулой $\sigma_N = \sigma_{ij} n_i n_j$. Процедура состоит в построении функции

$$H(n_i, \lambda) = \sigma_{ij} n_i n_j - \lambda n_i n_i,$$

удовлетворяющей условию $\partial H / \partial n_i = 0$, из которого и следует ответ.

12.25. Воспользоваться тождеством

$$\text{grad div } \vec{A} = \nabla^2 \vec{A} + \text{rot rot } \vec{A}.$$

12.33. Направив ось OZ по оси стержня, а OX и OY расположив в плоскости нижнего основания, записать уравнения равновесия для σ_{ij} . На боковой поверхности все компоненты σ_{ij} , кроме σ_{zz} , равны нулю, а на верхнем основании ($z = l$) $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. С учетом этих условий находится σ_{zz} (остальные $\sigma_{ik} = 0$), затем $u_{i,k}$ ($u_{i,k} = 0$, $i \neq k$), и, наконец, интегрированием находим u_x , u_y , u_z .

12.34. Необходимо найти конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $\sigma_{rr}(R) = 0$ решение уравнения

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru_r) \right) = -\rho\Omega^2 r,$$

вытекающего из общего уравнения деформации изотропного упругого тела

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \left[\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \vec{u} \right] = -\vec{f}$$

или

$$2(1-\nu) \text{grad div } \vec{u} - (1-2\nu) \text{rot rot } \vec{u} = -2(1+\nu)(1-2\nu)\vec{f}/E,$$

так как $\text{grad div } \vec{u} = \Delta \vec{u} + \text{rot rot } \vec{u}$.

12.35. Сила тяготения, действующая на единицу массы шара равна $-g\vec{r}/R$. Уравнение равновесия

$$\text{grad div } \vec{u} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \text{rot rot } \vec{u} = -\vec{f} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$$

принимает в этом случае вид

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) \right) = \rho g \frac{r}{R}.$$

Ищем конечное внутри шара и удовлетворяющее условию $\sigma_{rr}(R) = 0$ решение.

Сравнить характер деформаций при $r < R\sqrt{\frac{3-\nu}{3(1+\nu)}}$ и $r > R\sqrt{\frac{3-\nu}{3(1+\nu)}}$.

12.36. Здесь $\vec{u} = u_r(r)\vec{e}_r$ ($\vec{e}_r$ – вектор, перпендикулярный оси трубы). Из второй формы уравнения Ламэ следует, что $\text{div } \vec{u} = \text{const}$. Решение последнего ищется в виде $u_r = ar + b/r$. Отличные от нуля компоненты тензора деформации

$$\varepsilon_{rr} = du_r/dr = a - b/r^2, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = u_r/r = a + b/r^2.$$

Постоянные a и b находятся из условий $\sigma_{rr}(R_1) = -p$, $\sigma_{rr}(R_2) = 0$:

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}, \quad b = \frac{pR_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1+\nu}{E}.$$

12.39. Для эллипса

$$\int \int x^2 dS = \pi a^3 b / 4.$$

12.40. Сила, с которой свободный конец стержня действует на массу m , равна

$$F_z = -\frac{3EI}{L^3} z.$$

12.43. Для стержня кругового сечения $\chi = (R^2 - r^2)/4$.

12.49. Пусть $u(x, t)$ – малое отклонение струны в точке x ($0 < x < l$) в момент времени t от положения равновесия. Кинетическая энергия элемента dx струны равна $(\rho \dot{u}^2/2)dx$, потенциальная – $(ku'^2/2)dx$ (вывести эти формулы).

12.50. Потенциальная энергия элемента dx упругого стержня пропорциональна квадрату кривизны:

$$dU \approx \frac{1}{2} k (\partial^2 u / \partial x^2)^2 dx.$$

12.51. Воспользоваться нестационарным уравнением для перемещений однородной среды.

12.52. Момент инерции элементарного цилиндрического слоя радиусом r , толщиной dr и высотой dz равен $dI' = 2\pi \rho r^3 dr dz$, его кинетическая энергия – $\frac{dI' \dot{\varphi}^2(z)}{2}$, полная кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}_0^2 + \frac{1}{2} \int \dot{\varphi}^2(z) dI'.$$

Потенциальная энергия системы совпадает с потенциальной энергией закрученной нити $U = k\alpha^2/2$, где $k = C_{кр}l$, $\alpha = \varphi(l)$ – угол поворота нижнего сечения стержня относительно верхнего. Составить и решить уравнения Лагранжа.

13. Кинематика жидкой среды

13.19. Воспользоваться Приложением.

13.24. Воспользоваться соотношением $dJ/dt = J \operatorname{div} \vec{v}$.

13.25. Уравнения траектории $dx_i/dt = v_i(\vec{x}, t)$ в случае $\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x})$ могут быть представлены в виде $dt = dx_i/v_i$.

13.29. Уравнение движения единичной массы

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho\vec{r},$$

а уравнение непрерывности (см. предыдущую задачу)

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H\rho.$$

Подстановкой $\vec{v}(\vec{r}, t) = H(t)\vec{r}$ и $\rho(\vec{r}, t) = \rho(t)$ и доказывается утверждение задачи.

13.32. Пользуясь результатом предыдущей задачи, можно записать

$$\frac{d}{dt} \int_A^B \vec{v} \delta \vec{r} = \int_A^B \dot{\vec{v}} \delta \vec{r} + \int_A^B \vec{v} \frac{d}{dt} \delta \vec{r} = \int_A^B \dot{\vec{v}} \delta \vec{r} + \int_A^B \vec{v} \delta \dot{\vec{r}}.$$

выполняя интегрирование и приводя точки A и B к совпадению, приходим к результату.

13.34. Для того, чтобы нормаль к поверхности $\varphi(\vec{k}) = 0$ в каждой её точки совпадала по направлению со скоростью, необходимо выполнение условия $\vec{v} = \lambda \operatorname{grad} \varphi$. Взяв от обеих частей этого равенства ротор, приходим к ответу.

13.35. В проекциях

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} q_j v_k + \frac{1}{2} (v_k v_k), i,$$

где q_i – проекции вектора завихрённости $\vec{q} = \operatorname{rot} \vec{v}$.

13.42. Перейти в полярную систему координат.

13.47. Из условия $v_z = \partial \phi / \partial z|_0 = 0$ следует $b = 0$, а из $\nabla^2 \phi = 0$ $c = -2a$. Компоненты скорости $v_x = 2ax$, $v_z = -4az$.

14. Идеальные жидкости и газы

14.7. При вычислении объемной силы приближённо считать Землю шаром. Во вращающейся с Землёй системе координат

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho g x / R_0 + \rho \Omega^2 x,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\rho g y / R_0 + \rho \Omega^2 y,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho g z / R_0.$$

Проинтегрировать эти уравнения, выбрать точки на экваторе ($R_{\text{Э}}$) и полюсе ($R_{\text{П}}$) и прийти к уравнению

$$(\Omega^2 - g/R_0)R_{\text{Э}}^2 = -(g/R_0)R_{\text{П}}^2.$$

14.15. Воспользоваться уравнением непрерывности, уравнением Эйлера и уравнением состояния, рассматривая скорость и давление как функции плотности $\rho(x, t)$. Найденное соотношение

$$v = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho,$$

где ρ_0 – равновесная плотность среды, а $c(\rho) = \sqrt{dp/d\rho}$ – скорость звука в среде, подставить одно из полученных на предыдущем этапе соотношений.

14.17. Учесть, что $\dot{\varepsilon}_{ij} = (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})/2 = \dot{u}_{i,j} - w_{ij}$, где $w_{ij} = (\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i})/2$ – тензор завихренности, не производящий работы: $w_{ij}\sigma_{ij} = 0$. Далее воспользоваться уравнением непрерывности.

14.21. Действующая на элемент dl дуги контура C сила пропорциональна давлению p в данной точке и направлена по внутренней нормали к контуру. Из интеграла Бернулли $p = A - \rho v^2/2$, $A = \text{const}$. Результат записать для комплексной силы $F = F_y + iF_x$ (интеграл от A по замкнутому контуру C равен нулю).

14.26. Движение жидкости происходит в радиальном направлении, из уравнения непрерывности следует, что $v_r = f(t)r^{-2}$, где $f(t)$ – произвольная функция времени. Подстановка v_r в уравнение Эйлера преобразует его к виду

$$\frac{p_0 - p(t)}{\rho} = -\frac{3V^2}{2} - RV \frac{dV}{dR}, \quad V = \dot{R}.$$

Разделяя переменные, находим ответ.

14.27. Исходные уравнения:

$$\vec{v} = \text{grad } \phi, \quad \nabla^2 \phi = 0, \quad v^2/2 + u + p/\rho = \text{const}.$$

Сферически симметричный потенциал ищется в виде $\phi = \frac{a}{r} + b$.

14.29. Применить теорему Бернулли в форме $p = c - \rho v^2/2$, найти давление на поверхности цилиндра и вычислить компоненты силы по формулам $F_x = -R \int_0^{2\pi} p_{r=a}(\theta) \cos \theta d\theta$ и т.д.

14.30. В сферической системе координат для радиальной скорости v жидкости записать уравнение Эйлера и уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial(r^2 v)}{\partial r} = 0.$$

Ввести потенциал скорости ϕ так, что $U = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$ и проинтегрировать уравнение Эйлера по r от r до бесконечности:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho} [\rho(\infty) - \rho(r)] = 0. \quad (*)$$

Из уравнения непрерывности

$$v(r) = C/r^2,$$

из граничного условия $v(R) = \dot{R}$ находим $C = R^2 \dot{R}$ (R – радиус пузырька). Подставляя $v(r) = \frac{R^2}{r^2} \dot{R}$ и $\phi = \frac{R^2}{r} \dot{R}$ в уравнение (*) и полагая $r = R$, приходим к ответу.

14.31. Воспользоваться условием равенства давлений снаружи и внутри пузырька. Давление снаружи равно сумме давления жидкости $p(R)$ и давления, создаваемого силой поверхностного натяжения $2\sigma/R$. Считая процессы в газе политропическими с показателем γ , находим

$$p_\Gamma(R) = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0}\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma},$$

где R_0 – радиус пузырька при $p(R_0) = p(\infty)$.

14.34. Исходную формулу $\vec{F} = - \int p d\vec{S}$ преобразовать с использованием теоремы Бернулли, поверхностный интеграл преобразовать в объемный и воспользоваться векторным тождеством $\text{grad}(v^2/2) = [\vec{v}, \text{rot } \vec{v}] - (\vec{v} \nabla) \vec{v}$.

14.36. Суммарный импульс $\vec{P} = m\vec{v}_0 + \rho \int \vec{v} dV$.

14.37. Вычисление интеграла $\int v^2 dV$ удобно выполнить в сферической системе координат с осью OZ , направленной вдоль $\vec{v}_0$.

14.38. Из стационарного уравнения непрерывности исключить ρ с помощью уравнения Эйлера. Вводя в полученное уравнение $c^2 \text{div } \vec{v} - (\vec{v} \nabla) \vec{v} = 0$ потенциал ϕ соотношением $\vec{v} \nabla \phi$ и раскрывая векторные выражения, приходим к искомому уравнению.

14.40. Рассматривая p как функцию w и учитывая, что $(\partial w / \partial p)_s = 1/\rho$, найдём

$$p - p_0 \approx \left(\frac{\partial p}{\partial w} \right)_s (w - w_0) = \rho_1 (w - w_0).$$

Согласно же уравнению Бернулли $w - w_0 \approx -\frac{1}{2}(v_y^2 + v_z^2) - v_0 v_x$.

14.41. При упругом отражении молекул от поверхности давление $p = 2\rho v^2 \sin^2 \theta$ (ρ – плотность газа, v – скорость и θ угол между начальным направлением скорости и касательной к поверхности в точке отражения). Отсюда z -составляющая силы, действующая на кольцо радиусом $r(z)$ и шириной $\sqrt{1 + [r'(z)]^2} dz$, равна $4\pi\rho v^2 \sin^2 \theta \cdot r \sqrt{1 + [r'(z)]^2} dz$. Вывести приведённые здесь формулы и воспользоваться уравнением Эйлера-Лагранжа.

14.45. Привести уравнение Эйлера к виду

$$m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - [\vec{v}[\nabla \vec{v}]] \right) = -\nabla U$$

и сделать подстановку $\vec{v} = \frac{1}{m} \nabla S$.

14.46. Теперь

$$\vec{F} = -e \nabla \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} [\vec{v}[\nabla \vec{A}]].$$

Объединяя векторные произведения в уравнении Эйлера в один член $[\vec{v}, \text{rot} \left(m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)]$, избавиться от которого можно подстановкой

$$m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} = \nabla S.$$

14.47. Для релятивистского уравнения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{B}], \quad \vec{p} = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

составить гидродинамический аналог

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{p} = -e \nabla \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \text{rot} \vec{A}].$$

Выполнить преобразования

$$\begin{aligned} (\vec{v} \nabla) \vec{p} &= \nabla(\vec{v} \vec{p}) - (\vec{p} \nabla) \vec{v} - [\vec{v}[\nabla, \vec{p}]] - [\vec{p}[\nabla, \vec{v}]], \\ (\vec{p} \nabla) \vec{v} + [\vec{p}[\nabla, \vec{v}]] &= \frac{m}{2\sqrt{1 - (v/c)^2}} \nabla v^2 = -\nabla \left(mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} \right). \end{aligned}$$

В результате

$$\nabla(\vec{v} \vec{p}) - (\vec{p} \nabla) \vec{v} - [\vec{p}[\nabla, \vec{v}]] = \nabla \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2},$$

и после замены

$$\left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) = \nabla S$$

приходим к релятивистскому уравнению Гамильтона-Якоби.

15. Вязкие жидкости и газы

15.4. Найти решение $v_x = v(z)$ уравнений Навье-Стокса

$$\eta d^2 v / dz^2 + \rho g \sin \alpha = 0, \quad dp/dz + \rho g \cos \alpha = 0.$$

На свободной поверхности

$$\sigma_{zz} = -p_0, \quad \sigma_{xz} = \eta dv/dz = 0, \quad v(0) = 0.$$

15.5. Движение жидкости осесимметрично и направлено по радиусу, причем $v_z \ll v_r$ и $\frac{\partial v_r}{\partial r} \ll \frac{\partial v_r}{\partial z}$.

Граничные условия:

$$v_r = v_z = 0 \text{ при } z = 0,$$

$$v_r = 0, \quad v_z = -u \text{ при } z = h,$$

$$p = p_0 \text{ при } r = R.$$

Здесь h – расстояние между пластинками, p_0 – внешнее давление. Из уравнения Навье-Стокса

$$v_r = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial r} z(z-h),$$

а интегрирование уравнения непрерывности по z даёт

$$u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^h r v_r dz = -\frac{h^3}{12\eta r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right),$$

откуда и следует ответ.

15.6. Пусть вязкая жидкость течёт по горизонтальной поверхности $x_2 = 0$ вдоль оси Ox_1 . Толщина ε пограничного слоя определяется из условий, что скорость v_1 должна возрастать до нормальных значений при изменении x_2 от 0 до ε :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \sim \frac{v_1}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \sim \frac{v_1}{\varepsilon^2}.$$

Записать уравнение Навье-Стокса для v_1 и учитывая, что $v_2 \propto \varepsilon$, найти такую зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$, чтобы в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ сохранялся вязкий член.

15.7. Здесь $v_r = v_\varphi = 0$, $v_z = v(r)$, член $(\vec{v} \nabla) \vec{v} = v \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$ исчезает тождественно. Решая оставшуюся часть уравнения Навье-Стокса и используя условия неподвижности жидкости на стенке и ограниченности скорости на оси, приходим к ответу.

15.11. Воспользоваться Приложением.

15.13. Воспользоваться результатом предыдущей задачи, решение искать в виде $v = ar + b/r$, постоянные найти из граничных условий.

15.14. Очевидно, скорость имеет направление, касательное к окружности вращения, проходящей через данную точку. Ищем решение в виде $\vec{v} = [\text{grad } f, \vec{\Omega}]$. Уравнение движения даёт

$$[\text{grad } \nabla^2 f, \vec{\Omega}] = 0.$$

Поскольку $\text{grad } \nabla^2 f$ направлен вдоль $\vec{r}$, а произведение $[\vec{r}, \vec{\Omega}]$ не может быть равно при произвольном $\vec{r}$, то $\text{grad } \nabla^2 f$ должен быть равен нулю, так что

$$\nabla^2 f = \text{const.}$$

Решение последнего уравнения ищем в виде

$$f(r) = ar^2 + b/r.$$

15.15. Выберем сферические координаты с полярной осью, направленной вдоль $\vec{\Omega}$. В этом случае $v_r = 0$, $v_\theta = 0$ и $v_\varphi = \frac{R^3 \Omega}{r^2} \sin \theta$. Поверхностная плотность действующей на шар силы трения равна

$$t = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)_{r=R} = -3\eta \Omega \sin \theta.$$

Полный момент сил вычисляется интегрированием по поверхности

$$M_z = \oint_S t R \sin \theta dS.$$

15.16. $F_z = \oint_S (-\rho \cos \theta + \tau_{rr} \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) dS$, где интегрирование проводится по всей поверхности шара.

15.18. Из соображений симметрии, непрерывности и несжимаемости жидкости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad v_x = \text{const} = 0,$$

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = v_x \partial \vec{v} / \partial x = 0.$$

Уравнение Навье-Стокса принимает вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + (\eta/\rho) \nabla^2 \vec{v}.$$

Отсюда для v_y получаем уравнение

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = (\eta/\rho) \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2},$$

решение которого с учётом заданных граничных условий удобно искать в виде $v_y = v_0 e^{i(kx - \omega t)}$.

15.19. Сила сопротивления F зависит от радиуса шара R , скорости v , плотности ρ и коэффициента вязкости η и скорости звука c . Представив силу сопротивления F в виде

$$F = \sum_j C_j R^{\alpha_j} v^{\beta_j} \rho^{\gamma_j} \eta^{\delta_j} c^{\varepsilon_j}$$

и учитывая размерности входящих сюда величин

$$[F] = M^1 L^1 T^{-2}, \quad [R] = L^1,$$

$$[c] = [v] = L^1 T^{-1}, \quad [\rho] = M^1 L^{-3}, \quad [\eta] = M^1 L^{-1} T^{-1},$$

для общего члена ряда получим

$$R^{2-\delta_j} v^{2-\delta_j-\varepsilon_j} \rho^{1-\delta_j} \eta^{\delta_j} c^{\varepsilon_j}.$$

Его размерность должна совпадать с размерностью силы, так что

$$F(R, v, \rho, \eta) = \rho v^2 R^2 \left[C_1 \left(\frac{\eta}{\rho v R} \right)^{\delta_1} \left(\frac{c}{v} \right)^{\varepsilon_1} + \dots \right].$$

Безразмерные переменные $\rho v R / \eta$ и v / c называются *числами Рейнольдса* и *Маха* соответственно.

15.20. Направив ось OZ вертикально вверх и обозначив через v проекцию скорости капли на эту ось, запишем уравнение движения капли массой m радиуса a

$$m\dot{v} = F_c + F_{\text{гр}} + F_{\text{Ар}} + F_{\text{эл}},$$

где $F_c = -6\pi\eta a v$ – сила сопротивления среды с вязкостью η (сила Стокса), $F_{\text{гр}}$ – сила тяжести (гравитации), $F_{\text{Ар}}$ – выталкивающая сила (сила Архимеда), $F_{\text{эл}} = neE$ – сила, действующая на заряд ne в поле напряженностью E . Учитывая, что, при $n = 1$ $F_{\text{гр}} + F_{\text{Ар}} + F_{\text{эл}} = 0$, придём к неоднородному дифференциальному уравнению.

$$\dot{v} = \frac{9}{2} + \frac{\eta}{a^2 \rho} v = (n-1) \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) g,$$

где ρ_0 и ρ – плотности воздуха и капли соответственно. Общее решение этого уравнения находится как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. В качестве последнего можно взять постоянную

$$\frac{2}{9} \frac{\rho a^2 g}{\eta} (n-1) \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right)$$

15.21. Из уравнения переноса тепла $\Delta T = 0$, условия на границе $r = R$, $T_0 = T_1$ и $\alpha_0 \frac{\partial T_0}{\partial r} = \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}$. $\vec{B}$ – единственный вектор в задаче, нарушающий сферическую симметрию. Решениями уравнения Лапласа в этом случае являются функции, пропорциональные $\vec{B}\vec{r}$ и $\vec{B} \left(\nabla \frac{1}{r} \right)$.

- 15.22. Поле скоростей вычислено в задаче 15.7. Подстановка его в стационарное ($\partial T/\partial t = 0$) уравнение температуропроводности в условиях медленного ($\vec{v}\nabla T \approx 0$) течения приводит к уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = - \frac{16 \langle v \rangle^2}{R^4} \frac{\nu}{\chi c_p} r^2$$

где $\langle v \rangle$ – усредненная по поперечному сечению скорость течения. Найти решение этого уравнения, конечное при $r = 0$ и равное T_0 при $r = R$.

- 15.23. Продифференцировать $\mathcal{E}_{\text{кин}}$ по времени, воспользоваться под интегралом уравнением Навье-Стокса

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k},$$

условием несжимаемости, теоремой Остроградского-Гаусса, условием на бесконечности, симметрией тензора вязких напряжений. В полученное соотношение

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = -\frac{1}{2} \int (v_{i,k} + v_{k,i}) \tau_{ik} dV$$

подставить выражение для τ_{ik} .

- 15.24. Положить $v_{i,k} = v_{k,i}$ и выполнить интегрирование по частям.

- 15.25. Найти $\vec{v} = (R^3/2r^3)(3\vec{n}(\vec{u}\vec{n}) - \vec{u})$, распределение давления – из формулы Бернулли

$$p = p_0 - \rho \frac{v^2}{2} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = p_0 + \frac{\rho u^2}{8} (9 \cos^2 \theta - 5) + \frac{\rho}{2} R \vec{n} d\vec{u}/dt,$$

где θ – угол между $\vec{n}$ и $\vec{u}$. Далее,

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = -2\pi R^2 \eta \int_0^\pi \left(\frac{\partial v^2}{\partial r} \right)_{r=R} \sin \theta d\theta.$$

- 15.26. При малых z (см. 15.7.)

$$\frac{dp}{dz} = - \frac{8\eta Q}{\pi \rho_0 R^4}.$$

При больших z плотность ρ будет меняться в соответствии с уравнением состояния.

- 15.33. Рассматриваемый случай соответствует полю скоростей в ламинарном случае, создаваемом движущимся в вязкой жидкости телом вдали от него. Представив $\vec{v}$ в виде суммы большой ($\vec{V}$) и малой ($\vec{u}$) компонент в стационарном уравнении Навье-Стокса, получим для z -проекции малой компоненты уравнения:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right), \quad D = \eta/V\rho.$$

16. Механические модели вязкоупругости

16.1. Механические аналоги вязкоупругих моделей строятся путём разных соединений двух элементов: упругого, для которого $\sigma = E\varepsilon$, и вязкого, для которого $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ (условные изображения их приведены выше).

16.15. Пока приложена нагрузка (то есть, в интервале $(0, 2\tau_1)$), справедливо решение предыдущей задачи. При $t > 2\tau_1$ изменение деформации описывается уравнением $\dot{\varepsilon} + \varepsilon/\tau_1 = 0$.

16.16. Определяющее уравнение в данном случае имеет вид

$$\dot{\sigma} + \sigma/\tau = \eta\ddot{\varepsilon} + 3E\dot{\varepsilon} + (E/\tau)\varepsilon = 3E\varepsilon_1/t_1 + E\varepsilon_1 t/\tau t_1.$$

17. Плазма

17.1. Сравнить соответствующие функции Лагранжа.

17.5. В общее выражение для адиабатического инварианта подставить $p = mv_{\perp}$ и $dq = R d\varphi$, где R – ларморовский радиус орбиты, φ – фаза вращения.

17.6. Вычисляя интегралы, находим, что при $t \rightarrow \infty$, $v_x = v_{\perp 0} \sin \omega_H t - \xi \cos \omega_H t$, $v_y = v_{\perp 0} \cos \omega_H t + \xi \sin \omega_H t$, где $\xi = (1/2)(F_0/m\omega_H) \exp(-\omega_H^2 \alpha^2)$. Отсюда и следует ответ.

17.7. Использовать систему уравнений Максвелла и уравнение $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

17.8. Из уравнений Максвелла следует, что $j_{ez} = 0$, а $B_z = \text{const} = B_0$. Из условия несжимаемости $v_z = 0$. Повернём систему координат так, чтобы $j_{ey} = 0$, тогда получим

$$j_{ex} = -\frac{c}{4\pi\mu} \frac{\partial b_y}{\partial z}, \quad j_{ey} = j_{ez} = 0, \quad b_x = \text{const} = 0, \quad B_z = B_0.$$

Подставляя эти выражения в уравнение движения плазмы, учтём, что ∇p не имеет составляющих, перпендикулярных оси OZ . В результате получим $v_x = \text{const} = 0$, $\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi\rho\mu} \frac{\partial b_y}{\partial z}$ и далее, $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{8\pi\mu} \frac{\partial b_y^2}{\partial z}$, $E_x = \frac{j_{ex}}{\sigma} - \frac{v_y B_0}{c}$, $E_y = E_z = 0$. Из первого уравнения Максвелла следует, что

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = -c \frac{\partial E_x}{\partial z},$$

и мы близки к ответу.

17.11. В предыдущей задаче $v_y = -(4\pi\mu\rho)^{-1/2} A \sin(\omega t - kx)$. Магнитные силовые линии поля $\vec{B}_0$ представляют собой прямые $x = x_0$, $y = y_0$. Наложение поля $\vec{b}$ искривляет силовые линии. Тангенс угла искривления в произвольной точке определяется уравнением

$$\frac{dy}{dz} = \frac{b_y}{B_z} = \frac{b_y}{B_0}.$$

Подставляя сюда $b_y = a \sin(\omega t - kx)$ и производя интегрирование, приходим к формулам

$$x = x_0, \\ y = y_0 + \frac{A}{\omega\sqrt{4\pi\mu\rho}} \cos(\omega t - kz),$$

из которых и следует ответ.

17.12. Поперечные колебания обычной струны в направлении OY описываются уравнением $\lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \theta \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$, где λ – масса единицы длины струны.

17.13. Представить b и v в комплексном виде, $b = b_0 e^{j(\omega t - kz)}$, $v = v_0 e^{j(\omega t - kz)}$ и подставить эти выражения в уравнение для b_y .

17.14. Как и прежде, пренебрегаем током смещения и изменением магнитной проницаемости μ . Вследствие четвёртого уравнения Максвелла имеет место соотношение $\text{rot rot } \vec{B} = -\Delta \vec{B}$. Исключая из первого уравнения Максвелла и из выражения для плотности электрического тока $\vec{j}_e$ напряжённость $\vec{E}$, подставляя результат во второе уравнение Максвелла и используя приведённое выше соотношение, приходим к уравнению

$$\text{rot}[\vec{v}, \vec{B}] + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \Delta \vec{B} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

17.15. В этом случае уравнение для магнитной индукции принимает вид $\text{rot}[\vec{v}, \vec{B}] - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, скорость же изменения магнитного потока через движущийся контур записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} + \oint_L \vec{B}[\vec{v}, d\vec{l}].$$

Интеграл по контуру L преобразуется в поверхностный.

17.16. Добавляя в уравнение движения вязкий член $\eta \nabla^2 \vec{v}$, заменяя, как и выше, дифференцирование по координатам делением на l^* , дифференцирование по времени – делением на $t^* = l^*/v^*$, приходим к ответу.

17.18. Уравнение $\text{rot } \vec{B} = g \vec{B}$ распадается на два

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} = g B_\varphi$$

и

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) = g B_z.$$

Исключая B_φ , приходим к уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) + g^2 B_z = 0.$$

17.19. Записать уравнение непрерывности в шестимерном пространстве $(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3)$. В идеальной плазме низкой плотности взаимодействием частиц между собой можно пренебречь.

17.23. Используя условие задачи, подставить найденное в предыдущей задаче распределение в уравнение для φ (см. ответ к задаче 17.20.) и учесть, что $|e_a \varphi| \ll k_B T_\alpha$.

17.24. Воспользоваться методом преобразования Фурье.

17.28. Положить $A = m$.

17.29. Положить $A = mu_i$, выполнить преобразования

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle (u_i - v_i)(u_j - v_j) \rangle + \langle u_i \rangle v_j + v_i \langle u_j \rangle + v_i v_j = \langle (u_i - v_i)(u_j - v_j) \rangle + v_i v_j,$$

вывести тензор напряжений $\sigma_{ij} = -\rho \langle (u_i - v_i)(u_j - v_j) \rangle$.

17.30. В качестве $A(\vec{r}, \vec{u})$ взять $\frac{1}{2}m(\vec{v} - \vec{u})^2$, определить температуру $k_B T \equiv \theta$ соотношением $\theta = \frac{1}{3}m\langle |\vec{v} - \vec{u}|^2 \rangle$, а поток тепла – соотношением $\vec{c} = \frac{1}{2}m\rho\langle (\vec{u} - \vec{v})|\vec{u} - \vec{v}|^2 \rangle$. При этом

$$\frac{1}{2}m\rho\langle u_i |\vec{v} - \vec{u}|^2 \rangle = q_i + \frac{3}{2}\rho\theta v_i,$$

$$\rho\langle u_i(u_j - v_i) \rangle = -\sigma_{ij}.$$

3 ОТВЕТЫ

1. Силовые поля

1.4. Нет.

1.5. Нет.

1.8. $\phi = (2\pi/3)\gamma\rho r^2, \quad \vec{g} = -(4/3)\pi\gamma\rho\vec{r}.$

1.10. $\vec{g}(\vec{r}) = - \left[\frac{4\pi\gamma}{r^2} \int_0^r \rho(r)r^2 dr \right] \vec{e}_r.$

1.14. $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$

1.15. $\rho = \text{const}/r.$

1.16. Солнце, в два раза.

1.17. $\phi(r) = -\frac{\gamma m}{a}, \quad r < a; \quad \phi(r) = -\frac{\gamma m}{r}, \quad r > a.$

1.19. $\phi(r) = \frac{\gamma m}{2R} \left[-3 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad r < R; \quad \phi(r) = -\frac{\gamma m}{r}, \quad r > R.$

1.21. $\phi(\vec{r}) \sim \gamma \left(\frac{m}{r} + \frac{\vec{\mu}\vec{r}}{r^3} \right), \quad m = \int_A \rho(\vec{r})dV, \quad \vec{\mu} = \int_A \vec{r}\rho(\vec{r})dV,$
 $\vec{G}(\vec{r}) \sim -\frac{\gamma(m\vec{r} + 3(\vec{\mu}\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{\mu})}{r^3}.$

1.24. $\phi(r) = -\frac{4\gamma\lambda a}{r+a} K \left(\frac{2\sqrt{ra}}{r+a} \right).$

1.25. $\phi(r) \sim -\gamma\frac{m}{r} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right], \quad r \rightarrow \infty, \quad m = 2\pi\lambda a.$

1.26. $\phi(z) = 2\pi\gamma\sigma(|z| - \sqrt{a^2 + z^2}), \quad \sigma = m/\pi a^2.$

1.27. $g_z(z) = 2\pi\gamma\sigma \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{z}{|z|} \right).$

1.28. $\phi(x) = -\gamma \int_a^b \sqrt{\frac{1 + [f'(\xi)]^2}{(x - \xi)^2 + f^2(\xi)}} \lambda(\xi) d\xi.$

1.29. $\phi(x) = -\gamma\lambda \ln \left| \frac{x - a + \sqrt{d^2 + (x - a)^2}}{x + a + \sqrt{d^2 + (x + a)^2}} \right|.$

1.31. $g_z(z) = -2\pi\gamma\lambda za(z^2 + a^2)^{-3/2}.$

$$1.32. \quad g_z(z) = 2\pi\gamma\sigma a \left[\frac{1}{\sqrt{(z+h/2)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z-h/2)^2 + a^2}} \right].$$

$$1.33. \quad \phi(z) = 2\pi\gamma\rho \int_{z_1}^{z_2} \left[|z - \zeta| - \sqrt{(z - \zeta)^2 + f^2(\zeta)} \right] d\zeta.$$

$$1.34. \quad g_z(z) = 2\pi\gamma\rho \int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{z - \zeta}{|z - \zeta|} + \frac{z - \zeta}{\sqrt{(z - \zeta)^2 + f^2(\zeta)}} \right] d\zeta.$$

$$1.36. \quad \begin{aligned} \phi(z) &= \pi\gamma\rho \left[2zh + (z - h/2)\sqrt{(z - h/2)^2 + a^2} - (z + h/2)\sqrt{(z + h/2)^2 + a^2} + \right. \\ &\quad \left. a^2 \ln \left| \frac{z - h/2 + \sqrt{(z - h/2)^2 + a^2}}{z + h/2 + \sqrt{(z + h/2)^2 + a^2}} \right| \right], \quad |z| > h/2. \end{aligned}$$

$$1.37. \quad \begin{aligned} \phi(r) &= \begin{cases} 0 & , \quad r < a, \\ -4\pi\sigma a \ln(a/r) & , \quad r > a. \end{cases} \\ g(r) &= \begin{cases} 0 & , \quad r < a, \\ -4\pi\sigma(a/r)\vec{e}_r & , \quad r > a, \quad \vec{e}_r \perp OZ. \end{cases} \end{aligned}$$

$$1.38. \quad \begin{aligned} \phi_{\text{верх}}(P) &= 2\pi\gamma\rho \left(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) R^2, \\ \phi_{\text{нижн}}(P) &= 2\pi\gamma\rho \left(\frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{2} - 8}{3} \right) R^2, \\ \phi_{\text{верх}}(Q) &= \phi_{\text{нижн}}(Q) = -\gamma \frac{m}{2R}. \end{aligned}$$

$$1.39. \quad \phi = 2\pi\gamma\rho \left\{ \frac{h^2}{2} + \frac{1}{3(R-h)} \left[h^3 - (2Rh - h^2)^{3/2} \right] \right\}.$$

$$1.40. \quad \phi = -\pi\gamma\rho R^2.$$

$$1.41. \quad \phi = -\gamma m/R.$$

$$1.43. \quad \phi = \pi\gamma\rho h \left[h - (4/3)\sqrt{2Rh} \right].$$

$$1.45. \quad \vec{g} = 0, \quad \phi = 4\pi\gamma\rho \left[\frac{(2a+R)R}{2} - \frac{(R+a)^3 - (R^2+a^2)^{3/2}}{3a} \right].$$

$$1.47. \quad \phi(x) = -\gamma\lambda \ln \frac{a - x \cos \varphi + \sqrt{x^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi}}{|x| - x \cos \varphi}.$$

$$1.48. \quad \begin{aligned} \phi(x) &= -\gamma\lambda \ln[x/(x-a)], \quad |x| > a, \quad \varphi = 0. \\ \phi(x) &= -\gamma\lambda \ln \left[\left(a + \sqrt{a^2 + x^2} \right) / |x| \right], \quad x \neq 0, \quad \varphi = \pi/2. \end{aligned}$$

$$1.49. \quad \phi(x) = \frac{2\gamma\lambda_0}{|x|} [|R-x| - |R+x|].$$

$$1.50. \quad \phi(r, \theta) = -\gamma m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l^{2k}}{2k+1} \frac{P_{2k}(\cos \theta)}{r^{2k+1}}.$$

$$1.51. \quad a_{\text{тн}} \approx 0.5 \text{ см/с}^2, \quad a_{\text{от}} \approx 5 \cdot 10^{-23} \text{ см/с}^2.$$

$$1.52. \quad F = \frac{Km}{r^2} \frac{1}{[1 + (l/r)^2]^{3/2}}.$$

$$1.53. \quad \varphi(r) = (Z-1)e/r + (e/r_0 + e/r) \exp\{-2r/r_0\}.$$

$$1.54. \quad \rho(r) = A \left[\delta(\vec{r}) - \frac{\alpha^2}{4\pi r} e^{-\alpha r} \right].$$

$$1.55. \quad \alpha_0 = \text{arctg } \sqrt{5} \approx 66^\circ, \quad \theta_0 = \text{arctg } (2/\sqrt{5}) \approx 42^\circ.$$

2. Одномерное движение точки

$$2.1. F = -m(\mu a)^2/x^3.$$

$$2.2. x(t) = \frac{F_0}{m\Omega^2} (\Omega t - \sin \Omega t).$$

$$2.3. x(t) = \frac{mv_0}{b} \left(1 - e^{-(b/m)t}\right).$$

$$2.4. v(t) = \sqrt{mg/b} \operatorname{th} \left(\sqrt{bg/mt} \right),$$

$$x(t) = (m/b) \ln \operatorname{ch} \left(\sqrt{bg/mt} \right).$$

$$2.5. x = 2c^2 + bt - 2c\sqrt{c^2 + bt}.$$

$$2.6. x(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{m}} \left\{ t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right\}.$$

$$2.7. \text{ а) } x(t) = x_0 e^{-\alpha t};$$

$$\text{ б) } x(t) = x_0 \operatorname{ch} \alpha t + (v_0/\alpha) \operatorname{sh} \alpha t.$$

$$2.8. x(t) = x_0(1 + \lambda t)^{2/(n+1)},$$

$$\text{ где } \lambda = \frac{n+1}{2} \sqrt{\frac{2\alpha}{(n-1)x_0^{n+1}}}.$$

$$2.9. x = x_0 \sec^2(\alpha t/2).$$

$$2.11. v(t) = v_0, \text{ движение равномерное.}$$

$$2.12. v(t) = (a/b)t - (ma/b^2)[1 - e^{-bt/m}].$$

$$2.13. v(t) = A \left(e^{-Bt^2} + Bt^2 - 1 \right), \quad A = 2ma/b^2, \quad B = b/(2m).$$

$$2.15. \mathcal{E} = m\omega_0^2 A^2/2, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

$$2.16. \tau(\mathcal{E}) = \frac{2\sqrt{m\pi/2}\Gamma(1/2\nu)}{\nu A\Gamma(1/2\nu + 1/2)} \mathcal{E}^{(1/\nu-1)/2}.$$

$$2.17. \tau = 4\sqrt{l/g} K(\sin \varphi_0/2) \approx 2\pi\sqrt{l/g} (1 + \varphi_0^2/16 + \dots).$$

$$2.18. U_1(x) = \frac{2\pi^2 m}{\tau_1^2} x^2; \quad U_2(x) = 4\sqrt{2m} |x|.$$

$$2.19. x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

$$2.20. x(t) = ce^{-(\beta/2)t} \cos(\omega t - \varphi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\beta/2)^2}, \quad \beta = b/m < 2\omega_0.$$

$$2.21. A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\beta\Omega)^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right).$$

$$2.22. \quad v^2 = \frac{\gamma}{R} \left\{ 1 + \frac{2\sqrt{2Rh^3}}{R^2} + \frac{1}{(R-h)R^2} \left[(2Rh - h^2)^{3/2} - h^3 \right] \right\}, \quad h = R - \sqrt{R^2 - a^2}.$$

3. Двумерное и трехмерное движения точки

- 3.1. $\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y.$
- 3.2. $v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}.$
- 3.3. $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = (1/\rho)d(\rho^2\dot{\varphi})/dt, \quad a_z = \ddot{z}.$
- 3.4. $\vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z, \quad \vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z,$
 $\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y.$
- 3.5. $v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi}.$
- 3.6. $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2,$
 $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = (1/r)d(r^2\dot{\theta})/dt - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2,$
 $a_\varphi = r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = (1/r \sin \theta)d(r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi})/dt.$
- 3.7. $T = (m/2)(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \quad \vec{L} = m[-\rho z \dot{\varphi} \vec{e}_\rho + (z\dot{\rho} - \rho\dot{z})\vec{e}_\varphi + \rho^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z].$
- 3.8. $T = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad L^2 = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2).$
- 3.9. $T = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2), \quad L_z = m r^2 \dot{\varphi}.$
- 3.10. $R = 2(a_\tau/a_n)s.$
- 3.11. $v_x = v_{0x}e^{-\beta t}, \quad v_z = (v_{0z} + g/\beta) e^{-\beta t} - g/\beta, \quad \beta t_m = \ln(1 + v_{z0}\beta/g), \quad \beta = b/m.$
- 3.12. $x = (v_{0x}/\beta)(1 - e^{-\beta t}), \quad z = (v_{0z} + g/\beta)(1 - e^{-\beta t})/\beta - (g/\beta)t.$
- 3.13. $x = A \cos(\omega t - \alpha) + \xi, \quad y = A \sin(\omega t - \alpha) + \eta, \quad z = v_{0z}t + z_0, \quad \alpha = \arctg(v_{0x}/v_{0y}),$
 $A = v_\perp/\omega,$
 $\omega_H = \frac{|e|H}{mc},$
- 3.14. $T = (m/8)(36x^2 \dot{E}e/m)^{2/3}.$
- 3.15. $\theta = \arctg(eEx/mv_0^2),$
 $y = eEx^2/2mv_0^2.$
- 3.16. $\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = eE/m - \omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \quad \omega = \omega_H = eH/mc.$
- 3.17. $v_x = (cE/H)(1 - \cos \omega t) + v_{0x} \cos \omega t + v_{0y} \sin \omega t,$
 $v_y = (cE/H - v_{0x}) \sin \omega t + v_{0y} \cos \omega t,$
 $v_z = v_{0z}.$
- 3.18. $x = c(E/H)t + (1/\omega)(v_{0x} - cE/H) \sin \omega t + (v_{0y}/\omega)(1 - \cos \omega t),$
 $y = (1/\omega)(cE/H - v_{0x})(1 - \cos \omega t) + (v_{0y}/\omega) \sin \omega t,$
 $z = v_{0z}t.$

$$3.19. \quad m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = eE_r + \frac{e}{c}(v_\varphi H_z - v_z H_\varphi),$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = eE_\varphi + \frac{e}{c}(v_z H_r - v_r H_z).$$

$$m\ddot{z} = eE_z + \frac{e}{c}(v_r H_\varphi - v_\varphi H_r),$$

$$3.20. \quad \omega_{||} = \omega_0, \quad \omega_{\perp} = \sqrt{\omega_0^2 + (\omega_H/2)^2} \pm \omega_H/2.$$

$$3.21. \quad \vec{F} = -m \left(\frac{2\sigma}{ab} \right)^2 \vec{r}.$$

$$3.22. \quad \vec{F} = -\frac{m(2\sigma)^2}{p} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r.$$

$$3.23. \quad T = 3ka^3/2, \quad L = \sqrt{3mka^5}.$$

$$3.24. \quad \omega = \sqrt{15ka/m}.$$

$$3.25. \quad \omega = \sqrt{[U''(a) + 3L^2/ma^4]/m}, \text{ где } a - \text{ корень уравнения } U'(a) = \frac{L^2}{ma^3}.$$

$$3.26. \quad F_r = -mAB^2t, \quad F_\varphi = 2mAB, \quad F = mAB\sqrt{4 + B^2t^2}.$$

$$3.27. \quad \vec{F} = -\frac{L}{mr^3} \vec{e}_r.$$

$$3.28. \quad a = \left(\frac{L^2}{m\alpha\gamma} \right)^{1/(2-\gamma)}, \quad U_{\text{эф}}(a) = -\alpha(1 - \gamma/2) \left(\frac{m\gamma\alpha}{L^2} \right)^{\gamma/(2-\gamma)}.$$

$$3.29. \quad \gamma = 1: \quad r_{1,2} = L^2 \left[m\alpha \left(1 \pm \sqrt{1 - 2|\mathcal{E}|L^2/(m\alpha^2)} \right) \right]^{-1},$$

$$\gamma = 2: \quad r_1 = 0, \quad r_2 = \sqrt{(\alpha - L^2/2m)/|\mathcal{E}|},$$

$$\gamma = 4: \quad r_1 = 0, \quad r_2 = \left[L^2/(4m\alpha) + \sqrt{|\mathcal{E}|/\alpha + L^4/(4m\alpha)^2} \right]^{-1/2}.$$

$$3.30. \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = R^2/4, \quad \frac{d\sigma}{d\theta} = (\pi R^2/2) \sin \theta.$$

$$3.31. \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2}{mv_0^2} \frac{\pi^2 \alpha (\pi - \theta)}{[\theta(2\pi - \theta)]^2 \sin \theta}.$$

$$3.33. \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4\mathcal{E}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \quad \frac{d\sigma}{d\theta} = \pi \left(\frac{\alpha}{2\mathcal{E}} \right)^2 \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}.$$

$$3.34. \quad \sigma(\theta > \pi/2) = \pi \left(\frac{\alpha}{2\mathcal{E}} \right)^2.$$

$$3.36. \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{n} \left[\frac{\alpha n}{mv_0^2} B \left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2} \right) \right]^{2/n} \theta^{-2(1+1/n)}.$$

$$3.37. \quad \frac{d\sigma}{d\theta} = \pi \left(\frac{\alpha}{2E} \right)^2 \frac{\cos[(\theta + \eta)/2]}{\sin^3[(\theta + \eta)/2]}.$$

$$3.38. \quad \theta < 2 \arctan \left[\frac{2\mathcal{E}R}{|\alpha|} \sqrt{1 + \frac{\alpha}{R\mathcal{E}}} \right], \quad \sigma_{\text{пад}} = \pi R^2 \left(1 + \frac{\alpha}{R\mathcal{E}} \right).$$

4. Кеплеровы орбиты

$$4.1. \quad p = \frac{2r_a r_\Pi}{r_a + r_\Pi}, \quad \varepsilon = \frac{r_a - r_\Pi}{r_a + r_\Pi}, \quad a = \frac{r_a + r_\Pi}{2}.$$

$$4.3. \quad a = \frac{\alpha}{2|\mathcal{E}|}, \quad b = \frac{L}{\sqrt{2m|\mathcal{E}|}}.$$

$$4.4. \quad \tau = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|\mathcal{E}|^3}}.$$

$$4.7. \quad d^2I/dt^2 = T + \mathcal{E}_0.$$

$$4.9. \quad h = 35\,800 \text{ км.}$$

$$4.10. \quad h = 220 \text{ км.}$$

$$4.11. \quad b \approx 0.19 \text{ а.е.}$$

$$4.12. \quad m = (\tau/\tau_1)^2 (a_1/a)^3 m_0.$$

$$4.13. \quad \text{Вектор } \vec{\Lambda} \text{ направлен вдоль большой полуоси эллипса в точку перигея (ближайшую точку эллипса), его модуль } \Lambda = \alpha\varepsilon.$$

$$4.18. \quad a = r_0, \quad b = v_0/\omega_0.$$

$$4.19. \quad a = \frac{\alpha}{2|\mathcal{E}|}, \quad b = \frac{L}{\sqrt{2m|\mathcal{E}|}}.$$

$$4.20. \quad \tau = \frac{\pi\alpha\sqrt{m/2}}{|\mathcal{E}|^{3/2}}.$$

$$4.21. \quad t(\varphi) = (\tau/2\pi) \left[\varphi - 2\varepsilon \sin \varphi + (3/4)\varepsilon^2 \sin 2\varphi + \dots \right].$$

$$4.22. \quad \tau = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}}.$$

$$4.25. \quad v = \sqrt{(K/p)(1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2)}.$$

$$4.26. \quad v_r = \varepsilon\sqrt{K/p} \sin \varphi, \quad v_\perp = \sqrt{K/p}(1 + \varepsilon \cos \varphi).$$

$$4.27. \quad v_{\text{кп}}(r) = \sqrt{K/r}, \quad v_{\text{пар}} = \sqrt{2K/r}.$$

$$4.28. \quad \cos \theta = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi}}.$$

$$4.29. \quad r_1 = 3r_0.$$

$$4.30. \quad \langle r \rangle_{2\pi} = b.$$

$$4.31. \quad \langle r \rangle_\tau = a(1 + \varepsilon^2/2).$$

$$4.32. \quad \langle r \rangle_\lambda = a.$$

$$4.34. \quad \langle U \rangle_\tau = -\alpha/a.$$

$$4.36. \quad v_0 = \sqrt{gR} / \cos \beta.$$

$$4.37. \quad \beta = 45^\circ$$

$$4.38. \quad \ddot{\theta} = -\frac{2a_0}{3r_0} \sin \theta.$$

$$4.42. \quad \text{HeT.}$$

$$4.43. \quad v_0 = 234 \text{ км/с.}$$

5. Система материальных точек

$$5.1. U_{AB} = U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24},$$

$$\mathcal{E}_A^* = \left[\frac{m_1 v_1^{*2}}{2} + \frac{m_2 v_2^{*2}}{2} \right]_A + U_{12},$$

$$\mathcal{E}_B^* = \left[\frac{m_3 v_3^{*2}}{2} + \frac{m_4 v_4^{*2}}{2} \right]_B + U_{34}.$$

Нижний индекс у кинетической энергии показывает, относительно центра масс какой системы она вычисляется.

$$5.17. N = mI.$$

$$5.18. \ddot{N} = 2m(2T + U).$$

$$5.21. R < \sqrt{\frac{3AT}{4\pi\gamma\vec{\rho}}}, \quad t \sim \frac{1}{\sqrt{(2\pi/3)\gamma\vec{\rho}}}.$$

$$5.23. U = -\frac{3\gamma m^2}{5R}.$$

$$5.24. W = -Z^2 e^2 / a_0.$$

$$5.26. K = (5/8)e^2 / r_0.$$

$$5.27. K_{aB} = \frac{e^2}{R} \left\{ 1 - (1 + R/a_0)e^{-2R/a_0} \right\}.$$

$$5.28. U = K_{aA} + K_{bB} + K_{aB} + K_{bA} + K_{ab} + K_{AB} = -\frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{R} \left[1 + \frac{5}{8} \frac{R}{a_0} - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{a_0} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{R}{a_0} \right)^3 \right] e^{-2R/a_0}.$$

$$5.29. \langle T \rangle (k/2) \langle U \rangle.$$

$$5.30. \langle T \rangle = (-1/2) \langle U \rangle - (e/(2mc)) \vec{H} \langle T \vec{L} \rangle.$$

$$5.31. \langle T \rangle = (1/2) \langle \sum \vec{r}_i \nabla_i U \rangle.$$

$$5.32. \frac{\gamma m_C m_a}{5k_B R_C} \sim 10^7 \text{K}.$$

$$5.34. \vec{r}_i = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t + \vec{A}_i \cos \omega t + \vec{B}_i \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{k \sum_i m_i}.$$

$$5.35. m_i = \frac{4\pi a^2 a_j}{\gamma \tau^2}, \quad j \neq i.$$

$$5.38. a) \quad A = \frac{2m}{m+M} \sqrt{\frac{Mgh}{2k}}, \quad \omega = \sqrt{4k/m};$$

$$б) \quad A = \sqrt{\frac{m^2}{m+M} \frac{gh}{2k} + \frac{m^2 g^2}{(4k)^2}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{4k}{m+M}}.$$

$$5.39. \quad A = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha},$$

$$a = \frac{(M + m)g \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

$$5.40. \quad A = jab(m/M)v_0 \sin 2\alpha.$$

$$5.43. \quad \frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{R^2}{4} \left[2 \frac{m_1}{m_2} \cos \vartheta_1 + \frac{1 + (m_1/m_2)^2 \cos 2\vartheta_1}{\sqrt{1 - (m_1/m_2)^2 \sin^2 \vartheta_1}} \right], \quad 0 < \vartheta_1 < \pi, \quad m_1 < m_2;$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{R^2}{2} \frac{1 + (m_1/m_2)^2 \cos 2\vartheta_1}{\sqrt{1 - (m_1/m_2)^2 \sin^2 \vartheta_1}}, \quad 0 < \sin \vartheta_1 < m_2/m_1, \quad m_1 > m_2.$$

$$5.44. \quad \frac{d\sigma}{d\Omega_2} = R^2 \cos \vartheta_2.$$

$$5.45. \quad \frac{d\sigma}{dQ} = \frac{\pi R^2}{Q_{\max}}, \quad Q_{\max} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_{10}.$$

$$5.46. \quad \frac{d\sigma}{dQ} = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_0^2} \right)^2 Q_{\max} / Q^2.$$

$$5.47. \quad \sum_{i=1}^3 m_i \vec{r}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 m_i \vec{v}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \vec{L},$$

$$(1/2) \left(\sum_{i=1}^3 m_i v_i^2 - \gamma \sum_{i \neq j}^3 m_i m_j / r_{ij} \right) = \mathcal{E}.$$

$$5.48. \quad \mu_2 \ddot{\vec{r}}_{21} = -\gamma \left(m_2 m_1 \vec{r}_{21} / r_{21}^3 - m_3 \mu_2 \vec{r}_{32} / r_{32}^3 + m_3 \mu_2 \vec{r}_{31} / r_{31}^3 \right),$$

$$\mu_3 \ddot{\vec{r}}_{31} = -\gamma \left(m_3 m_1 \vec{r}_{31} / r_{31}^3 - \mu_3 m_2 \vec{r}_{23} / r_{23}^3 + m_3 \mu_2 \vec{r}_{21} / r_{21}^3 \right),$$

$$\mu_2 = m_1 m_2 / (m_1 + m_2), \quad \mu_3 = m_1 m_3 / (m_1 + m_3),$$

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j.$$

$$5.49. \quad \mu' \dot{\vec{v}}_{\text{зотн.}} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}, \quad \mu' = (m_1 + m_2) m_3 / (m_1 + m_2 + m_3) - \text{приведенная масса.}$$

$$5.50. \quad T = (1/2) m \left[V^2 + (1/2) \sum_{i=1}^2 \sum_{j>i}^3 (m_i m_j / m^2) (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2 \right], \quad m = m_1 + m_2 + m_3.$$

$$5.53. \quad \mu'' c_1 \ddot{w} = \gamma w / |w|^3, \quad \mu'' = m_1 / (m_1 m_2 c_{12} / |c_{12}|^3 + m_1 m_3 c_{13} / |c_{13}|^3) - \text{приведенная масса.}$$

6. Инерция, реакция и реактивное движение

$$6.2. \quad x = a \cos (\Omega t - \alpha) + bt \cos (\Omega t - \beta),$$

$$y = -a \sin (\Omega t - \alpha) - bt \sin (\Omega t - \beta).$$

$$6.3. \quad x = x_0 \operatorname{ch}(\Omega t), \quad N_y = 2m\Omega^2 x_0 \operatorname{sh}(\Omega t).$$

$$6.4. \quad x(t) = a \sin(\sqrt{k/m} + \varphi) + ma/k.$$

$$6.5. \quad \tau = \pi R / (2v \cos \alpha).$$

$$6.6. \quad \vec{v} = \Omega R(-\sin \theta, \cos \theta, -\sin \theta), \quad v = \Omega R \sqrt{1 + \sin^2 \theta}.$$

$$6.7. \quad \vec{a} = -\Omega^2 R(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, \cos \theta).$$

$$6.8. \quad d^2\theta/dt^2 = -\Omega^2 \sin \theta - \text{колебания математического маятника.}$$

$$6.9. \quad N = mR \left[\Omega^2 \cos \theta + (\dot{\theta} + \Omega)^2 \right].$$

$$6.10. \quad d^2\theta/dt^2 = -(\Omega^2 + \alpha) \sin \theta.$$

$$6.12. \quad u = x + iy = (Ae^{-i\omega_0 t} + Be^{i\omega_0 t}) e^{-it\Omega \sin \psi}, \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}.$$

$$6.13. \quad y = \frac{\Omega \cos \psi}{3\sqrt{g}} (2h)^{3/2}.$$

$$6.14. \quad \tau = \sqrt{g/\sqrt{g^2 + a^2}} \tau_0.$$

$$6.16. \quad a = \frac{m_2 - m_1 + m(d/R) \sin \varphi}{m_1 + m_2 + I_0/R^2}.$$

$$6.18. \quad F'_x = -(mg/2) \sin 2\alpha, \quad F'_z = mg \cos^2 \alpha.$$

$$6.19. \quad \vec{r}_1 = 4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - (1/3)\vec{e}_z, \quad \vec{r}_2 = \vec{e}_z.$$

$$6.20. \quad z = 1.$$

$$6.21. \quad \varphi(r) = \varphi_0 + \int_{r_0}^r \frac{|\vec{L}| dr}{r \sqrt{2m[E - mgf(r)]r^2 - \vec{L}^2}}.$$

$$6.22. \quad v_0 = \sqrt{gr_0 f'(r_0)}.$$

$$6.23. \quad F'_x = -mv_{0y}\omega \cos(\omega t), \quad F'_y = -mv_{0y}\omega \sin(\omega t), \quad \omega = v_{0y}/r_0.$$

$$6.24. \quad v_0 = z_M \sqrt{\frac{2g}{z_M + z_0}}.$$

$$6.25. \quad x = 0, \quad y = \pm mg/(2k), \quad z = mg/(2k);$$

$$x = \pm 2mg/(5k), \quad y = 0, \quad z = mg/(5k).$$

$$6.26. \quad a + \delta < r_3 = \sqrt[3]{\gamma m(R + a + \delta)/g} < a + \delta + 2R.$$

$$6.27. \quad F'_\rho = -mg \operatorname{sh} [2k(l-s)/a], \quad F'_z = mg.$$

$$6.28. \quad \omega_0^2 \geq 5g/l.$$

$$6.30. \quad m\dot{\vec{v}} = \dot{m}\vec{u} + \vec{F} \quad (\text{здесь } \dot{m} < 0).$$

$$6.32. \quad \text{а) } z = (u/\alpha) [(1-\alpha t) \ln(1-\alpha t) + \alpha t] - gt^2/2,$$

$$\text{б) } z = (\alpha u - g) t^2/2.$$

$$6.33. \quad T_{\max} = 2mu^2.$$

$$6.34. \quad p_{\max} = mu.$$

$$6.35. \quad h = \frac{u(\alpha u - g)}{2\alpha g} Z^2, \quad Z - \text{число Циолковского.}$$

$$6.36. \quad Z = 5.$$

$$6.37. \quad \left| \frac{dm}{dt} \right| = \frac{m_0 g}{u} e^{-gt/u}.$$

$$6.38. \quad u \ln(m_0/m) = at + (gR/2) \left[\frac{t}{R + at^2/2} + \sqrt{\frac{2}{Ra}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a}{2R}} t \right) \right].$$

$$6.39. \quad m(t) = \frac{[vudF_{\text{scriptsize c}}/dv + (v-u)F_{\text{scriptsize c}}(v)]}{ug}.$$

$$6.40. \quad a = \frac{g(u-v)v}{v^2 + 4vu + 2u^2}.$$

7. Лагранжевы системы

$$7.4. Q_i = m \left[\sigma_i^2 \ddot{q}_i + 2\sigma_i \dot{q}_i \sum_{j=1}^3 (\partial \sigma_i / \partial q_j) \dot{q}_j - \sum_{j=1}^3 \sigma_j (\partial \sigma_j / \partial q_i) \dot{q}_j^2 \right].$$

$$7.5. Q_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2), \quad Q_\varphi = m\rho(\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}), \quad Q_z = m\ddot{z}.$$

$$7.6. Q_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \\ Q_\theta = mr(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2), \\ Q_\varphi = mr \sin \theta (r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2 \sin \theta \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi}).$$

$$7.7. p_\rho = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi}, \quad p_z = m\dot{z}; \\ p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}.$$

$$7.8. Q_\rho = F_\rho, \quad Q_\varphi = \rho F_\varphi, \quad Q_z = F_z; \\ Q_r = F_r, \quad Q_\theta = r F_\theta, \quad Q_\varphi = r \sin \theta F_\varphi.$$

$$7.9. \vec{F} = [\vec{v}, \text{rot} \vec{A}].$$

7.11. В цилиндрических координатах

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 = 0, \quad d(\rho^2 \dot{\varphi})/dt = 0, \quad \ddot{z} = -g;$$

в сферических координатах

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = -g \cos \theta, \\ d(r^2 \dot{\theta})/dt - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = gr \sin \theta, \\ d(r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi})/dt = 0.$$

$$7.14. \mathcal{L} = (m/2)(\dot{z}^2 / \cos^2 \alpha + z^2 \dot{\varphi}^2 \tan^2 \alpha) - mgz.$$

$$7.17. \mathcal{E} = \mu v^2/2 + mV^2/2 + U(r), \quad \mu = m_1 m_2 / m, \quad m = m_1 + m_2.$$

$$7.20. \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \vec{L}_0 \vec{\Omega}.$$

$$7.21. \ddot{\xi} = 2\Omega \dot{\eta} + \Omega^2 \xi, \quad \ddot{\eta} = -2\Omega \dot{\xi} + \Omega^2 \eta, \quad \ddot{\zeta} = 0.$$

$$7.22. \ddot{x} - 2\Omega \dot{y} - \Omega^2 x = Ax \\ \ddot{y} + 2\Omega \dot{x} - \Omega^2 y = Ay \\ \ddot{z} = Bz.$$

$$7.23. \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} - \Omega^2 y = -g \sin \Omega t.$$

$$7.24. \mathcal{L} = \frac{m}{2} [\dot{q}^2 + \Omega^2 q^2 \sin^2 \theta - 2gq \text{ctg} \theta].$$

$$7.25. mR^2 \ddot{\theta} - (mR^2/2)(\dot{\varphi} + \Omega)^2 \sin 2\theta = -\partial U / \partial \theta, \\ mR^2 \ddot{\varphi} \sin^2 \theta + mR^2 (\dot{\varphi} + \Omega) \dot{\theta} \sin 2\theta = -\partial U / \partial \varphi.$$

$$7.26. p_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi} + \frac{e}{2c} \rho^2 H, \quad p_z = m\dot{z}, \quad \mathcal{E} = mv^2/2.$$

$$7.27. \ddot{m}a = -(4/3)\pi\gamma\rho_0 a.$$

$$7.28. \mathcal{L} = ma^2 \dot{\vec{x}}^2 / 2 - m(\phi + a\ddot{a}\vec{x}^2 / 2).$$

$$7.29. d\vec{v}/dt + (\dot{a}/a)\vec{v} = -\nabla\phi/a.$$

$$7.30. \omega_1 = \sqrt{g/l}, \quad \omega_2 = \sqrt{g/l + 2ka^2/(ml^2)}.$$

$$7.32. \omega_{1,2} = \sqrt{(3 \pm \sqrt{5})k/(2m)}, \quad A_2/A_1 = (1 \pm \sqrt{5})/2.$$

$$7.33. \omega_{||} = \sqrt{2k/m}, \quad \omega_{\perp} = \sqrt{2k(1 - l/a)/m}.$$

$$7.34. \omega_{\perp} = \sqrt{2k(1 - a^2/l^2)/m}.$$

$$7.35. \omega_1 = 0 \text{ (колебаний нет)}, \quad \omega_2 = \sqrt{k/m}, \quad \omega_3 = \sqrt{k(1 + 2m/M)/m}.$$

$$7.36. \omega_{1,2} = \sqrt{g/l} \left[1 \pm \sqrt{m_2/(m_1 + m_2)} \right]^{-1/2}.$$

$$7.37. \omega_n = 2\sqrt{k/m} \sin(\pi n/(2N + 2)), \quad n = 1, \dots, N.$$

$$7.38. \omega_n^2 = \frac{k}{\mu} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM} \sin^2 \left(\frac{\pi n}{2N + 1} \right)} \right], \quad \mu = mM/(m + M) - \text{приведённая масса.}$$

$$7.39. \omega_n = 2\sqrt{k/m} \sin \frac{(2n - 1)\pi}{2(2N + 1)}.$$

$$7.40. \omega_1 = \alpha, \omega_2 = 2\alpha, \omega_3 = \sqrt{6}\alpha, \alpha = \sqrt{P/(2ma)}. \text{ Для первой моды } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}, \text{ для второй } \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}, \text{ для третьей } \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}.$$

$$7.41. \omega_1 = \alpha, \quad x = y, \\ \omega_2 = 2\alpha, \quad x = -2y.$$

$$7.42. r(t) = a \left[1 + \frac{\lambda}{\sqrt{3-n}} \sin \omega t \right], \\ \varphi(t) = \omega t - \frac{2\lambda}{3-n} (1 - \cos \omega t), \\ \omega = \sqrt{(3-n)\alpha/a^{n+1}}, \\ r(\varphi) = a \left[1 + \frac{\lambda}{\sqrt{3-n}} \sin(\sqrt{3-n}\varphi) \right].$$

$$7.43. \omega_1 = \sqrt{g/c}, \quad \omega_2 = \sqrt{g/(l+c)}, \quad c - \text{удлинение стержня за счёт силы тяжести в положении равновесия.}$$

$$7.44. \mathcal{E} = (m/2) [(R^2 - z^2) \dot{\varphi}^2 + R^2 \dot{z}^2 / (R^2 - z^2)] + mgz, \\ L_z = m(R^2 - z^2) \dot{\varphi}.$$

$$7.45. \quad \omega = \sqrt{k/m - \Omega^2}.$$

$$7.46. \quad x = A \cos(\omega_x t + \alpha), \quad y = B \sin(\omega_y t + \beta), \quad \omega_x = \sqrt{g f''_{xx}(0)}, \quad \omega_y = \sqrt{g f''_{yy}(0)}.$$

$$7.47. \quad \varphi = a_0 \cos[\omega_0(1 - a_0^2/16)t + \psi_0].$$

$$7.48. \quad x = a \cos(\omega t + \varphi) + [\beta a^3/(32\omega^2)] \cos(3\omega t + 3\varphi), \\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 + 3\beta a^2/4}.$$

$$7.49. \quad x = a \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi).$$

$$7.51. \quad ky'' + f(x) = 0.$$

$$7.52. \quad y = \frac{f_0 x(l - x)}{2k}.$$

$$7.55. \quad A = k/(2m), \quad B = a/\tau - k\tau/(2m), \quad C = 0.$$

$$7.56. \quad t_B = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (dz/dx)^2}}{\sqrt{2g[z_A - z(x)]}} dx.$$

$$7.57. \quad \frac{1}{\sqrt{1 + (dz/dx)^2}} = c\sqrt{2g[z_A - z(x)]}, \quad c = \text{const.}$$

$$7.58. \quad x = \pm c_1(\theta - \sin \theta) + c_2, \quad z = z_A - c_1(1 - \cos \theta).$$

$$7.59. \quad S = \frac{x^2 + z^2}{2t} - \frac{1}{2}gzt - \frac{1}{24}g^2t^3.$$

$$7.60. \quad S_{12} = \frac{1}{2}\omega(x_1^2 + x_2^2)\text{ctg}(\omega t) - \frac{\omega x_1 x_2}{\sin(\omega t)}.$$

$$7.61. \quad S = \frac{(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)} + \frac{1}{6}A(t_2 - t_1)\{x_2(2t_2 + t_1) + x_1(t_2 + 2t_1)\} - \frac{1}{360}A^2(t_2 - t_1)^3(4t_2^2 + 7t_2t_1 + 4t_1^2).$$

8. Гамильтоновы системы и канонические преобразования

$$8.6. \mathcal{H} = \frac{1}{2ml^2} [p_\varphi - m\Omega Rl \cos(\Omega t - \varphi)]^2 - mgl \cos \varphi.$$

$$8.7. \text{Эллипс с полуосями } v_0/\omega \text{ и } y_0 - N/\omega^2.$$

$$8.8. \mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + \left(P_y - \frac{e}{c} Hx \right)^2 + p_z^2 \right].$$

$$8.9. \mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi.$$

$$8.11. \mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - \vec{\Omega}[\vec{r}, \vec{p}] + U.$$

$$8.15. t(-\pi/4, \pi/4) = \sqrt{2} \ln \operatorname{tg}(3\pi/8); \quad t(-\pi/2, \pi/2) = \infty.$$

$$8.17. \text{Четырехмерный эллипсоид.}$$

$$8.19. \text{Прямоугольник, вписанный в эллипс } U(x, y) = \mathcal{E}.$$

$$8.26. \{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

$$8.27. \{x_i, g(x_j)\} = 0, \quad \{p_i, g(x_j)\} = -\partial g(x_j)/\partial x_i.$$

$$8.28. \{x_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} x_k.$$

$$8.29. \{L_i, L_j\} = x_i p_j - x_j p_i.$$

$$8.30. \{x_i, \mathcal{H}\} = p_i/m, \quad \{p_i, \mathcal{H}\} = -\partial U/\partial x_i.$$

$$8.31. \{L_i, \mathcal{H}\} = -\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} x_j \partial U/\partial x_k = M_i, \quad \{L^2, \mathcal{H}\} = 2\sum_i L_i M_i.$$

$$8.33. \{a^*, a\} = i, \quad \mathcal{H} = \omega a^* a.$$

$$8.36. p_i = \partial \mathcal{F}_1/\partial q_i, \quad P_i = -\partial \mathcal{F}_1/\partial Q_i, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \partial \mathcal{F}_1/\partial t.$$

$$8.37. p_i = \partial \mathcal{F}_2/\partial q_i, \quad Q_i = \partial \mathcal{F}_2/\partial P_i, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \partial \mathcal{F}_2/\partial t.$$

$$8.38. q_i = -\partial \mathcal{F}_3/\partial p_i, \quad P_i = -\partial \mathcal{F}_3/\partial Q_i, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \partial \mathcal{F}_3/\partial t.$$

$$8.39. q_i = -\partial \mathcal{F}_4/\partial q_i, \quad Q_i = \partial \mathcal{F}_4/\partial P_i, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \partial \mathcal{F}_4/\partial t.$$

$$8.44. \mathcal{F} = qP - f(q, t).$$

$$8.47. \mathcal{F} = \frac{F\tau}{2}(q + Q) + \frac{m}{2\tau}(q - Q)^2.$$

$$8.48. \mathcal{F} = \frac{m\omega}{2 \sin \omega\tau} [2qQ - (q^2 + Q^2) \cos \omega\tau].$$

9. Метод Гамильтона-Якоби

$$9.1. S(\vec{r}, t) = \frac{mr^2}{2t}.$$

$$9.2. \vec{u} = \vec{v}/2.$$

$$9.3. \vec{u}(\vec{r}) = \left(\mathcal{E} / \sqrt{2m[\mathcal{E} - U(\vec{r})]} \right) \vec{n}.$$

$$9.4. S(\vec{r}, t) = (m/2)[r^2/t - \vec{g}\vec{r}t - g^2t^3/12].$$

$$9.7. S = \frac{mr^2\omega}{2} \text{ctg}(\omega t).$$

$$9.9. S(\vec{r}, t) = \frac{m}{2} \left[\frac{z^2}{2} + (x^2 + y^2) \frac{\omega_H}{2} \text{ctg} \frac{\omega_H t}{2} \right].$$

$$9.11. (\partial S_0 / \partial \theta)^2 + \sin^{-2} \theta (\partial S_0 / \partial \varphi)^2 = 2(\mathcal{E} - g \cos \theta).$$

$$9.15. S_0(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \int g_i(q_i, \alpha_i) dq_i.$$

$$9.19. \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1}{m} \left(\vec{\alpha}t - (e\vec{A}_0/\omega c) \sin \omega t \right).$$

$$9.20. S = -\mathcal{E}t + \int \sqrt{2ml^2(\mathcal{E} + mgl \cos \varphi)} d\varphi.$$

$$9.21. S(x_1, x_2, x_3, t) = -\mathcal{E}t + \sum_{i=1}^3 S_i(x_i),$$

$$S_i(x_i) = \frac{x_i}{2} \sqrt{2\mathcal{E}_i - \omega^2 x_i^2} + (\mathcal{E}_i/\omega) \arcsin \left(\omega x_i / \sqrt{2\mathcal{E}_i} \right), \quad \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i = \mathcal{E}.$$

$$9.23. S = -\mathcal{E}t + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{L^2 - p_\varphi^2 / \sin^2 \theta} d\theta + \int \sqrt{2m[\mathcal{E} - U(r)] - L^2/r^2} dr.$$

$$9.24. p_r = \sqrt{2m[\mathcal{E} - U(r)] - L^2/r^2}, \quad p_\theta = \sqrt{L^2 - p_\varphi^2 / \sin^2 \theta}.$$

$$9.25. I_\varphi = p_\varphi, \quad I_r = -p_\varphi + \alpha \sqrt{\frac{m}{2|\mathcal{E}|}},$$

$$\omega_\varphi = \omega_r = \frac{(2|\mathcal{E}|)^{3/2}}{\sqrt{m\alpha}}.$$

$$9.29. \text{Уменьшится в } k \text{ раз.}$$

$$9.33. x_2 = \sqrt{\frac{m_1 c^2}{2\mathcal{E}} + \frac{2\mathcal{E}}{m^2} (t - \tau)^2}; \quad \mathcal{E}, c \text{ и } \tau - \text{ постоянные, определяемые по начальным значениям } x_2(0), \dot{x}_2(0) \text{ и } \dot{x}_1(0).$$

$$9.34. p = CV^{-5/3}, \quad C = \text{const.}$$

$$9.35. \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi.$$

10. Релятивистские частицы

$$10.3. \vartheta = \arcsin(i\gamma V/c) = \operatorname{arctg}(iV/c).$$

$$10.4. v = (v' + V)/(1 + v'V/c^2) \sim v' + V - v'(V/c)^2 - V(v'/c)^2, \quad V \ll c, \quad v' \ll c.$$

$$10.5. \operatorname{tg} \theta = \frac{v' \sqrt{1 - (V/c)^2} \sin \theta'}{V + v' \cos \theta'}.$$

$$10.6. \theta = \arccos \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}}{(v/c) \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2 c^4}}.$$

$$10.7. \mathcal{E}_1 = (m_1^2 - m_2^2 + m^2)/(2m).$$

$$10.8. T_{\max} = (m - 3m_1) c^2..$$

$$10.9. \mathcal{E}' = \mathcal{E}/[1 + (\mathcal{E}/mc^2)(1 - \cos \theta)].$$

$$10.10. Q = \sqrt{2mc^2(\mathcal{E} + mc^2)}.$$

$$10.11. (v_{21}/c)^2 = 1 - [\gamma_1 \gamma_2 (1 - \vec{v}_1 \vec{v}_2 / c^2)]^{-2}.$$

$$10.13. \beta = (e^{2y} - 1)/(e^{2y} + 1).$$

$$10.15. v_n = \frac{1 - [(1 - \beta)/(1 + \beta)]^n}{1 + [(1 - \beta)/(1 + \beta)]^n}.$$

$$10.18. M = \sum_i m_i / \sqrt{1 - (v'_i/c)^2}.$$

$$10.10. m_{\parallel} = m/(1 - v^2/c^2)^{3/2}, \quad m_{\perp} = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2}.$$

$$10.20. F = mc^2/b.$$

$$10.21. \vec{F}' = \gamma \vec{E} - (\gamma - 1)(\vec{v} \vec{F}) \vec{V} / v^2.$$

$$10.22. \frac{d}{dt} \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = e \vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}].$$

$$10.24. \frac{d}{dt}(m\gamma\dot{r}) = m\gamma r\dot{\varphi}^2 + eE_r + e/c(-H_{\varphi}\dot{z} + H_z r\dot{\varphi}),$$

$$\frac{d}{dt}(m\gamma r^2\dot{\varphi}) = eE_{\varphi} + (e/c)(H_r\dot{z} - H_z\dot{r})r,$$

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{z}) = eE_z + e/c(H_{\varphi}\dot{r} - H_r r\dot{\varphi}).$$

$$10.25. \vec{P} = m\gamma \vec{v} + (e/c)\vec{A} = \vec{p} + (e/c)\vec{A},$$

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2} + e\varphi.$$

$$10.26. \mathcal{H} = c\sqrt{m^2 c^2 + P_r^2 + P_{\varphi}^2/r^2} - \alpha/r.$$

$$10.28. \vec{u} = (c^2/v)\vec{e}_v.$$

$$10.29. u = \{[1 - (v/c)^2]^{3/2} + 2(v/c)^2 - 1\}c^2/v.$$

$$10.30. x = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right),$$

$$\tau = \frac{c}{a} \text{Arsh}(at/c).$$

$$10.31. \dot{\vec{v}} = \frac{e}{m\gamma} \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{H}] - \frac{1}{c^2}\vec{v}(\vec{v}\vec{E}) \right\}.$$

$$10.32. \left(\nabla S - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi \right)^2 + m^2 c^4 = 0.$$

$$10.33. T = mc^2 \left(\sqrt{1 + (eEt/mc)^2} - 1 \right), \quad x = (mc^2/eE) \left(\sqrt{1 + (eEt/mc)^2} - 1 \right).$$

$$10.34. x = \frac{\mathcal{E}}{eE} \text{ch} \left(\frac{eEy}{cp_0} \right) - \text{цепная линия}.$$

$$10.35. T = mc^2 \left(\sqrt{1 + (eRH/mc^2)} - 1 \right).$$

$$10.36. x = a + R \cos(\omega t - \alpha), \quad y = b + R \sin(\omega t - \alpha), \quad z = z_0 + v_{oz}t, \\ \omega = ecH/\mathcal{E}, \quad R = v_{\perp} \mathcal{E}/(ecH).$$

$$10.37. T \ll mc^2.$$

$$10.38. x = \frac{c}{2eE} \left(\frac{\tau^2}{\alpha^2} - 1 \right) p_y + \frac{c^3}{6\alpha^2 eE} p_y^3,$$

$$y = \frac{c^2}{2\alpha eE} p_y^2,$$

$$z = \frac{c^2 p_z}{\alpha eE} p_y.$$

$$10.40. x = (cp_{\perp}/eB) \sin \varphi, \quad y = (cp_{\perp}/eB) \cos \varphi, \\ z = (T_0/eE) \text{ch}(E\varphi/H).$$

$$10.42. m \frac{dv}{dt} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) u \frac{dm}{dt} = 0, \quad u > 0, \quad \frac{dm}{dt} < 0.$$

$$10.43. m = m_0 [(1 - v/c)/(1 + v/c)]^{c/2u}.$$

$$10.44. x(t) = ct + (c^2/4\alpha) \ln \{ [1 + \exp(-2\alpha ut/c)] / 2 \}.$$

$$10.45. \tau = \frac{2q}{c\sqrt{q}} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + 2q \cos^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{1 + q \cos^2 \varphi}}, \quad q = \frac{ka^2}{4mc^2}.$$

$$10.46. \delta\tau = \frac{3}{16} \frac{ka^2}{mc^2} \tau_{\text{нерел}}.$$

$$10.47. \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\sqrt{1 - \rho^2} \varphi)}, \quad \rho = \alpha/(cL) < 1, \quad p = \frac{1 - \rho^2}{\rho^2 \mathcal{E}/\alpha},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho \sqrt{1 - (1 - \rho^2)m^2 c^4/\mathcal{E}^2}}.$$

Перигей орбиты за один период изменения r поворачивается на угол $2\pi(1/\sqrt{1 - \rho^2} - 1)$. В случае иррационального $\sqrt{1 - \rho^2}$ траектория не замкнута.

$$10.48. \quad 2\varphi_\infty = \frac{\arccos(-1/\varepsilon)}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

$$10.49. \quad r = \frac{p_1}{-1 + \varepsilon_1 \operatorname{ch}(\sqrt{\rho^2 - 1} \varphi)}, \quad p_1 = \frac{\alpha^2 - (cL)^2}{\alpha \mathcal{E}}, \quad \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right) \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)}.$$

Траектории имеют вид спиралей, закручивающихся вокруг силового центра (частица падает на центр). При $\mathcal{E} > mc^2$ траектория имеет две асимптотики при $\varphi_\infty = \pm \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \operatorname{arch} \frac{1}{\varepsilon_1}$.

$$10.50. \quad r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos(\sqrt{1 - \rho^2} \varphi)}, \quad p = \frac{\rho^2 - 1}{\mathcal{E}/|\alpha|}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - (1 - \rho^2)m^2 c^4/\mathcal{E}^2} > 1.$$

Обе ветви уходят на бесконечность при $\varphi = \pm \varphi_\infty$, $\varphi_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \arccos \frac{1}{\varepsilon}$.

$$10.51. \quad \theta = \pi - \frac{2cL}{\sqrt{c^2 L^2 - \alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sqrt{c^2 L^2 - \alpha^2}}{c|\alpha|}.$$

11. Абсолютно твердое тело

$$11.2. \vec{R} = (a/2)\vec{e}_z.$$

$$11.3. I = \frac{2}{3}mR^2$$

$$11.4. I_1 = I_2 = ml^2/12, \quad I_3 = 0.$$

$$11.5. I = (7/5)mR^2.$$

$$11.6. I = (1/2)m(R_1^2 + R_2^2).$$

$$11.7. I_1 = I_2 = (1/2)mR^2, \quad I_3 = mR^2.$$

$$11.8. I_1 = I_2 = ml^2 + (2/5)mR^2, \quad I_3 = (2/5)mR^2.$$

$$11.10. I = 2ma^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad I' = 4ma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$11.13. I'_{ij} = I_{ij} + m(a^2\delta_{ij} - a_i a_j).$$

$$11.14. I_x = mR^2/4 + mH^2/12, \quad I_z = mR^2/2.$$

$$11.16. I_x = m(b^2 + c^2)/5.$$

$$11.18. Z = (3/8)R, \quad I_1 = I_2 = (83/320)mR^2, \quad I_3 = (2/5)mR^2.$$

$$11.19. I_1 = ma^2/3, \quad I_2 = mb^2/3.$$

$$11.22. I_1 = (m/12)(a_2^2 + a_3^2)$$

$$11.23. I_1 = I_2 = \frac{3mh^2}{20} \left(\frac{1}{4} + \operatorname{tg}^2 \alpha \right), \quad I_3 = \frac{3mh^2}{10} \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$11.24. I_x = \frac{mR^2}{4} [1 - (a/R)^4],$$

$$I_y = \frac{mR^2}{4} [1 - (a/R)^2 - (a/R)^4]$$

$$I_z = \frac{mR^2}{2} [1 - \frac{1}{2}(a/R)^2 - (a/R)^4].$$

Ось OX проходит через центры диска и отверстия, перпендикулярная ей ось OY так же лежит в плоскости диска, ось OZ перпендикулярна плоскости диска, m_0 – начальная масса диска.

$$11.25. I_x = \frac{mR^2}{4} \left[1 - \left(\frac{a}{R} \right)^4 \right] + \frac{mH^2}{12} \left[1 - \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right],$$

$$I_y = \frac{mR^2}{4} \left[1 - \left(\frac{a}{R} \right)^4 - 4 \left(\frac{ar}{R^2} \right)^2 \right] + \frac{mH^2}{12} \left[1 - \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right],$$

$$I_z = \frac{mR^2}{2} \left[1 - \left(\frac{a}{R} \right)^4 - 2 \left(\frac{ar}{R^2} \right)^2 \right].$$

$$11.26. \quad I_x = \frac{127}{128} \frac{mR^2}{4} + \frac{7}{8} \frac{mH^2}{12},$$

$$I_y = \frac{111}{128} \frac{mR^2}{4} + \frac{7}{8} \frac{mH^2}{12},$$

$$I_z = \frac{119}{128} \frac{mR^2}{2}.$$

$$11.27. \quad I = \frac{196}{243} I_0.$$

$$11.29. \quad U = m\varphi(\vec{R}) - \frac{1}{2} I_{ij} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{R})}{\partial X_i \partial X_j}.$$

$$11.31. \quad L = \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \mu \frac{l^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgZ$$

$$11.32. \quad \vec{R} = \left[\frac{m_1 e_2 - m_2 e_1}{(m_1 + m_2) l} E \cos \varphi + \mu \dot{\varphi} \right] \vec{r}$$

$$11.33. \quad \vec{R}_{1,3} = -(2/3) e \vec{E} \pm (m/2) \dot{\varphi}_0 \vec{r}, \quad \vec{R}_2 = (4/3) e \vec{E}$$

$$11.34. \quad \Omega = \sqrt{\frac{3g}{2L \cos \alpha}}, \quad R_x = (3/4) mgtg\alpha, \quad R_z = mg.$$

$$11.35. \quad a = (2/3) g \sin \alpha, \quad T_b/T_n = 1/2.$$

$$11.36. \quad a = \frac{m + M}{m + 2M} g \sin \alpha.$$

$$11.37. \quad v = \sqrt{gh}.$$

$$11.39. \quad [I + m(R^2 + b^2 - 2Rb \cos \varphi)] \ddot{\varphi} + mRb \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + mgb \sin \varphi = 0.$$

Здесь I – момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр масс.

$$11.40. \quad \mathcal{L} = \frac{3}{4} m a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k a^2 \theta^2 + m g a \theta.$$

$$11.41. \quad \Omega = 2\sqrt{m_0 g / (mR + 6m_0 R)}.$$

$$11.42. \quad \Omega = 2\sqrt{5m_0 g (R + a) / [5mR^2 + 4m_0 a^2 + 30m_0 (R + a)^2]}.$$

$$11.43. \quad H = \frac{\Omega^2}{4g} \left(R^2 + a^2 + \frac{h^2}{2\pi^2} \right).$$

$$11.44. \quad \cos \theta = 10/17.$$

$$11.45. \quad \cos \theta = 6/11.$$

$$11.46. \quad \dot{\varphi} = 2\sqrt{g/a}.$$

$$11.47. \quad a = -\frac{5}{7}g \sin \alpha, \quad t = \frac{14v_0}{5g \sin \alpha}.$$

$$11.48. \quad X(t) = X_0 + V_0 t + \frac{eE}{2m}t^2, \quad I\ddot{\varphi} + eER \sin \varphi = 0.$$

$$11.49. \quad \omega = \sqrt{\frac{2gl}{2l^2 + R^2}}$$

$$11.51. \quad \omega = \sqrt{15g/(26R)}.$$

$$11.52. \quad \omega = \sqrt{120g/(83R)}.$$

$$11.53. \quad \omega = \sqrt{mga / [m(R-a)^2 + I]}, \quad R_x = m^2ga(R-a)\varphi / [m(r-a)^2 + I], \\ R_z = mg.$$

$$11.54. \quad T = \pi\sqrt{29R/g}.$$

$$11.55. \quad T = \frac{3mh^2}{40}\dot{\theta}^2(1 + 5\cos^2\alpha).$$

$$11.56. \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}.$$

$$11.57. \quad L^2/2I_3 \leq T \leq L^2/2I_1, \quad I_1 < I_3.$$

$$11.58. \quad \vec{\Omega}_{\text{np}} = -(e/2mc)\vec{B}.$$

$$11.64. \quad \Omega'_1 = (\sqrt{2}/2)a \sin bt, \quad \Omega'_2 = (\sqrt{3}/2)a \cos bt, \quad \Omega'_3 = a/2 + b; \\ \Omega_1 = (\sqrt{3}/2)b \cos at, \quad \Omega_2 = (\sqrt{3}/2)b \sin at, \quad \Omega_3 = a + b/2.$$

$$11.65. \quad T = \frac{1}{2}[(I_1 \cos^2 \psi + I_2 \sin^2 \psi)\dot{\theta}^2 + I_3(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2]$$

$$11.66. \quad \dot{\Omega}_2 = \frac{1}{I_3\sqrt{I_1I_3}}\sqrt{(2\mathcal{E}I_3 - L^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2}\sqrt{(L^2 - 2\mathcal{E}I_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2}$$

$$11.67. \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0, \quad \psi = (\omega_0 - \omega \cos \theta)t + \psi_0, \quad \omega = \omega_0(I_3 - I)/I, \quad I = I_1 = I_2.$$

$$11.68. \quad H = \frac{p_\theta^2}{2I'^2} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I' \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl \cos \theta, \quad I' = I_1 + ml^2.$$

$$11.69. \quad \dot{\theta} = p_\theta/I', \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I' \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = -\frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I' \sin^2 \theta} \cos \theta + \frac{p_\psi}{I_3}, \\ \dot{p}_\theta = -\frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)}{I' \sin^3 \theta} + mgl \sin \theta, \quad \dot{p}_\varphi = 0, \quad \dot{p}_\psi = 0.$$

$$11.70. \quad t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(2/I') [E - U_{\text{eff}}(\theta)]}}$$

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I' \sin^2 \theta} dt + \varphi_0,$$

$$\psi(t) = \frac{L_3}{I_3} t - \int_0^t \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I' \sin^2 \theta} \cos \theta dt + \psi_0.$$

$$11.71. \quad H = \frac{p_{\varphi}^2}{2(I - 2aR \cos \varphi)} - mga \cos \varphi,$$

$$p_{\varphi} = (1 - 2aR \cos \varphi) \dot{\varphi}.$$

$$11.72. \quad 3mgl \cos^2 \theta - (2E - L_3^2/I_3 + L_3^2/I') \cos \theta - mgl + L_z L_3/I_1 = 0.$$

$$11.73. \quad \omega_3 > 2\sqrt{I'mgl}/I_3.$$

$$11.75. \quad \omega \approx \sqrt{(I_3/I_1)\omega_0\Omega_0 \cos \Theta}.$$

12. Изотропное упругое тело

$$12.1. \quad a^{(1)}(a, 0, 0) \rightarrow (1 + \varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31})a, \quad a_i^{(1)}a_i^{(2)} = 0 \rightarrow 2\varepsilon_{12}, \quad a^{(3)} \rightarrow (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})a^{(3)}.$$

$$12.2. \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\varphi}_i = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$12.3. \quad \varepsilon'_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$12.4. \quad \delta \vec{a} = 0,003\vec{e}_3.$$

$$12.5. \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$2\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r},$$

$$2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.$$

$$12.6. \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r},$$

$$2\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi},$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta},$$

$$2\varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}.$$

$$12.7. \quad \text{Да.}$$

$$12.8. \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 3x_2^2 & 3x_1x_2 + x_3 & -x_2/2 \\ 3x_1x_2 + x_3 & 0 & x_1/2 \\ -x_2/2 & x_1/2 & 2x_3 \end{pmatrix}.$$

$$12.9. \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

$$12.10. \quad E = (2\mu + 3\lambda) \mu / (\mu + \lambda); \quad \nu = \lambda / [2(\mu + \lambda)]; \quad K = \lambda + (2/3) \mu.$$

$$12.11. \quad E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \quad \nu = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}.$$

$$12.12. \quad 4\vec{e}_1 - 10/3\vec{e}_2.$$

$$12.13. \quad \vec{t} = (14\vec{e}_1 + 18\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3)/3; \quad \vec{t}' = (-28\vec{e}_1 + 16\vec{e}_3)/9; \quad \sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{65} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{65} \end{pmatrix}$$

$$12.14. \quad 5/2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \sqrt{3}\vec{e}_3.$$

$$12.15. \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$12.16. \quad \sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$12.19. \quad -13x, \quad -2, \quad 0.$$

$$12.20. \quad \varepsilon_{ij} = -\frac{p}{E(1-2\nu)}\delta_{ij}, \quad \vec{u} = -\frac{p}{E(1-2\nu)}\vec{r}.$$

$$12.21. \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{\sigma\nu}{E}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\sigma}{E}.$$

$$12.22. \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda\sigma_{kk}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\delta_{ij}.$$

$$12.23. \quad K = (3\lambda + 2\mu)/3.$$

$$12.28. \quad \sigma_{rr,r} + \sigma_{r\varphi,\varphi}/r + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})r + f_r = 0, \\ \sigma_{\varphi\varphi,\varphi} + 2\sigma_{r\varphi}/r + 2\sigma_{r\varphi}/r + f_r = 0.$$

$$12.31. \quad U = [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\nu\sigma_{11}\sigma_{22} + 2(1+\nu)\sigma_{12}^2]/2E$$

$$12.32. \quad U = (\mu + \lambda/2)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \lambda\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2\mu\varepsilon_{12}^2.$$

$$12.33. \quad u_x = (\nu/E)\rho g(l-z)x, \quad u_y = (\nu/E)\rho g(l-z)y, \\ u_z = -(\rho g/2E)[l^2 - (l-z)^2 - \nu(x^2 + y^2)].$$

$$12.34. \quad u_r = \rho\Omega^2 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{8E(1-\nu)}r[(3-2\nu)R^2 - r^2].$$

$$12.35. \quad u_r = -\frac{g\rho R(1-2\nu)(1+\nu)}{10E(1-\nu)}r\left[\frac{3-\nu}{1+\nu} - \frac{r^2}{R^2}\right], \quad p = \frac{3-\nu}{10(1-\nu)}g\rho R.$$

$$12.36. \quad \sigma_{rr} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{zz} = 2\nu \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

$$12.37. \sigma_{11} = \frac{E}{1+\mu} \left[\varepsilon_{11} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right],$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_{12}.$$

$$12.38. C_1/C_0 = \pi b/3a.$$

$$12.39. \delta C/C = (b/a)^2.$$

$$12.40. \omega = \frac{a^2}{2} \sqrt{\frac{E}{mL^3}}.$$

$$12.41. U = \frac{m^2 a^2 l}{6ES}.$$

$$12.42. U = \frac{P^2 h}{6ES}.$$

$$12.43. C_{\text{кп}} = \mu \pi R^4/2.$$

$$12.44. C_{\text{кп}} = \pi \mu \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

$$12.45. C_{\text{кп}} = (R_2^4 - R_1^4)/4.$$

$$12.46. U = \frac{\mu \pi R^4}{4l} \alpha^2.$$

$$12.47. U = \frac{\mu \pi}{4l} (R_2^4 - R_1^4) \alpha^2.$$

$$12.48. \tau' = \tau \sqrt{(R^2 - a^2)/(R^2 + a^2)}.$$

$$12.49. \rho(\partial^2 u / \partial t^2) - k(\partial^2 u / \partial x^2) = 0.$$

$$12.50. \rho \frac{\partial^u}{\partial t^2} + k \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = 0.$$

$$12.51. c = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}.$$

$$12.52. \tau = 2\pi \sqrt{(I + \pi \rho a^4 L/6)/k}.$$

13. Кинематика жидкой среды

$$13.1. \vec{X}(t|\vec{\xi}) = \vec{\xi} + \vec{b}t^2/2.$$

$$13.2. \vec{X}(t|\vec{\xi}) = \vec{\xi}e^{ct}.$$

$$13.3. \vec{V}(t|\vec{\xi}) = \vec{\xi}cte^{ct^2/2}.$$

$$13.4. \vec{v}(\vec{x}, t) = [\vec{b}(t + ct^2/2) + c\vec{x}]/(1 + ct).$$

$$13.5. \vec{a}(\vec{x}, t) = (2x_2\vec{e}_2 + 6x_3\vec{e}_3)/(1 + t)^2, \\ \vec{A}(x|\vec{\xi}) = 2\xi_2\vec{e}_2 + 2(1 + t)\xi_3\vec{e}_3.$$

$$13.6. (x_1/\xi_1)^6 = (x_2/\xi_2)^3 = (x_3/\xi_3)^2.$$

$$13.7. \vec{a} = 3\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3.$$

$$13.10. \rho(x, t) = \rho_0(x - \int_0^t v(\tau)d\tau).$$

$$13.11. \rho(x) = C/v(x), \text{ где } C - \text{ постоянная.}$$

$$13.12. \rho(x, t) = \frac{A}{1 - [x - (v_0/\omega) \sin \omega t]^2}.$$

$$13.16. \vec{\Omega} = 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$$

$$13.18. a_x = B/x - B^2t^2/x^3.$$

$$13.19. a_\rho = \frac{\partial v_\rho}{\partial t} + v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\varphi}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{\rho}, \\ a_\varphi = \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_\rho \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} + \frac{v_\varphi}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_\rho v_\varphi}{\rho}, \\ a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{v_\varphi}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

$$13.20. a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r}, \\ a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta - v_\varphi^2 \text{ctg} \theta}{r}, \\ a_\varphi = \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \text{ctg} \theta}{r}.$$

$$13.21. \vec{v} = (A/r)\vec{e}_r, \quad \vec{a} = -(A^2/r^3)\vec{e}_r.$$

$$13.22. \vec{a}_r = (A/r - A^2t^2/r^3)\vec{e}_r.$$

$$13.26. \rho(\vec{r}, t) = f\left(\vec{r} - \int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau\right).$$

$$13.27. \rho(\vec{r}, t) = \rho(t) = \rho_0 \exp \left[-3 \int_0^t H(\tau) d\tau \right].$$

$$13.28. t = \frac{1}{3} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{d\rho'}{\rho' H(\rho')}.$$

$$13.30. H(t) = H_0/(1 + H_0 t), \rho(t) = \rho_0/(1 + H_0 t)^3.$$

$$13.33. \oint \vec{v} d\vec{l} = -4.$$

$$13.37. w_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3A/2 \\ 0 & 0 & -3A \\ -3A/2 & 3A & 0 \end{pmatrix}.$$

$$13.39. \phi = \vec{v} \vec{r} + \text{const.}$$

$$13.40. \text{ а) } \vec{v} = a\vec{e}_x, \quad \text{ б) } \vec{v} = (b/r)\vec{e}_r, \quad \text{ в) } \vec{v} = \frac{c\vec{e}_\varphi}{r \sin \theta}.$$

$$13.42. \text{ Лучи, выходящие из начала координат.}$$

$$13.43. \Gamma_C = 0, \quad N_C = 2\pi a.$$

$$13.44. v_{|z|=a} = 2v_\infty |\sin \alpha|.$$

$$13.45. z_{1,2} = \pm R.$$

$$13.46. z_{1,2} = i\Gamma/(4\pi v_\infty) \pm \sqrt{R^2 - (\Gamma/4\pi v_\infty)^2}.$$

$$13.47. z = c/x^2 = c/y^2.$$

$$13.48. A = a^3 v_\infty / 2, \quad B = v_\infty.$$

$$13.49. v = (3/2)v_\infty \sin \theta.$$

14. Идеальные жидкости и газы

14.1. $p(r) = (2/3) \pi \gamma \rho^2 (R^2 - r^2).$

14.2. $z = \left[\frac{kp_0}{(k-1)\rho_0 g} \right] (N^{1-1/k} - 1).$

14.3. $dz/dx = -a_2/(a_3 + g).$

14.4. $z = z_0 + \Omega^2 r^2/(2g).$

14.5. $\Omega = 2\sqrt{Vg/\pi}/R^2.$

14.6. $r = \frac{R}{\sqrt{1 - (\Omega^2/k) \sin^2 \theta}}.$

14.7. $\varepsilon \equiv (R_{\text{Э}} - R_{\text{П}})/R_0 = \Omega^2 R_0/(2g) \approx \frac{1}{580}.$

14.8. $v = \sqrt{2gh}$, где h – разность между уровнем поверхности жидкости в сосуде и уровнем измерения скорости в струе.

14.9. $\mathcal{P} = [\gamma/(\gamma-1)]p/\rho = c_p T$. Давление, плотность и температура с ростом скорости жидкости вдоль линии тока падают.

14.13. $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{\omega}, \vec{v}] = 0.$

14.15. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + [v(\rho) \pm c(\rho)] \frac{\partial \rho}{\partial x}.$

14.16. $\frac{\partial v}{\partial t} + [v \pm c(v)] \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$

14.17. $\dot{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$

14.18. $\vec{F} = -\frac{1}{2}m'\vec{a}$, где m' – масса жидкости, вытесненная шаром.

14.19. $p_2 = p_1 + (\rho v_1^2/2) [1 - S_1^2/S_2^2].$

14.21. $\nabla p = -3(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)\rho.$

14.22. $\nabla p = \rho \Omega^2 \vec{r}.$

14.24. $F = -(\rho/2) \int_C f'^2(z) dz$ – формула Чаплыгина.

14.25. $|F| = \rho |v_\infty| \Gamma$ – теорема Жуковского о подъемной силе.

14.26. $p(t) = p_0 + (5/2)\rho \alpha^2 R_0^2 e^{-2\alpha t}.$

14.27. $p = \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right).$

$$14.28. \quad \vec{F} = -(2/3)\pi a^3 \rho \dot{\vec{v}}, \quad \mu = (2/3)\pi a^3 \rho, \quad \rho - \text{плотность жидкости.}$$

$$14.29. \quad v_r = v_\infty (1 - a^2/r^2) \cos \theta, \quad v_\theta = -v_\infty (1 + a^2/r^2) \sin \theta + b/r, \\ F_x = 0, \quad F_y = -2\pi \rho b v_\infty \text{ (подъёмная сила Жуковского).}$$

$$14.30. \quad R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 - \frac{1}{\rho}[\rho(R) - \rho(\infty)].$$

$$14.31. \quad p(R) = \left(p(\infty) + \frac{2\sigma}{R_0}\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R}.$$

$$14.33. \quad \omega_0 = \frac{1}{R_0} \left[\frac{3\gamma}{\rho} \left(p_0 + \frac{3\gamma - 1}{3\gamma} \frac{2\sigma}{R_0} \right) \right]^{1/2}.$$

$$14.34. \quad \vec{F} = \rho \int \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} dV - \rho \int [\vec{v}, \operatorname{rot} \vec{v}] dV, \text{ где интегрирование распространяется по всей области, занятой жидкостью.}$$

$$14.36. \quad \vec{P} = m\vec{v}_0.$$

$$14.37. \quad \mathcal{E} = (1/2)(m + M/2)v_0^2, \text{ где } M - \text{“присоединенная” масс, равная массе жидкости в объеме шара.}$$

$$14.38. \quad (c^2 - \phi_x^2)\phi_{xx} + (c^2 - \phi_y^2)\phi_{yy} + (c^2 - \phi_z^2)\phi_{zz} = 2(\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_x\phi_z\phi_{zx} + \phi_y\phi_z\phi_{yz}), \\ \phi_x \equiv \partial\phi/\partial x, \quad \phi_{xy} \equiv \partial^2\phi/\partial x\partial y \text{ и т.д.}$$

$$14.39. \quad \left[1 - (v_1/c_2)^2\right] \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} = 0.$$

$$14.40. \quad p = p_0 - \rho_0 v_0 v_x - (\rho_0/2)(v_y^2 + v_z^2).$$

$$14.42. \quad (u - c) \frac{dU}{d\xi} + \beta \frac{d^3U}{d\xi^3} = 0.$$

$$14.47. \quad \frac{\partial S}{\partial t} = - \left\{ \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\nabla S - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2} + e\varphi \right\}.$$

15. Вязкие жидкости и газы

15.1. $v_x(y) = uy/h$.

15.2. $v_x(y) = \frac{1}{2\eta} \left| \frac{dp}{dx} \right| \left[\left(y - \frac{l}{2} \right)^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right]$.

15.4. $v = [\rho g \sin \alpha / 2\eta] z(2h - z)$,

$$p = p_0 + \rho g \cos \alpha \cdot (h - z),$$

$$Q = \frac{\rho g h^3 \sin \alpha}{3\nu}.$$

15.5. $p = p_0 + \frac{3\eta u}{h^3} (R^2 - r^2)$.

15.6. $\varepsilon \propto \sqrt{\eta}$.

15.7. $Q = \frac{\pi}{8\nu} \left| \frac{dp}{dx} \right| R^4$.

15.8. $Q = \frac{\pi}{8\nu} \left| \frac{dp}{dx} \right| \left[R_2^4 - R_1^4 - (R_2^2 - R_1^2)^2 / \ln(R_2/R_1) \right]$.

15.9. $Q = \frac{\pi}{4\nu} \left| \frac{dp}{dx} \right| \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$.

15.10. $v(r) = \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)} u$.

15.11. $\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) - \frac{v}{r^2} = 0$.

15.12. $\vec{v} = (\Omega R^2 / r) \vec{e}_\varphi$.

15.13. $\vec{v} = \frac{\Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \vec{e}_\varphi$.

15.14. $\vec{v} = [\vec{\Omega} \vec{r}] R^3 / r^3, \quad r > R$.

15.15. $M_z = -8\pi\eta R^3 \Omega$.

15.16. $\vec{F} = 6\pi\eta R \vec{v}_\infty$ (формула Стокса).

15.17. $\vec{F} = 6\pi\eta R < \vec{v} >_{r=a}$.

15.18. $v_y(x, t) = v_0 \exp(-\sqrt{\omega\rho/2\eta}x) \cos(\sqrt{\omega\rho/2\eta}x - \omega t), \quad \delta = \sqrt{2\eta/\omega\rho}$.

15.19. $F = \rho v^2 R^2 f(\rho v R / \eta, v/c)$, явный вид функции f не может быть определён методом размерностей.

15.20. $v(t) = [2a^2(\rho - \rho_0)/9\eta] \{ (n-1) - n \exp(-(9/2)(\eta/\rho a^2)t) \}$.

$$15.21. T_0 = \left[1 + \frac{\mathfrak{a}_0 - \mathfrak{a}_1}{2\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \vec{B}\vec{r},$$

$$T_1 = \frac{3\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}_1 + 2\mathfrak{a}_0} \vec{B}\vec{r}.$$

$$15.22. T = T_0 + \langle v \rangle^2 (\nu/\chi c_p)[1 - (r/R)^4].$$

$$15.23. \frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = -\frac{\eta}{2} \int (v_{i,k} + v_{k,i})^2 dV.$$

$$15.24. \frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = -\eta \int_S \nabla v^2 d\vec{S}.$$

$$15.25. F = 12\pi\eta Ru.$$

$$15.26. p(z) = \sqrt{p_0^2 + \frac{16\eta QT}{\pi m R^4}} z.$$

$$15.27. u(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \exp(-x^2/4\nu t).$$

$$15.28. W(t) = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x_0}{2\sqrt{Dt}} \right).$$

$$15.29. \rho(x, t) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + 4\beta Dt}} \exp \left[-\frac{\beta x^2}{1 + 4\beta Dt} \right].$$

$$15.31. \rho(x) = \rho_0 \exp(-U(x)/\theta), \quad \theta = 1/2\gamma.$$

$$15.33. v_z = \frac{\text{const}}{4\pi Dz} \exp \left\{ -(x^2 + y^2)/4Dz \right\}.$$

$$15.34. q_z(r, t) = \Gamma/(8\pi\nu t) \exp(-r^2/4\nu t), \quad \nu - \text{коэффициент диффузии, } \Gamma - \text{постоянная.}$$

$$15.35. v_\varphi(r, t) = (\Gamma/2\pi r) [1 - \exp(-r^2/4\nu t)].$$

16. Механические модели вязкоупругости

16.2. Последовательное соединение простых элементов Кельвина.

16.4. Параллельное соединение простых элементов Максвелла.

16.5. $(\eta_1/E_2)\dot{\sigma} + (1 + E_1/E_2)\sigma = \eta_1\dot{\varepsilon} + E_1\varepsilon.$

16.6. $(1 + \eta_1/\eta_2)\dot{\sigma} + (E_1/\eta_2)\sigma = \eta_1\ddot{\varepsilon} + E_1\dot{\varepsilon}.$

16.7. $\ddot{\sigma} + \left(\frac{E_1 + E_2}{\eta_1} + \frac{E_2}{\eta_2}\right)\dot{\sigma} + \left(\frac{E_1E_2}{\eta_1\eta_2}\right)\sigma = E_2\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{E_1E_2}{\eta_1}\right)\dot{\varepsilon}.$

16.8. $\dot{\sigma} + \left(\frac{E_2}{\eta_2}\right)\sigma = \eta_1\ddot{\varepsilon} + \left[E_1 + \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right)E_2\right]\dot{\varepsilon} + \frac{E_1E_2}{\eta_2}\varepsilon.$

16.9. $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} [1 - e^{-t/\tau}], \quad t > 0.$

16.10. $\sigma(t) = E\varepsilon_0 e^{-t/\tau}, \quad t > 0.$

16.11. $\psi(t) = \sum_{i=1}^N E_i^{-1} (1 - e^{-t/\tau_i}), \quad t > 0.$

16.12. $\varphi(t) = \sum_{i=1}^N E_i e^{-t/\tau_i}, \quad t > 0.$

16.13. $\varepsilon(t) = \sigma_0\psi(t) - \frac{\sigma_0}{\theta} \int_0^t \psi(t-t')e^{-t'/\theta} dt'.$

16.14. $\psi(t) = [E_2^{-1} + E_1^{-1} (1 - e^{-t/\tau_1})].$

16.15. $\varepsilon(t) = \sigma_0(e^2 - 1)e^{-t/\tau_1}/E_1.$

16.16. $\sigma = \varepsilon_0(2\eta + Et - \eta e^{-t/\tau})/t_1, \quad 0 < t < t_1.$

17. Плазма

$$17.2. \quad v_x A \sin \omega t - \frac{1}{m\omega_H} \int_{-\infty}^t \dot{F}(\tau) \cos[\omega_H(t - \tau)] d\tau,$$

$$v_x A \cos \omega t - \frac{1}{m\omega_H} \int_{-\infty}^t \dot{F}(\tau) \sin[\omega_H(t - \tau)] d\tau,$$

$$v_z = \text{const}, \quad \omega_H = eH/mc - \text{циклотронная (ларморова) частота.}$$

$$17.3. \quad x(t) = (v_{\perp 0}/\omega_H)(1 - \cos \omega_H t) - (F(0)/m\omega_H^2) \sin \omega_H t + (1/m\omega_H) \int_0^t F(t') dt',$$

$$y(t) = (v_{\perp 0}/\omega_H) \sin \omega_H t - (F(0)/m\omega_H^2) \cos \omega_H t + F(t)/m\omega_H,$$

$$z(t) = v_{\parallel 0} t.$$

$$17.6. \quad \delta\mu/\mu = \xi^2/v_{\perp 0}^2 = (1/4)[F/(m\omega_H v_{\perp 0})]^2 \exp(-2\omega_H^2 \alpha^2). \text{ Изменение адиабатического инварианта в данном случае оказывается экспоненциально малым.}$$

$$17.7. \quad \text{Предположить, что } \mu - \text{постоянно, а ток смещения } \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости } \vec{j}_e.$$

$$17.8. \quad \frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{4\pi\mu\rho} \frac{\partial^2 b_y}{dz^2} + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \frac{\partial^3 b_y}{\partial z^2 \partial t}.$$

$$17.9. \quad V = B_0/\sqrt{4\pi\mu\rho} - \text{гидромагнитная (альвеновская) скорость, } \omega = V|k|.$$

$$17.10. \quad p = p_0 - \frac{1}{8\pi\mu} A^2 \sin^2(\omega t - kz).$$

$$17.11. \quad \partial y/\partial t = v_y: \text{ силовые линии "вморожены" в движущуюся плазму.}$$

$$17.13. \quad |k| = \frac{\omega}{V} \left(1 + \frac{i\omega c^2}{4\pi\mu\sigma V^2} \right)^{-1/2}, \quad z_0 = \frac{2\mu\sigma V}{\pi c^2} \lambda^2, \quad \lambda = \frac{2\pi V}{\omega} - \text{длина волны.}$$

$$17.14. \quad D_m = c^2/(4\pi\mu\sigma).$$

$$17.16. \quad v^* l^*/\nu \gg 1.$$

$$17.17. \quad \vec{B}(\nabla g) = 0.$$

$$17.18. \quad B_z = AJ_0(gr), \quad B_\varphi = AJ_1(gr), \text{ где } J_0 \text{ и } J_1 - \text{функции Бесселя нулевого и первого порядков.}$$

$$17.19. \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{u} f_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \vec{u}} \left(\frac{\vec{F}_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha \right) = 0.$$

$$17.20. \quad \vec{u} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{u}} = 0,$$

$$\Delta \varphi = -4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{u}) d\vec{u} - 4\pi e \delta(\vec{r}).$$

$$17.22. f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{u}) = \frac{n_{\alpha}}{(2\pi k_B T_{\alpha})^{3/2}} \exp \left\{ \frac{1}{k_B T_{\alpha}} \left[\frac{m_{\alpha} u^2}{2} - e_{\alpha} \varphi(\vec{r}) \right] \right\}.$$

$$17.23. \Delta \varphi - r_D^{-2} \varphi = -4\pi e \delta(\vec{r}), \text{ где } r_D = \left(\sum_{\alpha} r_{D\alpha}^{-2} \right)^{-1/2} \equiv \left(\sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{k_B T_{\alpha}} \right)^{-1/2},$$

n_{α} — концентрация частиц типа α , а $r_{D\alpha}$ — дебаевский радиус (радиус экранирования).

$$17.24. \varphi(\vec{r}) = (e/r) \exp \{-r/r_D\}.$$

$$17.25. u_x \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} + \Omega_{\alpha}(x) \left(u_y \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_x} - u_x \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_y} \right) = 0, \text{ где } \Omega_{\alpha}(x) = e_{\alpha} B / m_{\alpha} c - \text{частота гироскопического вращения частицы сорта } \alpha \text{ в магнитном поле.}$$

$$17.26. f = \Phi(x + u_y/\Omega, u_x^2 + (u_y + g/\Omega)^2, u_z), \text{ где } \Phi - \text{произвольная функция трех аргументов, определяемая граничными условиями.}$$

$$17.30. \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \theta(x_i, t) + \frac{2}{3} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \frac{2}{3} \Lambda_{ij} \sigma_{ij},$$

$$\Lambda_{ij} \equiv \frac{m}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right).$$

Приложение

Дифференциальные операции в декартовых, цилиндрических и сферических координатах

Градиент скалярной функции:

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \\ &+ \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Дивергенция векторной функции:

$$\begin{aligned}\nabla\vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\end{aligned}$$

Ротор векторной функции:

$$\begin{aligned}[\nabla, \vec{A}] &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z = \\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z = \\ &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Лапласиан скалярной функции:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}.\end{aligned}$$

Лапласиан векторной функции:

$$\begin{aligned}
\Delta \vec{A} &= \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A} = \\
&= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \vec{e}_y + \\
&+ \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z = \\
&= \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\rho + \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi + \Delta A_z \vec{e}_z = \\
&= \left(\Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \\
&+ \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\theta + \\
&+ \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

Оператор конвективной производной:

$$\begin{aligned}
(\vec{v} \nabla) \vec{v} &= v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \\
&= \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) \vec{e}_r + \\
&+ \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) \vec{e}_\varphi + \\
&+ \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \vec{e}_z = \\
&= \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) \vec{e}_r + \\
&+ \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi - v_\varphi^2 \text{ctg} \theta}{r} \right) \vec{e}_\theta + \\
&+ \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \text{ctg} \theta}{r} \right) \vec{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М. Наука, 1973.
- [2] Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. 3-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [3] Петкевич В.В. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1981.
- [4] Коткин Г.Л., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике. – М.: Наука, 1977.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1965.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988.
- [7] Ольховский И.И., Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. – М.: Изд-во МГУ, 1977.
- [8] Голдстейн Г. Классическая механика. – М.: Наука, 1973.
- [9] Тер Хаар Д. Основы гамильтоновой механики. – М.: Наука, 1974.
- [10] Компанеец А.С. Курс теоретической физики. Том. 1. – М.: Просвещение, 1972; Том 2, 1975.
- [11] Савельев И.В. Основы теоретической физики. Том. 1 – М.: Наука, 1975.
- [12] Ильюшин А.Л. Механика сплошной среды. – М.: МГУ, 1978.
- [13] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том. I и II, – М. Наука, 1976.
- [14] Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М., Наука, 1990.
- [15] Иос Г. Курс теоретической физики. Часть I. – М.: Издательство министерства просвещения РСФСР, 1963.
- [16] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974.
- [17] Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. Механика. – М.: Наука, 1971.
- [18] Л.А. Арцимович, С.Ю. Лукьянов. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. – М.: Наука, 1978.
- [19] Я.П. Терлецкий. Теоретическая механика. – М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1987.
- [20] Ф. Крауфорд. Волны. – М.: Наука, 1984.
- [21] Ф.Франк и Р.Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. – М.-Л., ОНТИ, 1937.

- [22] Ю.И.Бельченко, В.Г.Дудников, Г.В.Меледин, Б.В.Чириков. Задачи по механике частиц и тел. учебное пособие. – Новосибирск, НГУ, 1978.
- [23] Д.В. Сивухин. Общий курс физики, Т.3, Электричество – М. Наука, 1977.
- [24] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М. Наука, 1973.
- [25] А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. токольски. Сборник задач по теории относительности и гравитации. – М. Мир, 1979.
- [26] В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. – М. Наука, 1970.
- [27] П. Апфель. теоретическая механика. Т. 1-2. – М. ГИФМЛ, 1960.
- [28] П.С. Ланда. Нелинейные колебания и волны. М., Наука, Физматлит, 1997.
- [29] Р.С. Шехтер. Вариационный метод в инженерных расчётах. М., Мир, 1971.
- [30] Л.А. Арцимович, Р.З. Сагдеев. Физика плазмы для физиков. М., Атомиздат, 1979.
- [31] Л. Парс, Аналитическая динамика. М., Наука, 1971.
- [32] Г. Альвен, К.-Г. Фельтхаммар. Космическая электродинамика. М., Мир, 1967.
- [33] Б.М. Смирнов. Физика слабоионизированного газа. М., Наука, 1978.
- [34] К. Хуанг. Статистическая механика. М., Мир, 1966.
- [35] В.П. Силин. Введение в кинетическую теорию газов. М., Наука, 1971.
- [36] А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры. т.1. М., ГИТТЛ, 1956.
- [37] Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1973.
- [38] П.М. Огибалов, А.Х. Мирзаджанзаде. Нестационарные движения вязкопластичных сред. М., Изд-во МГУ, 1970.
- [39] Ю.Н. Работнов. Ползучесть элементов конструкции. М., Наука, 1966.